



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ОПТИКА. СЕМИНАРЫ

МИТИН
ИГОРЬ ВЛАДИМИРОВИЧ

—
ФИЗФАК МГУ

—
КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

Содержание

2	Семинар 2. Геометрическая оптика	8
2.1	Самостоятельная работа (софокусные линзы)	8
2.2	Софокусные линзы (сходящийся пучок)	8
2.3	Черный ящик	10
2.4	Билинза	10
2.5	Бизеркало	11
2.6	Бипризма	12
2.7	Толстая линза	13
2.8	Оптические приборы	16
3	Семинар 3. Электромагнитные волны	17
3.1	Самостоятельная работа (линза-полушар)	17
3.2	Уравнение Максвелла	18
3.3	Волновое уравнение	19
3.4	Плоские волны	21
3.5	Энергетические характеристики. Интенсивность	22
3.6	Стоячие волны	23
4	Семинар 4. Сферические волны. Давление света	24
4.1	Самостоятельная работа (бегущие волны)	24
4.2	Геометрическая оптика (разбор задачи)	24
4.3	Сферические волны. Амплитуда точечного источника	26
4.4	Давление света. Давление на плоскую площадку	27
4.5	Давление на шар	30
5	Семинар 5. Поляризация света	32
5.1	Самостоятельная работа (давление на зеркальный уголок)	32
5.2	Естественный и линейно поляризованный свет	32
5.3	Эллиптическая поляризация	34
5.4	Пластинки $\frac{\lambda}{2}$ и $\frac{\lambda}{4}$. Циркулярная поляризация	36
5.5	Изменение интенсивности света при повороте поляризатора	38
6	Семинар 6. Спектральные разложения. Преобразование Фурье	39
6.1	Самостоятельная работа (поляризация)	39

6.2	Преобразование Фурье. Спектральная плотность мощности	40
6.3	Спектр прямоугольного импульса	40
6.4	Спектр косинусоидального цуга	41
6.5	Спектр прямоугольного импульса, смещенного во времени	42
6.6	Спектр двойного прямоугольного импульса	42
6.7	Гауссовский и лоренцевский спектр	43
7	Семинар 7. Интерференция монохроматического света. Метод деления волнового фронта	45
7.1	Интерференция монохроматического света. Основные понятия	45
7.2	Метод деления волнового фронта. Схема Юнга	47
7.3	Интерференционная схема на основе зеркала	49
7.4	Билинза Бийе	50
7.5	Бипризма Френеля	51
8	Семинар 8. Интерференция квазимонохроматического света	54
8.1	Самостоятельная работа (порядки интерференции)	54
8.2	Источник в фокусе билинзы	55
8.3	Изменение ширины полос при сдвиге бипризмы	55
8.4	Интерференция квазимонохроматического света	56
8.5	Квазимонохроматический источник с прямоугольным спектром	59
9	Семинар 9. Интерференция от протяженного источника	62
9.1	Самостоятельная работа (билинза и квазимонохроматический источник)	62
9.2	Пространственная и временная когерентность	63
9.3	Протяженный монохроматический источник	64
9.4	Протяженный квазимонохроматический источник. Радиус когерентности	66
10	Семинар 10. Метод деления амплитуды. Интерференция в тонких пленках	68
10.1	Самостоятельная работа (протяженный источник)	68
10.2	Бипризма и протяженный источник	69
10.3	Метод деления амплитуды. Плоскопараллельная пластина	70
10.4	Получение интерференции в тонких пленках. Полосы равного наклона	73

11 Семинар 11. Полосы равной толщины. Многолучевая интерференция	76
11.1 Самостоятельная работа (тонкая пленка)	76
11.2 Клинообразная пластинка	77
11.3 Интерференция на клине в случае протяженного источника. Полосы равной толщины	78
11.4 Многолучевая интерференция. Интерферометр Фабри – Перо	80
12 Семинар 12. Дифракция Френеля. Часть 1	82
12.1 Разбор контрольной работы	82
12.2 Принцип Гюйгенса-Френеля. Дифракционный интеграл	82
12.3 Векторная диаграмма. Зоны Френеля	83
12.4 Задачи по дифракции Френеля	87
13 Семинар 13. Дифракция Френеля. Часть 2	90
13.1 Самостоятельная работа (дифракция на кольце)	90
13.2 Распределение интенсивности за отверстием при особом условии	91
13.3 Дифракция на непрозрачных объектах	92
13.4 Дифракция на круглом отверстии со стеклянным диском	93
13.5 Дифракция на отверстие с тонкой линзой	94
13.6 Зонные пластинки	96
14 Семинар 14. Дифракция Фраунгофера	97
14.1 Самостоятельная работа (дифракция плоской волны на щели с пластинкой)	97
14.2 Приближение Фраунгофера. Интенсивность в центре дифракционной картины	98
14.3 Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии. Угловая ширина центрального максимума	100
14.4 Ближняя и дальняя зоны дифракции. Дифракционная расходимость пучка	101
14.5 Дифракция Фраунгофера на N щелях	101
15 Семинар 15. Спектральные приборы. Часть 1	105
15.1 Самостоятельная работа (дифракция на щелях)	105

15.2 Дифракция Фраунгофера (повторение)	105
15.3 Спектральные приборы	108
16 Семинар 16. Спектральные приборы. Часть 2	113
16.1 Самостоятельная работа (дифракционная решетка)	113
16.2 Выбор дифракционной решетки с наибольшей разрешающей способностью	114
16.3 Отражательная дифракционная решетка	115
16.4 Интерферометр Фабри-Перо как спектральный прибор	116
17 Семинар 17. Оптика анизотропных сред. Интерференция поляризованных лучей	120
17.1 Анизотропные материалы	120
17.2 Интерференция поляризованных лучей	121
17.3 Пластинки $\lambda/2$ и $\lambda/4$	124
17.4 Кристалл между скрещенными николями	125
17.5 Структура световой волны в анизотропном кристалле	126
18 Семинар 18. Фазовая и лучевая скорость. Эллипсоид лучевых скоростей	128
18.1 Самостоятельная работа (анизотропный клин)	128
18.2 Фазовая и лучевая скорость	129
18.3 Уравнения Френеля. Эллипсоид показателей преломления. Эллипсоид лучевых скоростей	129
18.4 Лучевая поверхность одноосного кристалла	132
19 Семинар 19. Лучевая поверхность одноосного кристалла. Построения Гюйгенса	135
19.1 Самостоятельная работа (изменение поляризации при повороте пластинки)	135
19.2 Лучевая поверхность одноосного кристалла (продолжение)	136
19.3 Состояния поляризации обыкновенной и необыкновенной волн	140
19.4 Построения Гюйгенса для одноосных кристаллов	141
20 Семинар 20. Двойное лучепреломление. Оптические явления на границе раздела сред	143

20.1 Построения Гюйгенса для одноосных кристаллов (продолжение)	143
20.2 Призма Волластона	145
20.3 Энергетика отражения и преломления света на границе раздела двух сред	147
21 Семинар 21. Формулы Френеля. Поляризация отраженных и пре- ломленных волн	150
21.1 Самостоятельная работа (двойное лучепреломление)	150
21.2 Формулы Френеля	150
21.3 Зависимости коэффициентов r и t от угла падения. Угол Брюстера . . .	152
21.4 Полное внутренне отражение. Поверхностные волны	154
21.5 Поляризация волны, отраженной от границы с менее плотной средой . .	155
21.6 Дисперсия света	156
22 Семинар 22. Дисперсия и поглощение света в линейной изотропной среде	157
22.1 Самостоятельная работа (падение света на клин)	157
22.2 Разбор предыдущей самостоятельной	158
22.3 Дисперсия света. Электронная теория Лоренца	159
22.4 Нормальная и аномальная дисперсия. Групповая скорость	160
22.5 Связь между фазовой и групповой скоростью. Формула Рэлея	162
22.6 Плазменная частота. Отражение от ионосферы	163

Семинар 2. Геометрическая оптика

Самостоятельная работа (софокусные линзы)

Пусть есть две разные линзы. Фокус первой линзы находится в центре второй линзы, а фокус второй линзы находится в центре первой. На эту систему падает луч, который также выходит из системы. Задан угол падения α , а угол β , под который выйдет, не известен. Необходимо найти связь между α и β или найти $\beta(\alpha)$.

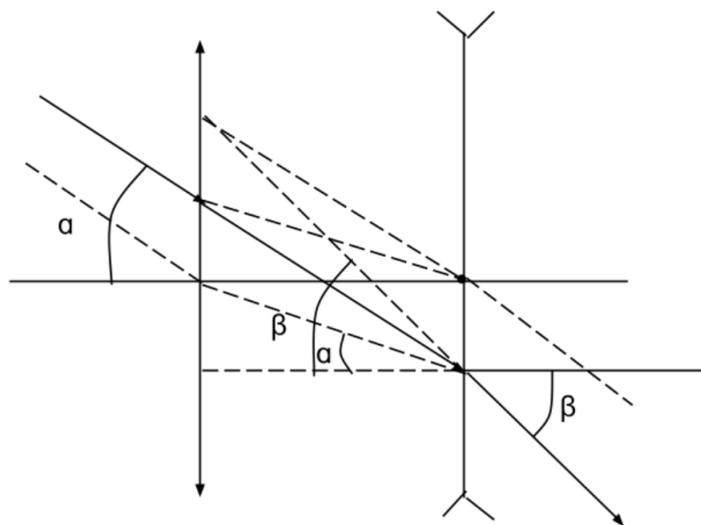


Рис. 2.1. Софокусные линзы

Необходимо действовать по определению через центр.

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(3\alpha)$$

Софокусные линзы (сходящийся пучок)

Предполагается, что падает не один луч, а сходящийся пучок света. Задано фокусное расстояние F . Требуется решить эту задачу аналитически (найти точки выхода пучка света). Используется следующая формула:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$$

Полупространство, откуда падает свет, называется полупространством источников. Второе полупространство называется полупространством изображений. a — расстояние от линзы до источника. Если источник находится в своем пространстве, то a

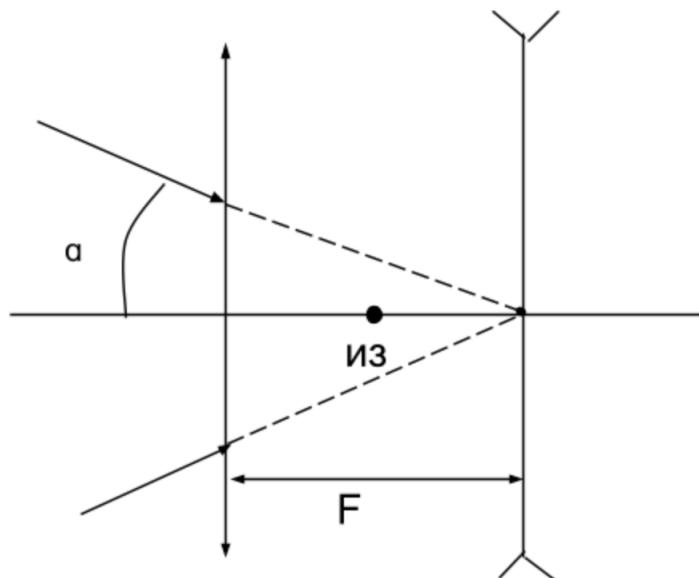


Рис. 2.2. Софокусные линзы (сходящийся пучок)

— положительный. Если изображение b находится в своем полупространстве, то b — положительный. Если в чужом полупространстве, то b — отрицательный. Если линза собирающая, то F — положительный. Если линза рассеивающая, то F — отрицательный. В этом случае источник находится на расстоянии F от линзы в чужом полупространстве. Таким образом:

$$\frac{1}{-F} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$$

$$b = \frac{F}{2}$$

b — положительный, следовательно, изображение находится в своем полупространстве на расстоянии $\frac{F}{2}$ от линзы. Для второй линзы это изображение становится источником на расстоянии $\frac{F}{2}$ от линзы.

$$\frac{1}{\frac{F}{2}} + \frac{1}{b} = \frac{1}{-F}$$

$$b = -\frac{F}{3}$$

b — отрицательный, следовательно, изображение находится в чужом полупространстве.

Черный ящик

Пусть есть черный прозрачный ящик, на которого падает луч. В черном ящике одна линза, все углы малые. Необходимо найти главную ось. Точка пересечения лежит на линзе. Далее необходимо нарисовать линзу, которая может быть и собирающей, и рассеивающей. Пусть линза собирающая, то необходимо найти главную оптическую ось (ГОО). Можно провести параллельную и найти фокусное расстояние. Луч и параллель пересекутся в фокальной плоскости.

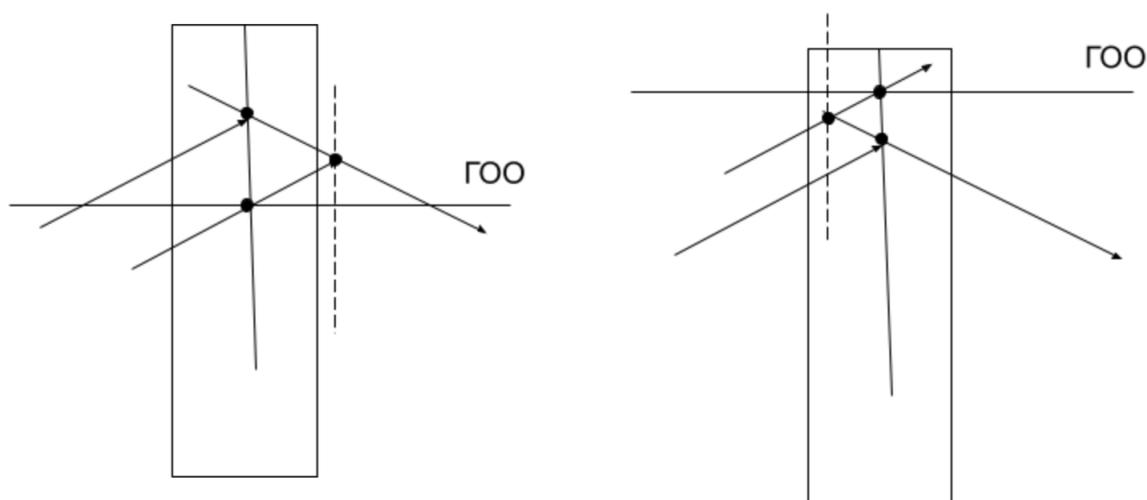


Рис. 2.3. Черный ящик

Пусть линза рассеивающая. Тогда необходимо нарисовать новую главную оптическую ось и через центр проводится луч. Необходимо найти точку (фокальную плоскость) пересечения выходящего луча и проведенного луча через центр.

Билинза

Пусть есть собирающая линза, у которой удалили кусок толщины h . Фокусное расстояние линзы — F . Две половины линзы были соединены. Таким образом, получается билинза. Пусть перед билинзой есть источник света на расстоянии $3F$. С другой стороны билинзы находится экран. Требуется найти изображения и расстояние между ними.

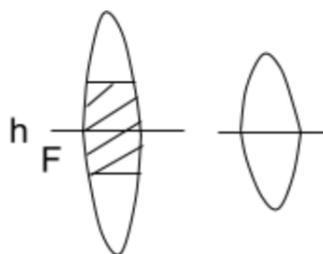


Рис. 2.4. Образование билинзы

Изображение можно найти следующим образом:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$$
$$b = \frac{3}{2}F$$

Если от линзы отрезать какой-нибудь кусочек, то построение не изменится. Если дополнить часть верхней половины до целой, то центр сдвинется вниз на $\frac{h}{2}$. Следовательно, можно нарисовать линию от источника до b и найти первое изображение. Аналогично можно найти второе изображение. Расстояние от билинзы до изображений $\frac{3}{2}F$.

$$\frac{d}{h} = \frac{\frac{9}{2}F}{\frac{6}{2}F} = \frac{3}{2}$$
$$d = \frac{3}{2}h$$

Если нарисовать крайние лучи от источника к верхней и нижней части билинзы, и провести их через первое и второе изображения, можно получить два пятна на экране.

Бизеркало

Пусть есть бизеркало и источник света. Задается расстояние до центра — ρ . Если есть источник, то есть и изображения. Если провести перпендикуляр от источника, то можно получить первое изображение. Второй перпендикуляр дает второе изображение. Угол α мал. Необходимо найти расстояние между изображениями — d .

$$d = 2\alpha\rho$$

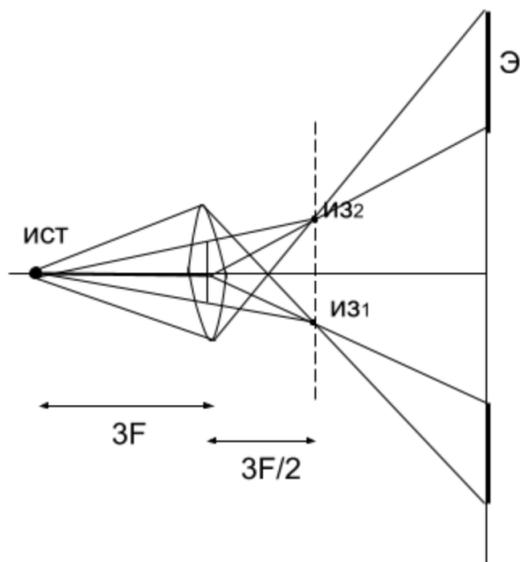


Рис. 2.5. Билинза

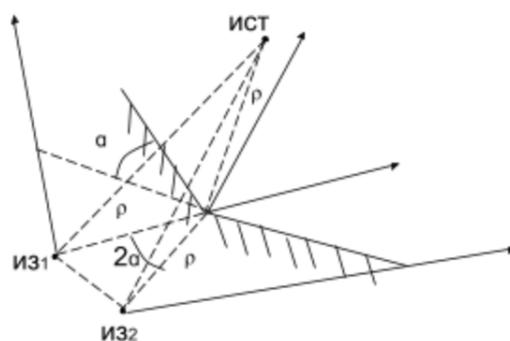


Рис. 2.6. Бизеркало

В области, где пучки изображений накладываются, образуется интерференционная картина.

Бипризма

Пусть есть узкая призма. Луч, проходящий через призму, отклоняется на какой-то угол. Пусть есть источник на оси. Проводятся 2 луча. Первый луч отклоняется на угол $\alpha(n-1)$. Второй луч отклоняется на такой же угол при условии, что α мало.

Чтобы найти точку пересечения, лучи продлеваются. Таким образом, можно найти первое изображение.

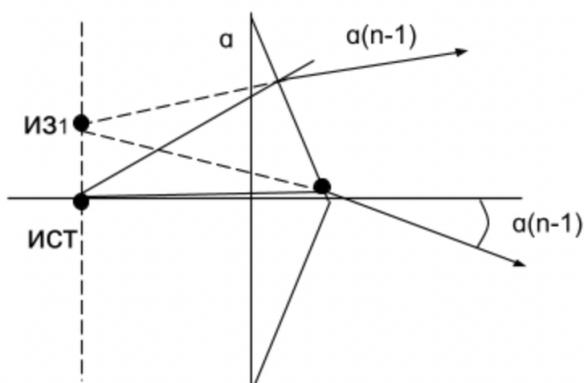


Рис. 2.7. Бипризма

Пусть есть клин и источник света. Показатель преломления — n . Свет, идущий внутри стекла, кажется вышедшим из точки, которая находится на расстоянии na от клина. Свет из этой точки падает на границу раздела стекло-воздух. Проводится перпендикуляр на расстоянии x . Второе изображение будет на расстоянии $\frac{x}{n}$.

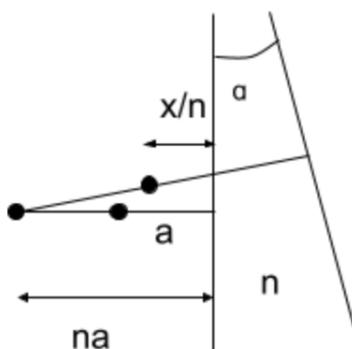


Рис. 2.8. Два изображения

Толстая линза

Пусть есть граница раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 . На этой поверхности есть радиус кривизны R . Помещается источник. Вводится система

координат, которая по направлению совпадает с осью x и начало этой системы координат помещается в точку O . Координата источника — x_1 , а координата изображения — x_2 . Записывается формула для преломляющей поверхности:

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

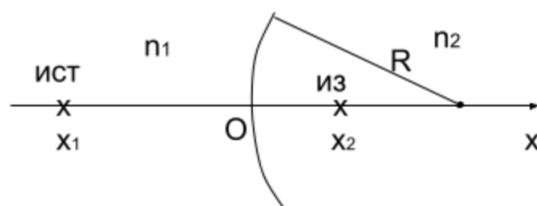


Рис. 2.9. Толстая линза

Точечный источник света расположен на расстоянии L от центра шара. Показатель преломления равен 2. Необходимо найти изображение.

$$L = 5R$$

$$n = 2$$

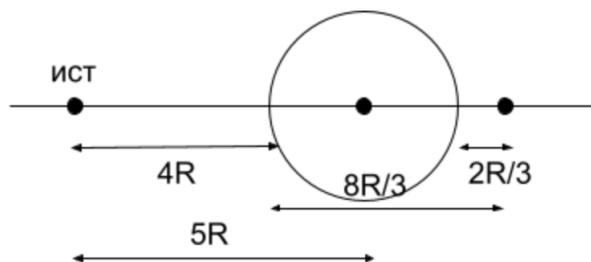


Рис. 2.10. Задача. Толстая линза

$$\frac{n}{x_2} - \frac{1}{-4R} = \frac{n-1}{R}$$

$$x_2 = \frac{8}{3}R$$

$$\frac{1}{x'_2} - \frac{n}{\frac{2}{3}R} = \frac{1-n}{-R}$$

Если обрезать шар, то первое изображение будет таким же и формула записывается следующим образом:

$$x_2 = \frac{n_2}{n_1} x_1$$

Пусть есть зеркальная поверхность. Тогда показатели преломления имеют следующее значение:

$$n_1 = -n_2$$

Следовательно, формула для преломляющейся поверхности записывается следующим образом:

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{-n_2}{x_1} = \frac{n_2 - (-n_1)}{R}$$
$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{2}{R}$$

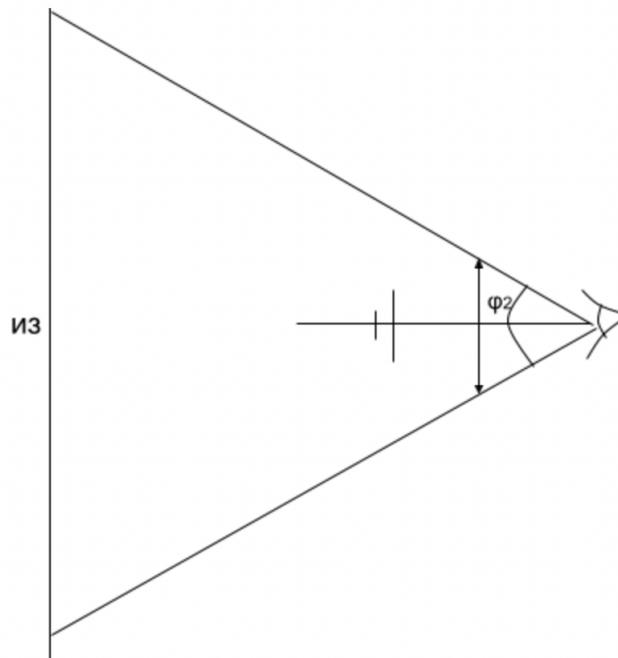


Рис. 2.11. Лупа

Оптические приборы

Лупа представляет из себя собирающую линзу. Если расположить предмет за фокусным расстоянием, то получится четкое изображение. Глаз смотрит на мнимое изображение, которое получается. Поэтому предмет необходимо расположить перед фокусом. С точки зрения наблюдения глаза увеличение происходит, когда изображение видно под углом φ_2 .

Семинар 3. Электромагнитные волны

Самостоятельная работа (линза-полушар)

Пусть есть полушар и заданы R и n . Необходимо найти расстояние x от полушара до источника так, чтобы после прохождения системы вышел параллельный пучок (пп). Требуется написать уравнения Максвелла.

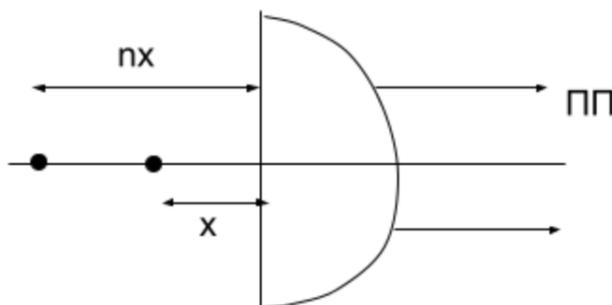


Рис. 3.1. Самостоятельная работа (линза-полушар)

Записывается следующая формула для преломляющейся поверхности::

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$
$$-\frac{n}{-nx + R} = \frac{1 - n}{-R}$$

Таким образом, расстояние можно найти следующим образом:

$$x = \frac{R}{n(n-1)}$$

При перевернутом полушаре расстояние имеет следующее выражение:

$$x = \frac{R}{n-1}$$

Чтобы толстую линзу сделать тонкой, необходимо справа отрезать большой кусок. Линзу можно считать тонкой, если толщина много меньше радиуса кривизны.

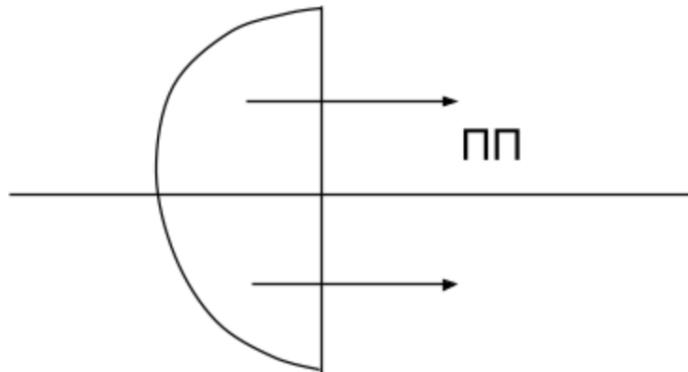


Рис. 3.2. Самостоятельная работа (линза-полусфера)

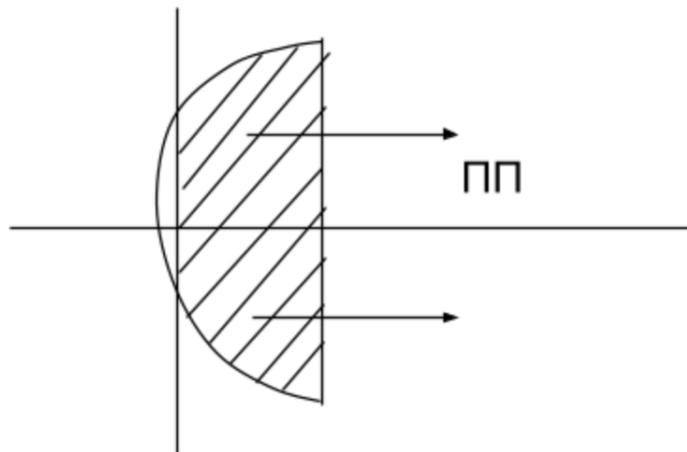


Рис. 3.3. Тонкая линза

Уравнение Максвелла

Существуют четыре уравнения Максвелла. Из уравнений Максвелла есть возможность существования электромагнитных волн. Уравнения Максвелла записывается в дифференциальном виде:

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho$$
$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

\bar{j} — плотность тока.

Волновое уравнение

Из уравнений Максвелла можно получить волновое уравнение:

$$\Delta \bar{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}$$

Пусть E зависит от одной координаты. Тогда:

$$\Delta \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}$$

Уравнение волны — функция, которая является решением уравнений Максвелла и записывается следующим образом:

$$E(x, t) = f(x \pm ct)$$

Решение волнового уравнения записывается следующим образом:

$$\bar{E}(x, t) = \bar{e}_y E_0 \sin(kx - \omega t + \varphi_0)$$

Волна может идти вдоль оси x , а e может быть направлен перпендикулярно.

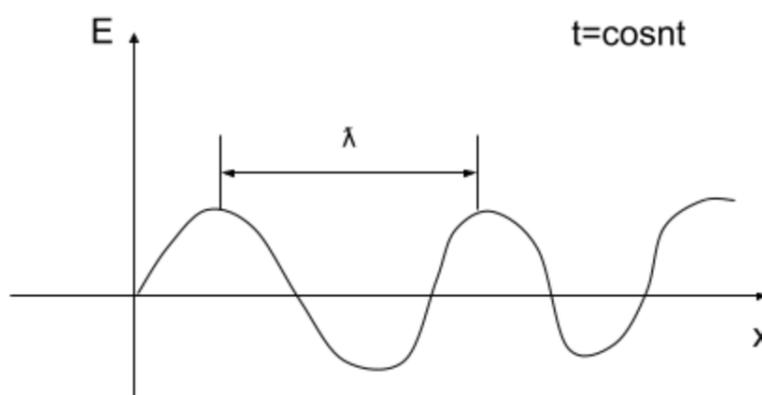


Рис. 3.4. Состояние волны в момент времени t

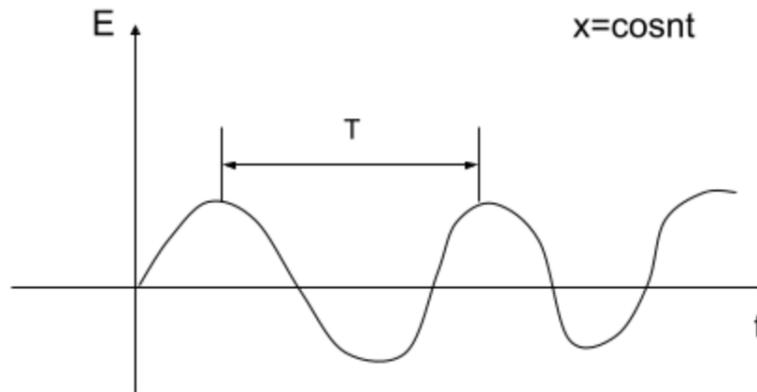


Рис. 3.5. Состояние волны при $x = const$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$
$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu\epsilon_0\mu_0}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$$
$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = c$$

$$\sqrt{\epsilon\mu} = n$$

n — показатель преломления.

$$\frac{c}{n} = \lambda v$$

v — частота. Когда свет переходит из одной среды в другую, скорость меняется, соответственно, длина волны уменьшается.

$$\lambda_{\text{кр}} \approx 600 \text{ н}$$

Показатель преломления воды:

$$n = 1.33$$

Тогда:

$$\lambda_{\text{зл}} = \frac{\lambda_{\text{кр}}}{n} \approx 550 \text{ н}$$

Глаз воспринимает не длину волны, а частоту.

Плоские волны

Пусть задан $\vec{E}(x, t)$. Необходимо найти $\vec{B}(x, t)$.

$$\vec{E}(x, t) = \vec{e}_y E_0 \sin(\omega t - kx)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{e}_z \cdot (-E_0 k \cdot \cos(\omega t - kx))$$

$$\vec{B}(x, t) = \vec{e}_z \frac{k}{\omega} E_0 \sin(\omega t - kx)$$

Выражение для плоской волны записывается следующим образом:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

Таким образом, \vec{E} и \vec{B} колеблются в одной фазе.

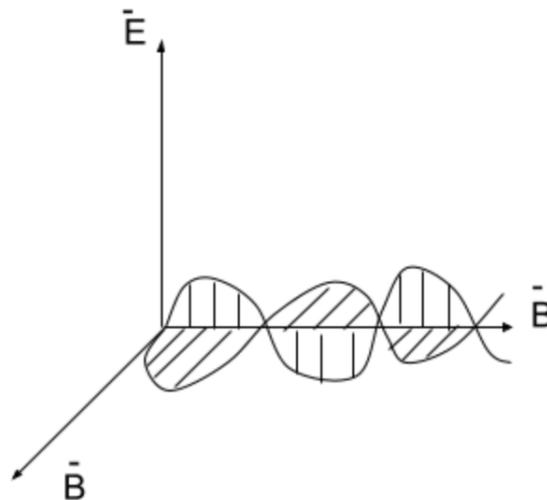


Рис. 3.6. Плоские волны

Соотношение амплитуд записывается следующим образом:

$$E_0 = B_0 v = B_0 c$$

Энергетические характеристики. Интенсивность

Плотность, интенсивность и мощность являются энергетическими характеристиками. В энергетическом поле плотность энергии (объемная плотность энергии) является энергетическим характером.

$$W_{эл} = \frac{\overline{ED}}{2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} \quad \epsilon = 1$$

$$W_M = \frac{\overline{BH}}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} \quad \mu = 1$$

Таким образом, плотность энергии электромагнитного поля записывается следующим образом:

$$W_{ЭМ} = \epsilon\epsilon_0 E^2 \rightarrow \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$$

Выражение для работы записывается в следующем виде:

$$A = \frac{T}{V}$$

$$\Delta A = p\Delta V$$

Следующим энергетической характеристикой является вектор Умова-Пойнтинга (плотность потока энергии):

$$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}] \rightarrow \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2\text{с}}$$

$$|\vec{S}| = W_{ЭМ} \cdot c$$

Интенсивность можно получить из плотности потока энергии:

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle \rightarrow \langle S_n \rangle$$

Связь интенсивности и объемной плотности энергии записывается как:

$$I = \langle W_{ЭМ} \rangle \cdot c$$

Формула гармонической волны:

$$E = E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

Стоячие волны

Пусть есть две волны, которые распространяются навстречу друг к другу. Первая волна записывается следующим образом:

$$\bar{E}_1(x, t) = \bar{e}_y \cdot E_0 \cos(\omega t - kx)$$

Вторая волна записывается следующим образом:

$$\bar{E}_2(x, t) = \bar{e}_y \cdot E_0 \cos(\omega t + kx)$$

Эти волны различаются направлением распространения. Первая волна распространяется в положительном направлении вдоль оси x , а вторая волна распространяется в отрицательном направлении вдоль оси x . Требуется найти результирующую волну:

$$E(x, t) = \bar{e}_y \cdot 2E_0 \cos \omega t \cdot \cos kx$$

Таким образом, в этой волне существуют узлы и пучности. Узел — это точка, в которой величина поля всегда равна 0.

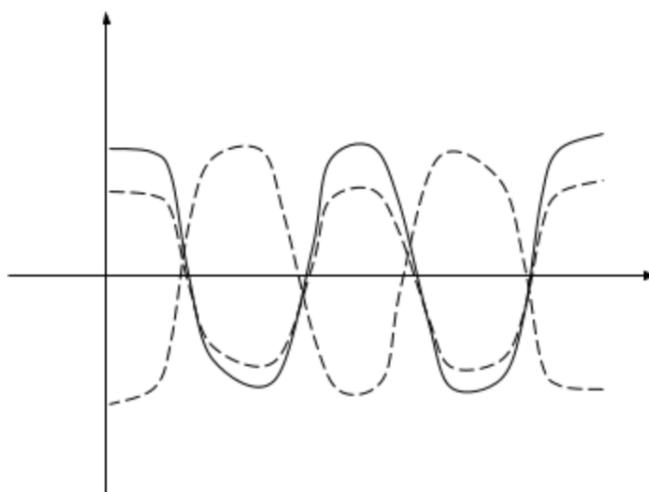


Рис. 3.7. Стоячая волна

Так как поле электромагнитное, то \bar{E} и \bar{B} в одной фазе:

$$\bar{B}(x, t) = \bar{e}_z 2B_0 \sin \omega t \sin kx$$

Стоячая волна сдвинута по времени и по пространству на $\frac{\pi}{2}$.

Семинар 4. Сферические волны. Давление света

Самостоятельная работа (бегущие волны)

Пусть в вакууме распространяются две волны, у которых одинаковая амплитуда и одинаковая частота. E_0 — амплитуда, ω — частота. Первая волна распространяется вдоль оси x , а E — вдоль оси y . Вторая волна распространяется вдоль оси y , а E — вдоль оси x . При условии, что в начале координат $E_1 = E_2 = 0$ при $t = 0$ необходимо найти:

$$\bar{B} \left(x = \frac{\lambda}{4}, y = \frac{3\lambda}{4}, t = T \right)$$

\bar{E}_1 распространяется вдоль оси x , а направление вдоль оси y .

$$\bar{E}_1 = \bar{e}_y \times E_0 \sin(\omega t - kx) \rightarrow \bar{B}_1 = \bar{e}_z \times \frac{E_0}{c} \sin(\omega t - kx)$$

$$\bar{E}_2 = \bar{e}_x \times E_0 \sin(\omega t - ky) \rightarrow \bar{B}_2 = -\bar{e}_z \times \frac{E_0}{c} \sin(\omega t - ky)$$

$$2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \rightarrow -1$$

$$2\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow 1$$

Суммарное выражение записывается следующим образом:

$$\bar{B} = \bar{e}_z \times \frac{E_0}{c} (-1 - 1) = -\bar{e}_z \frac{2E_0}{c}$$

Геометрическая оптика (разбор задачи)

Пусть источник расположен в точке с координатой $\frac{F}{2}$. Тогда изображение будет отрицательным, следовательно, не в своем пространстве, а на фокусе.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$$

$$\frac{1}{\frac{F}{2}} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$$

$$\frac{2}{F} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$$

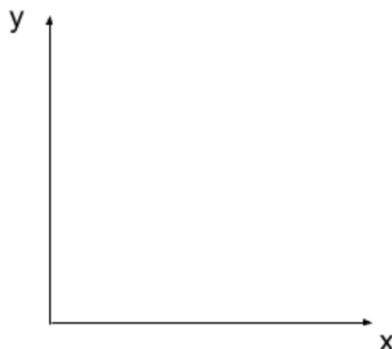


Рис. 4.1. Система координат

$$\frac{1}{F} = -\frac{1}{b}$$
$$b = -F$$

В геометрической оптике действует принцип обратимости. Происходит перенос источника в координату изображения. Таким образом, получится сходящийся пучок света, который будет направлен в точку фокуса, но после преломления в линзе он соберется в точке, которая находится между источником и линзой.

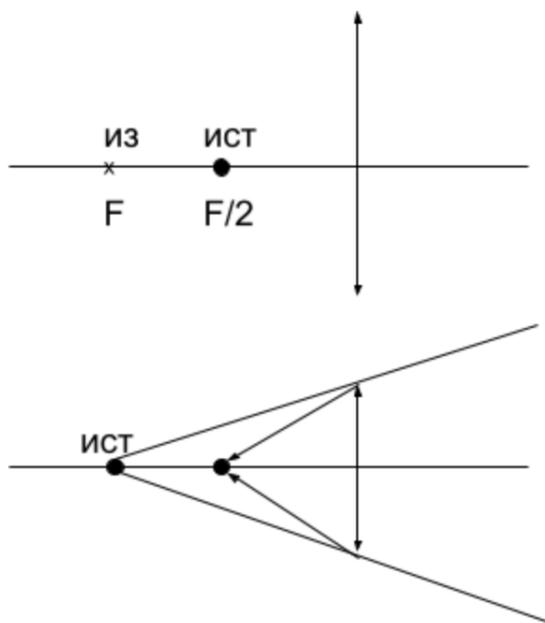


Рис. 4.2. Геометрическая оптика

Сферические волны. Амплитуда точечного источника

Выражение для сферических волн можно записать следующим образом:

$$\bar{E}_{\text{сф}} = \bar{E}_0 \cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

Волновой фронт — поверхность постоянной фазы. Применяется закон сохранения энергии:

$$W = W_{\text{ЭМ}} \times 4\pi r^2 dr$$

$$W_{\text{ЭМ}} = \overline{ED} \sim E_0^2$$

Происходит перемещение слоя, при котором толщина и энергия не меняются, а радиус меняется.

$$E_0^2 \cdot 4\pi r^2 = \text{const}$$

$$E_0 \sim \frac{1}{r}$$

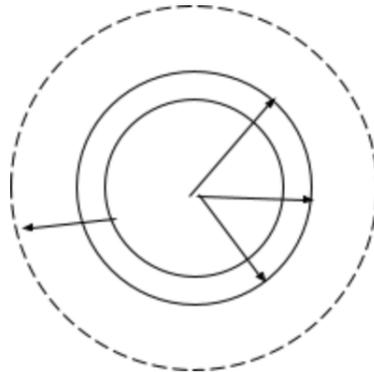


Рис. 4.3. Сферические волны

Выражение для сферической волны также можно записать следующим образом:

$$E_{\text{сф}} = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

Пусть есть точечный источник. задается потенциал — характеристика точечного источника. Источник излучает мощность P_0 . Необходимо найти выражение для A_0 . Интенсивность (I) — среднее значение плотности потока энергии. Интенсивность — энергия, проходящая в единицу времени через единичную площадку.

$$I \rightarrow \frac{Дж}{с \cdot м^2}$$

$$\frac{P}{4\pi r^2} = I$$

Объемная плотность энергии связана с интенсивностью через скорость:

$$I = \langle W \rangle \cdot c$$

$$\langle W_{ЭМ} = \bar{E} \cdot \epsilon \bar{E} = \frac{A_0^2}{r^2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{1}{2} \rangle$$

$$I = \frac{A_0^2}{r^2} \cdot \frac{\epsilon_0}{2} \cdot c$$

Таким образом, выражение для A_0 записывается следующим образом:

$$A_0^2 = \frac{P}{2\pi\epsilon_0 c}$$

Давление света. Давление на плоскую площадку

Выражение для давления записывается в следующем виде:

$$p_{\text{давл}} = \frac{F_n}{S} \rightarrow \frac{Н}{М^2} \times \frac{М}{М} = \frac{Дж}{М^3}$$

Пусть перпендикулярно пучку света стоит площадка. Площадка полностью поглощающая. Следовательно, нет отражений. Свет давит так как передает импульс: $p_{\text{имп}}$.

$$W_{ЭМ} = v \times G$$

G — объемная плотность импульса, σ_{\perp} — поперечное сечение пучка.

$$p = mV$$

$$W = \frac{mV^2}{2}$$

Используется бесконечно малое время $dt \times v$.

$$dV = \sigma_{\perp} v dt$$

$$dp_{\text{имп}} = G \sigma_{\perp} v dt$$

$$F = \frac{dp_{\text{имп}}}{dt}$$

$$F = G\sigma_{\perp}v = W_{\text{ЭМ}}\sigma_{\perp}$$

$$F = W_{\text{ЭМ}}\sigma_{\perp}$$

Это выражение позволяет с легкостью решать все задачи на давление. Давление на эту площадку можно найти следующим образом:

$$p_{\text{давл}} = W_{\text{ЭМ}}$$

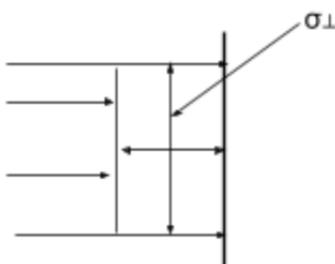


Рис. 4.4. Поглощающая площадка

Пусть площадка отражающая. Падающая волна создает силу $\bar{F}_{\text{пад}}$. Отраженная волна направлена в противоположную сторону. Таким образом, при отражении сила имеет следующую запись:

$$F = (1 + R)W_{\text{ЭМ}}\sigma_{\perp}$$

Пусть поглощающая площадка наклонена. Угол падения — θ . В этом случае давление записывается следующим образом:

$$p_{\text{давл}} = W_{\text{ЭМ}} \cos^2 \theta$$

$$F_n = F_{\text{пад}} \cos \theta$$

$$\sigma = \frac{\sigma_{\perp}}{\cos \theta}$$

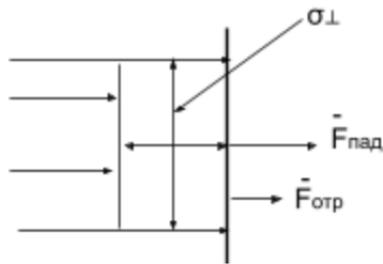


Рис. 4.5. Отражающая площадка

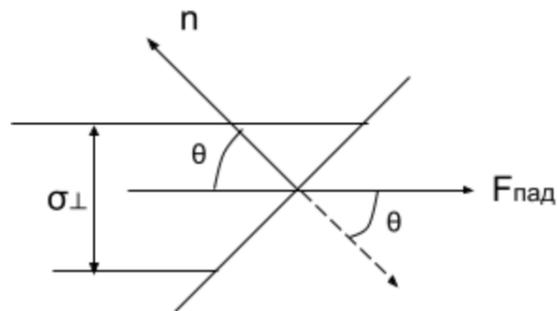


Рис. 4.6. Наклоненная поглощающая площадка

Пусть наклоненная площадка отражающая. Тогда отраженная сила записывается следующим образом:

$$F_{\text{отр}} = RW_{\text{ЭМ}}\sigma_{\perp}$$

Площадь поперечного сечения не меняется.

$$p_{\text{давл}} = (1 + R)W_{\text{ЭМ}}\cos^2\theta$$

$$F_r = F_{\text{пад}}\sin\theta - F_{\text{отр}}\sin\theta = (1 - R)W_{\text{ЭМ}}\sin\theta \cdot \sigma_{\perp}$$

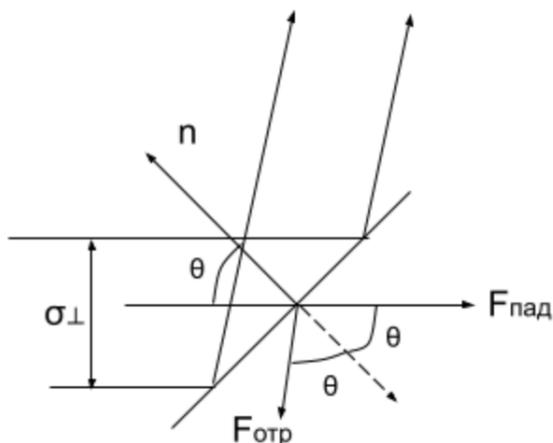


Рис. 4.7. Наклоненная отражающая площадка

Давление на шар

Пучок света с объемной плотностью энергии падает на поглощающий шар. Радиус шара — ρ . Необходимо найти силу, которая действует на поглощающий шар.

$$F = W_{\text{ЭМ}} \pi \rho^2$$

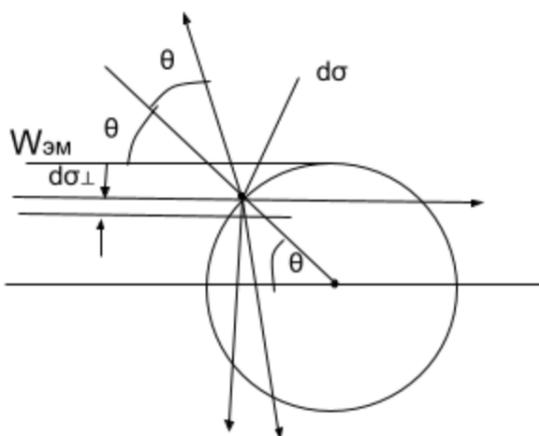


Рис. 4.8. Давление на отражающий шар

Пусть шар отражающий. Тогда коэффициент отражения $R = 1$. Необходимо взять

маленький кусок поверхности $d\sigma$, на который падает пучок света с поперечным сечением $d\sigma_{\perp}$. Падающий пучок создает ту же самую силу:

$$F = W_{\text{ЭМ}}\pi\rho^2$$

$$d\sigma \cos \theta = d\sigma_{\perp}$$

Следующее выражение показывает элемент поверхности:

$$d\sigma = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta$$

$$d\sigma = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$$

$$dF = W_{\text{ЭМ}}\rho^2 \sin \theta 2\pi d\theta \cos \theta \cdot \cos 2\theta = \dots \sin 4\theta d\theta$$

Общую силу можно записать следующим образом:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\theta d\theta = 0$$

Сила за счет отраженного пучка равна 0.

Семинар 5. Поляризация света

Самостоятельная работа (давление на зеркальный уголок)

Пусть есть две зеркальные поверхности под углом 90° . Каждый из пластинок имеет размер $a \times a$. Коэффициент отражения первого зеркала R_1 , а второго — R_2 . На нижнюю часть этой конструкции падает световой пучок с объемной плотностью энергии W . Необходимо найти силу \vec{F} по величине по направлению, которая действует на R_1 , и момент силы \vec{M} относительно вершины точки O .

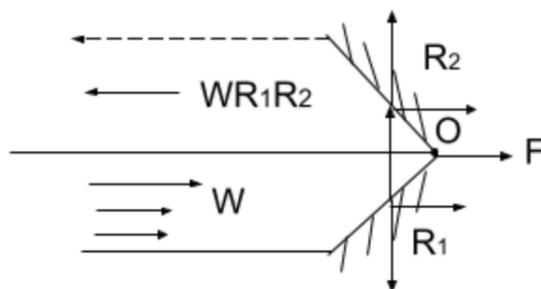


Рис. 5.1. Давление на зеркальный уголок

$$F = W\sigma_{\perp}$$

Плотность отраженного пучка света: WR_1R_2 .

$$F = W(1 + R_1R_2)\sigma_{\perp}$$

$$\sigma_{\perp} = \frac{a^2}{\sqrt{2}}$$

Следовательно, момент силы записывается следующим образом:

$$M = W(1 - R_1R_2)\sigma_{\perp} \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Естественный и линейно поляризованный свет

Если у света нет выделенного направления, то такой свет называется естественным светом или неполяризованным. Хаотически меняется длина и направление света. Если задано направление распространения, то вектор E всегда перпендикулярен

к вектору k . Поляризатор обладает направлением пропускания. Закон Малюса записывается следующим образом:

$$I_{\text{прош}} = I_{\text{пад}} \cos^2 \theta$$

Естественный свет имеет интенсивность естественного света. Пусть естественный свет падает на поляризатор. Тогда вектора E поляризованного света будут хаотически менять свою величину, но не направление.

$$I_{\text{ест}} \rightarrow \text{пол} \rightarrow \frac{I_{\text{ест}}}{2} \rightarrow \left(\frac{I_{\text{ест}}}{2} \right) \cos^2 \theta$$

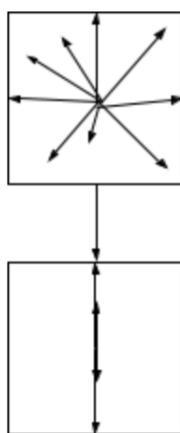


Рис. 5.2. Естественный и линейно поляризованный свет

Пусть есть смесь естественного и линейно поляризованного света. Эта смесь падает на поляризатор. Заданы интенсивности естественного и линейно поляризованного света. Необходимо найти как меняется интенсивность.

$$I = \frac{I_{\text{ест}}}{2} + I_{\text{лп}} \cdot \cos^2 \theta$$

Предполагается, что поляризатор вращается:

$$I_{\text{max}} = \frac{I_{\text{ест}}}{2} + I_{\text{лп}}$$

$$I_{\text{min}} = \frac{I_{\text{ест}}}{2}$$

$$\frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}} = \frac{I_{\text{лп}}}{I_{\text{ест}} + I_{\text{лп}}} = P$$

P — степень поляризации пучка света.

Эллиптическая поляризация

Пусть в одном направлении идут две линейно поляризованные волны. У одной из них вектор направлен вдоль оси x , а у второй вектор направлен вдоль оси y . Эти волны меняются по гармоническому закону:

$$E_x = a \sin \omega t$$

$$E_y = b \sin(\omega t + \varphi)$$

Поведение результирующего \vec{E} зависит от φ, a, b . При $\varphi = 0$ получается линейно поляризованная волна.

$$\varphi = 0 \quad \frac{E_x}{E_y} = \frac{a}{b} \quad E_y = \frac{b}{a} E_x$$

При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ получается эллипс. При $\varphi = \pi$ получается линейно поляризованная волна, но в противоположном направлении. При $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ тоже получается эллипс, но результирующий вектор будет вращаться в противоположном направлении с течением времени. Таким образом, различают право поляризованный и лево поляризованный свет. Общее название — эллиптически поляризованный. Если φ произвольный, то получится произвольный эллипс, который вписан в прямоугольник.

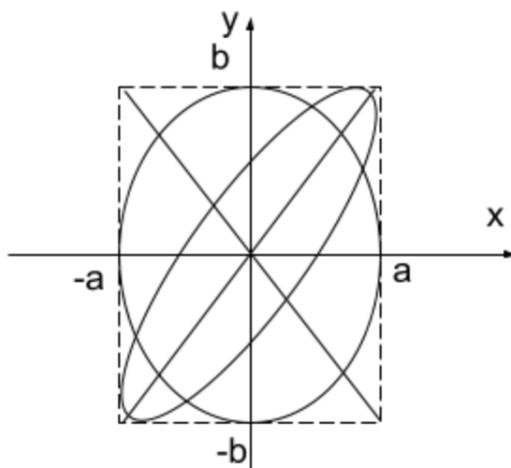


Рис. 5.3. Эллиптическая поляризация

Пусть свет эллиптически поляризован. Необходимо выбрать оси вдоль главных осей эллипса. Тогда разность фаз либо $\varphi = \pi$, либо $\frac{3\pi}{2}$. У эллипса степень поляриза-

ции полностью поляризован.

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{I_{\text{ЛП}}}{I_{\text{ест}} + I_{\text{ЛП}}}$$

$$I_{min} \sim a^2$$

$$I_{max} \sim b^2$$

$$P = \frac{I_{\text{ПОЛ}}}{I_{\text{ест}} + I_{\text{ПОЛ}}}$$

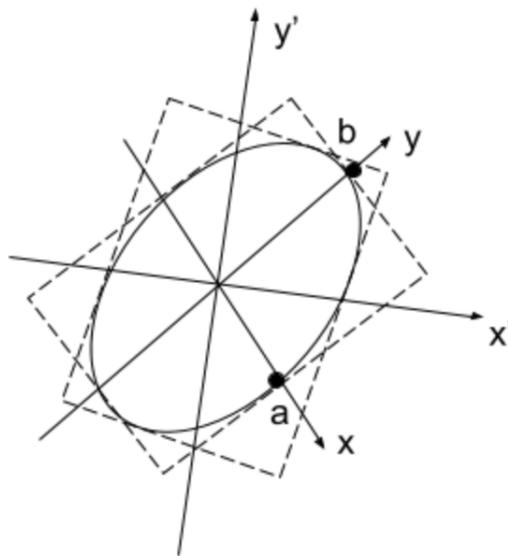


Рис. 5.4. Эллиптическая поляризация

Общая интенсивность пучка записывается следующим образом:

$$I = \langle S_n \rangle \sim \langle E^2 \rangle$$

$$I \sim a^2 + b^2$$

$$a^2 + b^2 \sin^2 \varphi = a'^2 + b'^2$$

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$$

Таким образом, было доказано, что от φ ничего не зависит.

Пластинки $\frac{\lambda}{2}$ и $\frac{\lambda}{4}$. Циркулярная поляризация

Пусть есть анизотропная пластинка, у которой есть какая-то толщина. Ее свойство заключается в том, что свет, поляризованный в одном направлении, идет с одной скоростью, а свет, поляризованный в другом направлении, идет с другой скоростью.

$$v_1 = \frac{c}{n_1}$$

$$v_2 = \frac{c}{n_2}$$

Между ними возникает оптическая разность хода:

$$\Delta S = d(n_1 - n_2)$$

Это приводит к появлению разности фаз между волнами:

$$\Delta\varphi = k\Delta S$$

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \rightarrow \frac{\lambda}{4}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

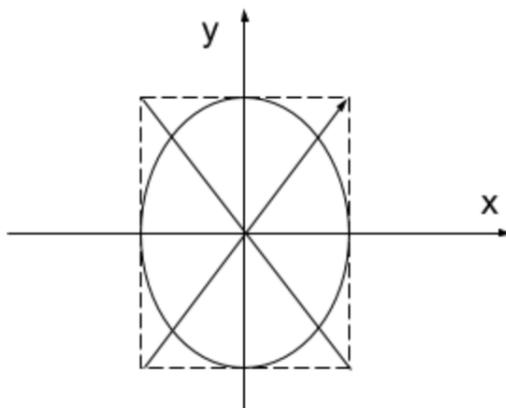


Рис. 5.5. Анизотропная пластинка

Такие пластинки, которые вносят разность фаз $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ называются пластинками $\frac{\lambda}{4}$. Пластинки, которые вносят разность фаз π называются пластинками $\frac{\lambda}{2}$.

Пусть есть пластинка, которая может вносить произвольную разность фаз. На эту пластинку направляется эллипс. У пластинки есть два главных направления. Чтобы получить линейно поляризованную из эллиптической необходимо вписать оси.

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Вносится дополнительная разность фаз пластинкой $\frac{\lambda}{4}$: $\frac{3\pi}{2}$

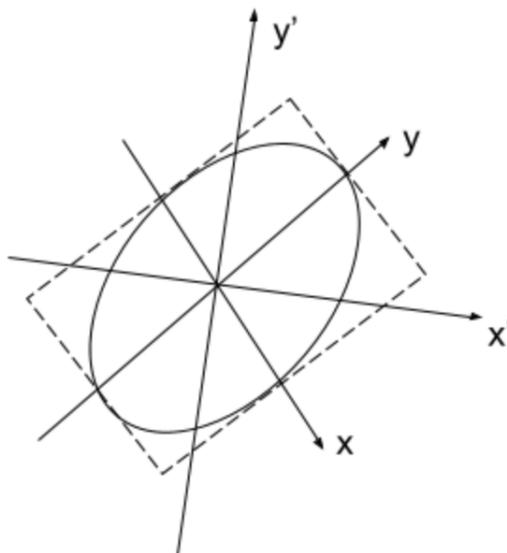


Рис. 5.6. Получение линейно поляризованной из эллиптической

При получении линейно поляризованной из эллиптической интенсивность не меняется.

Пусть линейно поляризованная волна направлена на пластинку. Но вектор линейной поляризации направлен под углом 45° . Таким образом, получается квадрат. После пластинки $\frac{\lambda}{4}$ получится циркулярно поляризованная волна. Длина вектора: $a\sqrt{2}$. Тогда исходная интенсивность:

$$I_{\text{исх}} \sim 2a^2$$

$$I_{\text{про}} \sim a^2$$

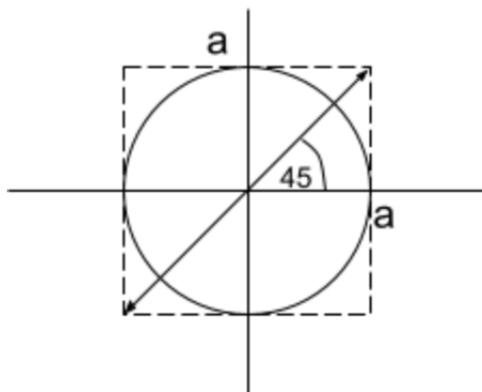


Рис. 5.7. Циркулярно поляризованная волна

Изменение интенсивности света при повороте поляризатора

Пучок, состоящий из естественного и линейно поляризованного света, падает на идеальный поляризатор, установленный так, что интенсивность прошедшего света минимальна. После этого поляризатор поворачивают на $\beta = 60^\circ$. После поворота интенсивность становится:

$$I = 4I_{min}$$

Необходимо найти степень поляризации.

$$I = \frac{I_{ест}}{2} + I_{лп} \cdot \cos^2 \theta$$

$$I_{лп} \cdot \cos^2 60^\circ = 3I_{min}$$

Семинар 6. Спектральные разложения. Преобразование Фурье

Самостоятельная работа (поляризация)

Пусть есть смесь естественного и линейно поляризованного света. Степень поляризации имеет следующий вид:

$$P = \frac{1}{n}$$

Амплитуда линейной поляризации увеличивают в 2 раза, а интенсивность естественной уменьшают в 2 раза. Необходимо найти новую степень поляризации.

$$P = \frac{I_{\text{лп}}}{I_{\text{лп}} + I_{\text{ест}}}$$
$$P = \frac{4I_{\text{лп}}}{4I_{\text{лп}} + \frac{I_{\text{ест}}}{2}}$$

Таким образом, новая степень поляризации имеет следующий вид:

$$P' = \frac{8}{7+n}$$

Пусть есть естественный и эллиптически поляризованный свет одинаковой интенсивности. Пусть есть поляризатор, тогда соотношение максимальной интенсивности к минимальной записывается как:

$$\frac{I_{\text{max}}}{I_{\text{min}}} = 2$$

Необходимо найти отношение полуосей эллиптически поляризованного света.

$$I_{\text{ест}} = I_{\text{эл}} = A^2 + B^2$$
$$I_{\text{max}} = \frac{I_{\text{ест}}}{2} + A^2 \quad A > B$$
$$I_{\text{min}} = \frac{I_{\text{ест}}}{2} + B^2 \quad A > B$$
$$\frac{I_{\text{max}}}{I_{\text{min}}} = \frac{\frac{A^2+B^2}{2} + A^2}{\frac{A^2+B^2}{2} + B^2} = \frac{3A^2 + B^2}{A^2 + 3B^2} = 2$$
$$\frac{A}{B} = \sqrt{5}$$

Преобразование Фурье. Спектральная плотность мощности

Фурье образование функции $f(t)$ обозначается как $F(\omega)$.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

$$F^*(\omega) = F(-\omega)$$

$f(t)$ — действительная функция, а $F(\omega)$ — комплексная функция. обе функции заданы на бесконечном интервале. Если задать $F^*(\omega)$ на полу бесконечности, то отрицательное значение $F(-\omega)$ будет сопряженным. Энергия электромагнитного поля записывается следующим образом:

$$\langle [\bar{E} \times \bar{H}] \rangle$$

$$FF^* = S(\omega)$$

$$I = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega$$

$S(\omega)$ — действительная и четная функция.

Спектр прямоугольного импульса

Необходимо найти спектр прямоугольного импульса. Фурье преобразование прямоугольника записывается следующим образом:

$$F(\omega) = A_0 \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$
$$\frac{2\pi \nu \tau}{2} = \frac{\omega \tau}{2} = \pi \quad \nu \tau = 1$$
$$\operatorname{sinc} \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}$$
$$\omega \tau = 2\pi$$

$\Delta\omega$ — ширина:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

Спектр короткого сигнала — широкий, а спектр широкого сигнала — короткий.

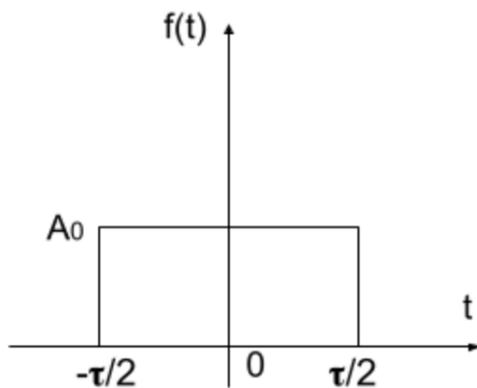


Рис. 6.1. Фурье преобразование прямоугольника

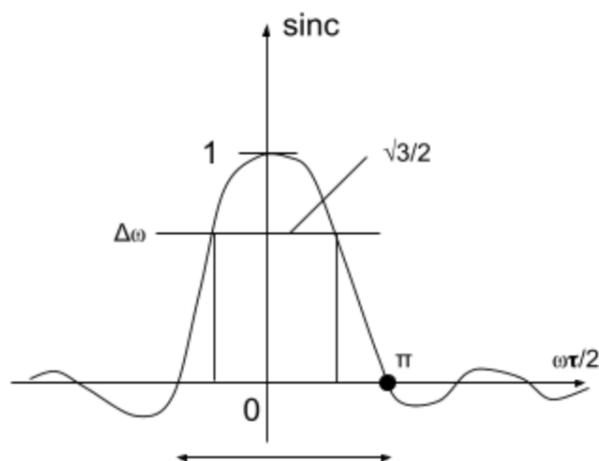


Рис. 6.2. Спектр прямоугольного импульса

Спектр косинусоидального цуга

Пусть есть сигнал, заполненный косинусоидой.

$$f_{\text{зап}}(t) = f_0(t) \cos \omega_0 t$$

$$\cos \omega_0 t = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$$

Фурье обозначение записывается следующим образом:

$$f_0(t) \rightarrow F(\omega) \quad f_{\text{зап}}(t) \rightarrow ?$$

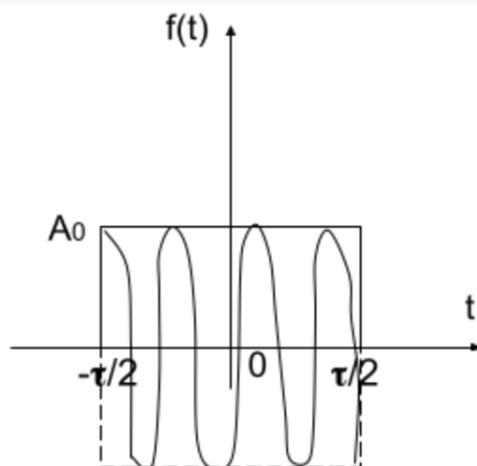


Рис. 6.3. Фурье преобразование косинусоидального цуга

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t) e^{-i\omega t} e^{i\omega_0 t} dt = \int f_0(t) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt$$

Спектр прямоугольного импульса, смещенного во времени

Пусть есть сигнал, смещенный во времени. Необходимо найти поведение спектра.

$$F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t - t_0) e^{-i\omega(t - t_0)} dt e^{-i\omega t_0} dt = F(\omega) e^{-i\omega t_0}$$

В спектре сигнала появляется фазовый множитель. Спектральная плотность интенсивности записывается следующим образом:

$$S(\omega) = FF^*$$

Спектр двойного прямоугольного импульса

Пусть расстояние между центрами двух прямоугольников T , длительность каждого τ и высота A_0 . Используется метод раздвоения.

$$f_0\left(t - \frac{T}{2}\right) + f_0\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

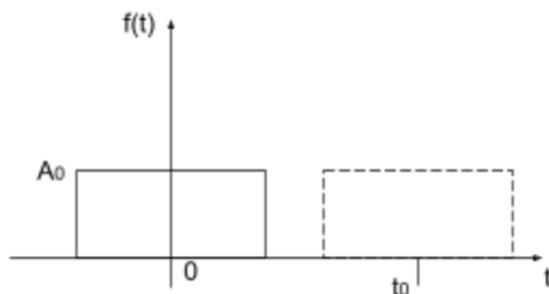


Рис. 6.4. Фурье преобразование прямоугольного импульса, смещенного во времени

$$F(\omega) \left(e^{-i\omega \frac{T}{2}} + e^{i\omega \frac{T}{2}} \right) = \text{sinc} \left(\frac{\omega \tau}{2} \right) \cos \omega \frac{T}{2}$$

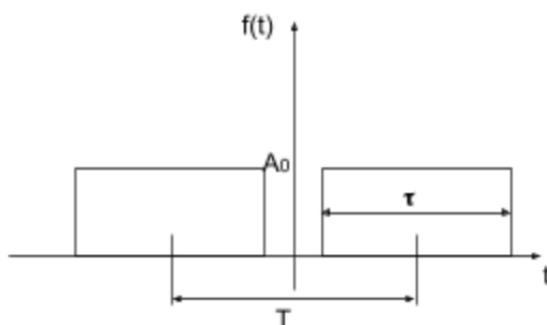


Рис. 6.5. Фурье преобразование двойного прямоугольного импульса

Гауссовский и лоренцевский спектр

Гауссовский спектр записывается следующим образом:

$$f(t) = A_0 e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\tau^2}}$$

Фурье преобразование Гауссовского спектра — Гаусс.

Лоренцевский спектр не симметричный. Форма линии Лоренц записывается в виде следующего выражения:

$$F(\omega)F^*(\omega)$$

В оптике есть 3 основные формы спектральных линий: Гаусс, Лоренц и прямоугольник. Лоренц значительно шире Гаусса.

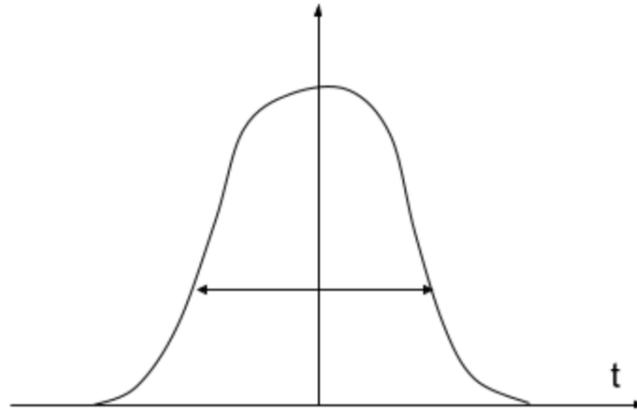


Рис. 6.6. Гауссовский спектр

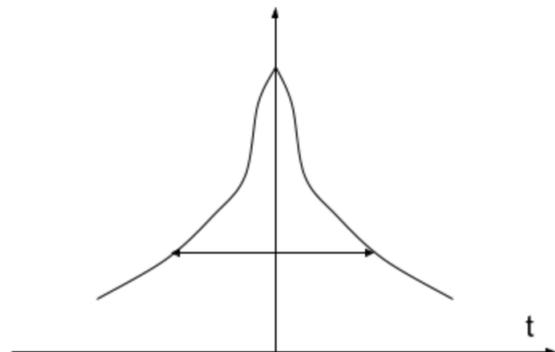
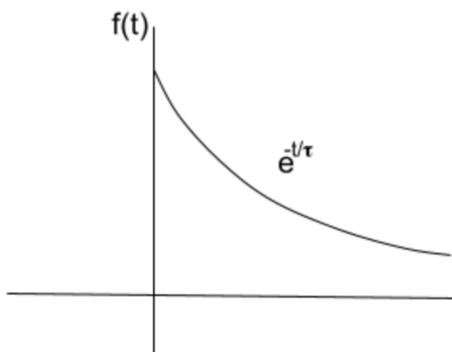


Рис. 6.7. Лоренцевский спектр

Семинар 7. Интерференция монохроматического света. Метод деления волнового фронта

Интерференция монохроматического света. Основные понятия

Интерференция — явление перераспределения энергии. Примером интерференции являются лужи, мыльные пузыри и др. Он появляется за счет нескольких пучков. Интерференция — явление, наблюдаемое при наложении нескольких пучков и заключается в том, что видны перераспределения интенсивности, неравномерная засветка, темные и светлые полосы, устойчивые во времени. Пусть есть две волны, которые сложились в одной точке. Суперпозиция этих волн записывается следующим образом:

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2$$

В эксперименте наблюдается интенсивность. Интенсивность — это среднее значение вектора Умова-Пойнтинга.

$$I = \langle (\bar{E} \cdot \bar{E}) \rangle = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + 2 \langle \bar{E}_1 \cdot \bar{E}_2 \rangle$$

Интерференционное слагаемое равно нулю, если волны взаимно перпендикулярны и частоты разные. Выражение для гармонической волны записывается как:

$$E_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$E_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Используется произведение косинуса:

$$\langle \cos(\omega_1 - \omega_2)t + \dots \rangle \quad (\omega_1 + \omega_2)t + \dots$$

$$\omega_1 = \omega_2$$

Если поставить приемник, регистрирующий интенсивность, будет видно мерцание с частотой 1 Герц. Чтобы получить интерференцию в диапазоне видимых электромагнитных волн, надо взять один источник света, разделить его излучение и далее соединить.

Пусть есть два геле неоновых лазера в одно частотном режиме с очень узким спектром. Выяснилось, что один лазер после 15 минут совершенно стабильно держит частоту, а у второго лазера частота немного дергается. Поэтому, подождав 15 минут, один лазер останавливается, а на зеркала второго лазера ставится пьезоке-рамика, позволяющая менять длину резонатора, чтобы частота стала управляемой. Таким образом, можно получить интерференционные картины от двух независимых источников. Это приводит к следующей задаче, где можно получить комплексную амплитуду:

$$E_1 = A_1 \cos(\omega t) \rightarrow A_1 e^{i\omega t} + kc$$

$$E_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow A_2 e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} + kc$$

Необходимо сложить комплексные амплитуды на комплексной плоскости.

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\pi - \varphi)$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi$$

$$I_{max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$

$$I_{min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$$

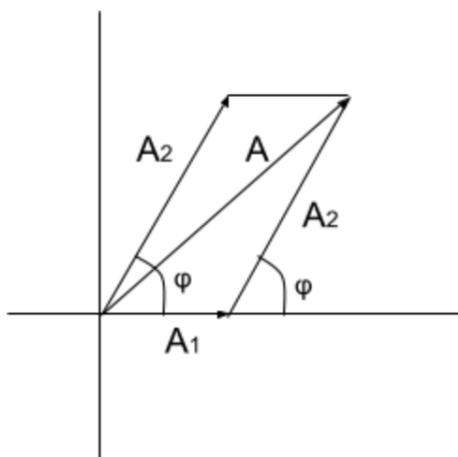


Рис. 7.1. Сложение комплексных амплитуд

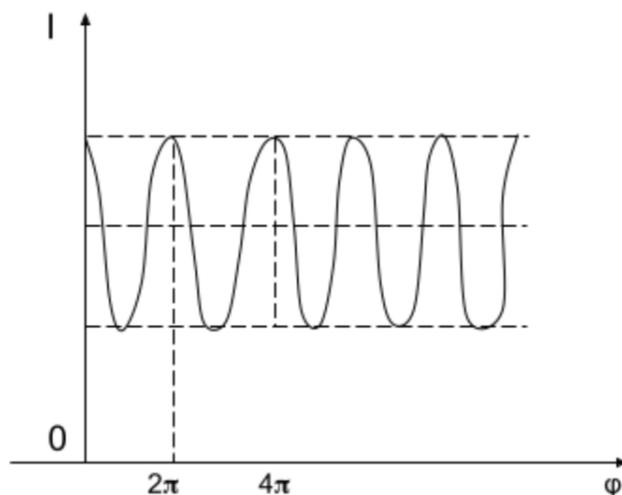


Рис. 7.2. График зависимости I от φ

Вводится выражение для видности:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

$$I_1 = I_2 = I_0$$

$$I_{max} = 4I_0 \quad \varphi = 0, 2\pi \dots 2\pi m$$

$$I_{min} = 0 \quad \varphi = 2\pi \left(m + \frac{1}{2} \right)$$

Метод деления волнового фронта. Схема Юнга

Чтобы из одного источника получить интервенционную картину, необходимо нарисовать схему Юнга. Добавляется не прозрачный экран, в котором проделываются 2 маленьких отверстия на одинаковом расстоянии. Волна из второго источника попадает на эти отверстия, где они становятся источниками вторичных волн. Каждая точка волнового фронта становится источником сферических волн. Эти сферические волны собираются в одной точке на экране, и появляется разность фаз, которая появляется за счет разности хода.

$$\cos(\omega t - ks + \psi)$$

$$\Delta s = s_1 - s_2$$

Связь между разностью хода и разностью фаз:

$$\varphi = k\Delta s \quad (7.1)$$

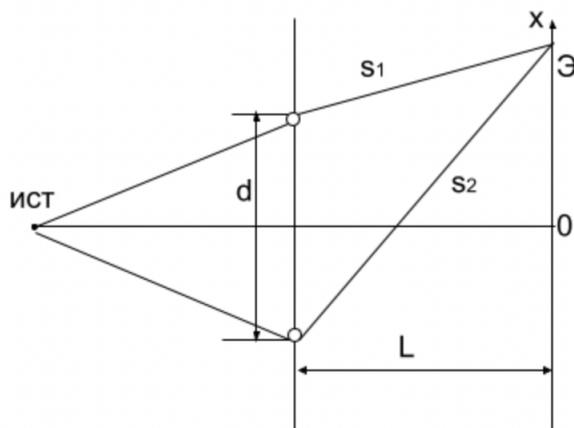


Рис. 7.3. Схема Юнга

Условие для разности хода записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \max &\rightarrow \Delta s_{\max} = m\lambda \\ \min &\rightarrow \Delta s_{\min} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \\ \frac{\Delta s}{\lambda} &= m \end{aligned}$$

m — порядок интерференции. Выражение для разности хода $\Delta S(x)$ получается следующим образом:

$$\begin{aligned} L &\gg d, x \gg \lambda \\ s_2^2 &= L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 \\ s_1^2 &= L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 \\ (s_2 - s_1)(s_2 + s_1) &= 2x - d \\ \Delta s &= \frac{2xd}{s_2 + s_1} \approx \frac{2xd}{2L} = \frac{xd}{L} \end{aligned}$$

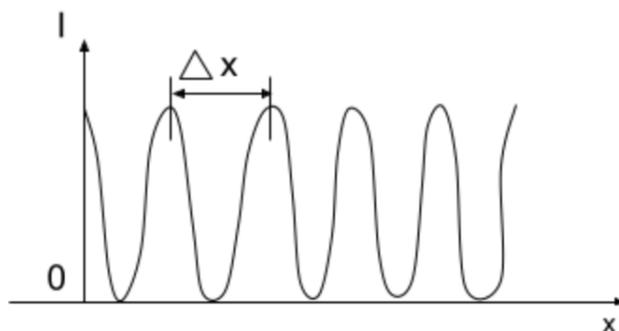


Рис. 7.4. График зависимости I от x

Величины одной размерности:

$$L \cdot \Delta s = x \cdot d$$

Δx — расстояние между двумя полосами.

$$\lambda = \Delta x \cdot d$$

$$\Delta x = \frac{L\lambda}{d}$$

Интерференционная схема на основе зеркала

Пусть есть зеркало и экран. Источник необходимо поставить над зеркалом и нарисовать изображение на плоском зеркале. Таким образом, получается схема Юнга с двумя источниками. h — расстояние от источника.

$$L = 1m$$

$$\Delta x = 1mm$$

$$\lambda = 0.5 \text{ мкм}$$

$$d = 2h$$

$$h = \frac{L\lambda}{2\Delta x} = \frac{1m \cdot 0.5 \text{ мкм}}{2 \cdot 1mm} = 0.25mm$$

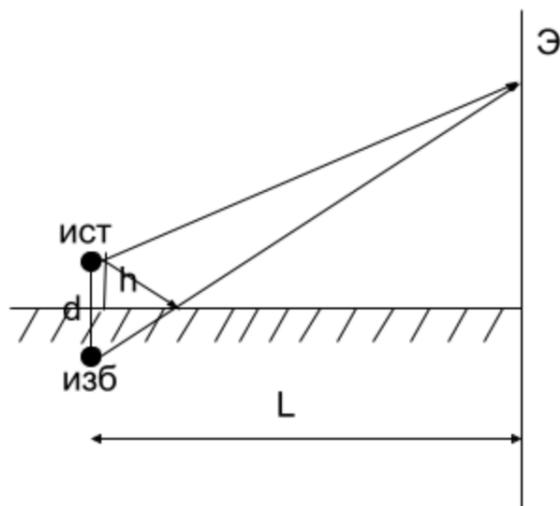


Рис. 7.5. Интерференционная схема на основе зеркала

Билинза Бийе

Пусть есть собирающая линза, у которой удалили кусок толщины h . Фокусное расстояние линзы — F . Две половины линзы были соединены. Таким образом, получается билинза.

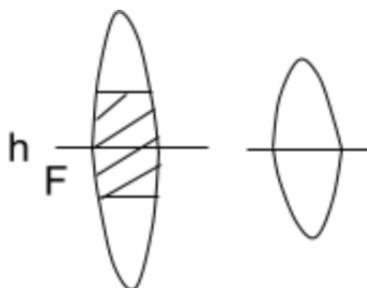


Рис. 7.6. Образование билинзы

Пусть есть источник и экран, между которыми есть билинза. Расстояние от источника до билинзы — a , а расстояние от билинзы до экрана — c . Необходимо провести линии через центр верхней части билинзы. Таким образом, можно найти b и первое изображение. Чтобы найти второе изображение, необходимо провести линию через

центр нижней части билинзы.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$
$$b = \frac{af}{a-f}$$

Необходимо найти d , чтобы найти интерференционную картину.

$$\frac{d}{h} = \frac{a+b}{a}$$
$$d = h \frac{a+b}{a}$$

$$L = c - b$$

Расстояние между полосами можно найти следующим образом:

$$\Delta x = \frac{L\lambda}{d}$$

Область перекрытия пятен на экране обозначается как D .

$$\frac{D}{h} = \frac{a+c}{a}$$
$$D = h \frac{a+c}{a}$$

N — количество полос на экране:

$$N = \frac{D}{\Delta x}$$

Бипризма Френеля

Пусть есть источник, стеклянная бипризма и экран. Расстояние от источника до бипризмы — a , а расстояние от бипризмы до экрана — c . n — показатель преломления. Луч, падающий на бипризму, отклоняется в сторону более толстого основания на угол $(n-1)\theta$. Необходимо провести 2 луча. Чтобы получить изображения, прордевают лучи и находят их пересечение. Расстояние между изображениями можно найти следующим образом:

$$d = 2 \cdot 2(n-1)\theta$$

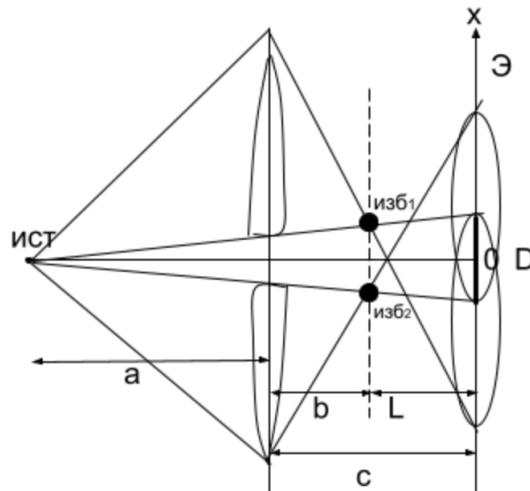


Рис. 7.7. Билинза Бийе

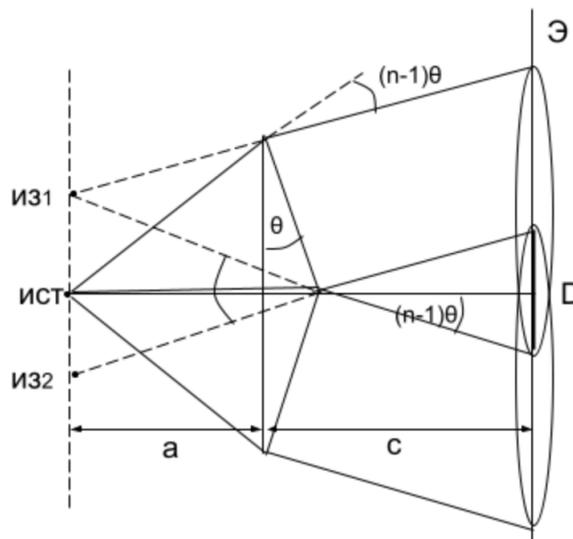


Рис. 7.8. Бипризма Френеля

$$L = a + c$$

$$D = 2(n - 1)\theta \cdot c$$

$$N = \frac{D}{\Delta x}$$

Максимальный порядок интерференции, который виден:

$$m_{max} = \frac{N}{2}$$

$$\Delta s = \frac{x \cdot d}{L}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{x}{L}$$

$$\Delta s = d \sin \alpha$$

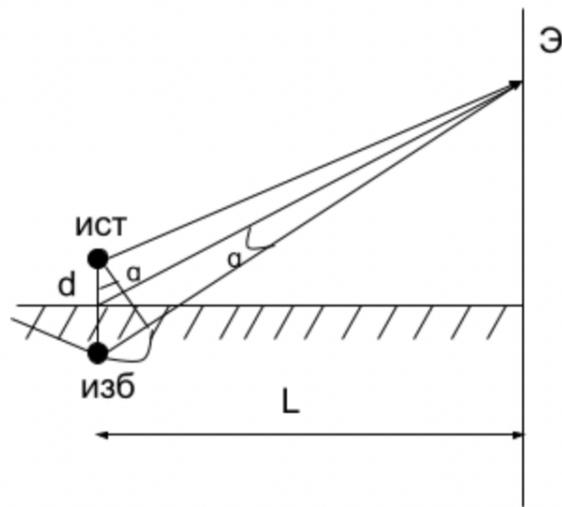


Рис. 7.9. Разность хода

Это применяется при случае, когда 2 источника соединены одной линией перпендикулярно к экрану.

Семинар 8. Интерференция квазимонохроматического света

Самостоятельная работа (порядки интерференции)

Пусть нарисована схема Юнга. В точке O_1 наблюдается максимум m порядка. Требуется найти куда и в каком направлении надо подвинуть экран, чтобы в точке O_2 оказался максимум n порядка.

$$OO_2 = 2OO_1$$

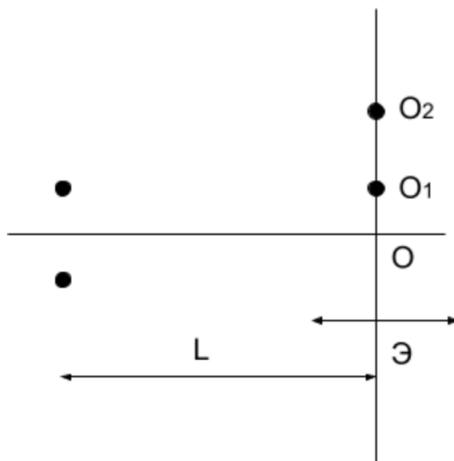


Рис. 8.1. Самостоятельная работа (порядки интерференции)

$$m\lambda = \Delta s_1 = \frac{x \cdot d}{L}$$
$$n\lambda = \Delta s_2 = \frac{2x \cdot d}{L + \Delta L}$$
$$\frac{m}{n} = \frac{L + \Delta L}{2L}$$
$$\Delta L = L \left(-1 + \frac{2m}{n} \right)$$

Источник в фокусе билинзы

Пусть есть билинза и источник на фокусном расстоянии от билинзы.

$$\Delta x = \frac{L \cdot \lambda}{d} = \frac{\lambda}{\frac{d}{L}} = \frac{\lambda}{\alpha}$$

α — угол схождения. Разность хода можно найти, если провести перпендикуляр.

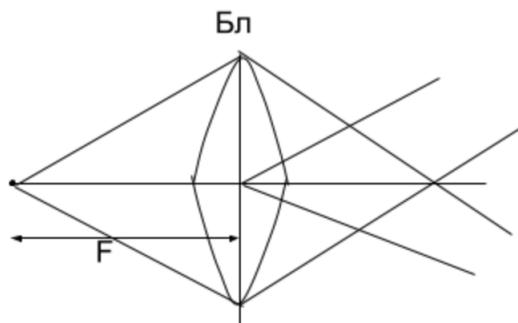


Рис. 8.2. Источник в фокусе билинзы

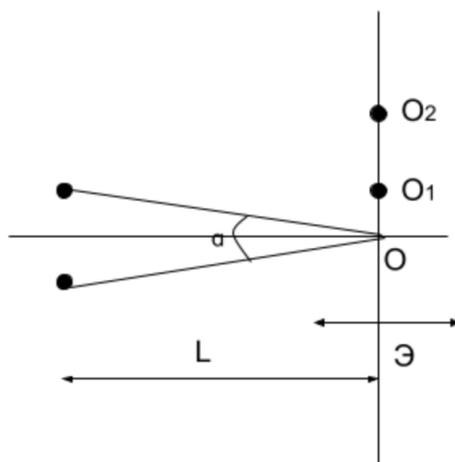


Рис. 8.3. Нахождение угла схождения

Изменение ширины полос при сдвиге бипризмы

Пусть есть бипризма, источник и экран. На экране полосы ширины Δx_1 . Расстояние от источника до бипризмы — a , а расстояние от бипризмы до экрана — b . Ис-

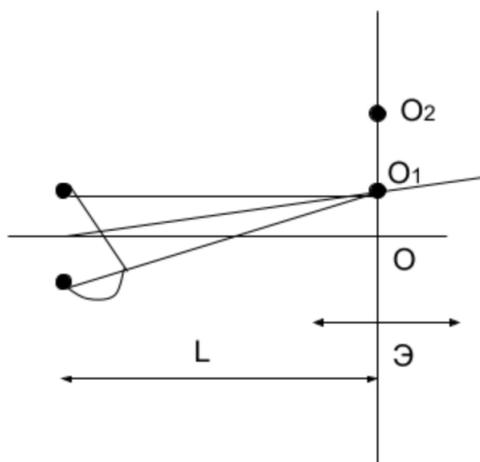


Рис. 8.4. Нахождение разности хода

точник точечный. Заданы λ , n , θ . Требуется найти куда и на сколько надо сдвинуть бипризму, чтобы Δx_2 была в два раза больше.

$$\Delta x_2 = 2\Delta x_1$$

Необходимо выпустить 4 луча из источника (2 луча из верхней части и 2 луча из нижней части), чтобы получилась интерференционная картина. Луч отклоняется на угол $\theta(n-1)$.

$$\Delta x = \frac{\lambda \cdot L}{d}$$

При перемещении бипризмы на $\frac{a}{2}$:

$$d_{\text{н}} = \frac{d}{2}$$

$$d = 2\theta(n-1) \cdot a$$

Количество полос необходимо найти, поделив область интерференции на ширину полосы. При перемещении бипризмы область интерференции и ширина полос меняются.

Интерференция квазимонохроматического света

Почти идеальный источник называется квазимонохроматическим.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \ll 1$$

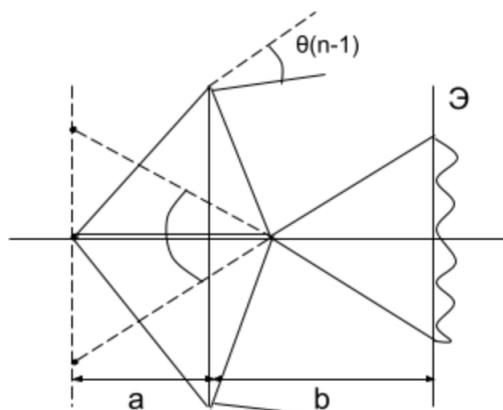


Рис. 8.5. Изменение ширины полос при сдвиге бипризмы

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda = -\frac{k}{\lambda}d\lambda$$

$$\frac{c\Delta k}{ck} = \frac{\Delta\omega}{\omega}$$

$$c = \frac{\omega}{k}$$

Необходимо найти интерференционную картину на экране, если источник излучает 2 волновых числа: k_1, k_2 . Чтобы найти результирующую интерференционную картину, надо сложить интенсивность. Для каждого волнового числа записывается своя картина:

$$I_1 = 2I_0(1 + \cos k_1\Delta s)$$

$$I_2 = 2I_0(1 + \cos k_2\Delta s)$$

Результирующая интенсивность записывается в следующем виде:

$$I = 4I_0 \left(1 + \cos \frac{\Delta k \Delta s}{2} \cos k \Delta s \right)$$

Видность картины записывается следующим образом:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2 \cos \frac{\Delta k \Delta s}{2}}{2} = \left| \cos \frac{\Delta k \Delta s}{2} \right|$$

Из графика видности можно получить график интенсивности.

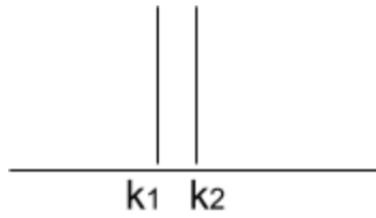


Рис. 8.6. Интерференция квазимонохроматического света

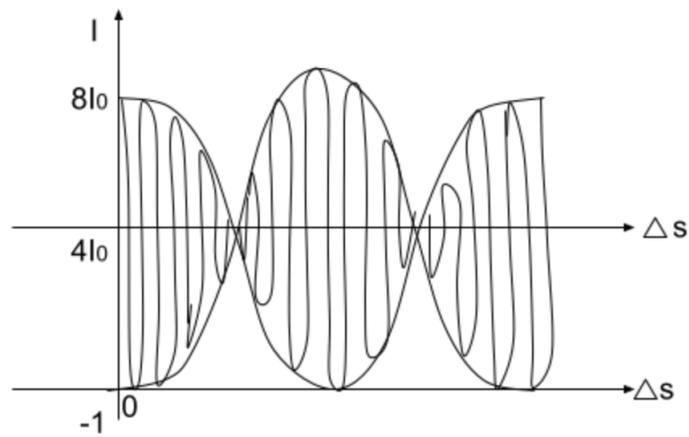


Рис. 8.7. Зависимость интенсивности от разности хода

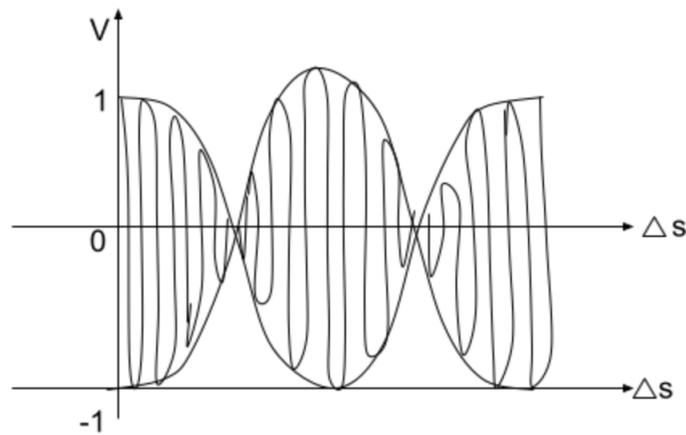


Рис. 8.8. Зависимость видности от разности хода

$$\frac{\Delta k \Delta s_{\text{проп}}}{2}$$

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\pi}{2} = \frac{k\Delta\lambda}{\lambda} \Delta s_{\text{проп}} = \pi$$

$$m_{\text{проп}} \lambda = \Delta s_{\text{проп}} = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$$

$$m_{\text{проп}} = \frac{\lambda}{2\Delta\lambda}$$

Пусть есть интерференционная картина для монохроматического источника.

$$\Delta x = \frac{\lambda \cdot L}{d}$$

Ширина интерференционных полос меняется, но максимум нулевого порядка будет в одном и том же месте. Максимум первого порядка для второй длины волны сместится. Размытие произойдет тогда, когда максимум для одной волны будет там, где минимум для другой волны. Условия максимума и минимума записываются следующим образом:

$$m_{\text{проп}} \lambda_1 = \left(m_{\text{проп}} \pm \frac{1}{2} \right) \lambda_2$$

$$\lambda_1 = \lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}$$

$$\lambda_2 = \lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}$$

$$m\lambda - m \frac{\Delta\lambda}{2} = m\lambda + m \frac{\Delta\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} - \frac{\Delta\lambda}{4}$$

$$m\Delta\lambda = \frac{\lambda}{2}$$

$$m_{\text{проп}} = \frac{\lambda}{2\Delta\lambda}$$

Квазимонохроматический источник с прямоугольным спектром

Пусть источник излучает все длины волн с прямоугольным спектром. Необходимо понять принцип расчета интерференционной картины для квазимонохроматического источника с прямоугольным спектром.

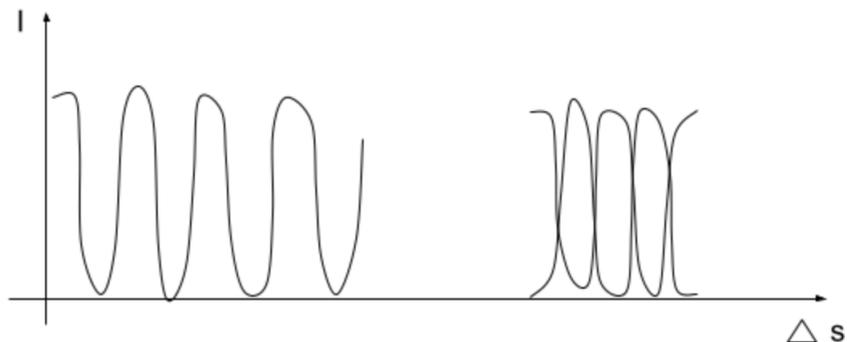


Рис. 8.9. Максимум и минимум волн

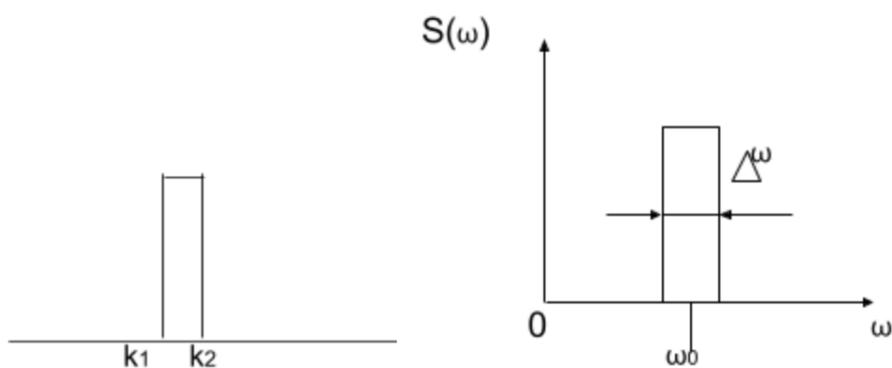


Рис. 8.10. Квазимонохроматический источник с прямоугольным спектром

Интеграция по всей спектральной плотности по всем частотам дает интенсивность источника:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$$

В прямоугольном спектре был вырезан $d\omega$, для которого необходимо записать распределение интенсивности:

$$I = 2I_0(1 + \cos k\Delta s) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{ck\Delta s}{c} \right)$$

$$dI = dI_0 \left(1 + \cos \frac{\omega\tau\Delta s}{c} \right)$$

$$dI_0 = S(\omega) d\omega$$

$$dI = S(\omega)d\omega \left(1 + \cos \frac{\omega\tau\Delta s}{c} \right)$$

$$I = I_0 + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos \omega\tau d\omega$$

Фурье преобразование сигнала записывается как:

$$f(t) \rightarrow F(\omega)$$

$$F^*(\omega) = F(\omega)$$

$$S(\omega) = FF^*$$

$S(\omega)$ — четная функция.

$$I = I_0 + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

Таким образом, получается чистое преобразование Фурье. При заполнении прямоугольника высокой частотой получается следующее выражение:

$$I = I_0 + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = I_0 \left(1 + \text{sinc} \left(\frac{\Delta\omega\tau}{2} \right) \cos \omega_0\tau \right)$$

Зная форму линии в спектре источника, можно получить видность интерференционной картины.

$$\frac{\Delta k \Delta s}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\Delta k \Delta s}{2} = \pi$$

Результат отличается в 2 раза. Пропадание интерференционной картины в случае, когда источник испускает спектр шириной $\Delta k, \Delta s, \Delta \lambda$ будет:

$$m_{\text{проп}} = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = \frac{\omega}{\Delta \omega} = \frac{k}{\Delta k}$$

Таким образом, получается условие пропадания для квазимонохроматического источника, излучающего какой-то спектр.

Семинар 9. Интерференция от протяженного источника

Самостоятельная работа (билинза и квазимонохроматический источник)

Пусть есть тонкая линза с диаметром $D = 122 \text{ mm}$. Фокусное расстояние $F = 1000 \text{ mm}$. Из линзы удаляют кусок и сдвигают. Таким образом, получается билинза:

$$h = 2 \text{ mm}$$

Установлен точечный источник на фокусном расстоянии. Источник квазимонохроматический.

$$\lambda = 600 \text{ nm}$$

$$\Delta\lambda = 4 \text{ nm}$$

Пусть есть экран, который можно перемещать. Требуется найти максимальное количество полос N_{max} , которое можно увидеть на экране. Также требуется найти расстояние L экрана от линзы, чтобы можно было увидеть максимальное количество полос.

$$\theta = \frac{h}{F}$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\theta}$$

Ширина полос не зависит от расположения экрана. Экран надо ставить там, где область интерференции максимально широкая.

$$H = \frac{D-h}{2} = 60 \text{ mm}$$

$$\Delta x = \frac{600 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{\frac{2}{1000}} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,3 \text{ mm}$$

$$N = \frac{60}{0,3} = 200$$

$$m_{\text{проп}} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{600}{4} = 150$$

$$\frac{H}{L} = \theta$$

$$L = \frac{H}{\theta} = \frac{60 \text{ mm}}{\frac{2}{1000}} = 30 \text{ m}$$

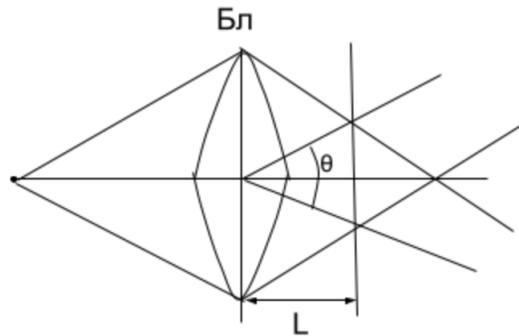


Рис. 9.1. Билинза и квазимонохроматический источник

Пространственная и временная когерентность

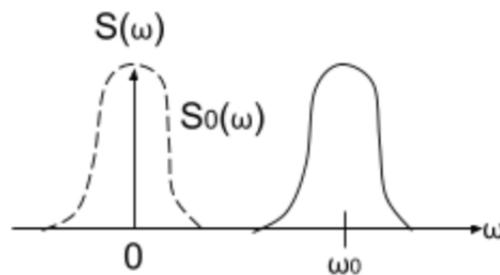


Рис. 9.2. Спектр

Интерференционный член пропорционален следующему интегралу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

$$I = 4I_0 \left(1 + \frac{\int S_0(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega}{\int S_0(\omega) d\omega} \cos \omega_0 \tau \right)$$

Видность интерференционной картины:

$$V = \left| \frac{\int S_0(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega}{\int S_0(\omega) d\omega} \right|$$

Пусть линия спектра имеет форму Гауссова.

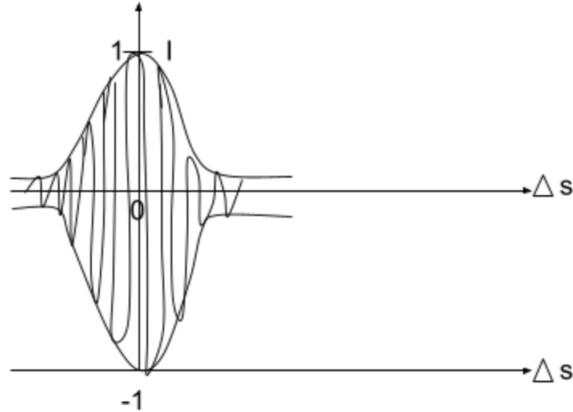


Рис. 9.3. Получение графика интенсивности из графика видности

$$\Delta s_{\text{проп}} = m_{\text{проп}} \lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} = l_{\text{кг}}$$

$l_{\text{кг}}$ — длина когерентности.

$$\tau_{\text{кг}} = \frac{l_{\text{кг}}}{c}$$

Излучение идет пучками. Длительность пучка — Δt .

$$\tau_{\text{кг}} = \frac{l_{\text{кг}}}{c} = \frac{\lambda^2}{c \Delta \lambda} = \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = \frac{1}{v} \cdot \frac{v}{\Delta v} = \frac{1}{\Delta v} = \Delta t_{\text{п}}$$

$$\Delta t_{\text{п}} \cdot \Delta v = 1$$

Протяженный монохроматический источник

Пусть есть протяженный монохроматический источник. Размер источника — D . Излучение идет независимо, поэтому необходимо разбить источник на маленькие куски, чтобы получить интерференционную картину. Пусть точечный источник был приподнят. Тогда интерференционная картина передвинется вниз.

$$\Delta S_x = \frac{x \cdot d}{L}$$

$$\Delta S_y = \frac{y \cdot d}{H}$$

Также можно провести перпендикуляр для нахождения разности хода. Чтобы найти положение нулевого порядка интерференции, необходимо соединить приподнятый источник с центром.

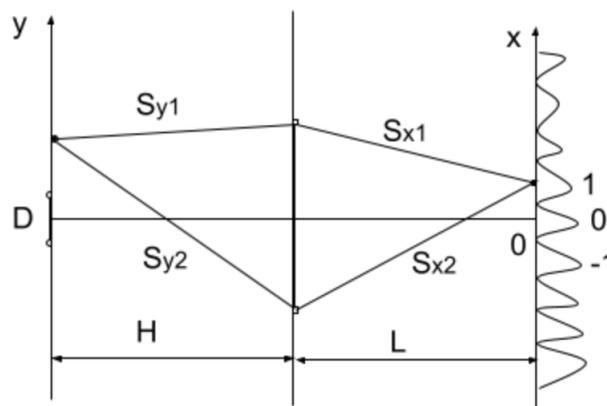


Рис. 9.4. Протяженный монохроматический источник

Из крайней точки источника к центру проводится линия. Требуется найти размер источника, при котором картина полностью размывается.

$$\Delta S_y \left(y = \frac{D}{2} \right) = \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\frac{D}{2} d}{H} = \frac{\lambda}{2}$$

Таким образом, условие пропадаания записывается в следующем виде:

$$D \cdot d = \lambda \cdot H$$

Берется кусок источника dy с интенсивность:

$$dI_0 = \frac{I_0}{D} dy$$

Распределение интерференционной картины для источника dy :

$$dI = \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} dI_0 (1 + \cos k(\Delta S_x + \Delta S_y))$$

$$I = I_0 \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \frac{I_0}{D} \cos k\Delta s_y \cdot \cos k\Delta s_x dy =$$

$$= I_0 \left(1 + \operatorname{sinc} \left(\frac{kDd}{2H} \right) \cos k\Delta s \right) = I_0 \left(1 + \operatorname{sinc} \left(\pi \frac{Dd}{\lambda H} \right) \cos k\Delta s \right)$$

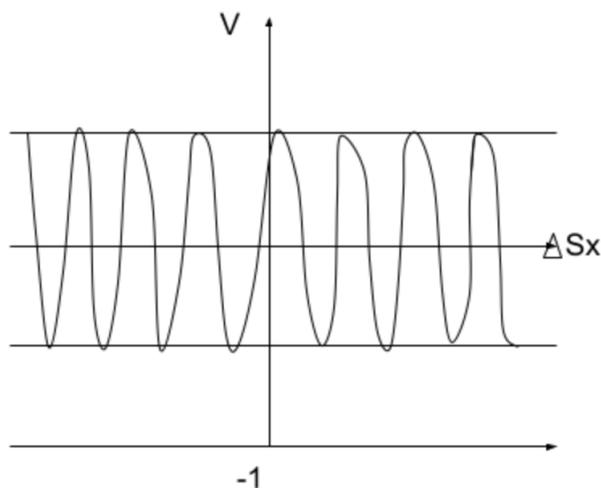


Рис. 9.5. График зависимости интенсивности от разности хода

Протяженный квазимонохроматический источник. Радиус когерентности

Видность для протяженного квазимонохроматического источника записывается следующим образом:

$$V = V_{\text{прот}} \cdot V_{\text{КВМН}}$$

Условие пропадания:

$$Dd = \lambda H$$

Условие, при котором картина еще видна:

$$\frac{Dd}{\lambda H} = \frac{1}{2}$$

При таком условии видность:

$$V = \operatorname{sinc} \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi} \approx 0.64$$

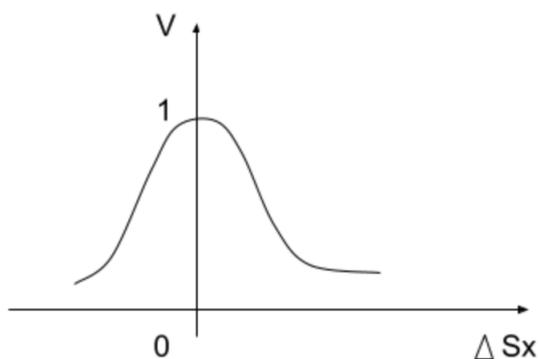


Рис. 9.6. Видность для квазимонохроматического источника

$$\Omega = \frac{d}{H}$$
$$D < \frac{\lambda H}{d} = \frac{\lambda}{\Omega}$$

Ω — угол интерференции. ψ — угловой размер источника.

$$d = \frac{\lambda H}{D} = \frac{\lambda}{\psi}$$

d — радиус когерентности (расстояние между отверстиями), при котором интерференционная картина полностью размывается.

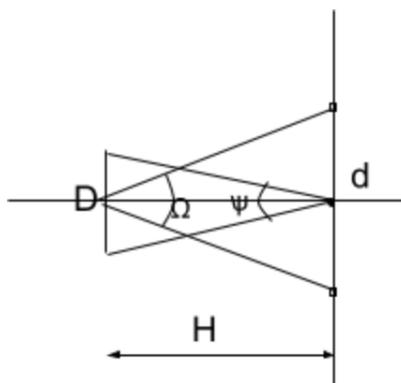


Рис. 9.7. Радиус когерентности

Семинар 10. Метод деления амплитуды.

Интерференция в тонких пленках

Самостоятельная работа (протяженный источник)

Пусть есть протяженный источник. На экране наблюдается интерференционная картина, в которой видны минимумы и максимумы. Известно, что по всей картине:

$$\frac{I_{min}}{I_{max}} = \frac{\pi - 2}{\pi + 2}$$

Требуется найти расстояние и сторону, на которые надо подвинуть источник, препятствие с отверстиями и экран, чтобы видность картины стала равной 0.

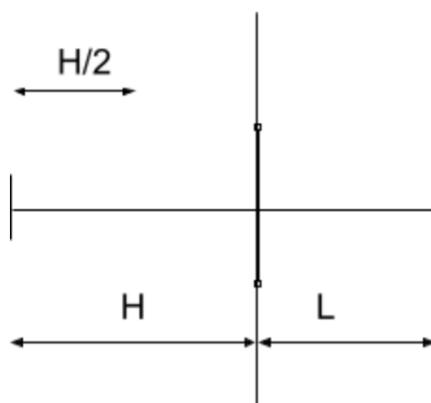


Рис. 10.1. Протяженный источник

Видность определяется следующим образом:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2}{\pi}$$

Видность протяженного источника записывается в следующем виде:

$$V = \text{sinc} \left(\pi \frac{Dd}{\lambda H} \right)$$

$$\frac{Dd}{\lambda H} = \frac{1}{2}$$

Таким образом, источник необходимо подвинуть вправо на $\frac{H}{2}$. Препятствие необходимо подвинуть влево на $\frac{H}{2}$. Перемещение экрана не влияет на видность интерференционной картины.

Бипризма и протяженный источник

Пусть есть бипризма, экран и точечный источник. Расстояние от бипризмы до источника — a , а расстояние от бипризмы до экрана — b . Луч отклоняется на угол $\theta(n-1)$. Если источник подвинуть вверх на Δy , то изображения сдвинутся вверх на ту же самую величину. Если провести линию от сдвинутого источника через центр до экрана, то разность хода в точке разделения пучка на 2 равна 0. Таким образом, максимум нулевого порядка поднимется вверх на ту же самую величину.

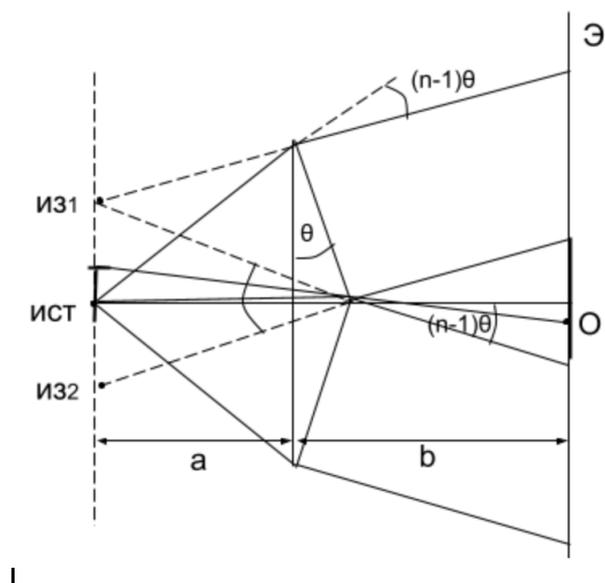


Рис. 10.2. Бипризма и точечный источник

Необходимо найти размер источника, при котором видность равна 0.

$$\frac{D}{a} = \frac{cm}{b}$$

$$\Delta x = \frac{L \cdot \lambda}{d} = \frac{(a+b)\lambda}{2\theta(n-1)a}$$

$$D = \frac{a}{b} \Delta x$$

Пусть есть точечный источник и линза между источником и бипризмой. Источник находится в фокусе. Следовательно, на бипризму падает параллельный пучок. При интерференции плоских волн:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\psi}$$

Пусть источник протяженный. Необходимо найти размер источника, при котором видность интерференционной картины равна 0.

$$\frac{D}{2} = \frac{cm}{b}$$

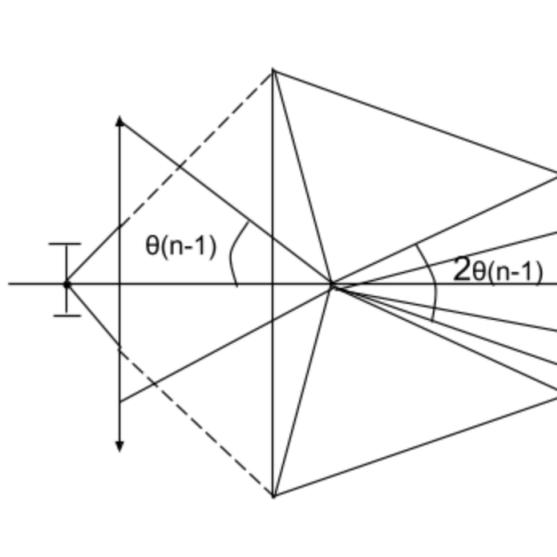


Рис. 10.3. Бипризма и протяженный источник

При смещении экрана будет меняться интерференционная область картины.

Фурье преобразование от функции излучения источника записывается следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(y) e^{ik\Delta s_y} dy$$

Если бы источник излучал по Гауссу, то и видность шла бы по Гауссу.

Метод деления амплитуды. Плоскопараллельная пластина

Деление амплитуды означает, что есть граница раздела двух сред. Когда свет падает на эту границу, возникают отраженная волна и преломленная волна. Эти волны можно соединить зеркалом или пленкой, у которой две поверхности. Первая волна получается при отражении от первой поверхности. Вторая волна получается после преломления на первой поверхности. Третья волна — от отражения на второй

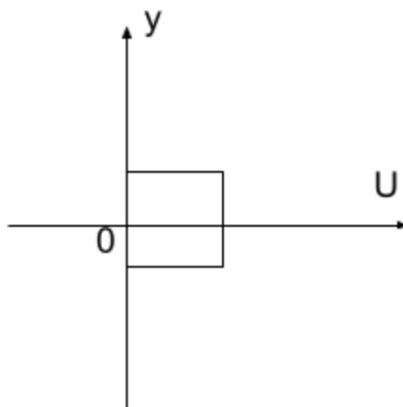


Рис. 10.4. Функция излучения источника

поверхности, и четвертая волна — преломления на первой поверхности. В результате, в отраженном свете есть возможность наблюдать интерференционную картину.

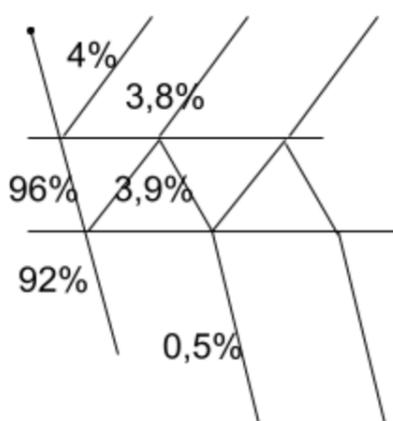


Рис. 10.5. Метод деления амплитуды

От стекла отражается 4% света, а проходит 96%.

Необходимо найти разность хода в плоскопараллельной пластине толщины h и показателя преломления n . Волна падает под углом θ . Отражение происходит под углом θ . Выходят 2 параллельных пучка света. Волны можно соединить в фокальной плоскости, поставив линзу.

$$\Delta s = (OB + BC)n - OD$$

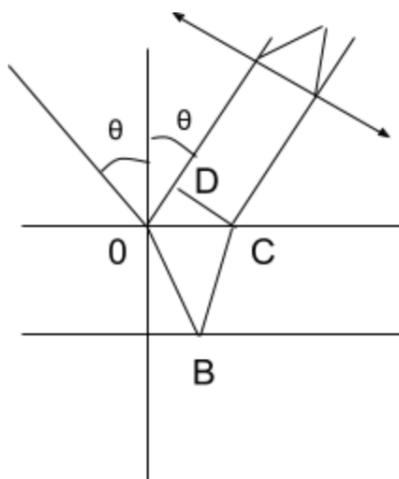


Рис. 10.6. Плоскопараллельная пластина

Линза заставляет интерферировать все пучки, которые идут из источника в изображение.

$$\frac{c}{n} = v = \frac{\omega}{k}$$

$$\Delta\varphi = k\Delta s$$

$$k = k_{\text{возд}} \cdot n$$

$$OB = \frac{h}{\cos \theta'} = BC$$

$$OC = 2h \operatorname{tg} \theta'$$

$$OD = OC \sin \theta$$

$$\Delta s = \frac{2h}{\cos \theta'} \cdot n - 2h \operatorname{tg} \theta' \cdot \sin \theta = \frac{2hn}{\cos \theta'} (1 - \sin^2 \theta') = 2hn \cos \theta'$$

Таким образом, была найдена разность хода между пучками, которые отразились от плоскопараллельной пластинки. При отражении от оптически более плотной среды фаза отраженной волны меняется на противоположную.

$$\Delta s = 2hn \cos \theta' + \frac{\lambda}{2}$$

Требуется найти минимальную толщину пленки с показателем преломления $n = 1,33$, при которой свет λ_1 испытывает максимальное отражение, а свет λ_2 не отражается совсем. Угол падения:

$$\theta = 30^\circ$$

$$\lambda_1 = 0,64 \text{ мкм}$$

$$\lambda_2 = 0,4 \text{ мкм}$$

Разность хода первой волны:

$$\Delta s_1 = 2hn \cos \theta' + \frac{\lambda_1}{2} = m_1 \lambda_1$$

Разность хода второй волны:

$$\Delta s_2 = 2hn \cos \theta' + \frac{\lambda_2}{2} = \left(m_2 + \frac{1}{2}\right) \lambda_2$$

$$\left(m_1 - \frac{1}{2}\right) \lambda_1 = \left(m_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \lambda_2$$

Получение интерференции в тонких пленках. Полосы равного наклона

Пусть плоскопараллельная пластинка, на которую падает плоская волна от линзы. Выходящие лучи соединяются в линзе, и на фокальной плоскости второй линзы находится экран. Луч излучается точечным монохроматическим источником. На экране будет видна точка. Если разность хода целое число длин волн, то точки будут усиливать друг друга. Если разность хода полуцелое число длин волн, то точки будут друг друга косить. Интерференционной картины не будет.

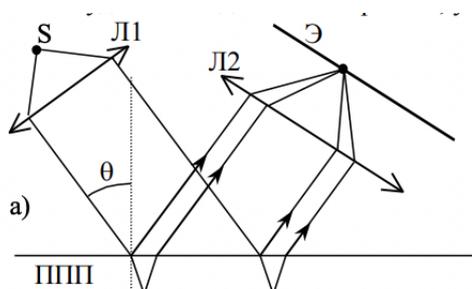


Рис. 10.7. Получение интерференции при присутствии линзы

Пусть нет второй линзы. Тогда будет просто освещенный экран без интерференционной картины. Интерференционная картина получается только в области наложения двух параллельных волн.

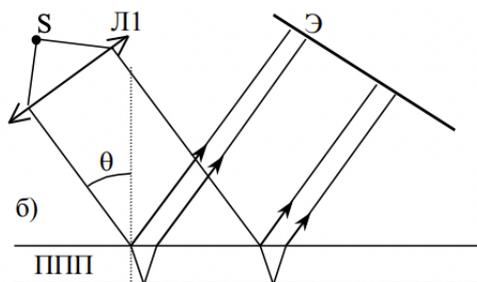


Рис. 10.8. Получение интерференции при отсутствии второй линзы

Пусть нет первой линзы. Тогда необходимо строить изображение. экран будет стоять параллельно к пластине. Таким образом, будут видны кольца. В центре порядок интерференции максимальный.

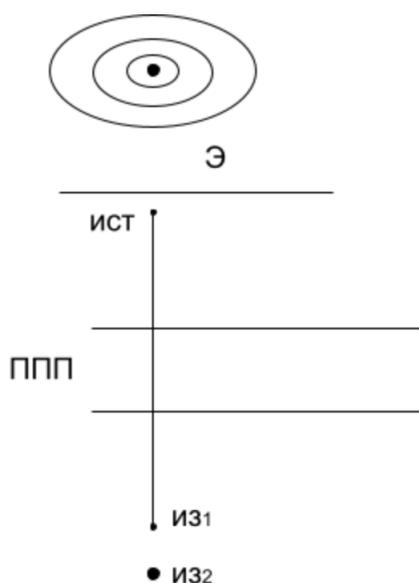


Рис. 10.9. Получение интерференции при отсутствии первой линзы

Пусть источник протяженный. Интерференционная картина для каждой точки источника одинакова и находится в одном и том же месте. Они локализованы на бесконечности и их называют полосами равного наклона.

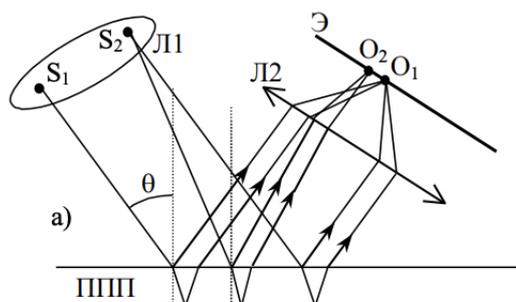


Рис. 10.10. Получение интерференции при протяженном источнике

Семинар 11. Полосы равной толщины. Многолучевая интерференция

Самостоятельная работа (тонкая пленка)

Пусть есть тонкая пленка: воздух \rightarrow вода \rightarrow нефть. Показатели преломления:

$$n_{\text{в}} = 1,33$$

$$n_{\text{н}} = 1,1$$

На тонкую пленку падает излучение белого цвета. Известно, что для трех длин волн свет не отражается.

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$$

$$\lambda_1 = 500 \text{ nm}$$

$$\lambda_3 = 600 \text{ nm}$$

Необходимо найти λ_2 с точностью один знак после запятой. Требуется найти λ_{12} и λ_{23} , для которых отражение максимальное. Разность хода записывается следующим образом:

$$\Delta s = 2hn \cos \theta' + \frac{\lambda}{2} = \left(m_1 + \frac{1}{2}\right) \lambda_1 = (m - 1) \lambda_2 = (m_1 - 2) \lambda_3$$

$$m_1 \lambda_1 = m_1 \lambda_3 - 2 \lambda_3$$

$$2 \lambda_3 = m_1 (\lambda_3 - \lambda_1)$$

$$m_1 = \frac{2 \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_1} = \frac{1200}{100} = 12$$

$$m_1 \lambda_1 = 6000$$

Следовательно:

$$\lambda_2 = \frac{6000}{11} = 545,4545$$

Таким образом, λ_{12} и λ_{23} , для которых отражение максимальное, получаются следующими:

$$\lambda_{12} = \frac{6000}{1165} = 521,7 \text{ nm}$$

$$\lambda_{23} = \frac{6000}{10,5} = 571,4 \text{ nm}$$

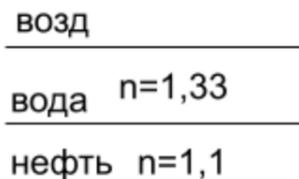


Рис. 11.1. Тонкая пленка

Клинообразная пластинка

Пусть есть клинообразная пластина с показателем преломления n и углом $\alpha \ll 1$. Пусть есть источник на фокусе первой линзы и экран на фокусе второй линзы. На первую поверхность падает плоская волна, отражается под тем же углом. На второй поверхности происходит преломление отражения. В фокальной плоскости линзы на экране будут наблюдаться 2 точки.

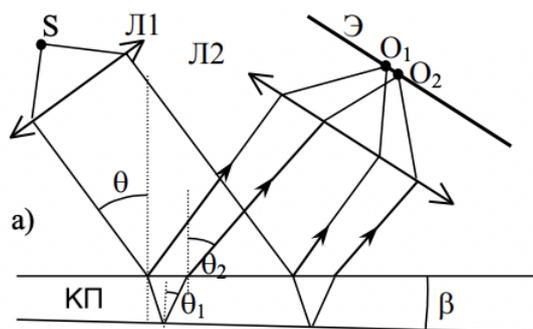


Рис. 11.2. Клинообразная пластина

При отсутствии второй линзы будет наблюдаться равномерная интерференция. Интерференция будет в области наложения двух пучков.

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\beta} = \frac{\lambda}{2\alpha n}$$

Пусть отсутствует первая и вторая линзы. Необходимо построить 2 точечных изображения. Таким образом, будет система интерференционных колец. Пусть центр колец темный. Разность хода и порядок интерференции меньше на единицу в первом темном кольце вблизи центра.

$$\Delta s = 2hn \cos \theta + \frac{\lambda}{2}$$

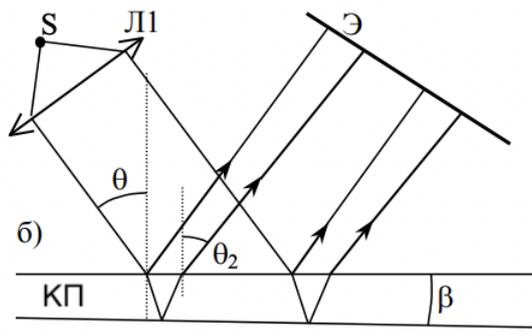


Рис. 11.3. Клинообразная пластина при отсутствии второй линзы

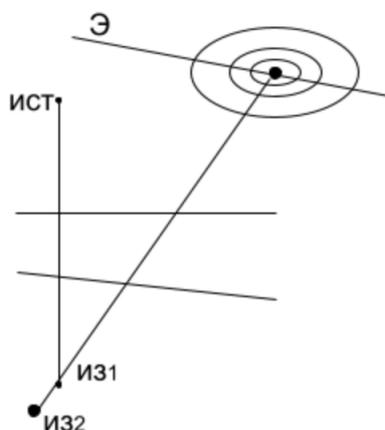


Рис. 11.4. Клинообразная пластина при отсутствии линз

Интерференция на клине в случае протяженного источника. Полосы равной толщины

Пусть есть клинообразная пластина и протяженный источник. Пусть глаз смотрит на какую-то точку на поверхности. Сетчатка глаза — экран. Лучи, вышедшие из этой точки и попавшие в глаз, соберутся в сетчатке. Появляется разность хода от источника до точки на поверхности. Первый луч от источника до точки доходит по прямой под углом θ . Второй луч попадает, преломляясь. Размер источника D . Требуется найти размер источника, при которых можно наблюдать интерференционную картину. Расстояние от источника до точки на поверхности пленки — H . Угловой размер источника:

$$\psi = \frac{D}{H}$$

$$d\theta = \psi$$

Пусть клин воздушный. Тогда разность хода записывается следующим образом:

$$\Delta s = 2hn \cos \theta + \frac{\lambda}{2}$$

$$d(\Delta s) = 2h \sin \theta d\theta$$

$$\psi < \frac{\lambda}{2h \sin \theta} \approx 0,1$$

Размер источника не влияет на видность интерференционных картин. В случае протяженного источника интерференционная картина может наблюдаться локализована только на поверхности клина. На изменение разности хода влияют 2 параметра: угол наклона и толщина. Поэтому есть полосы равной толщины и полосы равного наклона.

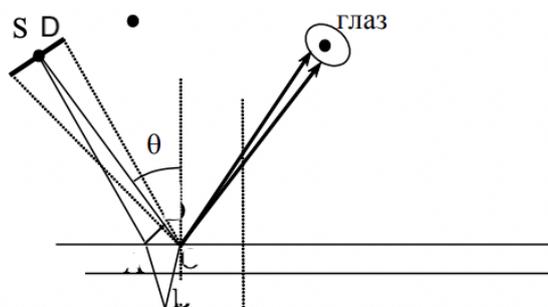


Рис. 11.5. Интерференция на клине в случае протяженного источника

Полосы равной толщины и полосы равного наклона — это интерференционные полосы, наблюдаемые при падении излучения от протяженного источника на тонкую пленку. Интерференционная картина возникает при наложении волн, отраженных от двух границ тонкой пленки.

Полосы равного наклона локализованы на бесконечности, каждая из полос соответствует определенной разности хода, обусловленной одним и тем же углом падения (наклона) излучения на пленку.

Полосы равной толщины локализованы на поверхности пленки, каждая из полос соответствует определенной разности хода, обусловленной одной и той же толщиной пленки. В кольцах Ньютона в качестве тонкой пленки выступает воздушный зазор между сферической поверхностью линзы и плоской поверхностью, на которой линза лежит. Полосы равной толщины в этом случае — кольца.

Многолучевая интерференция. Интерферометр Фабри – Перо

Интерферометр Фабри – Перо представляет собой плоскопараллельную стеклянную пластину, на поверхности которой нанесены высоко отражающие покрытия (или два плоских зеркала, разделенные воздушным промежуток). Падающая волна частично отражается и частично проходит через первую границу. Такое же разделение происходит при каждом пересечении любой из отражающих поверхностей. В результате возникает большое (бесконечное) число отраженных и прошедших волн. Если на пути отраженных или прошедших волн установить собирающую линзу, то в ее фокальной плоскости сформируется интерференционная картина (многоволновая) в виде колец равного наклона. Разность хода:

$$\Delta s = 2hnc \cos \theta' = m\lambda$$

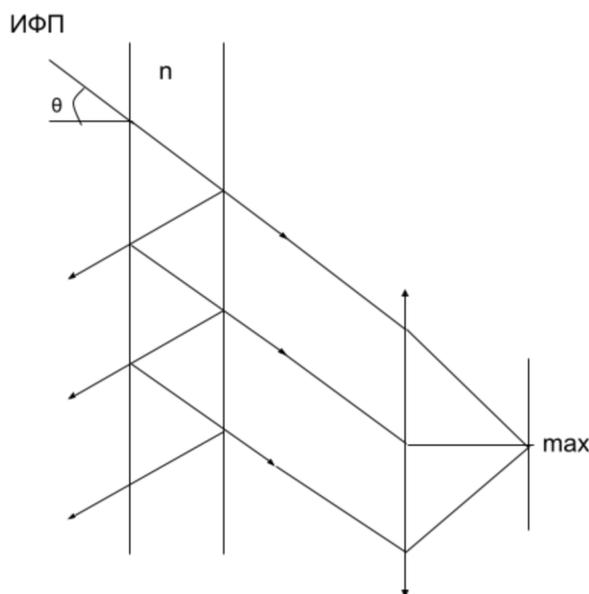


Рис. 11.6. Интерферометр Фабри – Перо

Для интенсивностей получается следующая формула:

$$I_{\text{прош}} = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R^2)} \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)}$$

Разность фаз δ между двумя соседними лучами, прошедшими через пластину толщины h с показателем преломления n под углом θ , задается формулой:

$$\delta = k\Delta s = k2hn \cos \theta'$$

$$\delta = 2\pi m \quad I_{\text{прош}} = I_0$$

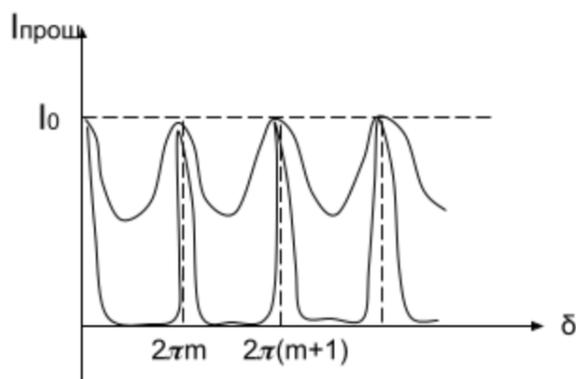


Рис. 11.7. График зависимости интенсивности

Интерференционную картину можно получить из фокуса линзы. Таким образом, при изменении толщины h получится равномерная засветка. Интерференционной картины не будет. Интерференционную картину можно увидеть в виде колец, если поменять угол падения. В случае протяженного источника интерференционная картина будет такая же, как и при точечном источнике. Поэтому интерференционная картина (полосы равного наклона) будет очень яркой и отчетливой, и она локализована в бесконечности.

Зеркала обладают высоким коэффициентом отражения для довольно узкого диапазона длин волн. При изменении угла падения света на зеркало оптическая толщина слоя изменяется, что приводит к смещению диапазона длин волн, отражаемых зеркалом.

Семинар 12. Дифракция Френеля. Часть 1

Разбор контрольной работы

Пусть есть воздушная плоскопараллельная пластина. Разность хода записывается следующим образом:

$$\Delta s = 2h \cos \theta$$

$$h = 21 \frac{1}{3} \lambda$$

В центре разность хода будет:

$$\Delta s = 42 \frac{2}{3} \lambda$$

$$\cos \theta_3 = \frac{40}{42 \frac{2}{3}}$$

Принцип Гюйгенса-Френеля. Дифракционный интеграл

Дифракция света — это совокупность физических явлений, обусловленных волновой природой света, наблюдаемых при распространении ограниченных в пространстве пучков света, а также в среде с резко выраженной оптической неоднородностью (например, при прохождении через отверстия в экранах, вблизи границ непрозрачных тел и т.п.).

Если есть источник, от которого идет волна, то дифракция имеет место, когда появляется какое-либо препятствие.

Для объяснения дифракции можно использовать принцип Гюйгенса-Френеля. Каждая точка волнового фронта принимается за источник вторичных волн, распространяющихся во все стороны, при этом волновой фронт в любой последующий момент времени есть огибающая этих вторичных волн. Френель дополнил принцип Гюйгенса утверждением, что в любой момент времени световое поле в рассматриваемой точке есть результат интерференции вторичных волн.

Пусть на пути сферической световой волны, исходящей из точечного источника P_0 , находится плоский непрозрачный объект с отверстием Σ . В соответствие с принципом Гюйгенса-Френеля комплексная амплитуда поля $U(P)$ может быть найдена с помощью интегральной формулы Френеля:

$$U(P) = \int_{\Sigma} \frac{A}{r} e^{ikr} \cdot \frac{e^{iks}}{s} d\sigma k(\chi)$$

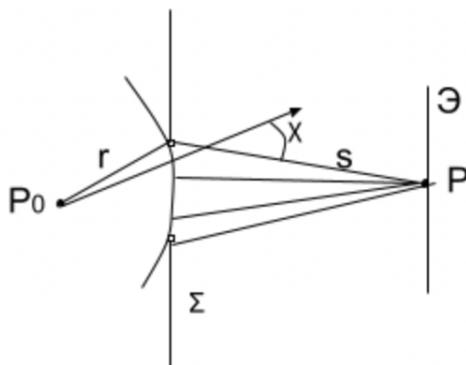


Рис. 12.1. Принцип Гюйгенса-Френеля

Векторная диаграмма. Зоны Френеля

Пусть есть кольца. Первый вторичный источник находится в центре. Расстояние от источника до центра — a . Расстояние от центра до точки выхода — b . В таком случае фазы изменятся. Амплитуда зависит от площади вторичного источника, а фаза зависит от разности хода. Амплитуда пропорциональна площади. Разность хода для точки, удаленной на расстояние r :

$$(r + s) - (a + b)$$

$$r = \sqrt{a^2 + R^2} = a\sqrt{1 + \frac{R^2}{a^2}} \approx a\left(1 + \frac{R^2}{2a^2}\right)$$

$$\Delta s_r = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{b}\right)$$

Предполагается, что разбитые кольца одинаковые по площади, чтобы амплитуда была одинаковой.

$$d\sigma = const$$

Из разности хода можно получить разность фаз:

$$\Delta\varphi = k\Delta s = k\frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

При переходе от одного кольца в другой:

$$d(\Delta\varphi) \sim d(R^2) \sim 2RdR$$

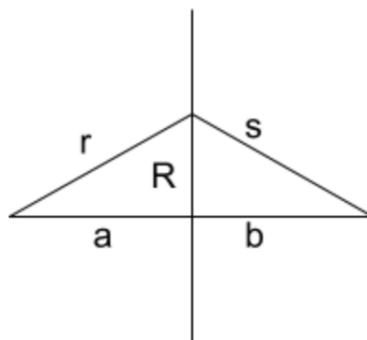


Рис. 12.2. Точка, удаленная на расстояние r

Все вектора будут иметь одну и ту же длину и будут поворачиваться на один и тот же угол. Таким образом, для интеграла Гюйгенса-Френеля получится окружность. Сферическая поверхность Σ разбита на зоны Френеля.

$$\Delta s_m = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = m \frac{\lambda}{2}$$

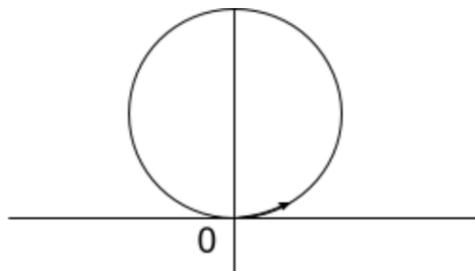


Рис. 12.3. Зоны Френеля

Следовательно получается формула для радиуса зоны Френеля:

$$R_m^2 = \frac{m\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

При $a \rightarrow \infty$:

$$R_m^2 = m\lambda b$$

$$R_1^2 = \lambda b$$

$$R_1 R_1 = \lambda b$$

Когда открыта первая зона Френеля, имеется максимальное значение. Если открыта вторая зона Френеля, имеется минимальное значение. За счет медленно спадающей функции окружность превратится в спираль.

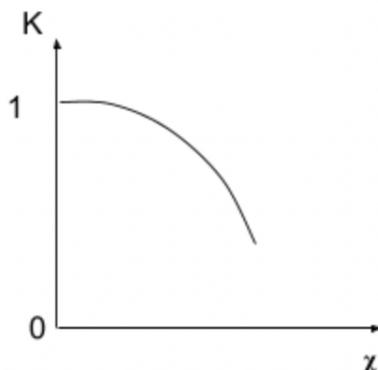


Рис. 12.4. Медленно спадающая функция

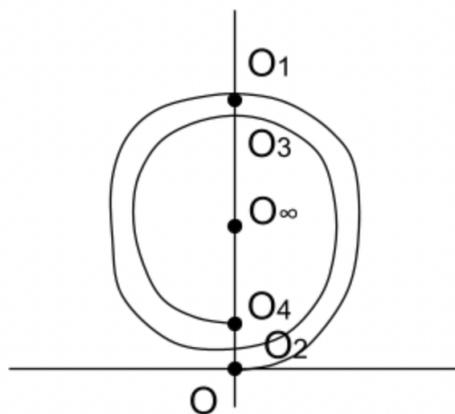


Рис. 12.5. Спираль

За амплитуда поля отвечает вектор OO_{∞} .

$$OO_{\infty} = A_0$$

$$OO_1 = 2A_0$$

$$I_1 = 4I_0$$

$$OO_2 \approx 0$$

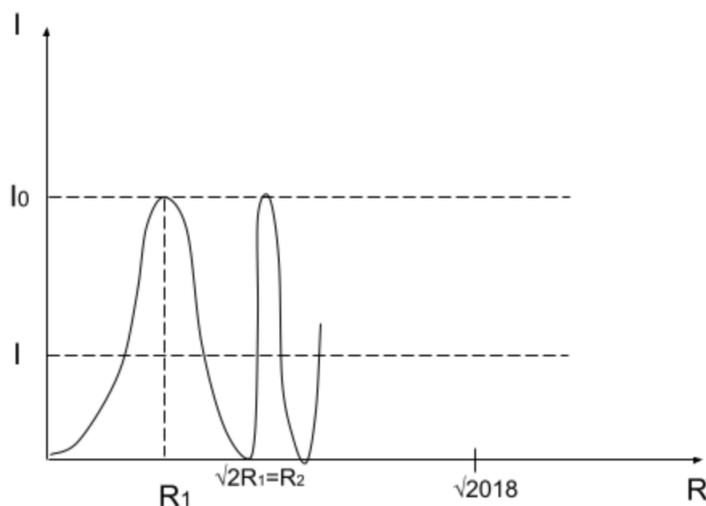


Рис. 12.6. График зависимости интенсивности от радиуса

$$R_m^2 \sim m$$

$$R_m \sim \sqrt{m}$$

Пусть падает плоская волна. Необходимо нарисовать график зависимости I от b , где b — расстояние от препятствия до точки наблюдения. Точка b_1 соответствует первой зоне Френеля, где интенсивность $4I_0$. Точка, которая соответствует двум зонам Френеля, — $\frac{b_1}{2}$. Точка, которая соответствует трем зонам Френеля, — $\frac{b_1}{3}$.

Пусть есть спираль, на которой известны границы первой, второй и третьей зоны. Пусть есть конкретные R , a , b , λ . Можно найти число зон Френеля:

$$m = \frac{1}{3}$$

Границы зон Френеля выбираются следующим образом:

$$\Delta s_m = m \frac{\lambda}{2}$$

Разность фаз записывается следующим образом:

$$l\Delta s = km \frac{\lambda}{2}$$

$$\Delta \varphi_m = m\pi$$

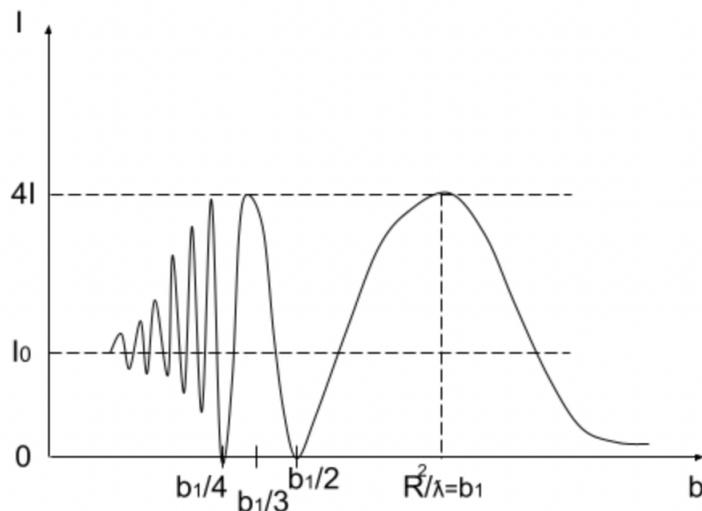


Рис. 12.7. График зависимости интенсивности от b

Задачи по дифракции Френеля

Пусть есть пластина, у которой центральное пятно открыто. Потом идут непрозрачная и прозрачная части.

$$r_1 = r_0$$

$$r_2 = 2r_0$$

$$r_3 = 3r_0$$

Берется такая точка наблюдения, что r_1 соответствует ровно границе первой зоны Френеля R_1 .

$$r_1 \rightarrow R_1$$

Первое круглое отверстие открывает первую зону Френеля. Вклад от первой зоны на комплексной плоскости — OO_1 .

$$\overline{OO_1} + \overline{O_4O'_9} = 4A_0$$

$$I = 16I_0$$

Берется такая точка наблюдения, что r_1 соответствует ровно границе первой зоны Френеля $R_{\frac{1}{3}}$.

$$r_1 \rightarrow R_{\frac{1}{3}} \rightarrow m = \frac{1}{3}$$

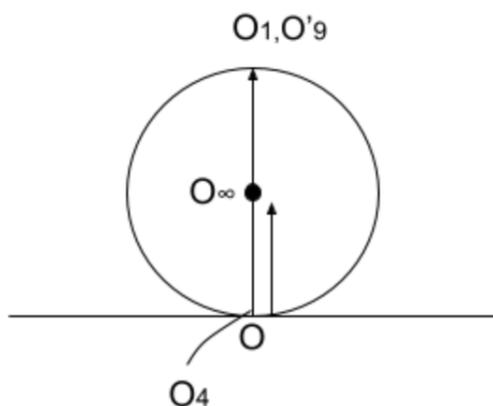


Рис. 12.8. Спираль Френеля

$$r_2 \rightarrow m = \frac{4}{3}$$

$$r_4 \rightarrow m = \frac{9}{3} = 3$$

Открыт участок от O до $O_{\frac{1}{3}}$. Открыт участок от $O_{\frac{4}{3}}$ до O_3

$$\overline{OO_{\frac{1}{3}}} + \overline{O_{\frac{4}{3}}O_3} = 2A_0$$

$$I = 4I_0$$

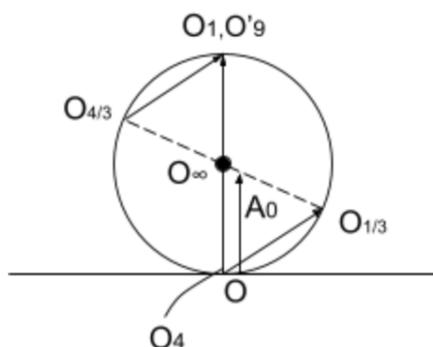


Рис. 12.9. Спираль Френеля

Пусть первое круглое отверстие загоржено, что означает остается половина от-
верстия. Радиус и разность фаз сохраняются, но площадь уменьшается в 2 раза.

Суммарный вектор тоже уменьшится в 2 раза:

$$\frac{1}{2}\overline{OO_{\frac{1}{3}}} + \overline{O_{\frac{4}{3}}O_3} = \frac{3}{2}A_0$$

$$I = \frac{9}{4}I_0$$

В прозрачное кольцо вставляется стеклянная пластинка. Известны толщина h и показатель преломления n стекла. В таком случае изменится разность хода:

$$\Delta s_{\text{доп}} = (n - 1)h$$

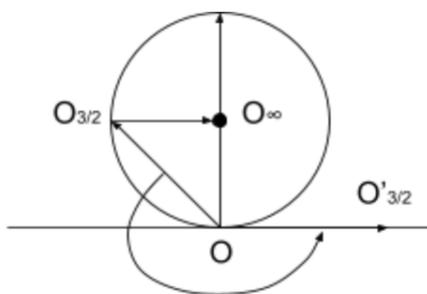


Рис. 12.10. Спираль Френеля

Пусть разность фаз в этом случае имеет следующее значение:

$$\Delta\varphi_{\text{доп}} = \frac{\pi}{2}$$

$$r_1 \rightarrow R_1$$

$$\overline{OO_1} + \overline{O_4O'_9} = 2\sqrt{2}A_0$$

$$I = 8I_0$$

Между источником и точкой наблюдения есть стеклянный диск, который перекрывает $\frac{3}{2}$ зоны Френеля. Необходимо найти толщину диска, при котором получится максимальная и минимальная интенсивность. Для максимального значения поворот должен быть на $\frac{5}{4}\lambda$. Для минимального значения — $\frac{1}{8}\lambda$.

$$\overline{OO'_{\frac{3}{2}}} + \overline{O_{\frac{3}{2}}O_{\infty}} = \sqrt{2}A_0 + A_0$$

Семинар 13. Дифракция Френеля. Часть 2

Самостоятельная работа (дифракция на кольце)

Плоская волна с интенсивностью I_0 и длины волны $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$ падает на некоторый объект (непрозрачное кольцо). Радиус внешней — 1 мм , радиус внутренней — $0,5 \text{ мм}$. Необходимо найти интенсивность на расстоянии 1 м .

$$R^2 = m\lambda b$$

$$(1 \text{ мм})^2 = m \cdot 0,5 \text{ мкм} \cdot 1 \text{ м}$$

Таким образом, для внешней границы:

$$m = 2$$

Для внутренней границы:

$$m = \frac{1}{2}$$

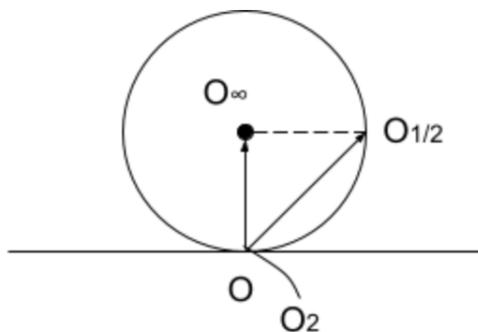


Рис. 13.1. Спираль Френеля

$$\overline{OO_{\frac{1}{2}}} + \overline{O_2O_{\infty}} = 2A_0 + A_0$$

$$I = (2A_0)^2 + (A_0)^2 = 5I_0$$

Во втором случае кольцо стеклянное и прозрачное. Разность фаз:

$$\Delta\varphi = \pi$$

Необходимо найти интенсивность на расстоянии $1m$. Закрыт участок от O_1 до O_2 .

$$(\overline{O_1 O_2})'$$

$$I = (3A_0)^2 + (2A_0)^2 = 13I_0$$

Распределение интенсивности за отверстием при особом условии

Пусть плоская волна падает на круглое отверстие. Точку наблюдения можно менять. Необходимо нарисовать график зависимости I от b , где b — расстояние от препятствия до точки наблюдения. Точка b_1 соответствует первой зоне Френеля, где интенсивность $4I_0$. Точка, которая соответствует двум зонам Френеля, — $\frac{b_1}{2}$. Точка, которая соответствует трем зонам Френеля, — $\frac{b_1}{3}$.

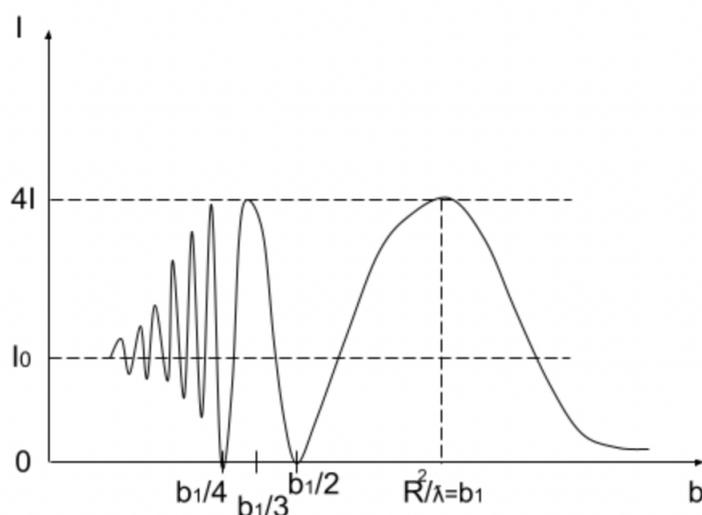


Рис. 13.2. График зависимости интенсивности от b

Предполагается, что источник находится на расстоянии $\frac{R^2}{\lambda}$ от круглого отверстия. Это приводит к:

$$R^2 = \frac{m\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Если $b \rightarrow \infty$, то для бесконечно удаленной точки будет открыта одна зона. I_0 — интенсивность в точке наблюдения в случае, когда нет никакого препятствия.

$$I_0 \sim \frac{1}{l^2}$$

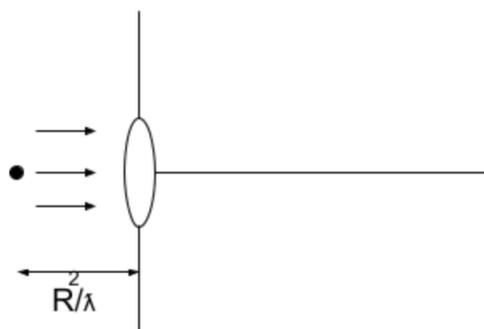


Рис. 13.3. Распределение интенсивности

Дифракция на непрозрачных объектах

Пусть между источником и точкой наблюдения есть непрозрачный диск, который закрывает 10 зон Френеля. Используется график зависимости интенсивности от радиуса непрозрачного диска. Особенностью дифракционной картины на непрозрачном диске является то, что в центре картины всегда наблюдается небольшое светлое пятно, называемое пятном Пуассона.

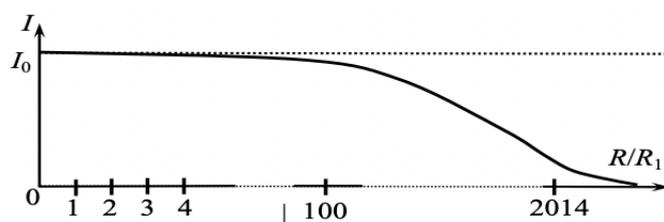


Рис. 13.4. График зависимости интенсивности от радиуса

В непрозрачном диске, который закрывает 3 зоны Френеля, делается вырез в форме полукруга. Необходимо найти радиус полукруга, чтобы получить в центре не пятно Пуассона, а темную точку близкую к 0. Отрыт участок от O_3 до O_∞ .

Пусть закрыта половина пространства и в экране сделана выемка. Открыты участки:

$$\frac{OO_\infty}{2} + \frac{OO_n}{2} = OO_n + \frac{O_nO_\infty}{2}$$

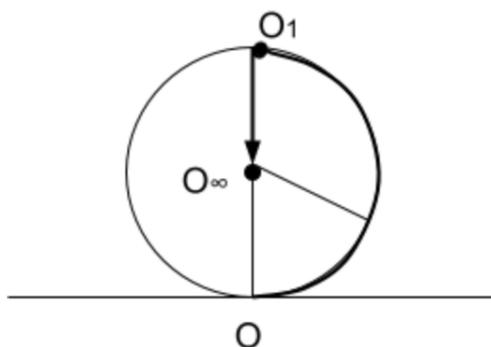


Рис. 13.5. Спираль Френеля

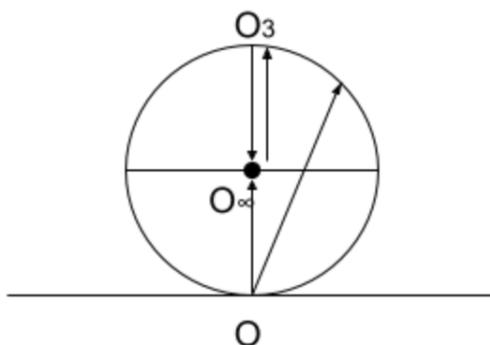


Рис. 13.6. Спираль Френеля для выреза в центре диска

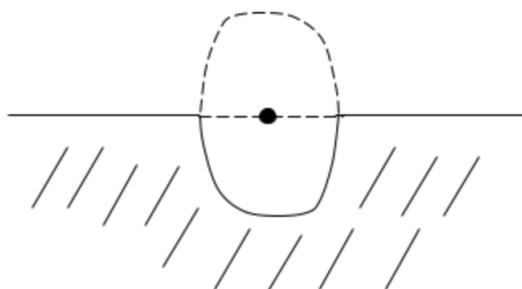


Рис. 13.7. Препятствие в виде выемки

Дифракция на круглом отверстии со стеклянным диском

Пусть есть отверстие в непрозрачном экране, которое открывает 3 зоны Френеля. В отверстие вставляют стеклянный прозрачный диск. Требуется найти минимальный

возможный радиус диска, при котором интенсивность в центре равна 0. Известна разность фаз:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Три зоны Френеля разбиваются на 2 фрагмента. Один из векторов надо повернуть на $\frac{\pi}{2}$ и посмотреть на то, чтобы в сумме начальный вектор и повернутый вектор давали 0.

$$(OO_{\frac{3}{2}}) + O_{\frac{3}{2}}O_3 = 0$$

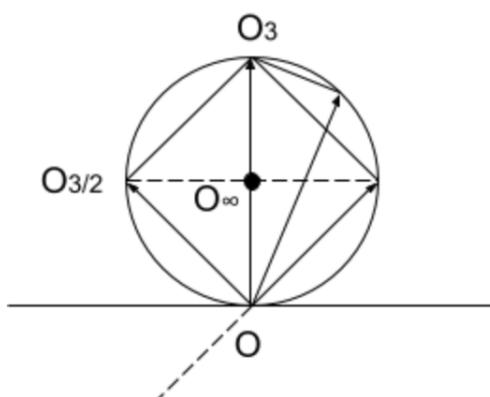


Рис. 13.8. Спираль Френеля при стеклянном диске

Дифракция на отверстие с тонкой линзой

Пусть есть источник и точка наблюдения. Расстояние от отверстия до источника — a . Расстояние от отверстия до точки наблюдения — b . Открыты 3 зоны Френеля. В это отверстие вставляется линза с фокусным расстоянием:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_0}$$

$$\Delta s = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \Delta s_{\text{л}} = 0$$

$$\Delta s_{\text{л}} = -\frac{R^2}{2f}$$

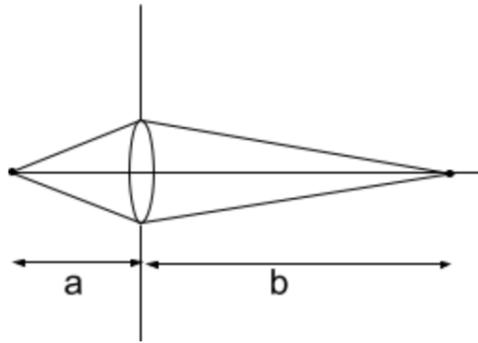


Рис. 13.9. Дифракция на отверстии с тонкой линзой

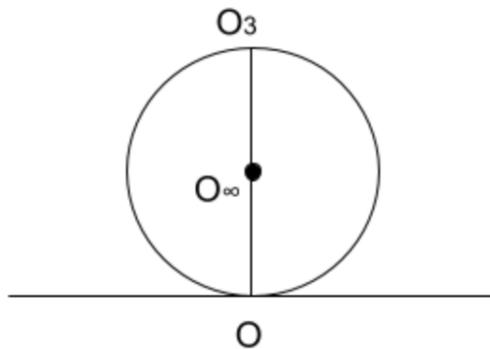


Рис. 13.10. Спираль Френеля при тонкой линзе

Количество вторичных источников не меняется, но меняется разность фаз. Спираль раскручивается и превращается в прямую линию.

$$m\pi A_0 = 3 \cdot \pi A_0$$

$$I = (3\pi A_0)^2 = 9\pi^2 I_0$$

Чтобы найти интенсивность не в фокусе, можно поменять место фокуса f_n :

$$f_n = 2f_0$$

Длина дуги спирали не меняется. Длина дуги — $m\pi A_0$.

Зонные пластинки

Зонная пластинка открывает первую зону и закрывает вторую зону. Открытыми остаются только нечетные зоны. Все площади одинаковы. радиус пятна:

$$R^2 = m\lambda \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Амплитуду можно вычислить следующим образом:

$$OO_1 + O_2O_3 + \dots = n \cdot 2A_0$$

$$I = 4n^2 I_0$$

Пусть стоит зонная пластинка и источник a . Точку наблюдения можно перемещать. Необходимо найти как будут меняться амплитуда и интенсивность. Пусть в точке b_1 центральное пятно откроет первую зону Френеля. В этом пятне будет яркий максимум и интенсивность равна:

$$I = 4n^2 I_0$$

b_1 — фокус зонной пластинки. В точке b_2 вторая зона Френеля закрыта. В точке b_3 (второй фокус зонной пластинки) наблюдается яркий максимум чуть ниже первого максимума и открывается третья зона Френеля. В точке b_5 третий фокус зонной пластинки.

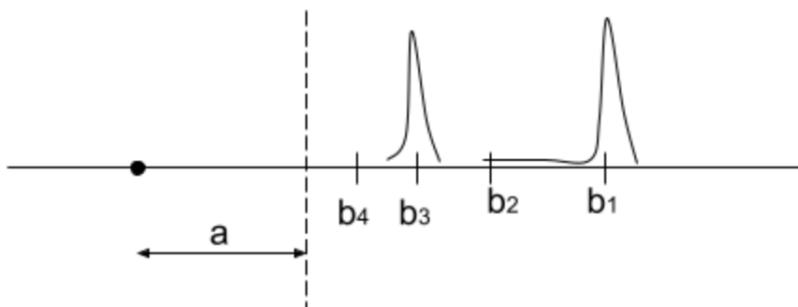


Рис. 13.11. Зонные пластинки

Семинар 14. Дифракция Фраунгофера

Самостоятельная работа (дифракция плоской волны на щели с пластинкой)

Пусть есть плоская волна, щель и экран. В центре I_0 , в первом минимуме 0. Вставлена стеклянная пластинка, закрывающая половину ширины щели. Ширина $\frac{b}{2}$, показатель преломления n . Требуется найти h_{min} , если известно, что в нулевом максимуме $0_{max} \rightarrow 0$ интенсивность стала равна нулю $I = 0$. Также необходимо найти интенсивность, которая стала в первом минимуме I_{min} .

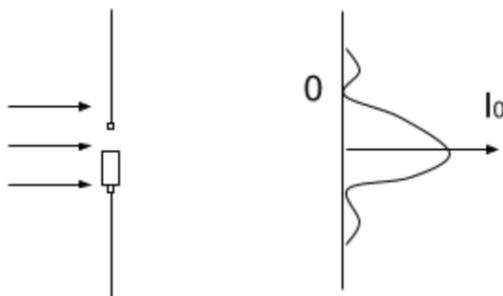


Рис. 14.1. Дифракция плоской волны на щели с пластинкой

Длина дифракционной картины пропорциональна ширине щели. Интенсивность в центре картины пропорциональна:

$$I_0 \sim b^2$$

Векторная диаграмма в первом минимуме заворачивается и получается окружность. Длина не меняется. Пусть:

$$l = b$$

Стеклянная фаза на половину щели должна повернуться на π , чтобы получилось ноль. Разность хода, которую должна внести пластинка:

$$h(n-1) = \frac{\lambda}{2}$$

$$h = \frac{\lambda}{2(n-1)}$$

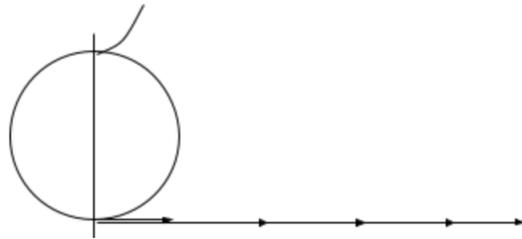


Рис. 14.2. Векторная диаграмма

Длина окружности:

$$2\pi R = b$$
$$R = \frac{b}{2\pi}$$

Таким образом, амплитуда и интенсивность записываются следующим образом:

$$A = \frac{2b}{\pi}$$
$$I = \frac{4}{\pi^2} b^2$$
$$I_0 = b^2$$

Приближение Фраунгофера. Интенсивность в центре дифракционной картины

Плоская монохроматическая волна длины $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$ падает нормально на узкую щель шириной $b = 60 \mu\text{m}$. Экран стоит на расстоянии $L = 60 \text{cm}$. Требуется найти I_0 .
Выражение радиуса для первой зоны Френеля:

$$R_1^2 = \lambda L$$
$$b^2 = m\lambda L$$
$$m = \frac{60 \times 60}{0,6 \times 0,6 \times 10^6} = 0,01$$

Размер всей щели меньше всей зоны. Отверстие открывает 0,01 зону Френеля. Можно пользоваться приближением Фраунгофера.

$$I(\varphi) = I_0 \text{sinc}^2 \frac{k b \sin \varphi}{2}$$

I_0 — интенсивность в центре дифракционной картины. Интенсивность можно оценить, используя энергию:

$$W_{\text{прошл}} \sim I_0 \cdot b$$

Щель бесконечна. Энергия пропорциональна ширине щели. Энергия сосредоточена в интервале $[0, 0]$. Таким образом, можно получить прямоугольник высоты $\frac{I_0}{2}$.

$$\varphi = \frac{\lambda}{b}$$

Длина участка от 0 до середины прямоугольника:

$$2L \frac{\lambda}{b}$$

Тогда энергия на экране пропорциональна:

$$W_{\text{экр}} \sim \frac{I_0}{2} 2L \frac{\lambda}{b}$$

$$I_0 = I_{\text{пад}} \cdot \frac{b^2}{\lambda L} = m I_{\text{пад}}$$

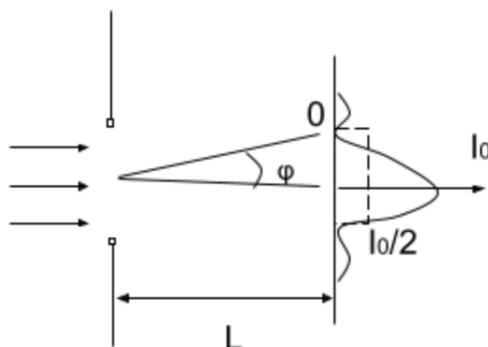


Рис. 14.3. Интенсивность в центре дифракционной картины

Таким образом, если отверстие открывает первую зону Френеля, то будет I_0 .

Спираль Корню задается в параметрическом виде с помощью интегралов Френеля. В результате векторная диаграмма будет иметь вид спирали, называемой спиралью Корню. Эта спираль позволяет достаточно просто рассчитывать распределение поля при дифракции Френеля не только на крае экрана, но и на щели.

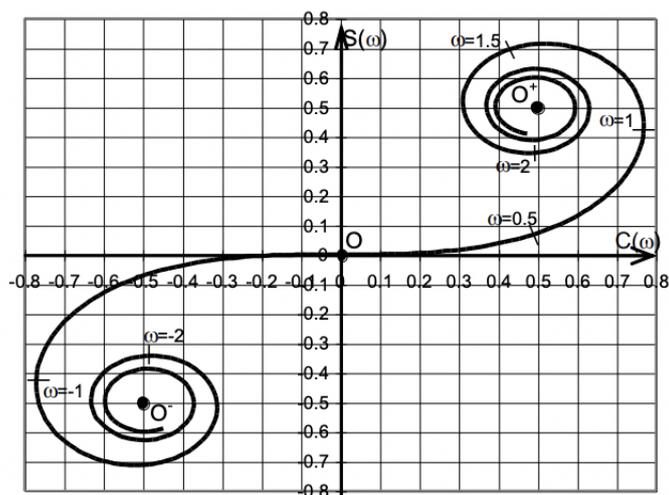


Рис. 14.4. Спираль Корню

Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии. Угловая ширина центрального максимума

Пусть плоская волна падает на круглое отверстие. Тогда получится дифракция Фраунгофера.

$$I = I_0 \left(\frac{2J_1(kR \sin \varphi)}{kR \sin \varphi} \right)^2$$

Направление на первый минимум:

$$\varphi_{min} = \frac{\lambda}{b}$$

$$\varphi_{min} = \frac{0,61 \cdot \lambda}{R} = \frac{1,22\lambda}{D}$$

Пусть едет автомобиль и стоит человек. На сетчатке глаза находится изображение, а глаз — линза. На глаз падает плоская волна. Таким образом, видна дифракция Фраунгофера на круглом отверстии (глаз). Сравняется угловое расстояние между источника (фары) с угловой шириной дифракционного максимума. Если они сравнимы, то получится одна точка. Следовательно, можно оценить расстояние на котором две фары будут сливаться в одну.



Рис. 14.5. Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии

Ближняя и дальняя зоны дифракции. Дифракционная расхожимость пучка

Пусть плоская волна падает на круглое отверстие. В первом случае, экран находится близко к круглому отверстию. Тогда работает приближение геометрической оптики и I_0 получается в виде круга.

Во втором случае экран отодвигают на некоторое расстояние, при котором будет наблюдаться приближение Френеля. Расстояние между отверстием и экраном должно быть много больше, чем размер отверстия (препятствия). Пусть радиус — r . Тогда геометрическая оптика:

$$L \sim r$$

Дальше наблюдается дифракция Френеля. Когда отверстие будет открывать много зон Френеля и экран на расстоянии 10 зон Френеля, в центре картины будет минимум, потом максимум. Дальше эта изрезанность растёт и доходит до одной зоны Френеля. С этого места начинается дифракция Фраунгофера. Начинается дифракционная расхожимость пучка. Если отодвинуть экран дальше, то картина будет пропорционально увеличиваться.

Расстояние, на котором происходит дифракция (дифракционная длина):

$$l_{\text{диф}} \sim \frac{D^2}{\lambda}$$

Именно по этой длине и принято проводить границу между дифракцией Френеля (или в ближней зоне) и дифракцией Фраунгофера (или в дальней зоне).

Дифракция Фраунгофера на N щелях

Рассматривается дифракция Фраунгофера на объекте, представляющем собой совокупность N бесконечно длинных щелей, имеющих одинаковую ширину b и располо-

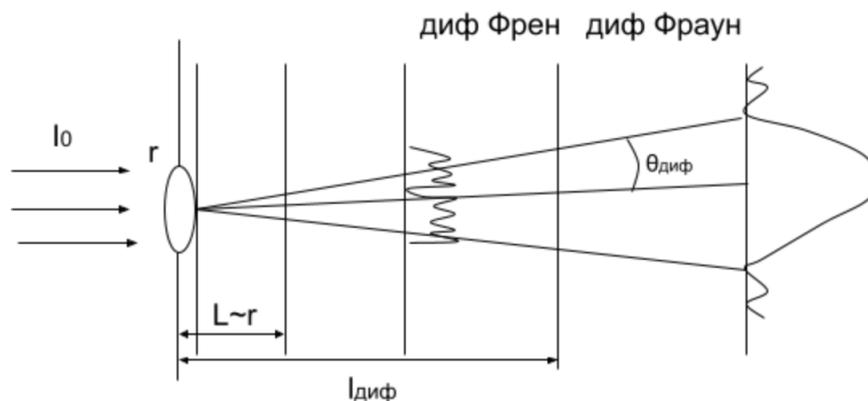


Рис. 14.6. Ближняя и дальняя зоны дифракции

женных на одинаковом расстоянии друг от друга. Необходимо нарисовать векторную диаграмму для $\varphi = 0$.

$$I_{\text{ц}} \sim (Nb)^2$$

φ повернули, то результирующий вектор станет несколько меньшей длины с поворотом. Между первой и второй щелями есть разность хода. d — период щелей. Разность хода и условие максимумов записывается следующим образом:

$$d \sin \varphi = m\lambda$$

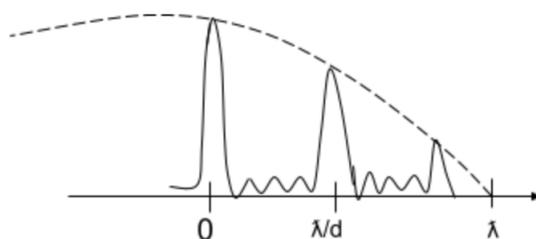


Рис. 14.7. Дифракция Фраунгофера на N щелях

Условие дифракционных минимумов, ближайших к главному дифракционному максимуму:

$$d \sin \varphi = \left(m \pm \frac{1}{N} \right) \lambda$$

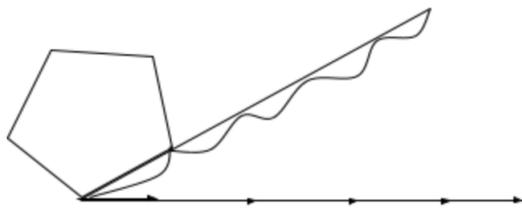


Рис. 14.8. Векторная диаграмма

$$I = I_0 \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{kb \sin \varphi}{2} \right) \cdot \left(\frac{\sin \left(N \cdot \left(\frac{kd \sin \varphi}{2} \right) \right)}{\sin \left(\frac{kd \sin \varphi}{2} \right)} \right)^2$$

$$I_{\text{ц}} \sim b^2 N^2$$

$$N \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{(m \pm \frac{1}{N}) \lambda}{2} = \pi(mN \pm 1)$$

Меняется параметр N . Пусть:

$$N = 2$$

Дифракционная огибающая и положение главных максимумов не меняются. Меняется высота.

$$I_0 \sim (NB)^2$$

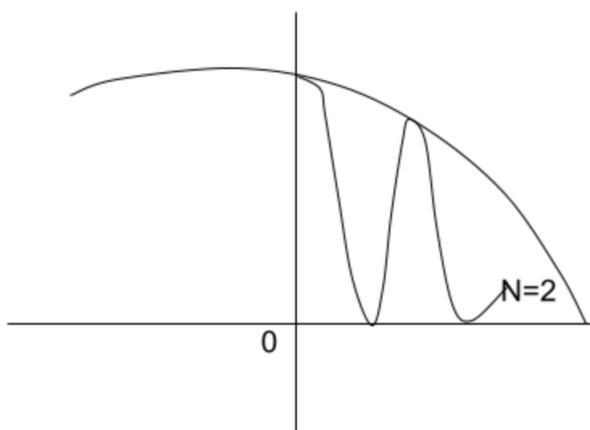


Рис. 14.9. Изменение параметра N

Пусть меняется параметр d :

$$d_H = 2d$$

Высота не меняется. Дифракционные максимумы наблюдаются в 2 раза реже.

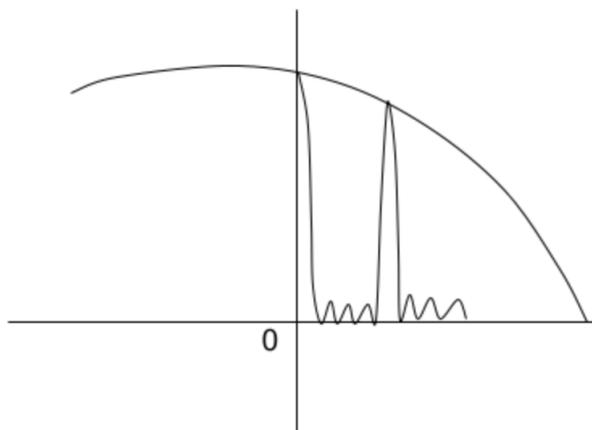


Рис. 14.10. Изменение параметра d

Семинар 15. Спектральные приборы. Часть 1

Самостоятельная работа (дифракция на щелях)

Пусть щелей N . Если $N > 5$, то $\frac{N}{2}$. d — число букв в коротком имени.

$$b = 1$$

$$N = 4$$

$$d = 4$$

Сначала необходимо нарисовать 2 огибающие, одна из которых на расстоянии от $\frac{\lambda}{b}$ до $\frac{2\lambda}{b}$. Далее необходимо нарисовать пики, разделив огибающие на 4 участка. Локальных максимумов два. Каждый участок делится на 4 части.

Пусть меняются параметры:

$$N' = \frac{N}{2}$$

$$b' = 2b$$

Необходимо найти следующее соотношение: $\frac{I'_0}{I_0}$.

$$N' = 2$$

$$b' = 2$$

$$\frac{I'_0}{I} = (bN)^2 = 1$$

Дифракция Фраунгофера (повторение)

Рассматривается прямоугольный импульс длительности τ . Спектр этого прямоугольника — *sinc*. Ширина спектра — $\Delta\omega$. Это эквивалентно ширине *sinc* на высоте $\frac{2}{\pi}$. Связь между шириной и длительностью записывается следующим образом:

$$\Delta\nu = \frac{1}{\tau}$$

$$\Delta\omega \approx \frac{2\pi}{\tau}$$

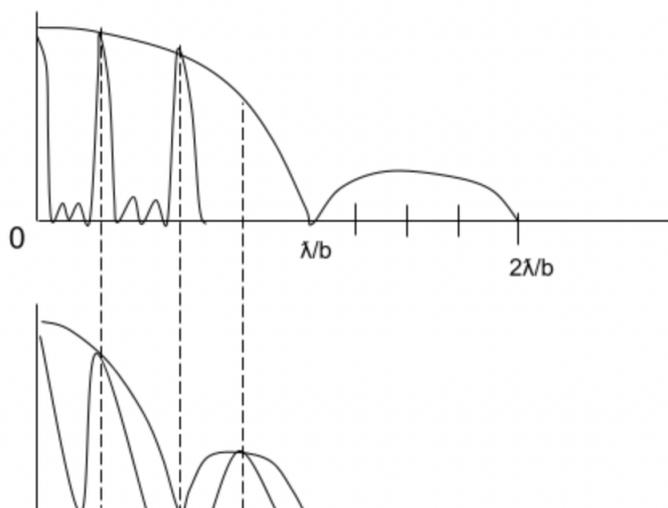


Рис. 15.1. Дифракция на щелях

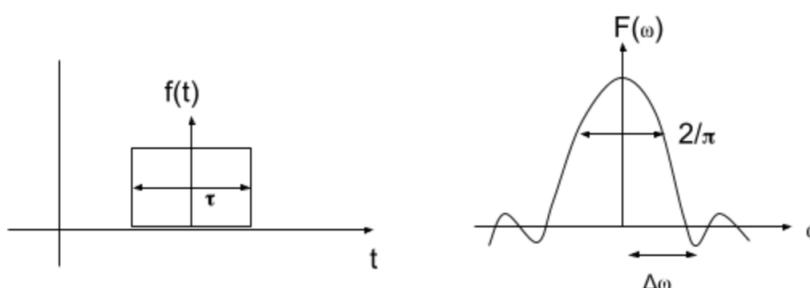


Рис. 15.2. Спектр прямоугольника

Дифракция Фраунгофера есть Фурье преобразование от функции пропускания объекта. На щель падает плоская волна. Рассматривается дифракция Фраунгофера под углом φ . Вторичный источник излучает во все стороны.

$$k_x = k \sin \varphi$$

$$k_x \approx \frac{2\pi}{b}$$

$$k \sin \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \varphi \approx \frac{2\pi}{b}$$

Приближение Фраунгофера наблюдается, когда меньше 1 зоны Френеля.

$$b = l_{\text{диф}} \frac{\lambda}{b}$$

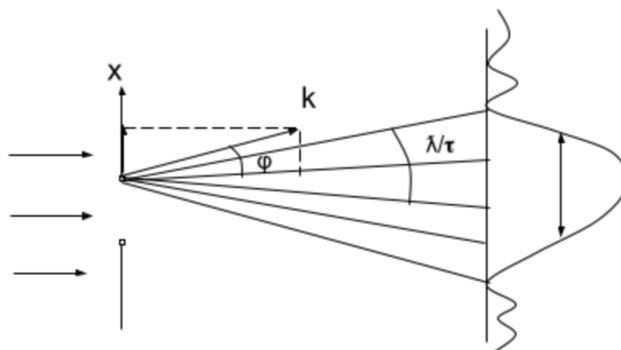


Рис. 15.3. Дифракция Фраунгофера

$$l_{\text{диф}} = \frac{b^2}{\lambda}$$

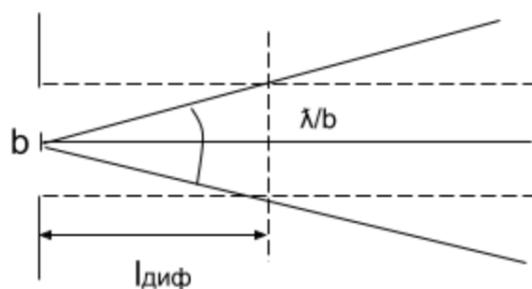


Рис. 15.4. Приближение Фраунгофера

Пусть плоская волна падает на круглое отверстие с линзой. Получается так, что лучи сходятся. Таким образом, получится пятно (перетяжка). требуется найти размер этой перетяжки. D — диаметр линзы. F — фокусное расстояние.

На перетяжке наблюдается плоский волновой фронт. При дифракции на круглом отверстии существует следующее условие:

$$d_{\text{пер}} = F \frac{1,22\lambda}{D}$$

$$D \cdot d_{\text{пер}} = 1,22 \cdot \lambda \cdot F$$

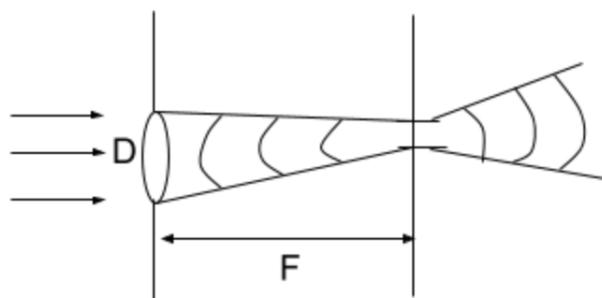


Рис. 15.5. Образование перетяжки

Спектральные приборы

Спектральные приборы используют для того, чтобы измерить спектр. Основной способ разделения спектра — дисперсия (разложение призмой). Основным предназначением спектральных приборов заключается в том, чтобы разложить световой пучок так, чтобы каждая частота шла по своему направлению.

Дифракционная решетка представляет собой пространственную периодическую структуру, состоящую из большого числа одинаковых по ширине щелей, находящихся на одном и том же расстоянии друг от друга.

$$N \rightarrow 2000$$

$$d = \frac{1}{200} \text{mm} = 5 \mu\text{m}$$

$$L = 10 \text{mm}$$

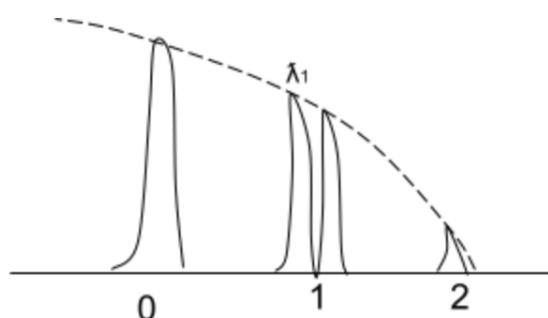


Рис. 15.6. Дифракционная решетка с 2000 щелями

Следующее выражение можно использовать для исследования спектра сигнала:

$$d \sin \varphi_m = m\lambda$$

Направление на максимум зависит от λ .

Пучок падает на дифракционную решетку под углом φ_0 . Наблюдается дифракция под углом φ . При падении под углом условие записывается следующим образом:

$$d(\sin \varphi_m - \sin \varphi_0) = m\lambda$$

$$\sin \varphi_m \approx \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \Delta\varphi$$

$$d \cdot \cos \varphi_0 \cdot \Delta\varphi = m\lambda$$

Картина, полученная при наклонном падении, будет эквивалентна той же самой дифракционной картине, на которой d станет меньше. Поэтому максимумы уйдут вправо, и расстояние между ними увеличится.

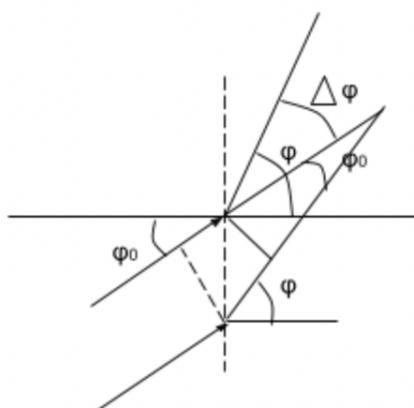


Рис. 15.7. Дифракция под углом

Угловая дисперсия является спектральной характеристикой. Эта величина показывает на сколько меняется направление на максимум с изменением длины волны.

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi_m} =$$

$$= \frac{m}{d \sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{d}\right)^2}} = \frac{m}{d} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m\lambda}{d}\right)^2\right)$$

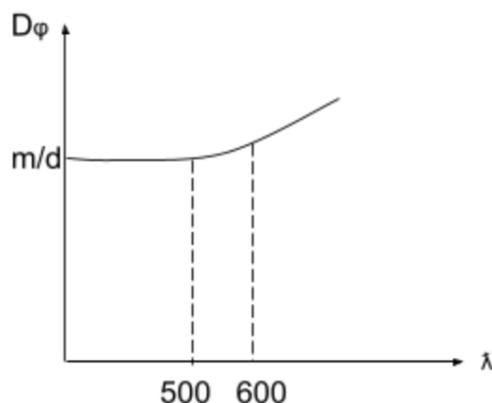


Рис. 15.8. Угловая дисперсия

$$d \cos \varphi_m \cdot \delta \varphi_m = m \delta \lambda$$

Угловая ширина дифракционного максимума является следующей спектральной характеристикой.

$$\frac{\lambda}{L} = \frac{\lambda}{Nd}$$

Условие дифракционных минимумов, ближайших к главному дифракционному максимуму:

$$d \sin \varphi_{min} = \left(m \pm \frac{1}{N} \right) \lambda$$

$$d \cos \varphi_m \cdot \Delta \varphi_m = \delta m \cdot \lambda$$

$$\Delta \varphi_m = \frac{\lambda}{N \cdot d \cos \varphi_m} = \frac{\lambda}{L \cos \varphi_m}$$

Разрешающая способность дифракционной решетки является третьей спектральной характеристикой:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda}$$

$$0 = \delta m \cdot \lambda + m \Delta \lambda$$

$$\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = \frac{m}{\delta m} = mN$$

Максимум одной длины волны попадает на минимум ближайшей к главному максимуму для другой волны.

Область свободной дисперсии является четвертой спектральной характеристикой. Область свободной дисперсии — это максимальная ширина спектрального интервала, при которой спектры соседних порядков не перекрываются.

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$$

Обычно в дифракционном спектральном приборе работают именно в первом порядке, т.к. в больших порядках, хотя и увеличивается разрешающая способность, но падает интенсивность максимумов за счет дифракционного члена в формуле для N щелей.

Пример 15.1. *Необходимо найти минимальную ширину решетки с периодом $d = 2m\mu\text{т}$, чтобы во втором порядке разрешить две спектральные линии:*

$$\lambda_1 = 500 \text{ nm}$$

$$\lambda_2 = 500,05 \text{ nm}$$

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{m}{\delta m} = mN$$
$$Nd = L$$

Пример 15.2. *Померили спектр, состоящих из двух линий, с помощью трех различных дифракционных решеток. Таким образом, получают три картинки. Требуется найти отношение между спектральными характеристиками в этих трех дифракционных решетках. Угловая ширина:*

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \frac{\Delta\varphi_3}{2}$$

$$L_1 = L_2 = 2L_3$$

Угловая дисперсия:

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}$$

$$D_{\varphi_1} = 2D_{\varphi_2} = D_{\varphi_3}$$

$$d_1 = \frac{1}{2}d_2 = d_3$$

$$N = \frac{L}{d}$$

$$N_1 = 2N_2 = 2N_3$$

Разрешающая способность:

$$R_1 = 2R_2 = 2R_3$$

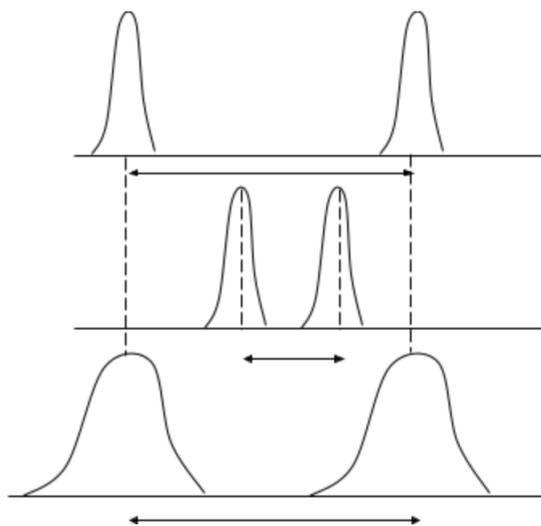


Рис. 15.9. Спектр из двух линий

Семинар 16. Спектральные приборы. Часть 2

Самостоятельная работа (дифракционная решетка)

Пусть есть дифракционная решетка, на которую падает плоская волна. на экране наблюдаются полосы. Рассматривается точка A , в которой максимум m порядка. Общее число штрихов — N . Предполагается, что каждое второе отверстие в решетке закрыли. Необходимо найти как меняются спектральные характеристики.

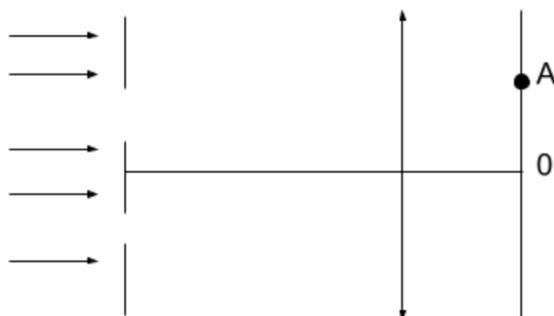


Рис. 16.1. Дифракционная решетка

$$N_{\text{H}} = \frac{N}{2}$$

$$d_{\text{H}} = 2d$$

Записывается условие максимума:

$$d \sin \varphi = m\lambda$$

$$m_{\text{H}} = 2m$$

$$\Delta\varphi = \frac{\lambda}{L \cdot \cos \varphi} = \Delta\varphi_{\text{H}}$$

$$R = mN = R_{\text{H}}$$

$$D_{\varphi} = \frac{m}{d \cos \varphi} = D_{\varphi_{\text{H}}}$$

Выбор дифракционной решетки с наибольшей разрешающей способностью

Для проведения исследований в диапазоне длины волны примерно 500 нм взяли три решетки. У первой решетки 100 штрихов на мм, а ширина решетки — 10 см. У второй решетки 200 штрихов на мм, а ширина — 8 см. У третьей решетки 400 штрихов на мм, а ширина — 5 см. Требуется найти решетку, у которой максимальная разрешающая способность, если угол дифракции не более 15° .

$$n_1 = 100 \quad L_1 = 10sm$$

$$n_2 = 200 \quad L_2 = 8sm$$

$$n_3 = 400 \quad L_3 = 5sm$$

$$\varphi_{\text{диф}} \leq 15^\circ$$

Сначала необходимо найти N :

$$N_1 = 10000$$

$$N_2 = 16000$$

$$N_3 = 20000$$

$$R = mN$$

$$d \sin \varphi = m\lambda$$

$$m = \frac{d \sin \varphi}{\lambda} = \frac{\sin \varphi}{n\lambda} \approx \frac{0,25}{n \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}$$

$$m_1 = \frac{0,25}{0,05} = 5$$

$$m_2 = 2,5 \rightarrow 2$$

$$m_3 = 1,25 \rightarrow 1$$

Таким образом, первая решетка имеет максимальную разрешающую способность, когда угол дифракции не более 15° .

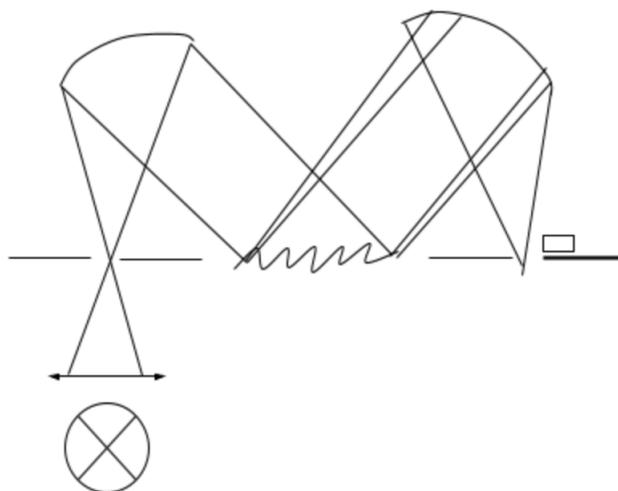


Рис. 16.2. Отражательная дифракционная решетка

Отражательная дифракционная решетка

У прибора есть входная щель, на которую падает свет. Сферическое зеркало стоит в фокальной плоскости. Параллельный пучок, отраженный от сферического зеркала, падает на дифракционную решетку.

Появляется дополнительная разность хода:

$$\Delta s = 2h \cos \theta$$

Излучение происходит под углом φ .

Если бы входная щель была бесконечно узкой, то был бы идеально параллельный пучок, и в плоскости выходной щели можно было бы увидеть дифракционный максимум m порядка. Угловая ширина максимума:

$$\Delta\varphi \approx \frac{\lambda}{L}$$

Линейный размер максимума:

$$\Delta x = \Delta\varphi \cdot F = \frac{\lambda F}{L}$$

Предполагается, что уширение связано с шириной щели. Если вместо дифракционной решетки стоит зеркало и входная щель имеет ширину b , то на выходной щели

будет изображение в виде освященного прямоугольника ширины b . Таким образом нормальная ширина щели:

$$b_n = \Delta x = \Delta \varphi \cdot F = \frac{\lambda F}{L}$$

Между лампой и входной щелью ставят линзу такого фокусного расстояния, чтобы охватить сферическое зеркало. Тогда дифракционная решетка полностью освещается.

Интерферометр Фабри-Перо как спектральный прибор

Интерферометр Фабри-Перо описывается следующей формулой:

$$I = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

$$\delta = 2kh \cos \theta$$

Рассматривается воздушный интерферометр. Интерферометр Фабри – Перо представляет собой плоскопараллельную стеклянную пластину, на поверхности которой нанесены высоко отражающие покрытия (или два плоских зеркала, разделенные воздушным промежутком). Падающая волна частично отражается и частично проходит через первую границу. Такое же разделение происходит при каждом пересечении любой из отражающих поверхностей. В результате возникает большое (бесконечное) число отраженных и прошедших волн. Если на пути отраженных или прошедших волн установить собирающую линзу, то в ее фокальной плоскости сформируется интерференционная картина (многоволновая) в виде колец равного наклона.

Пусть есть точечный источник, интерферометр и экран на расстоянии пол метра. Линза отсутствует. Таким образом, необходимо строить изображение. Интерференционная картина, которая будет видна, — это интерференция от n источников, у которых убывающая интенсивность. На экране будут видны кольца со светлым пятном. Если источник излучает две близкие длины волны, то одна картина налагается на другую.

Пусть:

$$\lambda = 0,5 \mu\text{m}$$

$$h = 1 \text{ mm}$$

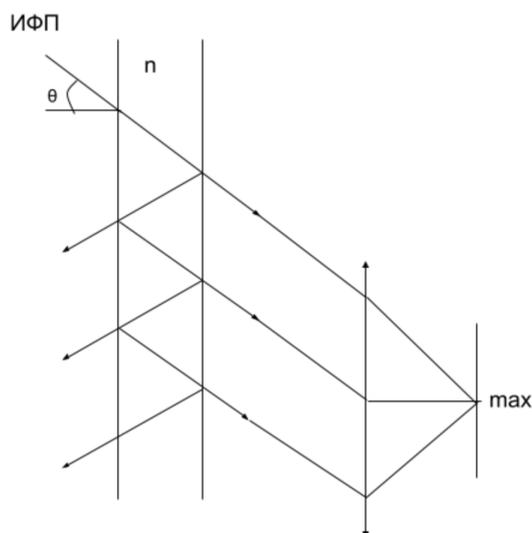


Рис. 16.3. Интерферометр Фабри – Перо

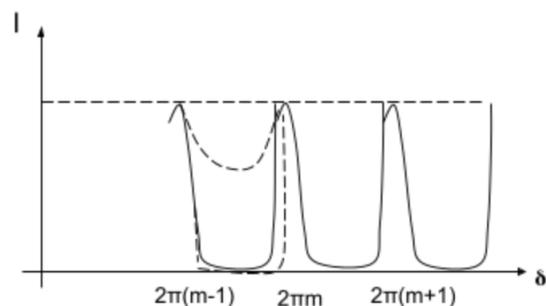


Рис. 16.4. График зависимости I от δ

Тогда:

$$m_{ц} = 4000$$

В результате, кольца будут расщепляться. Спектральными характеристиками являются:

- Угловая дисперсия (D_{θ}):

$$D_{\theta} = \frac{m}{2h \sin \theta}$$

Угловая дисперсия стремится к бесконечности в центре интерференционной картины. Таким образом, работают не с центральным кольцом, а первым или вторым.

- Угловая ширина пика. Ширина берется на половине высоты и обозначается как ε .

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{2} &= \pi m + \frac{\varepsilon}{4} \\ \sin \frac{\delta}{2} &\approx \sin \pm \frac{\varepsilon}{4} \approx \pm \frac{\varepsilon}{4} \\ \frac{4R}{(1-R)^2} \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2 &= 1 \\ \varepsilon^2 &= \frac{(1-R)^2 \cdot 4}{4R} \\ \varepsilon &= \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta m' &= 1 \quad \Delta \delta = 2\pi \\ \Delta m &= \frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}} \quad \Delta \delta = \varepsilon\end{aligned}$$

- Разрешающая способность. Это происходит, когда пик соседней длины волны будет на расстоянии ε от соседнего пика.

$$\begin{aligned}\delta m \lambda + m \delta \lambda &= 0 \\ R &= \frac{\lambda}{\delta \lambda} = \frac{m}{\delta m} = m \cdot F\end{aligned}$$

Разрешающая способность для дифракционной решетки записывается следующим образом:

$$R = mN$$

Вводится новая переменная — резкость интерференционных полос:

$$F = \frac{1}{\delta m} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

- Область свободной дисперсии. Чтобы воспользоваться формулами для расчета всех характеристик, необходимо, чтобы различные длины волн соответствовали одному и тому же порядку интерференции. Важно, чтобы порядки интерференции не перекрывались.

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda}{m_{\text{ц}}} = \frac{\lambda^2}{2h}$$

Требуется определить параметр интерферометра Фабри-Перо (толщина h и коэффициент отражения R), если необходимо исследовать участок спектра $\Delta\lambda = 0,2 \text{ nm}$ вблизи длины волны 600 nm с тем, чтобы увидеть разрешающую способность:

$$\delta\lambda = 0,0001 \text{ nm}$$

$$h = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda} \approx 0,9 \text{ mm}$$

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = 6 \cdot 10^5 = mF = \frac{2h \pi \sqrt{R}}{\lambda (1-R)}$$
$$R \approx 0,984$$

Лазер представляет из себя два параллельных зеркала. Формируется стоячая волна.

$$m\lambda = 2L$$

L — длина резонатора.

$$L = m \frac{\lambda}{2}$$

Семинар 17. Оптика анизотропных сред. Интерференция поляризованных лучей

Анизотропные материалы

Пусть вещество состоит из молекул вида эллипсоида, которые одинаково ориентированы. Эти молекулы образуют кристалл в виде куба. Прикладывается электрическое поле (E) вдоль оси x . Каждая молекула будет превращаться в диполь. Дипольный момент P направлен от минуса к плюсу в том же направлении, что и E . Вектор поляризованности дает среднее значение дипольного момента.

$$P_x = \chi_x \epsilon_0 E_x$$

χ — диэлектрическая восприимчивость.

Электрическое поле вдоль оси x снимается и прикладывается вдоль оси y . Дипольный момент будет направлен вдоль оси y в том же направлении, что и электрическое поле.

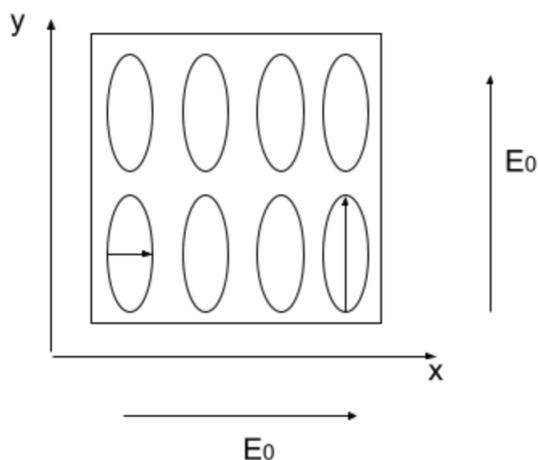


Рис. 17.1. Дипольный момент

$$\bar{D} = \epsilon \epsilon_0 \bar{E}$$

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \epsilon_0 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Матрица имеет диагональный вид вполне конкретных координатах. Эти координаты называются главными осями и главными направлениями пластинок. Те оси, в которых матрица имеет диагональный вид, называются главными осями. Диэлектрическая проницаемость называется главной диэлектрической проницаемостью. При распространении волны вдоль одного из главных направлений идут 2 волны, поляризованные вдоль двух других главных направлений.

Скорость света в среде:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$$

Пусть волна падает на кристалл, поляризованный вдоль оси x . Требуется найти скорость волны, поляризованной вдоль оси x :

$$v_x = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_x}}$$

Если волна поляризована вдоль оси y , то волна имеет следующую скорость:

$$v_y = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_y}}$$

Если волна поляризована вдоль оси z , то волна имеет следующую скорость:

$$v_z = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_z}}$$

Волна может быть представлена как сумма двух линейно поляризованных волн, одна вдоль оси x , а другая вдоль оси y . Они входят в кристалл толщины d , и на выходе получается волна с другой поляризацией. Возникает оптическая разность хода и разность фаз:

$$kd(n_x - n_y) = \Delta\varphi$$

Как следствие, может измениться состояние поляризации. Состояние поляризации может не измениться, если разность фаз является кратным 2π .

Анизотропными материалами являются кварц, слюда, поляроид и т.д.

Интерференция поляризованных лучей

Пусть есть поляризатор и анализатор, а между ними ставится анизотропная пластинка. Рассматривается зависимость интенсивности прошедшего света. Необходимо задать главные направления пластинки. Плоскость пропускания поляризатора образуется одним из главных направлений угол α . Плоскость пропускания анализатора

имеет угол β . Необходимо задать входную амплитуду. После поляризатора идет линейно поляризованной свет амплитудой c . Берутся проекции вектора c на главные направления:

$$a = c \cos \alpha$$

$$b = c \sin \alpha$$

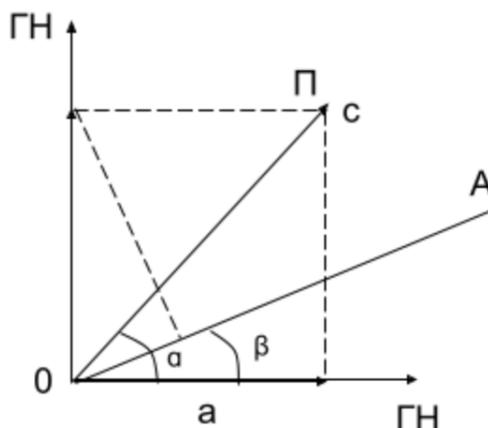


Рис. 17.2. Интерференция поляризованных лучей

После прохождения пластина появится разность фаз: δ . Интерференция отсутствует, когда состояния поляризации волн ортогональны. Таким образом, интенсивность не меняется.

$$a' = c \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$b' = c \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Интенсивность получившейся волны:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta = (c \cos \alpha \cos \beta)^2 + (c \sin \alpha \sin \beta)^2 + 2c^2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta \cdot \cos \delta$$

$$c^2 = I_0$$

$$I = I_0 \left(\cos^2(\alpha - \beta) \sin 2\alpha \sin 2\beta \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2} \right)$$

Частные случаи следующие:

1) поляризатор в плоскости пропускания совпадает с анализатором.

$$\alpha = \beta$$

$$I_{\parallel} = I_0 \left(1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\delta}{2} \right)$$

2) поляризатор перпендикулярен анализатору.

$$I_{\perp} = I_0 \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}$$

Необходимо провести измерения. Поляризатор ставится перпендикулярно анализатору. Начинается вращение анизотропной пластинки. Когда главное направление пластинки будет совпадать с плоскостью пропускания поляризатора, то будет темно.

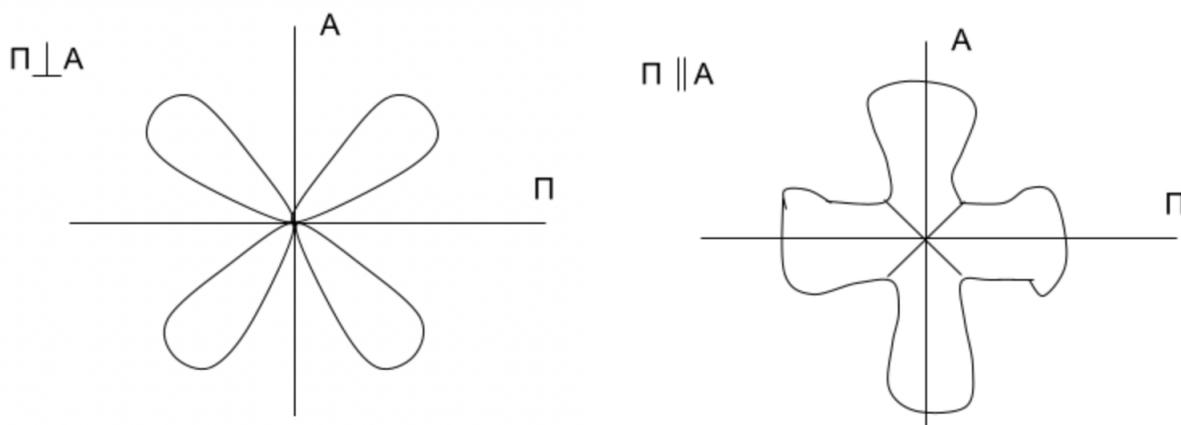


Рис. 17.3. Вращение анизотропной пластинки

Если поляризатор стоит параллельно анализатору, то получится другая интерференционная картина.

Чтобы вращать анализатор, необходимо зафиксировать пластинку. Наблюдается эллиптическая поляризация (эллиптически поляризованный свет). Полуоси эллипса имеет следующее соотношение:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{I_{max}}{I_{min}}}$$

Пусть есть эллиптически поляризованная волна с осями a и b . Эллиптически поляризованная волна направляется на анализатор. Когда плоскость пропускания

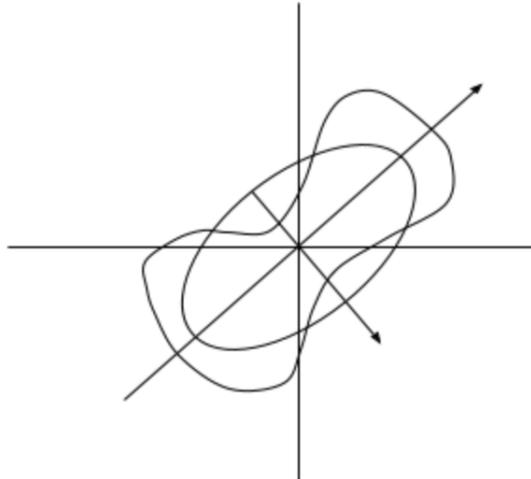


Рис. 17.4. Вращение анализатора

анализатора совпадает с большой полуосью, то на выходе линейно поляризованный свет с амплитудой a .

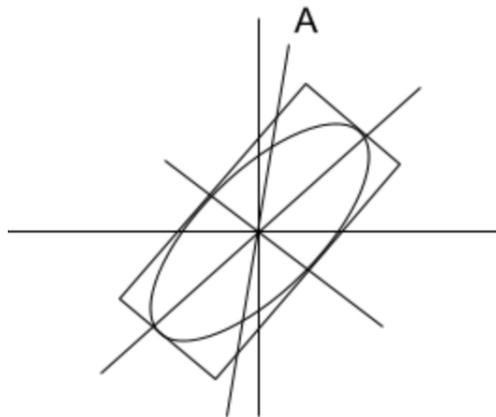


Рис. 17.5. Эллиптически поляризованная волна

Пластинки $\lambda/2$ и $\lambda/4$

$$\frac{\lambda}{2} \rightarrow \Delta s = \frac{\lambda}{2} + m\lambda$$

$$\frac{\lambda}{4} \rightarrow \Delta s = \frac{\lambda}{4} + m\frac{\lambda}{2}$$

Дана кварцевая пластинка толщиной 0,3 мм. Разность показателей преломления — 0,009. Необходимо найти длины волн из видимого диапазона, для которых эта пластинка будет $\frac{\lambda}{4}$ и для которых будет $\frac{\lambda}{2}$.

$$d = 0,3$$

$$\Delta n = 0,009$$

$$d \cdot \Delta n \approx 2700 \text{ нм}$$

Видимы диапазон — 400 — 700 нм.

$$\frac{\lambda}{2} \rightarrow \Delta s = \frac{\lambda}{2} + m\lambda = \lambda \left(m + \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{\lambda}{4} \rightarrow \Delta s = \frac{\lambda}{4} + m\frac{\lambda}{2} = \lambda \left(\frac{m}{2} + \frac{1}{4} \right)$$

$$\Delta s = \frac{2700}{400} = 6,75$$

$$\Delta s = \frac{2700}{700} = 3,9$$

$$\frac{\lambda}{2} \rightarrow 4,5; 5,5; 6,5$$

$$\frac{\lambda}{4} \rightarrow 4,25; 4,75; 5,25 \dots 6,75$$

Кристалл между скрещенными николями

Скрещены анализатор и поляризатор. Помещена пластинка кварца, вырезанная параллельно оптической оси, которая ориентирована под углом 45° в главном направлении николей. Требуется найти минимальную толщину d пластинки, при которой одна линия водорода с длиной волны 656,3 нм будет сильно ослаблена, а для другой длиной волны 410,2 нм иметь максимальную интенсивность.

$$\Delta n = 0,009$$

$$\lambda_1 = 656,3 \text{ нм}$$

$$\lambda_2 = 410,2 \text{ нм}$$

На пластину падает линейно поляризованный свет.

$$d\Delta n = m_1\lambda_1 = \frac{\lambda_2}{2} + m_2\lambda_2$$

Структура световой волны в анизотропном кристалле

Глядя на следующую форму записи, можно оценить направления по отношению друг к другу \vec{D} и \vec{E} . В изотропной среде они со направлены.

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \epsilon_0 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

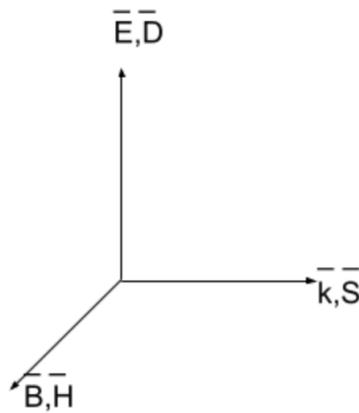


Рис. 17.6. Изотропная среда

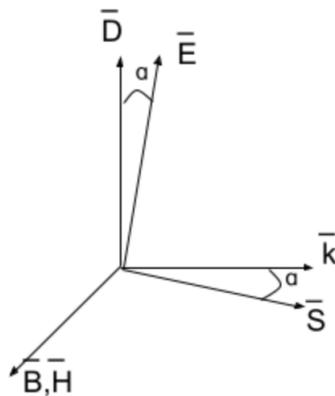


Рис. 17.7. Анизотропная среда

Записывается уравнение Максвелла.

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

$$E = E_0 e^{i(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{r})}$$

$$(\bar{k} \cdot \bar{D}) = 0$$

$$(\bar{k} \cdot \bar{B}) = 0$$

$$[\bar{k} \times \bar{E}] = \omega \bar{B}$$

$$[\bar{k} \times \bar{H}] = \omega \cdot \bar{D}$$

Фазовая скорость записывается следующим образом:

$$v_{\Phi} = \frac{\omega}{k}$$

$u_{\text{л}}$ — лучевая скорость.

Семинар 18. Фазовая и лучевая скорость. Эллипсоид лучевых скоростей

Самостоятельная работа (анизотропный клин)

Пусть поляризатор и анализатор параллельны. Ставится анизотропная пластинка (клин). Если направление поляризатора будет совпадать с одним из главных направлений пластинки, то пластинка не будет работать. Будет равномерная засветка. Максимальный эффект будет тогда, когда клин будет под углом 45° . На клин падает линейно поляризованная волна. Толщина его меняется. Линейно поляризованная волна раскладывается на две составляющие. По мере нарастания толщины пластинки будет меняться разность фаз. Когда разность фаз достигнет $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, будет круговая поляризация. Когда разность фаз достигнет π и 2π , то получится линейная поляризация. На экране будут видны полосы.

$$\Delta n \Delta x \sin \alpha = \lambda$$

$$d \Delta n = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4} (2m + 1) = \frac{\lambda_2}{4} (2m - 1)$$

$$d = \frac{\frac{\lambda}{4} 7}{\Delta n} = \frac{875 \text{ нм}}{\Delta n}$$

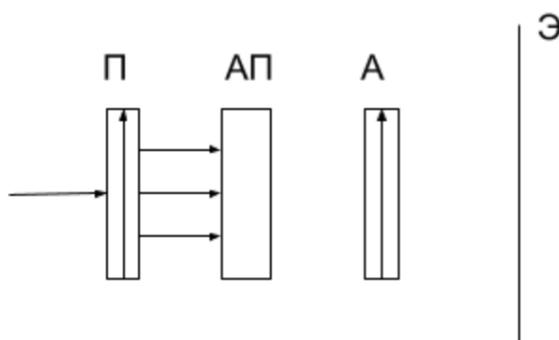


Рис. 18.1. Анизотропный клин

Фазовая и лучевая скорость

Фазовая скорость записывается следующим образом:

$$v_{\Phi} = \frac{\omega}{k}$$

$u_{\text{л}}$ — лучевая скорость.

$$v_{\Phi} < u_{\text{л}}$$

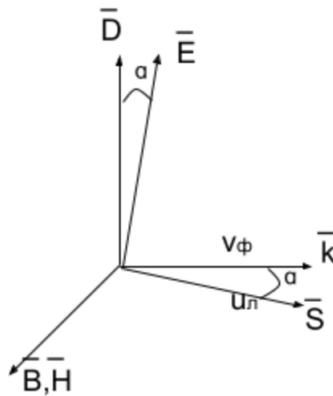


Рис. 18.2. Анизотропная среда

Происходит расщепление и наблюдается двойной луч преломления. Фронт волны перпендикулярен \vec{k} . Скорость волны, поляризованная вдоль оси x :

$$v_x = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_x}}$$

$$D_x = \epsilon_x \epsilon_0 E_x$$

Уравнения Френеля. Эллипсоид показателей преломления.

Эллипсоид лучевых скоростей

$$\text{rot } H = \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$[\vec{k} \times \vec{H}] = \omega \vec{D}$$

Таким образом, получается фазовая скорость:

$$H = \frac{\omega}{k} D$$

Фазовые скорости можно найти, используя следующее уравнение (уравнение Френеля для фазовых скоростей):

$$\sum \frac{n_i^2}{v_i^2 - v^2} = 0 \quad i = x, y, z$$

v — искомая скорость для данного направления.

v_i — главная скорость.

n_i — заданное направление. У этого уравнения есть недостаток:

$$\frac{n_x^2}{v_x^2 - v^2} + \frac{n_y^2}{v_y^2 - v^2} + \frac{n_z^2}{v_z^2 - v^2} = 0$$

Если волна идет вдоль оси x , то у волны 2 скорости v_x и v_y . Правильным уравнением является:

$$n_x^2(v_y^2 - v^2)(v_z^2 - v^2) + \dots + n_z^2(v_x^2 - v^2)(v_y^2 - v^2) = 0$$

У этого уравнения два решения:

$$v = v_x$$

$$v = v_y$$

Для каждого направления n существуют 2 различных фазовых скоростей. Для этих фазовых скоростей необходимо искать их величины и их направления поляризации.

Есть аналогичное уравнение Френеля для лучевых скоростей:

$$\sum \frac{s_i^2 v_i^2}{v_i^2 - u^2} = 0$$

Существует геометрическая интерпретация. Есть два эллипсоида: лучевой эллипсоид и волновой (фазовый) эллипсоид. Фазовый эллипсоид — это эллипсоид, у которого полуосями являются n_x , n_y , n_z . С помощью этого эллипсоида легко найти величины фазовых скоростей для любого направления и состояния поляризации.

Выбирается произвольное направление. Через центр проходит перпендикуляр и в сечении наблюдается эллипс. У эллипса есть 2 полуосей, размеры полуосей: n' и n'' .
Фазовая скорость:

$$v' = \frac{c}{n'}$$

$$v'' = \frac{c}{n''}$$

Длины полуосей дают значения скоростей, а направление этих полуосей дает состояние поляризации. Получаются 2 взаимно перпендикулярных вектора: D' и D'' .

Если все полуоси разные, то в сечении наблюдается круг. Такой кристалл называется двусосным. Состояние поляризации не меняется.

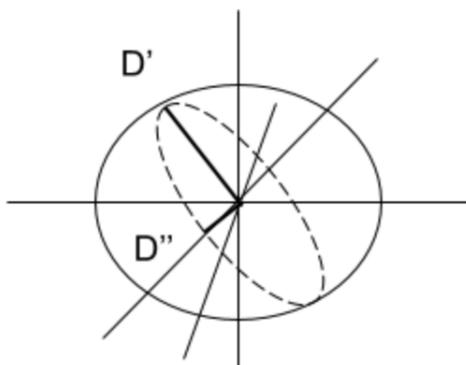


Рис. 18.3. Фазовый эллипсоид

Лучевой эллипсоид имеет 3 главных скорости: v_x , v_y , v_z . Вводится произвольное направление \bar{s} . Через центр проходит перпендикуляр и в сечении наблюдается эллипс. У эллипса есть 2 полуосей, размеры полуосей: u' и u'' . Направление этих полуосей дает E' и E'' . Для каждого направления существует 2 лучевые скорости.

$$\bar{E}_1 \perp \bar{E}_2$$

Существуют 2 круговых сечения. Круговые сечения фазового эллипсоида и лучевого эллипсоида не совпадают.

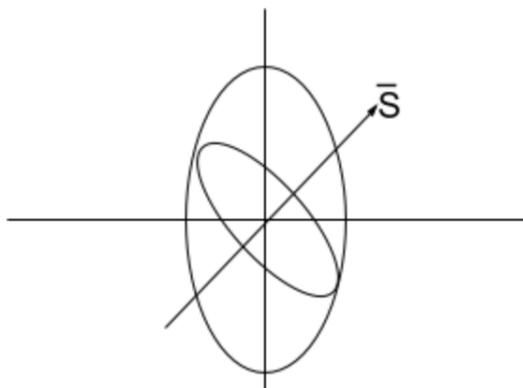


Рис. 18.4. Лучевой эллипсоид

Лучевая поверхность одноосного кристалла

Одноосной кристалл — это кристалл, у которого два показателя одинаковы.
Пусть:

$$v_x \neq v_y = v_z$$

С помощью лучевого эллипсоида возможно найти направление распространения энергии. Пусть:

$$v_x > v_y, v_z$$

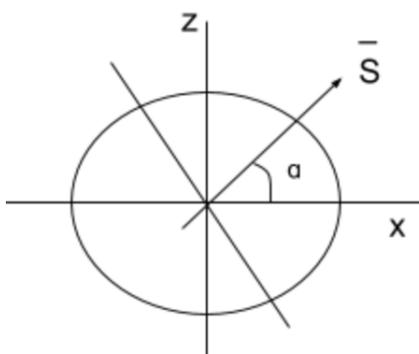


Рис. 18.5. Первый случай

У полученного эллипсоида в сечении есть круг. Поэтому волна, идущая вдоль оси x , пойдет со скоростью v_y или v_z . Состояние поляризации не изменится. Для этого

направления среда ведет себя изотропно. Поэтому это направление будет главной оптической осью кристалла.

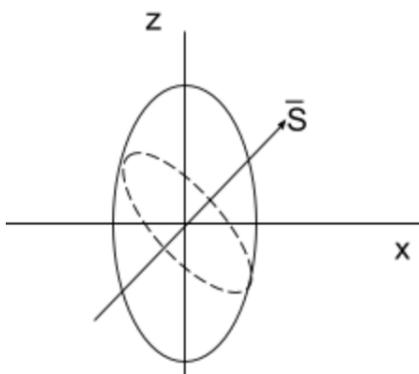


Рис. 18.6. Второй случай

Для любого направления в одноосном кристалле одна из скоростей всегда одна и та же и равна v_y или v_z . Вторая полуось меняет свое значение. В итоге две волны, которые распространяются в таком направлении, носят свои названия: обыкновенная волна v_o и необыкновенная волна v_e .

$$v_o = v_y, v_z$$

$$v_e = v_x$$

$$v_y, v_z \leq v_{\text{необ}} \leq v_x$$

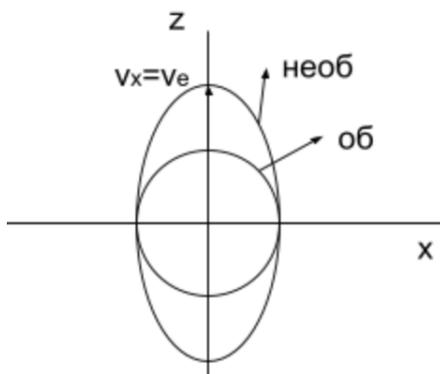


Рис. 18.7. Лучевая поверхность

Пусть:

$$v_x < v_y, v_z$$

Задается произвольное направление и перпендикуляр. Следовательно, главная оптическая ось совпадает с осью x .

Таким образом, можно нарисовать лучевую поверхность. Внутри кристалла вставляется точечный источник света. Свет идет во всех направлениях и засекается маленький промежуток времени. Рассматриваются точки, до которых дошли лучи. Для каждого направления существует две скорости. Одна из них, обыкновенная, не зависит от направления. Поэтому для обыкновенной волны эти лучи дойдут до сферы. Вдоль оси z необыкновенная волна идет со скоростью $v_x = v_e$. Внутренняя лучевая поверхность — сфера. Внешняя лучевая поверхность напоминает случай, когда $v_x < v_y, v_z$.

Семинар 19. Лучевая поверхность одноосного кристалла. Построения Гюйгенса

Самостоятельная работа (изменение поляризации при повороте пластинки)

Пусть есть поляризатор, анизотропная пластинка, анализатор и фотоприемник. Сначала необходимо найти анизотропную пластинку. В первое мгновение интенсивность, зарегистрированная фотоприемником, равна I_0 . Начиная с верхнего положения, анализатор вращают на 360° . В итоге в зависимости от угла поворота анализатора видят распределение интенсивности в полярных координатах.

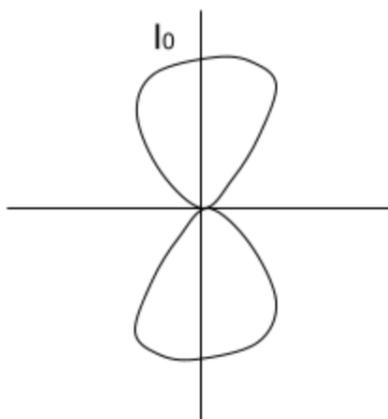


Рис. 19.1. Распределение интенсивности в полярных координатах

Дальше анизотропную пластинку повернули на угол α . Требуется найти угол α . После этого снова вращают анализатор и наблюдается круг, интенсивность которого надо найти.

Дальше анизотропную повернули еще на 15° в том же направлении. Требуется нарисовать график интенсивности и расшифровать его.

Линейная поляризация наблюдается после пластинки и поляризатора. Таким образом, анизотропная пластинка имеет главные направления. Если направление поляризации, падающего излучения, совпадает с одним из главных направлений, то ничего не меняется. Анизотропная пластинка может быть λ , $\frac{\lambda}{2}$ или главное направ-

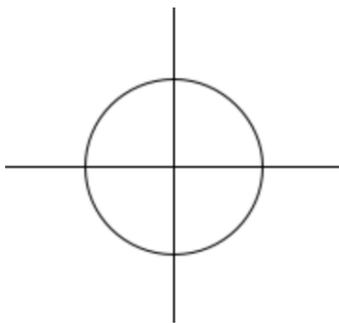


Рис. 19.2. Круговая поляризация

ление. Пластинка, которая может из линейной поляризации сделать круговую поляризацию, — пластинка $\frac{\lambda}{4}$. Если главное направление совпадает, то пластинку поворачивают на $\alpha = 45^\circ$. Интенсивность круговой поляризации получается следующим образом:

$$I = \frac{I_0}{2}$$

После поворота пластинки еще на 15° линейную поляризацию необходимо разложить на 2 составляющие вдоль главных направлений.

$$A_0 \cos 60^\circ = A_0 \frac{1}{2}$$

$$A_0 \sin 60^\circ = A_0 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Следовательно, наблюдается эллипсоидная поляризация.

$$I_{max} = \frac{3}{4} I_0$$

$$I_{min} = \frac{1}{4} I_0$$

Лучевая поверхность одноосного кристалла (продолжение)

Анизотропия связана с тем, что есть диэлектрические проницаемости, которые различны по своим значениям. Если диэлектрические проницаемости различны следующим образом, то получится двуосный кристалл:

$$\epsilon_x > \epsilon_y > \epsilon_z$$

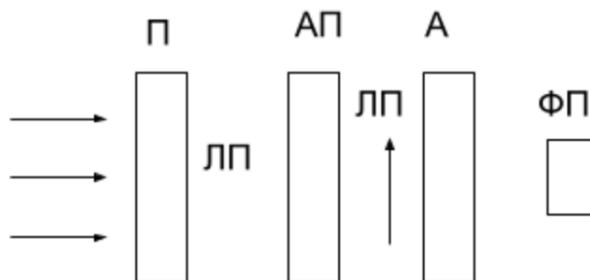


Рис. 19.3. Изменение поляризации при повороте пластинки

Кристалл называется двуосным потому, что имеет два таких направления, при распространении вдоль которых состояние поляризации не меняется. Эта волна движется со средней скоростью вдоль главного направления:

$$\frac{c}{\sqrt{\epsilon_y}}$$

Если диэлектрические проницаемости различны следующим образом, то получится одноосный кристалл:

$$\epsilon_x \neq \epsilon_y = \epsilon_z$$

У одноосного кристалла есть одна оптическая ось, которая совпадает с осью x . Есть две скорости: фазовая (ЭПП) и лучевая. Для нахождения фазовой скорости нужен эллипсоид, у которого полуоси равны показателям преломления: n_x, n_y, n_z . Чтобы найти значение фазовой скорости для какого-либо направления, необходимо сначала выбрать направление, нарисовать перпендикуляр и получить сечение эллипса. У этого эллипса есть две полуоси, которые можно найти и по величине, и по направлению: n', n'' .

$$v' = \frac{c}{n'}$$

$$v'' = \frac{c}{n''}$$

Направление этих полуосей показывает направление векторов D' и D'' , которые взаимно перпендикулярны. Таким образом, для каждого направления существуют две различных фазовых скорости, которые соответствуют двум взаимно перпендикулярным D' и D'' .

У лучевого эллипсоида по полуосям отложены главные скорости:

$$v_x = \frac{c}{n_x}$$

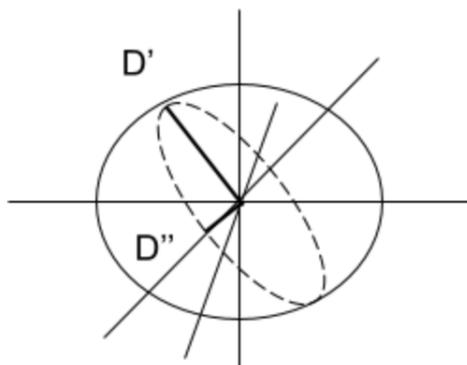


Рис. 19.4. Фазовый эллипсоид

Чтобы найти значение лучевой скорости для какого-либо направления, необходимо сначала выбрать направление, нарисовать перпендикуляр и получить сечение эллипса. У этого эллипса есть две полуоси, которые можно найти и по величине, и по направлению: u' , u'' . Направление этих полуосей показывает направление векторов E' и E'' , которые взаимно перпендикулярны.

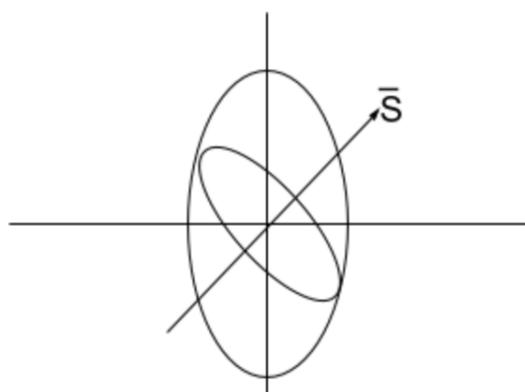


Рис. 19.5. Лучевой эллипсоид

Рассматривается лучевой эллипсоид. Пусть:

$$v_x > v_y = v_z = v_0$$

У полученного эллипсоида вращения в сечении есть круг. Поэтому волна, идущая вдоль оси x , пойдет со скоростью v_y или v_z . Состояние поляризации не изменится.

Для этого направления среда ведет себя изотропно. Поэтому это направление будет главной оптической осью кристалла.

Для любого направления в одноосном кристалле одна из скоростей всегда одна и та же и равна v_y или v_z . Вторая полуось меняет свое значение. В итоге две волны, которые распространяются в таком направлении, носят свои названия: обыкновенная волна v_o и необыкновенная волна v_e .

$$v_o \leq u_n \leq v_e$$

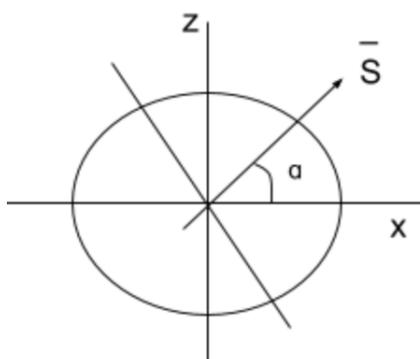


Рис. 19.6. Первый случай

Таким образом, можно построить лучевую поверхность. Внутри кристалла вставляется точечный источник света. Свет идет во всех направлениях и засекается маленький промежуток времени. Рассматриваются точки, до которых доходят лучи. Для каждого направления существует две скорости. Одна из них, обыкновенная, не зависит от направления. Поэтому для обыкновенной волны эти лучи дойдут до сферы. Вдоль оси z необыкновенная волна идет со скоростью $v_x = v_e$. Внутренняя лучевая поверхность — сфера. Внешняя лучевая поверхность напоминает случай, когда $v_x < v_y, v_z$.

Пусть:

$$v_x < v_y, v_z$$

Задается произвольное направление и перпендикуляр. Следовательно, главная оптическая ось совпадает с осью x .

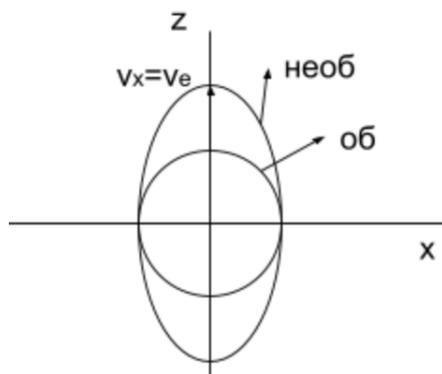


Рис. 19.7. Лучевая поверхность для первого случая

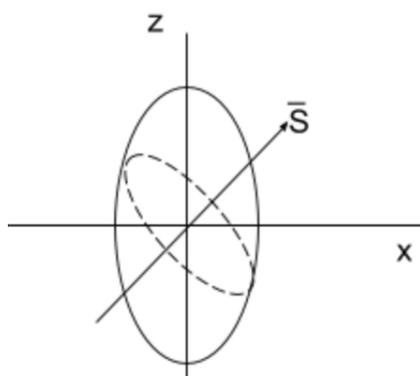


Рис. 19.8. Второй случай

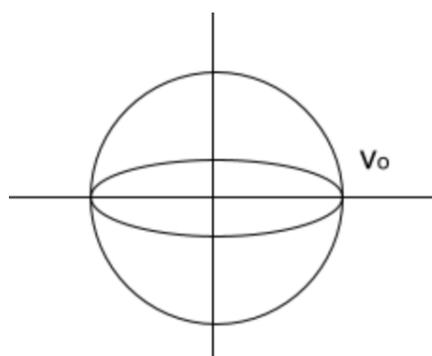


Рис. 19.9. Лучевая поверхность для второго случая

Состояния поляризации обыкновенной и необыкновенной волн

Главное сечение или плоскость главного сечения — это сечение, образованное направлением распространения и оптической осью. Плоскость главного сечения сов-

падает с плоскостью доски. Направление обыкновенной волны направлено перпендикулярно к доске. Обыкновенная волна поляризована перпендикулярно плоскости главного сечения. Необыкновенная волна поляризована в плоскости главного сечения.

Кристаллы бывают положительными и отрицательными. Лучевая поверхность для первого случая является отрицательной, а лучевая поверхность для второго случая является положительной.

Построения Гюйгенса для одноосных кристаллов

Пусть есть анизотропный кристалл, на которого падает луч из воздуха. Луч расщепляется на 2. В одноосном кристалле есть оптическая ось, которая имеет 3 главных направления. Пусть оптическая ось направлена вниз. В точку входа луча помещается источник и строится лучевая поверхность для обыкновенной волны (сфера) и лучевая поверхность для необыкновенной волны.

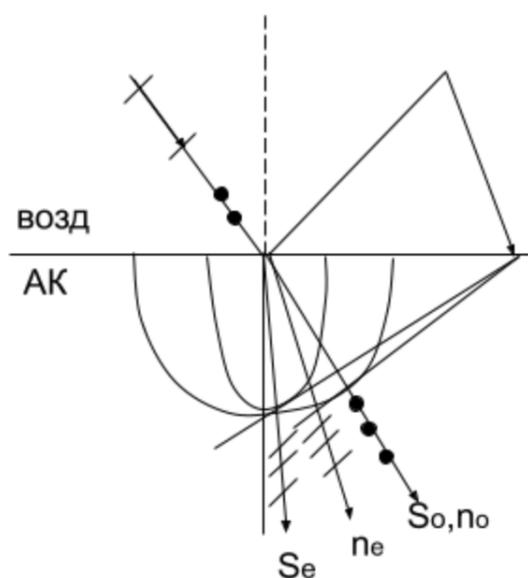


Рис. 19.10. Построение Гюйгенса для одноосных кристаллов

Дальше необходимо нарисовать такой луч, чтобы он опоздал относительно первого луча на такое же время, в течение которого лучи дошли до лучевой поверхности. Э то означает, что на объект падает плоская волна. После прохождения в кристалл

она останется плоской. Далее необходимо нарисовать 2 касательных плоскости.

$$v_o = \frac{c}{2}$$

Луч, соответствующий обыкновенной волне, проходит через точку касания и обозначается как S_o . Поверхность постоянной фазы для обыкновенной волны будет направлена в том же направлении n_o . Луч, соответствующий необыкновенной волне, проходит через точку касания и обозначается как S_e . Нормаль к фронту волны не совпадает с необыкновенной волной — n_e . Если падает неполяризованный свет, то обыкновенная волна поляризована перпендикулярно плоскости главного сечения, а необыкновенная волна поляризована перпендикулярно к вектору S_e и n_e .

Семинар 20. Двойное лучепреломление. Оптические явления на границе раздела сред

Построения Гюйгенса для одноосных кристаллов (продолжение)

У одноосного кристалла следующие значения диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 1,5$$

$$\varepsilon_z = 3$$

Угол падения луча 60° и лежит он в плоскости xoy . Граница раздела соответствует:

$$y = 0$$

Необходимо нарисовать лучевой и фазовый эллипсоиды, лучевую поверхность, построение Гюйгенса и найти углы преломления. Граница раздела двух сред: воздух и анизотропное вещество. Угол падения отсчитывается от вертикали. Оптическая ось совпадает оси z . Рассматривается фазовый эллипсоид. Наблюдается эллипсоид вращения. Далее рассматривается лучевой эллипсоид. Таким образом, можно построить лучевую поверхность. Обыкновенной волне соответствует ε_y , а необыкновенной волне соответствует ε_z . Скорость обыкновенной волны больше, чем скорость необыкновенной волны.

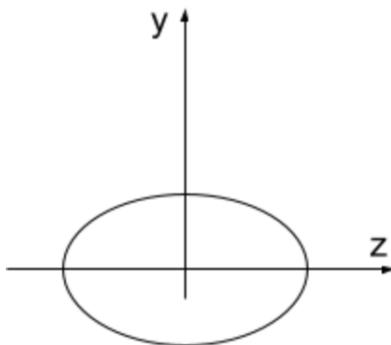


Рис. 20.1. Фазовый эллипсоид

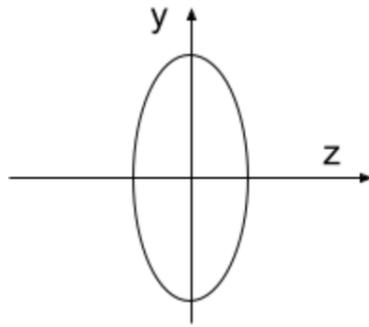


Рис. 20.2. Лучевой эллипсоид

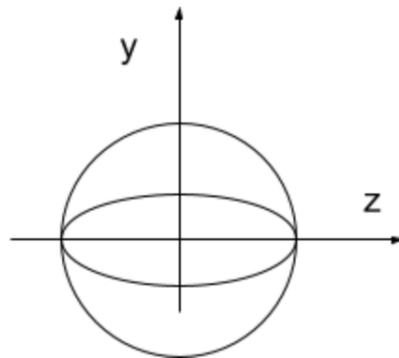


Рис. 20.3. Лучевая поверхность

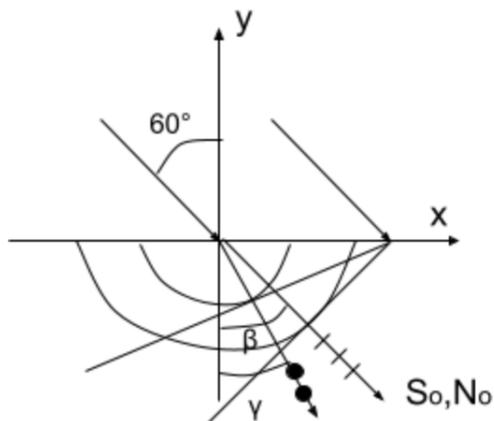


Рис. 20.4. Построение Гюйгенса

Независимо от направления скорости обыкновенной волны и необыкновенной волны одни и те же. Таким образом, показатели преломления равны:

$$n_o = \sqrt{\epsilon_x} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$n_e = \sqrt{\epsilon_z} = \sqrt{3}$$

Используя закон преломления, можно найти угол β :

$$1 \cdot \sin 60^\circ = n_o \sin \beta$$

$$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\beta = 45^\circ$$

Используя закон преломления, можно найти угол γ :

$$1 \sin 60^\circ = n_e \sin \gamma$$

$$\sin \gamma = \frac{1}{2}$$

$$\gamma = 30^\circ$$

Обыкновенная волна поляризована перпендикулярно плоскости главного сечения. Необыкновенная волна поляризована в плоскости главного сечения.

Призма Волластона

Призма Волластона состоит из анизотропного материала. Оптическая ось в первой призме направлена вертикально, а оптическая ось во второй призме направлена на наблюдателя. Идет свет, у которого есть обе поляризации. Через первую границу он проходит перпендикулярно. Но сейчас среда, из которой идет свет, обладает анизотропией. Если направление поляризации совпадает с оптической осью, то получится необыкновенная волна. Этой волне соответствует показатель преломления n_e . Вторая поляризация перпендикулярна оптической оси, поэтому она будет обыкновенной волной. Показатель преломления обыкновенной волны — n_o .

$$n_o < n_e$$

$$n_e \rightarrow n_o$$

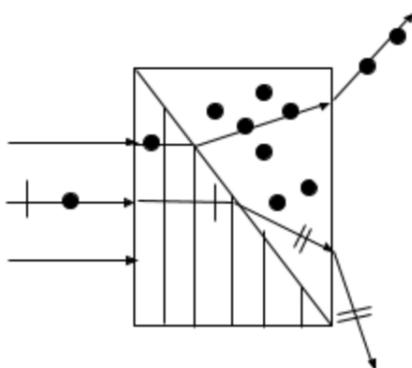


Рис. 20.5. Призма Волластона

$$n_o \rightarrow n_e$$

Рассматривается граница раздела, где оптическая ось направлена криво. Пусть нормально падает луч. Чтобы нарисовать построение Гюйгенса, необходимо нарисовать лучевую поверхность.

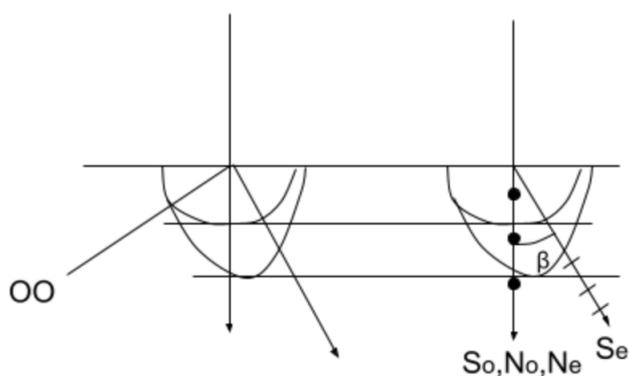


Рис. 20.6. Построение Гюйгенса

Строятся касательные к окружностям. Обыкновенная волна будет поляризована перпендикулярно плоскости главного сечения. Необыкновенная волна будет поляризована в плоскости главного сечения. Закон преломления справедлив для этого

случая:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

α — это угол, образованный нормалью к волновому фронту.

Энергетика отражения и преломления света на границе раздела двух сред

Рассматривается процесс перехода света из одной среды в другую. Процесс перехода света описывается формулами Френеля. Пусть свет идет из n_1 в n_2 . Свет падает нормально. Необходимо найти величину векторов. Записываются материальные уравнения:

$$\bar{D} = \epsilon \epsilon_0 \bar{E}$$

$$\bar{B} = \mu \mu_0 \bar{H}$$

Плоская электромагнитная волна:

$$E = Bc$$

Чтобы найти связь между $\bar{E}_{\text{отр}}$, $\bar{E}_{\text{пад}}$ и $\bar{E}_{\text{пр}}$, необходимо записать граничные условия:

$$E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$$

$$H_{\tau_1} = H_{\tau_2}$$

$$E_{\text{пад}} + E_{\text{отр}} = E_{\text{пр}}$$

$$H_{\text{пад}} - H_{\text{отр}} = H_{\text{пр}}$$

Таким образом, связь:

$$H \sim nE$$

$$n_1 E_{\text{пад}} - n_1 E_{\text{отр}} = n_2 E_{\text{пр}}$$

$$2n_1 E_{\text{пад}} = (n_1 + n_2) E_{\text{пр}}$$

Следовательно, записывается соотношение амплитуд:

$$t = \frac{E_{\text{пр}}}{E_{\text{отр}}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

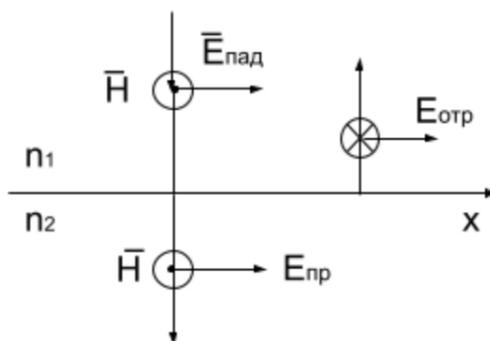


Рис. 20.7. Энергетика отражения и преломления света на границе раздела двух сред

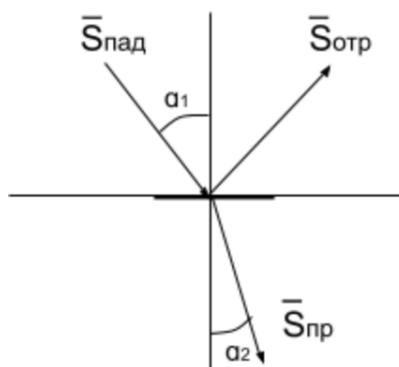


Рис. 20.8. Падение света под углом

$$r = \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

Энергетическими характеристиками являются:

- Объемная плотность энергии:

$$w_{\text{эл}} = \frac{\overline{ED}}{2} = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} \sim n^2 E^2$$

- Интенсивность:

$$\overline{S} = [\overline{E} \times \overline{H}] \sim nE^2$$

$$n_1 E_{\text{пад}}^2 = n_2 E_{\text{пр}}^2 + n_1 E_{\text{отр}}^2$$

$$1 = r^2 + \frac{n_2}{n_1} t^2$$

Таким образом, характеристикой является плотность потока энергии.

Если свет падает под углом, то рассматривается площадка, на которую падает энергия. Та энергия, которая упала на эту площадку, разойдется с этой площадки.

$$S_{n,\text{пад}} = S_{n,\text{отр}} + S_{n,\text{пр}}$$

$$\langle S_{\text{пад}} \cos \alpha_1 = S_{\text{отр}} \cos \alpha_1 + S_{\text{пр}} \cos \alpha_2 \rangle$$

Таким образом, получается закон сохранения при прохождении света на границе раздела двух сред:

$$I_{\text{пад}} = I_{\text{отр}} + \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} I_{\text{пр}}$$

Семинар 21. Формулы Френеля. Поляризация отраженных и преломленных волн

Самостоятельная работа (двойное лучепреломление)

Пусть есть призма, у которой одна половина из стекла, а другая из анизотропного кристалла. На призму падает плоская волна. Оптическая ось анизотропного кристалла расположена параллельно границе раздела стекла и анизотропного кристалла. Показатели преломления следующие:

$$n_e < n_o = n_{ст}$$

Волна падает под углом 45° . Строятся лучевые поверхности. Обыкновенная волна поляризована перпендикулярно плоскости главного сечения. Проводятся касательные к лучевым поверхностям. Состояние поляризации необыкновенной волны находится в плоскости главного сечения.

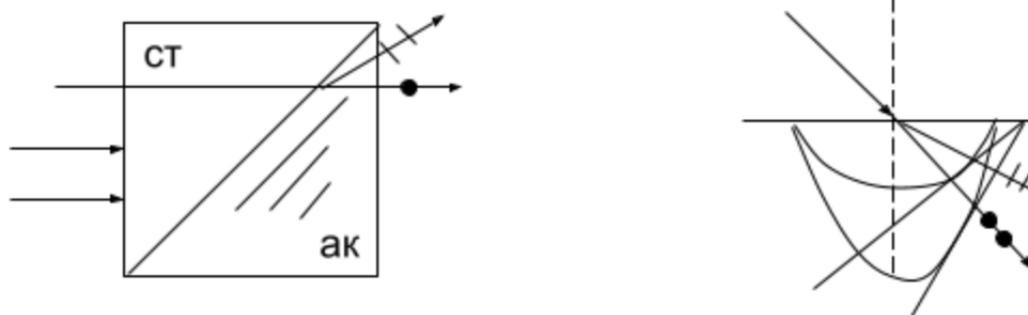


Рис. 21.1. Двойное лучепреломление

Формулы Френеля

Коэффициент отражения по амплитуде записывается следующим образом:

$$r = \frac{E_{отр}}{E_{пад}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

Коэффициент прохождения записывается следующим образом:

$$t = \frac{E_{\text{пр}}}{E_{\text{пад}}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Показатель преломления стекла $n = 1,5$. Тогда коэффициент отражения и коэффициент прохождения имеют следующее значение:

$$r = -0,2$$

$$t = 0,8$$

От стекла отражается 4%.

$$r^2 = R = \frac{I_{\text{отр}}}{I_{\text{пад}}} = 0,04$$

$$\frac{I_{\text{пр}}}{I_{\text{пад}}} = \frac{n_2}{n_1} t^2 = 1,5 \cdot 0,64 = 0,96$$

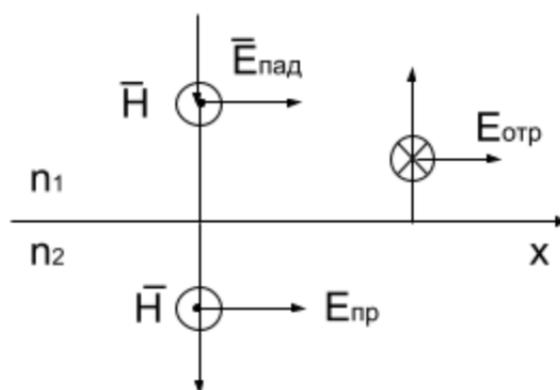


Рис. 21.2. Энергетика отражения и преломления света на границе раздела двух сред

Пусть волна падает под углом. Из уравнения Максвелла вытекает то, что должны быть выполнены граничные условия. У каждой волны есть свои переменные: ω_1 , ω_2 , ω_3 , k_1 , k_2 , k_3 .

$$E_{1x} + E_{2x} = E_{3x}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$$

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$$

$$k_x x + k_y y + k_z z \rightarrow k_{1x} = k_{2x} = k_{3x} \rightarrow k_1 \sin \varphi_1 = k_2 \sin \varphi_2 = k_3 \sin \varphi_3$$

Таким образом, были получены законы отражения и преломления.

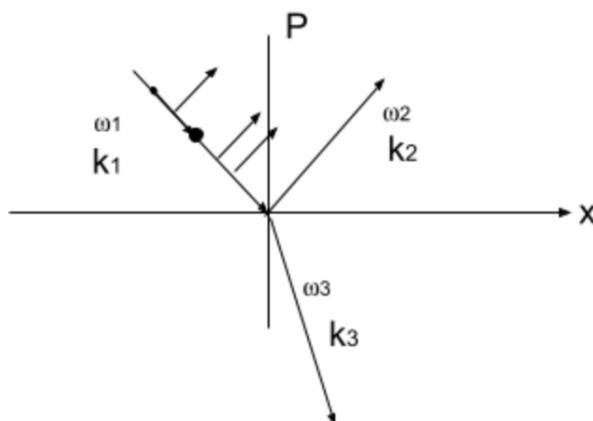


Рис. 21.3. Получение формулы Френеля

Зависимости коэффициентов r и t от угла падения. Угол Брюстера

θ — угол падения. Свет падает из воздуха в стекло.

$$n_1 < n_2$$

Существует угол Брюстера, при котором отражение одной из поляризаций (p -поляризация) равно 0. Угол Брюстера записывается следующим образом:

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{Бр}} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\theta_{1\text{Бр}} + \theta_{2\text{Бр}} = \frac{\pi}{2}$$

Если выполнено это условие, то:

$$\sin \theta_{2\text{Бр}} = \cos \theta_{1\text{Бр}}$$

Пусть:

$$n_1 = 1$$

$$n_2 = 1,5$$

Тогда, угол Брюстера стекла имеет следующее значение:

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{Бр}} = \frac{n_2}{n_1} = 1,5$$

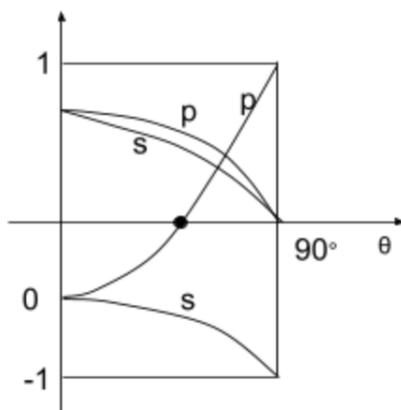


Рис. 21.4. Угол Брюстера

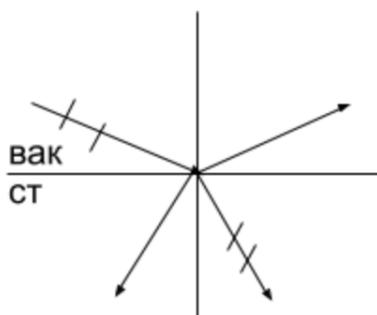


Рис. 21.5. Угол Брюстера

Отраженная волна появляется за счет того, что возбуждается молекула поверхностного слоя.

$$r_s = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}$$
$$r_p = \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)}$$

Полное внутренне отражение. Поверхностные волны

При $n_1 > n_2$ наблюдается полное внутренне отражение:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$\sin \theta_{\text{ПВО}} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\theta_{\text{ПВО}} =$$

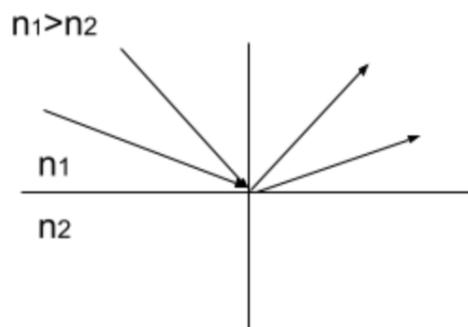


Рис. 21.6. Полное внутренне отражение

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{n_1}{n_2}$$
$$k_2 = \frac{n_2}{n_1} k_1$$

Граничное условие следующее:

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 = k_{2x}$$

$$k_{2x} = k_1 \sin \theta_1 > k_1 \frac{n_2}{n_1}$$

По теореме Пифагора можно найти следующую компоненту:

$$k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2} = \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}k_1\right)^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1} - k_1 \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_1} = i\kappa$$

В плоской волне есть следующее слагаемое:

$$e^{i\vec{k}\vec{r}} = e^{i(k_{2x}\cdot x) + k_{2z}z} = e^{ik_{2x}x} e^{-\kappa z}$$

κ — коэффициент затухания. Амплитуда волны по мере удаления от границы падает по экспоненте. Затухания волны по амплитуде происходит на толщинах порядка длины волны света.

Поляризация волны, отраженной от границы с менее плотной средой

Пусть есть стеклянная пластинка, на которую наносится тонкий слой вещества, который светится. Пучок света направлен под углом больше, чем полное внутреннее отражение. Появляется отраженная волна и тонкий слой начинает светиться. Это происходит потому, что во второй среде существует волна. Записывается коэффициент:

$$r_s = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}$$
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$
$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \pm i\chi$$

Таким образом, коэффициент отражения станет комплексным:

$$r_s = \frac{a - ib}{a + ib} = e^{i\varphi_s}$$
$$r_p = e^{i\varphi_p}$$

Наблюдается сдвиг по фазе для отраженной волны. Следовательно, появится разность фаз. Таким образом, волна из линейно поляризованной станет эллиптически поляризованной.

Дисперсия света

В дисперсии есть фазовая скорость и групповая скорость. Фазовая скорость записывается следующим образом:

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k}$$

Групповая скорость записывается следующим образом:

$$u_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}$$

Закон дисперсии — это $k(\omega)$. Пусть:

$$v_{\text{ф}} = 2u_{\text{гр}}$$

Тогда закон дисперсии равен:

$$\frac{\omega}{k} = 2 \frac{d\omega}{dk}$$

$$\frac{dk}{k} = 2 \frac{d\omega}{\omega}$$

$$\ln k = \ln \omega^2 + c$$

$$k \sim \omega^2$$

Семинар 22. Дисперсия и поглощение света в линейной изотропной среде

Самостоятельная работа (падение света на клин)

Пусть есть оптический клин с углом 30° . Показатель преломления:

$$n = \sqrt{3}$$

На оптический клин падает волна под углом 60° . Интенсивность у этой волны — I_0 . Волна поляризована в плоскости рисунка. Необходимо найти $I_{\text{прош}}$.

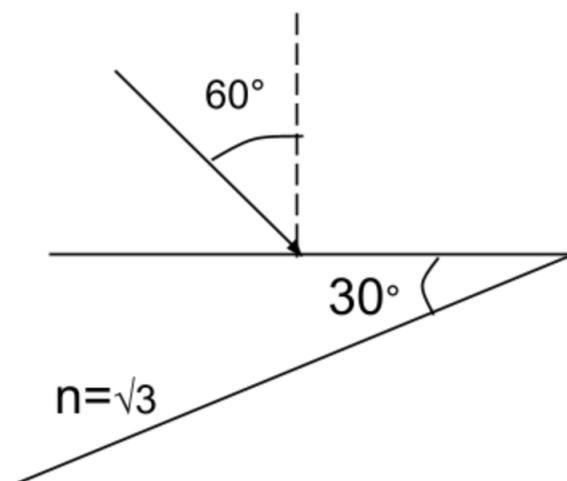


Рис. 22.1. Падение света на клин под углом

Пусть волна падает на оптический клин нормально. Оптический угол под углом 30° и показатель преломления $n = \sqrt{3}$. Необходимо найти $I_{\text{прош}}$.

$$t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \frac{2}{1 + n}$$

$$I_{\text{прош}} = I_0 \cdot t^2 \cdot \frac{n_2}{n_1} = I_0 n \left(\frac{2}{1 + n} \right)^2$$

$$\sqrt{3} \sin 30 = 1 \sin \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

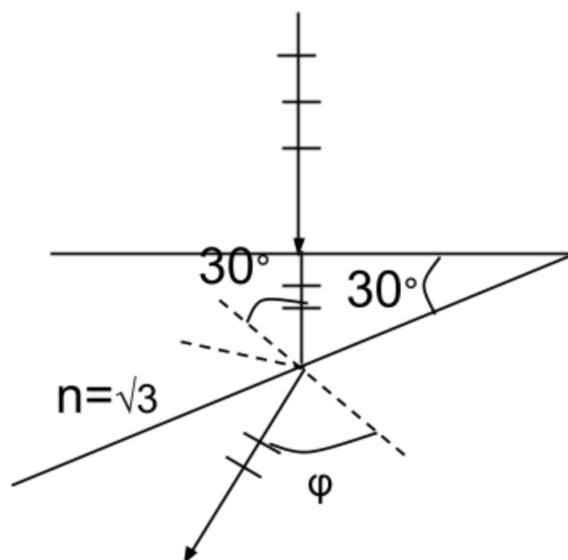


Рис. 22.2. Падение света на клин нормально

$$\varphi = 60^\circ$$

В угле Брюстера нет отраженной волны. Записывается закон сохранения энергии:

$$I_{\text{пад}} = I_{\text{отр}} + I_{\text{пр}} \cdot \frac{\cos \varphi_{\text{пр}}}{\cos \varphi_{\text{пад}}}$$

$$I_{\text{прош}} = I_{\text{прош1}} \cdot \frac{\cos \varphi_{\text{пад}}}{\cos \varphi_{\text{пр}}} = I_0 \cdot \frac{4n}{(1+n)^2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = I_0 \frac{4 \cdot 3}{(1 + \sqrt{3})^2} \approx I_0 \frac{4 \cdot 3}{2,7^2} \approx 1,6I_0$$

$$2,7^2 = e^2 = 7,2$$

Разбор предыдущей самостоятельной

Пусть есть призма, у которой одна половина из стекла, а другая из анизотропного кристалла. На призму падает плоская волна. Оптическая ось анизотропного кристалла расположена параллельно границе разделения стекла и анизотропного кристалла. Показатели преломления следующие:

$$n_e < n_o = n_{\text{ст}}$$

Волна падает под углом 45° . Строятся лучевые поверхности. Обыкновенная волна поляризована перпендикулярно плоскости главного сечения. Проводятся касательные к лучевым поверхностям. Состояние поляризации необыкновенной волны находится в плоскости главного сечения.

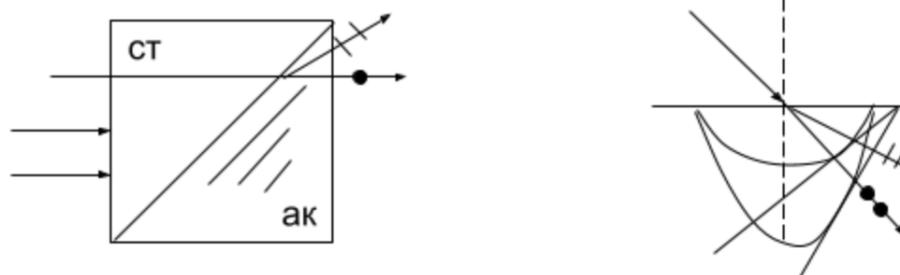


Рис. 22.3. Двойное лучепреломление

Дисперсия света. Электронная теория Лоренца

Волновое уравнение записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial x^2} = \epsilon \mu \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}$$

Решение волнового уравнения в комплексном виде записывается следующим образом:

$$\bar{E}(x, t) = \bar{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - kx)}$$

Таким образом, дисперсионное уравнение записывается следующим образом:

$$k^2 = \frac{\epsilon(\omega)}{c^2} \omega^2$$

Анизотропия объясняется зависимостью диэлектрической восприимчивости от направления.

Простейшая модель взаимодействия электромагнитного излучения с веществом — это атом, у которого есть электрон. Этот электрон под действием электрического поля совершает колебания. Уравнение гармонического осциллятора описывается движением электрона:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = eE_0 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m} E_0 e^{i\omega t}$$

Общее решение неоднородного уравнения (ОРНУ) складывается из частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения. Общее

решение однородного уравнения затухает. Частное решение неоднородного уравнения записывается следующим образом:

$$x = x_0 e^{i\omega t}$$

x_0 зависит от ω . Это приводит к резонансу. У диполя есть магнитный момент:

$$p = -ex$$

$$\bar{P} = N\bar{p} = \chi\epsilon_0\bar{E}$$

$$\epsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\Gamma\omega}$$

ω_p^2 — плазменная частота.

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}$$

Нормальная и аномальная дисперсия. Групповая скорость

$\epsilon(\omega)$ — величина комплексная, встречается в уравнении для дисперсии. Следовательно, ω и k^2 тоже комплексные.

$$\bar{k} = \bar{k}' \pm i\bar{k}''$$

Это приводит к затуханию волны по экспоненциальному закону:

$$e^{i\bar{k}\bar{r}} = e^{i\bar{k}'\bar{r}} \cdot e^{-\bar{k}''\bar{r}}$$

n — действительная часть, α — поглощение. Строится график зависимости n, α от ω . Рассматривается разряженная среда. Поглощение происходит вблизи резонансной частоты.

Нормальная дисперсия наблюдается при:

$$\frac{dn}{d\omega} > 0$$

Аномальная дисперсия наблюдается при:

$$\frac{dn}{d\omega} < 0$$

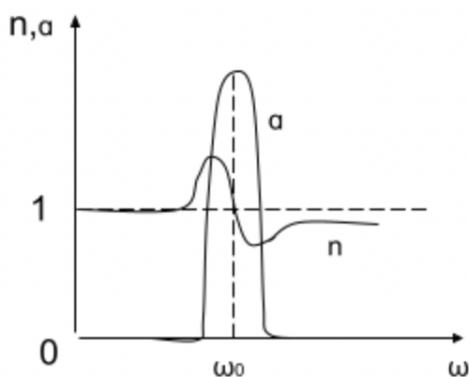


Рис. 22.4. График зависимости n, α от ω

Частный случай общей дисперсии — $n(\lambda)$. Фазовая скорость записывается следующим образом:

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$$

Групповая скорость записывается следующим образом:

$$u_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}$$

$$\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x) = 2 \cos(\Delta\omega t - \Delta k x) \cos(\omega t - k x)$$

Таким образом, наблюдается биение. Групповая скорость существенно меньше, чем и первая, и вторая фазовые скорости.

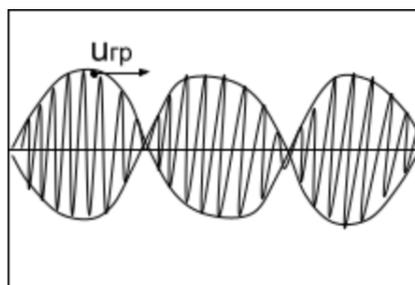


Рис. 22.5. Групповая скорость

Связь между фазовой и групповой скоростью. Формула Рэлея

Рассматривается связь между фазовой и групповой скоростью:

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k}$$

$$\omega = v_{\phi} k$$

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{dv_{\phi}}{dk} \cdot k + v_{\phi}$$

$$\frac{dk}{k} = -\frac{d\lambda}{\lambda}$$

Таким образом, получается формула Рэлея, которая дает возможность связать фазовую и групповую скорости:

$$u_{\text{гр}} = v_{\phi} - \lambda \frac{dv_{\phi}}{d\lambda}$$

Задан закон дисперсии в следующем виде:

$$v_{\phi} \sim \frac{\sqrt{\lambda}}{\omega^3}$$

Необходимо найти связь между фазовой скоростью и групповой скоростью.

$$v_{\phi} = \alpha \frac{\sqrt{\lambda}}{\omega^3}$$

$$\frac{\omega}{k} = v_{\phi} = \beta \frac{1}{\sqrt{k}\omega^3}$$

$$\omega^4 = \gamma \sqrt{k}$$

$$k = \delta \omega^8$$

$$\frac{dk}{d\omega} = 8\delta\omega^7 \delta \frac{k}{\omega}$$

$$\frac{1}{u_{\text{гр}}} = \frac{8}{v_{\phi}}$$

Следовательно, связь следующая:

$$v_{\phi} = 8u_{\text{гр}}$$

Плазменная частота. Отражение от ионосферы

$$\varepsilon = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\Gamma\omega}$$

Пусть затухания нет. В плазме нет собственной частоты. Поэтому формула записывается следующим образом:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$n < 1$$

$$v_\Phi = \frac{c}{n} > c$$

$$v_\Phi \cdot u_{\text{гр}} = c^2$$

При таком соотношении:

$$\varepsilon < 0$$

$$n = in''$$

n — мнимый показатель преломления.

Вокруг Земли существует ионосфера. Волны доходят до слоя ионосферы и испытывают полное внутренне отражение.



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ