



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

СОВРЕМЕННЫЙ КУРС ГРАВИТАЦИИ

ГАЛЬЦОВ
ДМИТРИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

—
ФИЗФАК МГУ

—
КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
АНДРЕЕВУ АННУ СЕРГЕЕВНУ



Оглавление

Лекция 1. Механика Галилея-Ньютона	7
Лагранжев формализм	7
Гамильтонов формализм	11
Уравнения Гамильтона-Якоби	12
Интегралы движения	14
Рекомендуемая литература.....	16
Лекция 2. Пространство Минковского, его причинная структура	17
Уравнения Максвелла.....	17
Спин.....	19
Канонический тензор энергии-импульса для теории Максвелла	20
Мировая трубка.....	23
Световой конус	24
Причинная структура.....	26
Лекция 3. Трехмерные гиперповерхности в пространстве Минковского.....	27
Гиперповерхности.....	27
Диаграммы Пенроуза.....	28
Символы Кристоффеля и свободное движение в криволинейных координатах.....	29
Векторы, ковекторы, тензор в криволинейных координатах.....	31
Лекция 4. Диаграммы Пенроуза.....	35
Изотропные геодезические.....	35
Диаграммы Пенроуза.....	37
Псевдосферы	40
Свойства геодезической	41
Нетензоры, свойства символов Кристоффеля	42
Лекция 5. k-формы в теории струн. Расслоение.....	44
Многообразие.....	44

Производная Ли	45
Внешняя производная.....	46
Теорема Стокса	49
Ковариантное дифференцирование.....	49
Лекция 6. Гравитация как кривизна.....	51
Ковариантное дифференцирование.....	51
Напряженность поля.....	54
Нильпотентные операторы, тождество Бьянки	56
Геометрический смысл кручения и кривизны	57
Лекция 7. Спинорные поля. Общая ковариантность теории гравитации. Принципы минимальности и отсутствия высших производных	60
Лоренцева связность.....	60
Уравнение Дирака.....	61
Полная ковариантная производная	63
Общая ковариантность	66
Принципы минимальности, отсутствия высших производных	68
Лекция 8. Классификация пространств.....	70
Дуализация и внешнее произведение на пространстве форм	70
Скалярное произведение в пространстве форм	71
Разложение формы на гармонические	72
Группа изометрий	73
Классификация изометрий	74
<i>Максимально симметричное пространство</i>	74
<i>Однородное пространство</i>	76
Лекция 9. Теория P-brane.....	79
p-brane.....	79
Поверхности в евклидовом пространстве.....	80
Поверхности в римановом пространстве	82

Действие p-brane	84
Тензор энергии-импульса	85
Лекция 10. Омбилические поверхности, поля.....	88
Теория p-brane	88
Омбилические поверхности	90
Поля.....	91
<i>Скалярное поле</i>	91
<i>Поле Максвелла</i>	92
<i>Поля антисимметричных форм</i>	94
Лекция 11. Линейная теория Фирца-Паули	95
Замечание к общим свойствам действия p-бран.....	95
Линейная теория Фирца-Паули	97
Лагранжиан в теории Фирца-Паули.....	98
Канонический тензор энергии-импульса	99
Калибровочные преобразования	100
Понятие спина на классическом уровне	102
Квантование полей.....	103
Лекция 12. Взаимодействие с частицей. Действие Эйнштейна-Гильберта.....	105
Взаимодействие браны с точечной частицей.....	105
Приближенность линеаризованной теории	106
Задача о гравитационном излучении	108
Действие Эйнштейна-Гильберта.....	110
Лекция 13. Уравнения Эйнштейна	113
Уравнение движения.....	113
Псевдотензор Эйнштейна. Уравнения Эйнштейна	115
Решение уравнений Эйнштейна. Метрика Шварцшильда	116
Красное смещение	118
Условие регулярности горизонта	119

Геометрические свойства метрики Шварцшильда	120
Лекция 14. Фотонные орбиты и движение внутри черной дыры.....	123
Условие определения круговых орбит.....	123
Прицельный параметр	124
Гиперповерхности.....	125
Движение внутри черной дыры.....	126
Координаты Крускала.....	128
Преобразование тангенсом.....	130
Лекция 15. Статические сферически симметричные решения с материей.....	133
Гравитационное поле звезды.....	133
Задача с постоянной плотностью массы внутри тела.....	135
Метрика Райсснера-Нордстрема	136

Лекция 1

Механика Галилея-Ньютона

Этот курс гравитации охватывает общую теорию относительности и некоторые ее последующие развития. Он рассчитан на два семестра. В этом семестре будем заниматься математическими основами теории гравитации, общей теории относительности. Вспомним основные принципы.

Как следует из названия общей теории относительности, речь идет, во-первых, о некотором новом понимании принципа относительности, во-вторых, о развитии специальной теории относительности. Специальная теория относительности по сути являлась обобщением галилеевской относительности. С этого и начнем.

Принципы классической механики так и остались неизменными с момента, когда они были сформулированы в основном Ньютоном. Это принцип наименьшего действия, лагранжева механика, гамильтонова механика. В последствии понимание этих принципов немного изменилось. Квантовая теория – это то, что мы считаем истинной теорией наблюдаемого мира, а классическая теория – нечто приближенное в смысле вероятностного описания, это описание наиболее вероятных процессов. Можно также сказать, что это описание средних в квантовой механике. Принцип наименьшего действия в первоначальной формулировке – это скорее вычисление некоторого объекта, имеющего отношение к квантовой механике – функционального интеграла, и вычисление его методом наискорейшего спуска (вычисление наиболее вероятных траекторий).

Лагранжев формализм

В классической механике все начинается с определения конфигурационного пространства. Любая физическая теория оперирует с некоторой моделью. Простейшая классическая механика описывает системы материальных точек. Примерно таким же образом можно описать движение протяженных тел. В основе лежит описание с помощью обобщенных координат:

$$\{q^i\}, i = 1 \dots N.$$

Нас интересуют значения $q^i(t)$. Время абсолютно, оно течет для всех точек пространства одинаково. Параметризуем $q^i(t)$, производные $\frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i$. Далее рассматривается линейный непрерывный функционал в конфигурационном пространстве, называемый действием:

$$S = \int_{t_0}^{t_f} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt,$$

$$q^i(t_0) = q_0^i; q^i(t_f) = q_f^i -$$

известны начальное и конечное значения, а сам путь неизвестен.

Основная задача – указать, как систем эволюционирует от q_0^i до q_f^i . Принцип наименьшего действия состоит в том, что если мы подвергаем кривые бесконечно малому изменению, то есть вариации $\delta(q)$, при этом вариации на концах равны нулю, то истинная траектория является стационарной точкой функционала:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}^i \right) dt = 0.$$

В таком случае стационарная точка действия будет являться определяющим уравнением для истинной траектории $q(t)$.

Стоит подчеркнуть, что здесь функция лагранжа зависит от $q(t), \dot{q}(t)$ и не зависит от высших производных. Если бы была зависимость от высших производных, то уравнения движения были бы более чем второго порядка по времени. Такие уравнения приводят к некоторым патологиям. Последние годы часто упоминалась неустойчивость Остроградского (духи). При рассмотрении лагранжиана с высшими производными высшие производные можно переобозначить как новые координаты. Это приведет к расширению конфигурационного пространства. Более 100 лет назад Остроградский доказал теорему, что если взять лагранжиан исходной теории в виде квадратичной функции от скоростей и расширять на высшие производные, тогда в новых степенях свободы появятся члены с отрицательной кинетической энергией – неустойчивые.

Интегрированием по частям функционала действия можно получить уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{aligned} \delta \dot{q} &= \frac{d}{dt} \delta q; \\ \delta S &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q^i dt \Rightarrow \\ &\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 - \end{aligned}$$

уравнение Эйлера-Лагранжа. Первый член исчезает в силу того, что вариации координат на концах интервала времени обращаются в ноль:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \Big|_{t_0}^{t_f} = 0.$$

Так, мы закодировали уравнения движения (совокупность N уравнений для всех координат q^i) функцией Лагранжа, которая является скаляром. Это удобно для рассмотрения систем, инвариантных относительно преобразований обобщенных координат. Изучать симметрии таких лагранжианов удобнее имея скаляр.

В квантовой теории на самом деле могут реализоваться не только пути, отвечающие экстремалиям, но и любые другие пути с определенной вероятностью. Амплитуда вероятности может быть записана следующим образом:

$$\langle q_f^i, t_f | q_0^i, t_0 \rangle = \int e^{\frac{iS}{\hbar}} D(q).$$

Теперь вернемся к классической механике материальных точек. В этом случае конфигурационное пространство можно представить как совокупность координат:

$$q^i = \{\vec{r}_a\}, \quad \vec{r}_a \in E,$$

$$\vec{r} = (x, y, z) \Rightarrow$$

$$dl^3 = \delta_{ij} dx^i dx^j = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \text{метрика.}$$

Мы рассматриваем кривые $\vec{r}_a(t)$:

$$\dot{\vec{r}}_a = \vec{v}_a.$$

Функция Лагранжа должна быть скаляром:

$$L(\vec{r}_a, \vec{v}_a, t)$$

Эту функцию будем строить из принципа относительности Галилея и понятия инерциальной системы отсчета (ИСО). Система отсчета – совокупность трех координат и абсолютного времени. Можно рассматривать пару таких систем, движущихся друг относительно друга со скоростью \vec{V} . При этом в начальный момент времени системы совпадают, потом начинают расходиться.

$$\vec{r}_a = \vec{r}'_a + \vec{V}t -$$

относительность Галилея. Известно, что если лагранжиан изменить на полный дифференциал

$$L \rightarrow L + df(q^i, \dot{q}^i),$$

то это не скажется на уравнениях Эйлера-Лагранжа. Такой дифференциал приведет к изменению поверхностного члена

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right|_{t_0}^{t_f},$$

который исчезает при варьировании. Нетрудно понять, что если взять в качестве лагранжиана квадратичную функцию скоростей, например \vec{v}^2 , то в другой инерциальной системе отсчета со скоростью \vec{V}

$$\vec{v}_a^2 = (\vec{v}_a + \vec{V})^2 = \vec{v}_a^2 + 2\vec{v}_a\vec{V} + \vec{V}^2 -$$

последние два члена можно отбросить. Таким образом, квадратичная функция скоростей будет удовлетворять принципу относительности Галилея. При рассмотрении более высоких степеней это свойство теряется. В механике известно понятие кинетической энергии. Дальше в механике основное предположение о взаимодействии частиц – дальное действие. Сила взаимодействия двух разнесенных на расстояние частиц подчиняется третьему закону Ньютона. В каждый момент времени сила взаимодействия не зависит от положения частиц, задается некоторым функционалом. Поэтому речь идет о том, что функцию Лагранжа правильно выбрать в виде:

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - \sum_{a \neq b} U_{ab}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|),$$

$$\sum_{a \neq b} U_{ab}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) = U$$

Уравнение для частицы a:

$$m_a \dot{\vec{v}}_a = - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_a} U = \vec{f}_a.$$

Это сильное предположение, которое в релятивистской теории уже не имеет места. Для того, чтобы описать взаимодействие между двумя частицами придется вводить дополнительную систему, называемую полем и имеющую бесконечное число степеней свободы. Поле передающее взаимодействие с специальной теории относительности независимо, является отдельной субстанцией.

В классической механике потенциальная энергия и электростатический потенциал в электродинамике – разные по смыслу вещи, хотя уравнения в нерелятивистском пределе совпадают. Потенциальную энергию можем понимать как кулоновскую энергию взаимодействия зарядов или же ньютоновскую энергию взаимодействия в теории гравитации Ньютона. Здесь можно сразу понять, что такой парный потенциал, если рассчитать все силы, действующие на совокупность частиц, то они будут попарно уничтожаться. Поэтому если функция Лагранжа зависит только от \vec{r}_a, \vec{v}_a , то здесь будут возникать законы сохранения из-за того, что полная сила, действующая на все частицы равна нулю 0 - замкнутая система частиц, взаимодействующая по средствам парных сил.

Есть еще понятие движения частиц во внешнем поле. Оно появляется при выделении лагранжиана некоторой части, движение которой задается заранее.

Например, при рассмотрении движения планет в поле солнца, можно считать Солнце покоящимся, а массы планет малы по сравнению с массой Солнца.

Пусть есть система материальных точек. Выделим некоторые из них и зададим их движение. Тогда оставшиеся материальные точки будут двигаться в поле, которое определяется другой частью точек. Тогда

$$U = U(\mathbf{r}, t) -$$

движение во внешнем поле.

Гамильтонов формализм

Удобство использования скалярной функции координат и скоростей состоит в том, что симметрии конфигурационного пространства будут более простым образом включены. Уравнение Эйлера-Лагранжа для каждой частицы:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i}.$$

Будем считать, что система полная, значит внешних полей нет и нет зависимости L от t :

$$L = L(q^i, \dot{q}^i).$$

Можем вычислить полную производную на траектории, удовлетворяющей уравнениям Эйлера-Лагранжа:

$$\left. \frac{dL}{dt} \right|_{q=q(t)} = \frac{\partial L}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i,$$

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L \Rightarrow$$

$$\left. \frac{dH}{dt} \right|_{q(t)} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i = 0.$$

Так из функции Лагранжа мы построили новый функционал, он называется функцией Гамильтона. Если функция Лагранжа не зависит от времени явно, то сохраняется гамильтониан – энергия. Таким образом, для замкнутой системы при взаимодействии по средствам парных потенциалов будет сохраняться полная энергия. Полная энергия для записанного ранее лагранжиана:

$$H = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + U = T + U.$$

Теперь можем использовать функцию Гамильтона, чтобы записать уравнения Эйлера-Лагранжа в виде систем первого порядка. Для этого мы вводим обозначения:

$$\vec{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = m_a \vec{v}_a = m_a \frac{d}{dt} \vec{r}_a - \text{импульс} \Rightarrow$$

$$dH(\vec{r}_a, \vec{p}_a) = \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_a} \vec{v}_a + \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_a} d\vec{p}_a.$$

Уравнения Гамильтона:

$$\dot{\vec{p}}_a = - \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_a};$$

$$\dot{\vec{r}}_a = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_a}.$$

Таким образом, мы могли бы принцип наименьшего действия сформулировать с помощью функционала на множестве. Принцип минимального действия Гамильтона:

$$S(p_i, q^i) = \int_{t_0, q_0}^{t_f, q_f} (p_i dq^i - H(p, q,) dt).$$

Если варьировать такой функционал, то мы воспроизведем уравнения, записанные на языке обобщенных координат. При этом характерно, что индекс у импульсов нижний, а у координат верхний.

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}.$$

Для обобщенных импульсов и координат:

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q^i};$$

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p^i}.$$

Уравнения Гамильтона-Якоби

Сам по себе гамильтонов вариационный принцип может быть использован для вывода уравнений Гамильтона-Якоби. Будем рассматривать действие в лагранжевой форме и вычислять значения действия с фиксированной начальной точкой для траекторий, удовлетворяющих принцип наименьшего действия. Значение функционала действия:

$$S(q^i(t), t) = \int_{q_0^i, t_0}^{q^i, t} L(q^i(t'), \dot{q}^i(t')) \Big|_{on\ shell} dt' -$$

Действие Гамильтона-Якоби, где $q^i(t)$ – удовлетворяют уравнениям Эйлера-Лагранжа (on shell). Идея состоит в том, что вместо решений уравнений движений мы будем искать такую функцию $S(q^i(t), t)$, решая некоторое дифференциально е уравнение для нее:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial q^i} = p_i.$$

$$\frac{dS}{dt} = L = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(p, q).$$

Из наших определений следует, что если мы берем последнее уравнение и подставляем $\frac{\partial S}{\partial q^i}$, то получаем уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0.$$

Цель решения такого уравнения состоит в том, что мы можем рассматривать переход от набора некоторых канонических переменных (p, q) к некоторому новому набору (p', q') и заменяя H на H' с сохранением Гамильтоновых уравнений. Это удобнее всего понять из принципа бнаименьшего действия, записанного в форме Гамильтона.

$$S(p_i, q^i) = \int_{t_0, q_0}^{t_f, q_f} (p_i dq^i - H(p, q, t) dt) = \int p' dq' - H' dt + dF(q^i, q'^i, t)$$

$F(q^i, q'^i, t)$ – производящая функция к новым переменным. Мы можем выбрать произвольные функции $dF(q^i, q'^i, t)$, поскольку это полный дифференциал, он не будет сказываться на уравнениях движения. Будет гарантирована сохранение гамильтоновой формы для новых координат. Но здесь фигурируют и новые импульсы. Будем выражать их из уравнений для дифференциалов:

$$dF = p dq - H dt - p' dq' + H' dt,$$

$$p' = \frac{\partial F}{\partial q'}, p = \frac{\partial F}{\partial q}, H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Следующий шаг состоит в том, что мы можем произвести преобразования Лежандра функции F:

$$F - p'_i q'^i = \Phi(q, p', t) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial q} dq + \frac{\partial F}{\partial q'} dq' - p' dq' - q' dp' &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial q} dq - q' dp' = \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt + \frac{\partial \Phi}{\partial q} dq + \frac{\partial \Phi}{\partial p'} dp' \Rightarrow \\ q' &= -\frac{\partial \Phi}{\partial p'}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial q} = p. \end{aligned}$$

Так, мы осуществляем переход $qp \rightarrow q'p'$, используя преобразованную производящую функцию $F(q^i, q'^i, t) \rightarrow \Phi(q, p', t)$. При этом гамильтониан будет следующим:

$$H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Последний шаг – использование для функции $\Phi(q, p', t)$ уравнения Гамильтона-Якоби. Выберем $\Phi(q, p', t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\begin{aligned} \Phi &= S(q^i, t, \alpha_i), \\ \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) &= 0, \end{aligned}$$

$\alpha_i = const$ – параметры, возникающие при решении уравнений Гамильтона-Якоби. Тогда

$$H' = 0.$$

Если мы решаем уравнение Гамильтона-Якоби и нам удастся построить такой полный интеграл, зависящий от некоторого числа произвольных постоянных, и дальше мы будем эти константы отождествлять с новыми импульсами и использовать эту функцию в качестве производящего функционала к новым гамильтоновым переменным, то гамильтониан в этих новых переменных тождественно равен нулю. Можно легко показать, что для свободного движения частицы мы производим преобразование к начальным данным.

Если $H' = 0$, то в этих переменных новые координаты также будут константами:

$$\frac{\partial S_{\Gamma-я}}{\partial \alpha_i} = \beta_i = const.$$

Мы рассмотрели идеологию Гамильтона-Якоби, которая позволяет нам свести решение уравнений движения к определению полного гамильтониана уравнений Гамильтона-Якоби.

Интегралы движения

Мы рассмотрели три эквивалентных, обладающих своими преимуществами способа решений уравнений механики:

- 1) лагранжев формализм как изначальная реализация принципа наименьшего действия;
- 2) гамильтонов формализм;
- 3) уравнения Гамильтона-Якоби как некоторая надстройка, использующая возможность канонических преобразований гамильтоновых переменных к тривиальной динамике.

Теперь нам интересны системы, в которых есть набор интегралов движения. Когда мы решили уравнение Гамильтона-Якоби, запустив туда столько постоянных, сколько было координат в конфигурационном пространстве, мы полностью разрешили систему. Приравнивание производных новым константам β_i дает нам решения уравнений движения. А возможность заведения нужного количества α_i – вопрос симметрии. Существуют ли решения, определяет понятие интегрируемой системы. Если удастся найти нужное количество интегралов движения α_i (столько, сколько изначально было координат), то задача решается в квадратурах. Иначе ситуация более сложная – возможны хаотические системы, в которых интегральные кривые совершают хаотические движения с особыми свойствами.

В лагранжевом формализме поиск интегралов движения сводится к использованию уравнений движения. Уравнение движения в форме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i}$$

$$L = L(q^i, \dot{q}^i), \quad i = 1, a -$$

есть симметрия относительно сдвига координаты q^a в конфигурационном пространстве:

$$q^a \rightarrow q^a + q_0^a.$$

Это означает, что $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}$ – интеграл движения:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = const = J_a.$$

Это пример трансляционной инвариантности. Если потенциальная энергия не зависит от одной из координат, то сохраняется импульс вдоль этого направления. То есть можно пользоваться самими уравнениями движения, чтобы находить интегралы движения. Или можем искать интегралы движения как константы разделения уравнения Гамильтона-Якоби:

$$J_a \leftrightarrow \alpha_a.$$

Например, $i = 1, 2, 3; a = 1, 2 \Rightarrow$

$$S = \alpha_1 q^1 - \alpha_2 q^2 + S(q^3, t).$$

Так, существуют разные методики. В гравитации уравнения Гамильтона-Якоби более продуктивны, потому что там мы имеем сложные метрики. Сам гамильтониан записывается в виде довольно сложной функции и нам приходится решать уравнение методом разделения переменных. Полученная форма записи означает, что нам удалось свести функцию от всех q^a к сумме:

$$S(q^a) = \sum_a S_a(q^a, t).$$

В дифференциальных переменных метод разделения переменных иногда вещь более простая, чем отыскание сложных интегралов уравнения Лагранжа.

Рекомендуемая литература

- 1) С. Вейнберг, «Гравитация и космология»;
- 2) Дирак, «Общая теория относительности»;
- 3) Т. Ортин, «Гравитация и струны».



Лекция 2

Пространство Минковского, его причинная структура

Уравнения Максвелла

Начнем с уравнений Максвелла. Максвелл расшифровал опыты Фарадея, записав систему дифференциальных уравнений для двух векторных полей, которые задаются в евклидовом пространстве:

$$\vec{E}(r, t), \vec{B}(r, t) \in E_3.$$

Уравнения Максвелла определяют эти поля как решения уравнений, задаваемых плотностью заряда и плотностью тока:

$$\rho, j.$$

Заряды и токи удовлетворяют уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Выпишем уравнения Максвелла, полагая, что $c = 1$:

$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$ - закон Кулона, обобщенный на непрерывное распределение заряда;

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$ – отсутствие магнитных монополей;

$\operatorname{rot} \vec{B} = 4\pi\vec{j} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ - закон Ампера, дополненный членом $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$;

$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ - закон индукции Фарадея.

Эту систему уравнений предполагалось связать с уравнениями механики:

$$m\vec{a} = e(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]).$$

Противоречие состоит в том, что уравнения имеют разные группы преобразований в пространстве, поскольку уравнение механики содержит член, не связанный с магнитным полем. Электрическое поле в отсутствии магнитного при медленном изменении или в электростатике потенциально. В таком случае рассматриваем механику Ньютона, для которой справедливы преобразования Галилея:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{V}t.$$

Инвариантной остается левая часть, а потенциал в правой части имеет парный характер. То есть преобразование инвариантно. При добавлении магнитного поля равенство не выполняется. К тому же уравнения Максвелла относительно преобразований Галилея не инвариантны.

Для ввода пространства Минковского и преобразований Лоренца необходимо ввести вектор-потенциал и скалярный потенциал:

$$\vec{A}: \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B};$$

$$\varphi: \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Приведем к форме уравнений Даламбера, наложив дополнительные условия:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{pmatrix} \varphi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = -4\pi \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = A^a, \quad \Delta = \partial_i^2 - \text{оператор Лапласа,} \quad \text{где}$$

$$x^i = x, y, z \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$\square = \eta^{ab} \partial_a \partial_b - \text{оператор Даламбера, где } a = 0, i.$$

Выражение для интервала:

$$ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b, \quad \text{где } \eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta^{ab}.$$

Электрические и магнитные поля определяются матрицей:

$$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ & 0 & -B_z & B_y \\ \text{asym} & & 0 & -B_y \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{где } A_a = \begin{pmatrix} \varphi \\ -\vec{A} \end{pmatrix}.$$

Уравнения Максвелла в четырехмерном виде:

$$\partial_b F^{ab} = -4\pi j^a,$$

$$F_{[ab,c]} = F_{\{ab,c\}} = 0 \quad \text{или} \quad \partial_b \tilde{F}^{ab} = 0, \quad \tilde{F}^{ab} = \frac{1}{2} \varepsilon^{abcd} F_{cd}.$$

антисим. циклич.

$$\square A^a = -4\pi j^a -$$

симметрично, но ковариантно относительно преобразований Лоренца:

$$x^a \rightarrow x^a + \Lambda_b^a x^b + c^a \Rightarrow ISO(1,3).$$

$SO(1,3)$ $const.$

Из того, что мы имеем дело с группой Пуанкаре, вытекает классификация полей по массе и спину.

Спин

Матрица определена тем, что она сохраняет метрику:

$$\eta_{ab} \Lambda_c^a \Lambda_d^b = \eta_{cd}.$$

Группу Пуанкаре можно рассматривать как группу, порождаемую дифференциальными операторами или матрицами. Важны существующие коммутаторы. $ISO(1,3)$ имеет образующие P_a, M_{ab} . Генераторы трансляции между собой коммутируют:

$$[P_a P_b] = 0.$$

Генераторы момента и трансляции коммутируют:

$$[M_{ab} P_c] = i(P_a \eta_{bc} - P_b \eta_{ab});$$

$$[M_{ab} M_{cd}] = i(M_{ad} \eta_{bc} - M_{bc} \eta_{cd} + M_{ac} \eta_{ad} - M_{bd} \eta_{ac}).$$

Представление характеризуется квадратичными Казимирами. 2-Казимиры:

$$P^2 = P_a P^a, \quad W^2 = W_a W^a,$$

$$W^a = \frac{1}{2} \varepsilon^{abcd} P_b M_{cd} - \text{вектор пауля любаньского.}$$

Из алгебры проверяется, что они коммутируют со всеми:

$$[P^2 \dots] = 0, \quad [W^2 \dots] = 0.$$

Таким образом, неприводимых представлениях группы Пуанкаре должны быть зафиксированы 2-Казимиры. Существует два варианта:

- 1) $m \neq 0$, тогда можно перейти в систему отсчета, в которой $P^a = (m \ 0 \ 0 \ 0) \Rightarrow P^2 = m^2$.

$W^2 = -m^2 s(s + 1) \Rightarrow s$ целое или полуцелое.

- 2) $m = 0 \Rightarrow$ в этой системе отчета нельзя выбрать пространственную часть равной нулю. Так, выберем P^a с пространственной частью вдоль оси: $P^a = (E \ 0 \ 0 \ E)$.
 $W^a = \pm \sigma P^a$, σ - спиральность, целое или полуцелое.

Важно, что все безмассовые поля характеризуются спином (спиральностью). Направление W^a связано с направлением спина. Классическая теория поля и квантовая теория поля стандартной модели без гравитации ограничены спинами 1 сверху. Для спина 2 можно сформулировать теорию в пространстве Минковского спином 2 будет асимметрический тензор второго ранга. Для него можно построить теорию невзаимодействующего поля, но при вводе взаимодействия схема рушится.

Стандартная модель: $s \leq 1 \Rightarrow$ пространство Минковского.

Гравитация: $s = 2, h_{ab} \Rightarrow$ теория Фирца-Паули. В этой теории взаимодействие должно быть универсальным для всех типов материи, что было показано исходя из теоремы низких энергий, анализирующих инфракрасные расходимости для безмассовых частиц. Отсюда следует принцип универсальности – обязательно поле спина два должно взаимодействовать с одинаковой константой с совсем другими полями. То есть и с собой тоже. Такая теория уже не может быть линейной, должно быть самодействие. Была найдена процедура, по которой можно из теории Фирца-Паули невзаимодействующего тензорного поля в плоском пространстве сгенерировать методом Нётр полную нелинейную версию. Отсюда появляется ОТО.

Также есть массивный вариант теории спина 2, который мог бы быть востребован как теория гравитации при малой массе. В этом случае теория без неустойчивости типа отрицательного знака кинетической энергии является двухтензорной. Массивная гравитация требует предельно стерильного гравитона, который не взаимодействует с материей, но взаимодействует с обычным гравитоном. Взаимодействие между ними строится на основе потенциала Хиггса. За счет этого гравитон приобретает массу.

Итак, спин 2 в плоском пространстве существует как невзаимодействующий. В кривом пространстве безмассовой теории спина 2 — это ОТО или ее обобщения. Массивная теория называется «бигравитация», она включает в себя два тензора.

Канонический тензор энергии-импульса для теории Максвелла

Действие для электродинамики является скаляром, обычно записывается в координатах Минковского, которые являются плоскими. Обобщение на случай гравитации заключается в ковариантизации и записи в произвольной системе

координат. Действие можно выбирать по-разному, воспользуемся действием, приведенным в Ландау-Лифшице:

$$S[x^a(s), A_a(x)] = \int (-m\sqrt{\dot{x}^a \dot{x}_a} - eA_a \dot{x}^a) ds - \frac{1}{16\pi} \int F_{ab} F^{ab} d^4x.$$

Уравнение мировой линии можно параметризовать. Если частицы массивные, то самый простой выбор это интервал. При этом мы не будем на письме различать координату пространства-времени и функцию, задающую движение.

Параметризация при $m \neq 0$:

$x^a = x^a(s)$ – мировая линия, параметрическое задание кривой =>

$$\dot{x}^a = \frac{dx^a(s)}{ds} = v^a \text{ – четырехскорость;}$$

$$\dot{x}_a = \eta_{ab} \dot{x}^b.$$

Параметризация при $m = 0$ есть другая форма записи.

$$\dot{x}^a \dot{x}_a = v^2 = 1 \text{ – условие связей.}$$

Параметризация точки в трехмерном пространстве – три функции, а мы ввели четыре. Это указывает на избыточную параметризацию. Вообще говоря, релятивистская механика – это механика со связями. Для нее есть свои тонкости перехода к гамильтонову формализму.

Второй член действия можно записать в виде объемного интеграла следующим образом:

$$S_{int} = \int (eA_a \dot{x}^a) ds = \int A_a j^a d^4x,$$

$$j^a = e \int \dot{x}^a(s) \delta^4(x - x(s)) ds.$$

Это действие кодирует электродинамику Максвелла. И это исходный пункт для обобщения на искривленное пространство-время. Поскольку действие является скаляром, дальше будет работать принцип эквивалентности: инерция и гравитация локальны и неразличимы. Поэтому достаточно перейти к неинерциальной системе отсчета, то есть сделать некоторое преобразование в пространстве Минковского, отличное от преобразований группы Пуанкаре, и не сохраняющее метрику. При этом само пространство Минковского сохраняет свой смысл, потому как локально в каждой точке кривую метрику можно привести к метрике Минковского.

Рассмотрим теперь свободное поле Максвелла:

$$-\frac{1}{16\pi} \int F_{ab} F^{ab} d^4x$$

$\mathcal{L}(A_{a,b} \equiv \partial_b A_a) = F_{ab} F^{ab}$ – плотность функции Лагранжа =>

$$\int F_{ab} F^{ab} d^4x = \int \mathcal{L} d^3x dt$$

Будем рассматривать свободное поле без источников:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^a} = 0.$$

В теории поля независимость от x дает тензор энергии-импульса:

$$\partial_b T^{ab} = 0.$$

Продолжение гамильтоновой механики на теорию поля приводит к появлению тензора энергии-импульса:

$$T_a^b = A_{c,a} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{c,b}} - \delta_a^b \mathcal{L}.$$

Сравним с механикой:

$$H = \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - L \Rightarrow$$

$\cdot \rightarrow \partial_a$: если $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, то $\frac{dH}{dt} = 0$. В рассматриваемом случае тензор энергии-импульса удовлетворяет соотношению on shell:

$$\partial_b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{a,b}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_a}.$$

Это работает для любого спина, но интересно, что для ненулевых спинов канонический тензор несимметричен:

$$s \neq 0 \Rightarrow T_{ab} \neq T_{ba}.$$

Но тензор можно симметризовать, добавляя часть, имеющую заведомо нулевую дивергенцию. После симметризации получаем знакомую конструкцию:

$$T_a^b = \frac{1}{4\pi} \left(F_{ac} F^{cb} + \frac{1}{4} \delta_c^b F^2 \right)$$

Принципиально важно, что тензор энергии-импульса определен неоднозначно. Существуют теории, которые фиксируются определением тензора энергии-импульса. Например, такая идеология принята в теории струн. Важное замечание: для ненулевого спина канонический тензор энергии-импульса не симметричен.

Мировая трубка

В гравитации особую роль играет симметричный тензор энергии-импульса, который входит в уравнение Эйнштейна. Симметричный тензор получится сразу после проведения некоторых операций.

Введем кривую метрику: $r_{ab} \rightarrow g_{ab}, g^{ab}, \sqrt{|g|}d^4x$. Тогда можем проварьировать по ∂g^{ab} : $\frac{\delta S}{\delta g^{ab}} \sim T_{ab}^{sym}$.

Имея закон сохранения, мы определяем интегральные величины по стандартной схеме. Рассматриваем мировую трубку (рис. 2.1), интегрируем закон сохранения по этой поверхности, предполагая, что на бесконечности все равно нулю. В результате получаем интеграл по Остроградскому-Гауссу и закон сохранения:

$$P^a = \int T^{ab} d^3S_b,$$

где S_b – пространственно-подобная гиперповерхность с времени подобной нормалью $n_\mu^2 > 0$. На бесконечности вектор нормали отрицательный: $n_\mu^2 < 0$ – времени подобная гиперповерхность. Есть вариант с изотропным вектором: $n_\mu^2 = 0$ - световой конус. О нем стоит поговорить подробнее. Тензор энергии-импульса сохраняется, если поле свободное, и определяет полный четырехимпульс поля, если все интегралы сходятся.

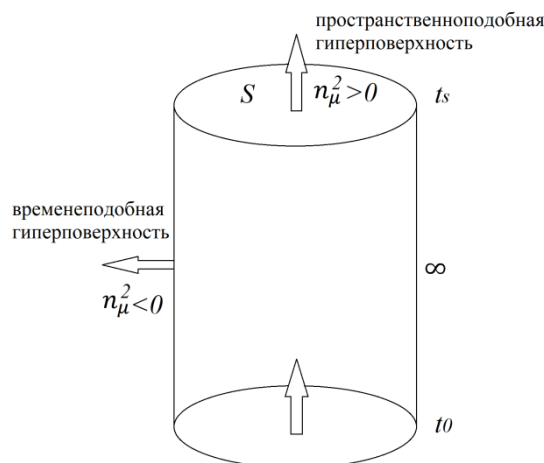


Рис. 2.1. Мировая трубка.

Рассмотрим взаимодействие с частицами. Если пытаться обойтись ОТО, то возникает вопрос, как определить тензор энергии-импульса частиц. Он естественным образом определяется варьированием по метрике. При этом интеграл взаимодействия сводится к следующему:

$$\int_{x=x(s)} A_a dx^a -$$

не зависит от \dot{x} , то есть не зависит от скоростей.

По определению тензор энергии частиц:

$$T^{ab} = m \int \dot{x}^a \dot{x}^b \delta^4(x - x(s)) ds \Rightarrow$$

$$j^a = e \int \dot{x}^a \delta^4(x - x(s)) ds \Rightarrow$$

$$\partial_b \left(T^{ab} + T^{ab} \right) = 0 -$$

в силу уравнений движения, где нужно учесть уравнение заряда с силой Лоренца в правой части и уравнение Максвелла с источником для j .

Световой конус

Третий вид гиперповерхности, который в мировой трубке никак не задействован – поверхность, нормаль к которой изотропна. Основным свойством такой гиперповерхности является то, что нормаль в ней и лежит (рис. 2.2). Второе свойство состоит в том, что они являются траекториями реальных частиц – удовлетворяют уравнениям движения безмассового фотона. Но обычно эти уравнения не рассматриваются, и говорить о безмассовой точечной частице с точки зрения квантовой теории проблематично. В классической механике мы должны об этом говорить, потому что имеем дело с изотропными кривыми, которые нас и интересуют.

Гиперповерхность в $M_{1,3}(t, x, y, z)$ определяется следующим образом:

$$f(t, x, y, z) = 0 = [\text{нормаль } n_a = \partial_a f] = t - z \Rightarrow$$

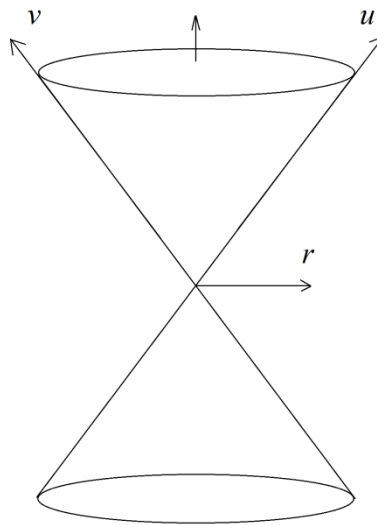


Рис. 2.2. Световой конус.

Гиперповерхность $S_+ : u = t - z = 0 \Rightarrow$ это плоский фронт световой волны, $n_\mu = (1, 0, 0, -1)$, $n^2 = 0 \Rightarrow$ эта нормаль изотропна. Сама поверхность образуется вектором $\partial_u = v^\mu \partial_\mu$.

Можем ввести переменную $v = t + z$ и гиперповерхность $S_- : v = t + z = 0$, $n_\mu = (1, 0, 0, 1)$. Она будет двигаться в обратном направлении оси $z \Rightarrow n^\mu \partial_\mu = \partial_u$.

Рассмотрим координату $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. В этой точке происходит вспышка, которая начинает распространяться, образуя сферический фронт волны. Это и есть световой конус. Распространение наружу это S_+ , схлопывание S_- .

$$S_+ : u = t - r = 0,$$

$$S_- : v = t + r = 0.$$

Полный световой конус состоит из этих двух поверхностей:

$$C = S_+ \cup S_-.$$

Каждая координата – двумерная сфера: $x^\mu = (t, r) = (t, r, \theta, \varphi)$.

Нормали:

$$S_+ : n_\mu = (1 \ -1 \ 0 \ 0), \quad n^2 = 0, \quad n^\mu \partial_\mu = \partial_v,$$

$$S_- : n_\mu = (1 \ 1 \ 0 \ 0), \quad n^2 = 0, \quad n^\mu \partial_\mu = \partial_u.$$

Так, обе нормали являются образующими конуса, и на самом деле это двумерная поверхность, к ней остались только два истинно ортогональных направления (θ, φ) .

∂_v, ∂_u = генераторы = нормали.

Не менее важно то, что задействованы световые лучи – точечные безмассовые частицы, удовлетворяющие уравнениям движения – четырёхскорость должна быть изотропным вектором, в силу этого она сохраняется.

В гравитации мировые линии будут геодезическими – линии кратчайшей длины. Световой конус – это поверхность, образованная изотропными геодезическими линиями. Речь идет о конусе, физический образ которого это сферический фронт волны. Если мы находимся в пространстве событий, которое всегда внутри распространяющегося фронта, то это область будущего, если снаружи, то это область пространственно-подобная. То есть возникает деление на причинно связанную и причинно не связанную части.

Причинная структура

Пусть есть некоторое начальное событие O . Проведем от него световой конус, являющийся расширяющейся на бесконечность световой волной – верхняя часть. Но в таком случае до возникновения события O есть фронт, который схлопывается в точку – нижняя часть. Все мировые линии, находящиеся внутри конуса, могут принадлежать массивным частицам. Далее находится пространственно-подобная часть, причинно не связанная с точкой O – никаким движением в эту точку попасть не удастся. Верхняя внутренняя часть конуса и сам конус – причинное будущее. Нижняя часть – причинное прошлое. Вся рассмотренная система называется причинной структурой. Пенроуз задался целью найти способ бесконечной точке приблизиться на конечное расстояние для возможности строгого математического изображения и обобщить на кривое пространство. В кривом пространстве причинная структура похожа на рассмотренный вариант, но в нем могут возникать горизонты событий, которые тоже являются световыми конусами, но неожиданным образом появляются в будущем.

Лекция 3

Трехмерные гиперповерхности в пространстве Минковского

Гиперповерхности

В пространстве Минковского координаты будем помечать латинским индексом:

$$a = 0, 1, 2, 3.$$

Скорость света $c = 1$. Это пространство событий, в котором интервал задается диагональной метрикой:

$$ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b;$$

$$\eta_{ab} = \text{diag} (1, -1, -1, -1).$$

Выбор координат, называемых Галилеевыми или Декартовыми, определен с точностью до преобразований:

$$x^a \rightarrow x^{a'} = \Lambda_a^{a'} x^a + c^{a'}, \quad \Lambda_a^{a'} \in SO(1,3),$$

$c^{a'}$ - сдвиг координат, расширяющий группу до неоднородной группы Лоренца или группы Пуанкаре.

В этом пространстве, прежде всего, интересна структура подпространств – трехмерные гиперповерхности. Особенно интересна конструкция, называемая мировой трубкой и состоящая из гиперповерхностей. Две из них можно выбрать постоянными времени (начального t_f и конечного t_0) и одну боковой поверхностью $S_\infty (r \rightarrow \infty)$. Любая гиперповерхность может быть записана как:

$$f(t, x, y, z) = 0.$$

Если понимать это уравнение как некоторую эквипотенциальную поверхность, то естественным образом определяется поле нормальных к ней векторов:

$$n_a = \partial_a f.$$

Гиперповерхности:

1) Пространственно-подобная:

$$n^2 = n^a n^b \eta_{ab} > 0.$$

Нормаль времени подобна:

$$f = t, \\ n_a = (1, 0, 0, 0).$$

- 2) Времени подобная поверхность (поверхность постоянного времени):

$$n^2 < 0 -$$

нормаль пространственно-подобна. Метрику можно задать как:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = const.$$

В координатах t, r, θ, φ метрика будет иметь другой вид, поскольку ее пространственная часть преобразуется к сферическим координатам:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

$$n^2 = -1.$$

В этих координатах вектор нормали:

$$n_\mu = \partial_\mu r.$$

- 3) Изотропная гиперповерхность – это пространство-время, поэтому наглядный физический образ такой поверхности – поверхность, которая образуется световыми лучами или фронтами световых волн. По определению является поверхностью мировых линий фотонов. Изотропная гиперповерхность можно записать в виде:

$$f_+ = t - r, \quad r > 0, \quad t > 0 -$$

радиальные лучи, распространяющиеся вверх с единичной скоростью световые лучи.

Свойства:

- а) образована геодезически;

$$x^\mu = x^\mu(t),$$

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}, \quad v^2 = v^\mu v_\mu, \quad v^2 = v^\mu v_\mu = 0 \Rightarrow$$

$$v^\mu = (1, 1, 0, 0) -$$

образующий вектор. Нормаль к нему:

$$n_\mu = \partial_\mu (t - r) = (1, -1, 0, 0),$$

$$n^\mu = (1, 1, 0, 0) = v^\mu;$$

- б) нормаль является изотропным вектором ($n^2 = 0$), и она лежит на этой поверхности.

Таковыми же свойствами обладает горизонт событий черной дыры.

Диаграммы Пенроуза

Пенроуз предложил нарисовать световой конус и сказать, что все мировые линии, лежащие внутри светового конуса, это мировые линии частиц. То есть все, находящееся внутри конуса, можно назвать причинным будущим. С каждой точкой внутри можно соединиться времени подобной кривой. А если точка лежит на самом конусе, то изотропной.

Нижняя часть конуса – схлопывающийся сферический фронт световой волны. Будем понимать радиальную координату в ортогональном направлении к оси светового конуса, а каждую точку будем считать явной сферой. Тогда будет совокупность двух образующих при фиксированных θ и φ . И можно рассмотреть другую гиперповерхность:

$$f_- = t + r = 0, \quad t < 0.$$

Это и будет схлопывающаяся волна. Образующие ее векторы, лежащие в ней, касательные векторы к мировым линиям этих фотонов.

Какова будет размерность? Если в случае мировой трубки у нас есть времени подобная или пространственно-подобная гиперповерхность, то есть нормаль, а сама поверхность трехмерна, то в случае светового конуса нормаль изотропна, остаются только две независимых координаты - θ и φ . То есть разбиение пространства на световой конус имеет нетривиальности.

Символы Кристоффеля и свободное движение в криволинейных координатах

Общая теория относительности основана на том, что гравитация локальна и неотличима от инерции. Поэтому, если будем делать преобразование координат в пространстве Минковского, которые отличны от преобразований типа:

$$x^a \rightarrow x^{a'} = \Lambda^{a'}_a x^a + c^{a'}, \quad \Lambda^{a'}_a \in SO(1,3),$$

то, вообще говоря, если время затронуто, то мы перейдем к неинерциальной системе отсчета. Пространство по-прежнему плоское. Введем обозначения: ξ^a – декартовы координаты, $ds^2 = \eta_{ab} d\xi^a d\xi^b$. Свободное движение массивной частицы:

$$\xi^a(s) = v_0^a s + \xi_0^a.$$

Уравнение такой кривой:

$$\ddot{\xi}^a = 0.$$

Перейдем теперь к произвольной системе координат: $\xi^a(x_\mu(s))$. Таким образом:

$$\xi^a(s) \rightarrow x^\mu(s) = >$$

$$\dot{\xi}^a = \xi^a_\mu \dot{x}^\mu, \quad \ddot{\xi}^a = \xi^a_\mu \ddot{x}^\mu + \xi^a_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad \text{где } \xi^a_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu \xi^a.$$

Будем считать, что наше преобразование обратимое. Если в какой-либо точке Якобиан преобразования обращается в ноль, то для начала исключим эти точки, будем рассматривать открытые области. Поэтому можем сказать, что: $\xi^a(x_\mu(s)) \rightarrow x^\mu(\xi^a)$. И можем ввести матрицу $x^\mu_a = \partial_a x^\mu$. Обратное преобразование: $\xi^a_\mu x^\mu = \delta^a_\mu$. Таким образом, у нас есть обратимое преобразование по криволинейным координатам.

Далее можем сказать, что:

$\xi^a = v_0^a$ – касательный вектор к мировой линии, можем опустить индекс. Нам интересно получить уравнение для \dot{x}^μ . Для \dot{x}^μ введем обозначение: $\dot{x}^\mu = v^\mu$. Запишем обратные преобразования. При таком преобразовании метрика переписется как:

$$d\xi^a = \xi^a dx^\mu \Rightarrow ds = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \text{где } g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \xi_\mu^a \xi_\nu^b.$$

Обратное преобразование:

$$\begin{aligned} \dot{x}^\mu &= x_a^\mu \dot{\xi}^a, \\ \ddot{x}^\mu &= x_a^\mu \ddot{\xi}^a + x_{ab}^\mu \dot{\xi}^a \dot{\xi}^b. \end{aligned}$$

Видно, что:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^v &= \frac{\partial \dot{x}^v}{\partial s} = \frac{d\dot{x}^v}{ds} + \Gamma_{\mu\lambda}^v \dot{x}^\mu \dot{x}^\lambda = 0, \\ \text{где } \Gamma_{\mu\lambda}^v &= \xi_{\mu\lambda}^a x_v^a. \end{aligned}$$

$\xi_{\mu\lambda}^a$ выразим через метрику $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu,\lambda} = \eta_{ab} (\xi_{\mu\lambda}^a \xi_\nu^b + \xi_\mu^a \xi_{\nu\lambda}^b). \quad (3.1)$$

Сделаем циклическую подстановку:

$$\begin{aligned} \mu \rightarrow \nu, \quad \nu \rightarrow \lambda, \quad \lambda \rightarrow \mu \Rightarrow \\ g_{\nu\lambda,\mu} = \eta_{ab} (\xi_{\nu\mu}^a \xi_\lambda^b + \xi_\nu^a \xi_{\lambda\mu}^b). \end{aligned} \quad (3.2)$$

После следующей циклической подстановки:

$$g_{\lambda\mu,\nu} = \eta_{ab} (\xi_{\mu\lambda}^a \xi_\nu^b + \xi_\lambda^a \xi_{\mu\nu}^b). \quad (3.3)$$

Учитывая, что индексы можно менять местами и переставлять $a \leftrightarrow b$, сложим выражения 3.1 и 3.2 и вычтем 3.3:

$$\begin{aligned} \eta_{ab} \xi_{\mu\lambda}^a \xi_\nu^b &= \frac{1}{2} (g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\lambda\mu,\nu}) \Rightarrow \\ \Gamma_{\mu\nu}^\tau &= \frac{1}{2} g^{\lambda\tau} (g_{\nu\lambda,\mu} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda}) = g^{\lambda\tau} \Gamma_{\tau\mu\nu}, \quad \text{где} \\ g^{\lambda\tau} g_{\tau\mu} &= \delta_\mu^\lambda, \end{aligned}$$

$\Gamma_{\tau\mu\nu}$ – символ Кристоффеля 1 – го рода.

Манипуляция состоит в том, что нужно продифференцировать метрику. В итоге мы должны исключить ненужную комбинацию индексов. В итоге уравнение прямой линии замечательно тем, что это линия, вдоль которой касательный вектор (v_0^a) переносится параллельно. Приращение касательного вектора при параллельном переносе:

$$\delta v^\mu = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu v^\nu v^\lambda -$$

символы Кристоффеля или связность Леви-Чивита. Эти коэффициенты выражаются в виде частных производных от метрики. Но частные производные от метрики являются трехиндексными величинами, но преобразуются неправильным образом, потому что сама метрика является тензором.

Векторы, ковекторы, тензор в криволинейных координатах

Вернемся к тому, что у нас есть определение тензоров в плоском пространстве. Оно транслируется в то, что локально у нас структура пространства Минковского. Поэтому те же преобразования мы можем производить локально, но сами матрицы будут зависеть от точки. В итоге приходим к тому, что вектор – совокупность таких величин:

$$V^\mu \rightarrow V^{\mu'} = V^\mu \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu},$$

$$U_\mu \rightarrow U_{\mu'} = U_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}.$$

Это можно упростить. Но это правило уже годится к истинной Римановой метрике. Полученный выражения – закон преобразования плоского пространства, но матрица преобразования становится функцией координат. То есть мы можем сказать, что наше преобразование Лоренца становится локальным.

Возможны следующие упрощения:

$$V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = V^{\mu'} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} -$$

вектор в кривом пространстве - оператор дифференцирования вдоль некоторого направления. Это направление задается его компонентами. Сам оператор инвариантен.

Аналогично для ковектора:

$$U_\mu dx^\mu = U_{\mu'} dx^{\mu'} -$$

ковектор является 1-формой. Таким образом можно говорить о векторах и формах как инвариантных величинах в кривом пространстве. При этом векторы становятся операторами, а ко-векторы становятся формами.

Мы получили, что касательный вектор переносится параллельно в смысле пространства Минковского в криволинейных координатах. Далее в силу принципа эквивалентности обобщаем это на произвольное кривое пространство истинное, в котором метрика Минковского глобально не существует. Но, тем не менее, есть инвариантное определение векторов и ковекторов. Далее они обобщаются на тензоры $T_{\mu\dots}^{\alpha\dots}$ - полилинейное отображение (имеет много аргументов). Все верхние индексы можно свернуть с частными производными, все нижние с дифференциалами. В результате получим значение тензора на векторах и ковекторах, которое уже является числом. Это число инвариантное.

Итак, мы ввели понятия тензоров, векторов, ковекторов в криволинейных координатах. Ввели понятие параллельного переноса как понятие, заимствованное из плоского пространства Минковского. То есть это истинный параллельный перенос в смысле плоских координат.

Теперь перепишем наше геодезическое уравнение в виде условия параллельно переноса касательной скорости. Пусть есть не одна кривая, а имеет место бесконечное число таких кривых с разными начальными данными, эти кривые заполняют все пространство. В результате существует поле скоростей $v^\mu(x)$. Кривые x^μ - интегральные кривые этого поля:

$$\frac{dx^\mu(s)}{ds} = v^\mu(x(s)).$$

Тогда для этого векторного поля справедливо следующее: векторное поле вдоль каждой кривой будет переноситься параллельно. Это означает, что ковариантная производная:

$$v_{;v}^\mu = \nabla_v v^\mu = v_{,v}^\mu + \Gamma_{v\lambda}^\mu \partial v^\lambda.$$

Приращение производной вдоль такой кривой будет равно нулю. Само уравнение будет состоять в том, что вдоль вектора v ковариантное дифференцирование следующее:

$$v^v \nabla_v v^\mu = 0 -$$

геодезическое уравнение на языке поля скоростей. *Геодезической* называем ту кривую, вдоль которой переносится параллельно касательный вектор. Так, геодезическое уравнение можно написать как уравнение ковариантного постоянства касательной скорости вдоль нее. И мы ввели ковариантное дифференцирование вектора:

$$v_{;v}^\mu.$$

Теперь подвергнем координаты новому преобразованию:

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'}(x).$$

Не трудно показать, что $v_{;v}^\mu$ будет преобразовываться как тензор:

$$v_{;v}^{\mu} \rightarrow v_{;v'}^{\mu'} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{v'}}{\partial x^v}$$

Ковариантное дифференцирование превращает тензор в тензор. Обобщение правила для ковектора:

$$U_{\mu;v} = U_{\mu,v} - \Gamma_{\mu v}^{\lambda} U_{\lambda}$$

Знак " - " означает, что ковариантная производная от свертки будет скаляром:

$$(U_{\mu} v^{\mu})_{; \lambda} = (U_{\mu} v^{\mu})_{, \lambda}$$

Кроме того, $U_{\mu;v}$ - тензор второго ранга:

$$U_{\mu;v} \rightarrow U_{\mu';v'} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{v'}}{\partial x^v}$$

Правила ковариантного дифференцирования можно понимать и как дифференцирование, переводящее тензор в тензор.

Как быть с частным производным? Понятно, что частная производная не образует тензор (входит только как первое слагаемое). Закон преобразования частных производных будет компенсироваться законом преобразования символов Кристоффеля. У нас было изначальное определение символов Кристоффеля через вторые производные матрицы перехода. Если там сделать еще одно преобразование, то появится неоднородный член.

Упражнение:

Введем обозначение

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} \equiv \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \dots, \text{тензор.}$$

$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\nu} + g_{\alpha\lambda} - g_{\nu\lambda})$ - наше прежнее определение.

Показать, что если $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} \Rightarrow g_{\nu;\mu} \equiv g_{\nu\lambda,\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\tau} g_{\lambda\tau} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\tau} g_{\nu\tau} = 0$.

Ковариантное постоянство метрики вытекает из символов Леви Чивита. Но:

$$g_{\nu\lambda,\mu} = 0 \Rightarrow \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} + T_{\nu\lambda}^{\mu} -$$

связность Леви-Чивита и кручение.

$T_{\nu\lambda}^{\mu} = T_{\lambda\nu}^{\mu}$ - произвольный антисимметричный тензор,

$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ - общая связность, которая определена тем, что ковариантная производная образует тензор.

Для доказательства необходимо произвести циклические подстановки, которые мы делали, но для связности не использовать свойство симметрии по нижним индексам. Связность по нижним индексам не обязана быть симметричной. При этом обладает тем же свойством: переводит тензор в тензор.

Это удивительным образом пересекается с теорией калибровочных полей, потому что преобразование $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}(x)$ - локальное преобразование, которое не меняет уравнений. При записи на языке тензоров при таком преобразовании запись тензорных уравнений с учетом ковариантности производных общую ковариантность можно понимать как локальное действие группы $GL(4, \mathbb{R})(x)$. Это калибровочное преобразование, которое не должно менять структуру уравнений. На самом деле введение такой связности и есть калибровочное поле относительно локализации группы $GL(4, \mathbb{R})$.

Можно сказать, что связность необходима для сохранения представления группы на объекты с производными. Исходя из такого представления связности, получаем, что она не должна быть симметричной (может содержать кручение). И более того не обязательно ковариантное постоянство метрики. Связность, как калибровочное поле, будет однозначно определена, но тогда в ней будет две дополнительные геометрические структуры – кручение и неметричность. В современных моделях эти вещи привлекаются. В частности, в супергравитации кручение просто необходимо для согласования теории, а неметричность появляется в скалярно-тензорной теории.



Лекция 4

Диаграммы Пенроуза

Изотропные геодезические

Мы находимся в пространстве Минковского, в котором введены декартовы координаты ξ^a и криволинейные x^μ . Метрика Минковского:

$$ds = \eta_{ab} d\xi^a d\xi^b.$$

Риманова метрика:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \xi_\mu^a \xi_\nu^b.$$

Для того, чтобы записать уравнение свободно движущейся частицы или уравнение прямой в пространстве Минковского, нам нужно было ввести символ Кристоффеля:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\tau} (+ + -).$$

Мировая линия: $\xi^a(s)$ или $x^\mu(s)$. Уравнение свободного движения для массивных частиц записывается в виде:

$$\frac{D\dot{x}^\mu}{ds} = \frac{d\dot{x}^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0. \quad (4.1)$$

Мы назвали это уравнение *уравнением геодезической*, но по смыслу это понятие параллельного переноса касательного вектора \dot{x}^μ .

Речь шла о времени подобных кривых, поскольку мы исходили из свободного движения частицы. Можно рассматривать и пространственно-подобные геодезические. При этом мы записали это уравнение и иначе, исходя из конгруэнции кривых поля скоростей:

$$v^\mu = \dot{x}^\mu \Rightarrow \frac{dx^\mu}{ds} = v^\mu(x),$$

v^μ – поле скоростей. Геодезическое уравнение:

$$v^\mu \nabla_\mu v^\nu = 0 \text{ или } v^\mu v_{;\mu}^\nu = 0.$$

В уравнении 4.1 получился 0 в связи с параметризацией s . При замене параметризации $s \rightarrow s'(x)$ (репераметризационная симметрия):

$$\frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dx^\mu ds'}{ds' ds}.$$

Если $s'(x)$ – линейная функция, то такая репараметризация ничего не изменит. В геометрии параметр, при котором в уравнении геодезической справа стоит нуль, называется **аффинным**.

$$\frac{d}{ds'} \frac{dx^\mu}{ds'} = \frac{d}{ds'} \left(\frac{dx^\mu}{ds} \frac{ds}{ds'} \right) = \frac{d^2}{ds'^2} \frac{dx^\mu}{ds} \Rightarrow$$

$$\frac{D\dot{x}^\mu(s')}{ds'} = \frac{d^2}{ds'^2} \frac{dx^\mu}{ds'} \frac{ds'}{ds} \frac{dx}{ds} = f \frac{dx^\mu}{ds'} -$$

уравнение геодезической в неаффинной параметризации. Это важно для черных дыр, где возникает не один, а сразу два аффинных параметра (на горизонте и на бесконечности). Невязка между ними и дает величину, оказывающуюся температурой Хоккинга.

Рассмотрим изотропное геодезическое уравнение по параметру λ , который может быть как аффинным, так и неаффинным. Изотропное аффинное геодезическое уравнение:

$$\frac{D}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0.$$

Согласно принципу эквивалентности инерция эквивалентна гравитации локально и для безмассовых частиц. Однако разница в том, что времени подобная геодезическая в параметризации s : $\dot{x}^2(s) = 1$, а изотропная: $\dot{x}^2(\lambda) = 0$. Уравнения разные в силу разных связей.

Важно отметить, что свойства геодезичности для изотропных кривых сохраняется при Вейлевском преобразовании метрики. Мы не будем называть эти преобразования конформными. Под конформными преобразованиями будем подразумевать такие преобразования координат, которые приводят к Вейлевскому преобразованию метрики. А Вейлевское преобразование метрики – это умножение ее на конформный фактор:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu},$$

$$d\bar{s}^2 = \Omega^2(x) ds^2.$$

Такое преобразование допускают только изотропные геодезические. Действительно, можем заметить, что если кривая изотропна, то:

$$\dot{x}^2 = 0 = \dot{\bar{x}}^2 - \text{условие связи};$$

$$\bar{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu = \Gamma_{\nu\lambda}^\mu + \frac{1}{\Omega} (\delta_\nu^\mu \Omega_{,\lambda} + \delta_\lambda^\mu \Omega_{,\nu} - g_{\nu\lambda} \partial^\mu \Omega) \Rightarrow$$

$$\frac{D}{d\lambda} \dot{x}^\mu = - \left(\frac{2\dot{\Omega}}{\Omega} \dot{x}^\mu + \frac{\partial^\mu \Omega}{\Omega} g_{\nu\lambda} \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda \right),$$

где $\dot{\Omega} = \Omega_\tau \dot{x}^\tau$ – дифференцирование на кривой. $\frac{2\dot{\Omega}}{\Omega} \dot{x}^\mu$ означает, что параметр перестал быть аффинным, $\frac{\partial^\mu \Omega}{\Omega} g_{\nu\lambda} \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda$ – дополнительное условие, в изотропном случае $\frac{\partial^\mu \Omega}{\Omega} g_{\nu\lambda} \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0$.

Так, при конформном преобразовании сохраняется уравнение изотропной геодезической. Это заложено в основе трюка Пенроуза. Итак, мы уточнили некоторые особенности изотропных геодезических.

Диаграммы Пенроуза

Идея Пенроуза состоит в том, что мы рисуем световой конус. Мы хотим, чтобы бесконечные точки были подтянуты на конечное расстояние. Это можно сделать с помощью конформного преобразования, сингулярного в некоторых точках (эти точки исключаем, будем подходить к ним как к изолированным точкам). В основе этого преобразования лежит стереографическая проекция – отображение плоскости на сферу. Стереографическая проекция используется, например, в теории функции комплексного переменного, тогда эта сфера называется сферой Римана, а сама проекция выглядит как радиальное проектирование (рис. 4.1). Возьмем сферу в сечении $\varphi = 0$ – плоскость. Возьмем северный полюс и проведем в точку на плоскости R^2 прямую линию, угол с полярной осью χ . На плоскости R^2 можем ввести декартовы или полярные (r, φ) , на сфере $S^2(\chi, \varphi)$. Есть некоторая точка – пересечение хорды с поверхностью сферы. Будем рассматривать сферу единичного радиуса. Тогда $r = tg \frac{\chi}{2}$. Такое преобразование координат является стереографической проекцией и отображает сферу на плоскость. При этом исходная метрика преобразуется следующим образом:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\chi}{2}} (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\varphi^2).$$

$\frac{1}{4 \cos^2 \frac{\chi}{2}}$ – конформный фактор, $r \rightarrow \infty \Leftrightarrow \chi \rightarrow \pi$ – отображение полюса на бесконечную точку. Можно также провести аналогию с воздушным шаром – сфера с выколотой точкой эквивалентна плоскости, сфера с не выколотой точкой является конформной. Так, мы рассмотрели конформное преобразование с сингулярным конформным фактором. Это и есть трюк Пенроуза, который применяется в пространстве Минковского.

Преобразование Пенроуза – это преобразование в светоподобных координатах. В исходных координатах, для простоты рассмотрим случай $M_{1,1}$:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = du dv,$$

$$\text{где } u = t - x, \quad v = t + x.$$

Причинная структура сохраняется при преобразовании Вейля:

$$d\bar{s}^2 = \Omega^2(x)ds^2.$$

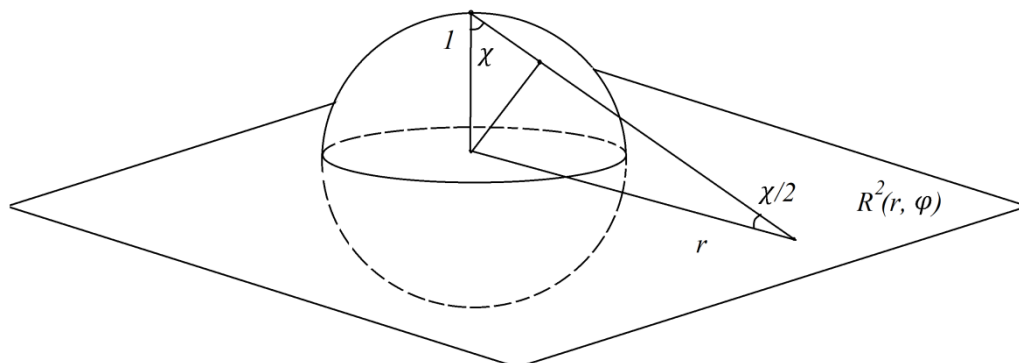


Рис. 4.1. Стереографическая проекция.

То, что этот фактор может быть сингулярным, позволяет нам притянуть конечную точку в бесконечное положение. Если здесь сделать замену с использованием тангенса (такую же, как в евклидовом случае):

$$U = \operatorname{tg} u, \quad V = \operatorname{tg} v \Rightarrow$$

$$d\bar{s}^2 = dUdV = \frac{1}{\cos^2 U \cos^2 V} dudv.$$

То, что в некоторых точках знаменатель обращается в ноль, позволяет притянуть бесконечные точки в конечное расположение. Новые координаты U, V меняются в конечных пределах:

$$-\frac{\pi}{2} < U < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2}.$$

Так, мы отобразили плоскость на ромб. Теперь у нас есть характерные области в исходном пространстве Минковского, которые можно обозначить так:

i^+ – времени подобная бесконечность будущего: $t \rightarrow \infty, x = \text{fix}$;

i^- – времени подобная бесконечность прошлого: $t \rightarrow -\infty, x = \text{fix}$;

i^0 – пространственно-подобная бесконечность: $x \rightarrow \pm\infty, t = \text{fix}$;

\mathfrak{I}^+ (скрай+) – изотропная бесконечность будущего: $v \rightarrow \infty, u = \text{fix}$;

\mathfrak{I}^- (скрай-) – изотропная бесконечность прошлого: $u \rightarrow \infty, v = \text{fix}$.

На плоскости $d\bar{s}^2$ эти области отображаются так, как показано на рисунке 4.2. Все безмассовые частицы движутся под углом 45 градусов, лучи выходят из изотропной бесконечности прошлого. Лучи отличаются друг от друга координатой v . Эти лучи – изотропные геодезические. Так, сохраняется удобная возможность отображать геодезические математически строго как линии, которые на диаграмме Пенроуза идут под 45 градусов. Все времени подобные кривые исходят из одной точки i^- в i^+ под углом меньше 45 градусов.

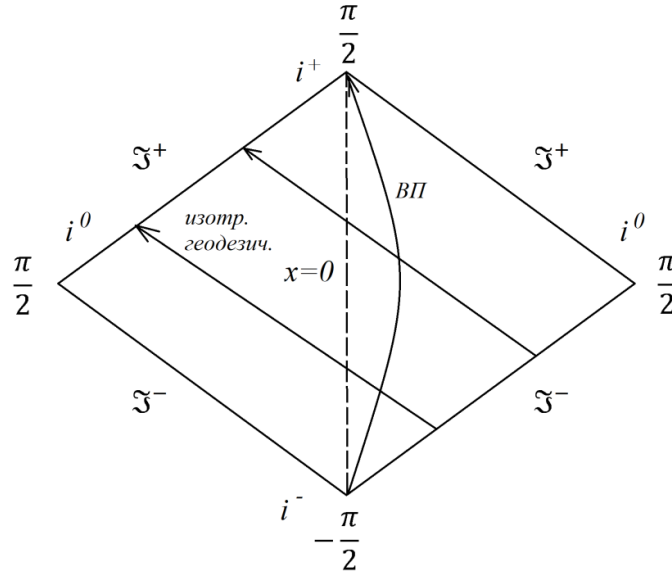


Рис. 4.2. Диаграмма Пенроуза для $M_{1,1}$.

Что изменится при переходе к $M_{1,3}$? Только то, что радиальная координата изменяется от нуля до бесконечности (полупрямая), $u = t - x$, $v = t + x$. В итоге мы получаем диаграмму Пенроуза, представленную на рисунке 4.3. Изменится только i^0 – пространственно-подобная бесконечность: $r = \infty$, $t = fix$. Линия $i^+ - i^-$ – фиктивная, это точка $r = 0$. Кроме того, $\theta = fix$, $\varphi = fix$. На диаграмме 4.4 все точки кроме i^\pm, i^0 являются сферами S^2 . Изотропные геодезические на диаграмме Пенроуза отражаются от $r = 0$, а времениподобные кривые выходят из i^- в i^+ , при этом также могут отражаться от $r = 0$.

Можно ввести квазидекартовы координаты:

$$U, V \rightarrow T, R, \text{ где}$$

$$T = U + V, \quad R = V - U.$$

Тогда преобразование выглядит следующим образом:

$$t \pm r = tg\left(\frac{T \pm R}{2}\right) \Rightarrow$$

$$d\bar{s}^2 = dT^2 - dR^2 - \sin^2 R d\Omega_{\theta\varphi},$$

R – угловая координата, значит можно переобозначить $R \rightarrow \chi$, T – угловая координата, тоже меняется в конечном пределе, $dR^2 - \sin^2 R d\Omega_{\theta\varphi}$ – элемент на сфере S^3 . Так, пространство Минковского R^4 мы преобразовали в объединение R и S^3 : $R^4 \rightarrow R \cup S^3$, точнее $R^4 \rightarrow R \cup S^3$. В этом и заключается компактификация пространства Минковского на сфере. На самом деле мы изменили топологию, но с полным пониманием того, что происходит. Введенная метрика называется статической вселенной Эйнштейна - решение уравнения Эйнштейна с космологической постоянной.

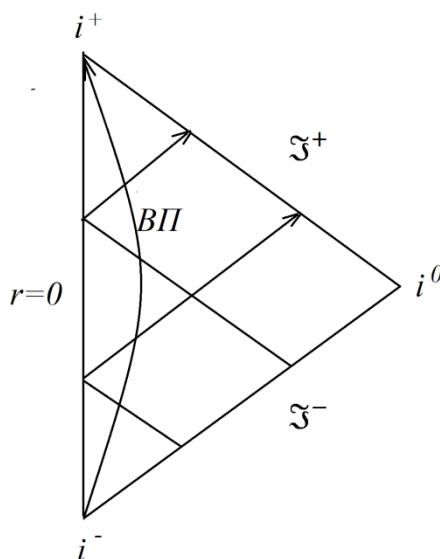


Рис. 4.3. Диаграмма Пенроуза для $M_{1,3}$.

Прежние области в координатах T, R : \mathfrak{S}^\pm – изотропная гиперповерхность будущего (прошлого) (конус).

Псевдосферы

Еще один важный тип поверхностей - псевдосферы. Рассмотрим поверхность:

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \begin{cases} L^2 - \text{гипербола} \\ 0 - \text{своевой конус} \\ -L^2 - \text{гипербола} \end{cases}$$

Гиперболы в сферических координатах изображены на рисунке 4.4 – однополостный или двуполостный гиперboloид. Это поверхности постоянной кривизны, псевдосферы. При этом конус также можно считать псевдосферой нулевого радиуса.

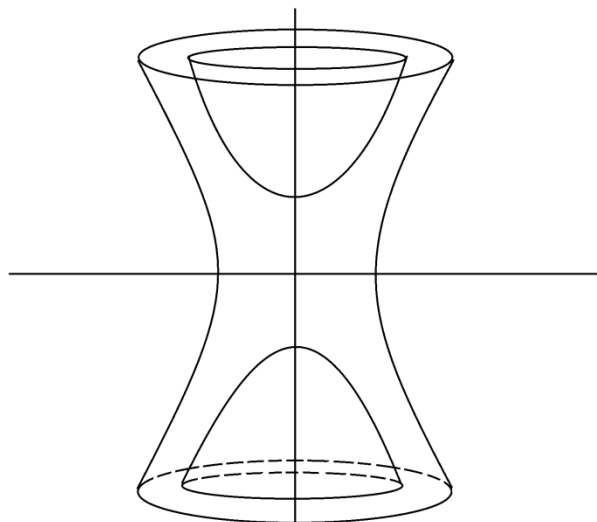


Рис. 4.4. Псевдосферы.

Свойства геодезической

Мы установили, что есть большая разница для изотропных и неизотропных геодезических. Изотропные геодезические допускают Вейлевское преобразование метрики, то есть умножение ее на конформный фактор. Это следствие того, что истинные безмассовые частицы и полевые уравнения таких частиц должны быть конформно-инвариантными. Возникает конформная теория поля. Электродинамика Максвелла обладает таким свойством (имеется в виду поле без зарядов). Скалярные поля таким свойством не обладают, но можно ввести конформное скалярное поле – широко используется в гравитации.

Гравитон – возмущение метрики, он не является конформно-инвариантным. Это имеет физические следствия. В космологии есть теория. Метрики Фридмана замечательны тем, что в них конформные поля существуют без раскачки – в уравнениях для полевых мод частота не становится переменной. Появления переменных частот в космологии свидетельствует о параметрической раскачке, иначе это можно назвать рождением частиц. Это важно, потому что предполагается, что в период инфляции таким образом появилась материя. Если поля частиц конформно-инвариантные, то рождения не происходит.

Диаграммы Пенроуза замечательны еще и тем, что в них конформное преобразование на бесконечности является дополнительной степенью свободы. Начиная с 2013 года, эта теория была сильно развита.

Перейдем к *свойствам геодезической*:

- 1) касательный вектор, переносимый параллельно в Римановой геометрии (связность Леви-Чивита);
- 2) «минимальная» длина

$$v_\mu = \dot{x}^\nu g_\mu(x)$$

$$\frac{Dv_\mu}{ds} = \frac{dv_\mu}{ds} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v_\lambda v^\nu = 0 \text{ (аффинная параметризация).}$$

Если расписать символы Кристоффеля, то не трудно убедиться, что произойдет аннигиляция одного + с одним -, уравнение переписется следующим образом:

$$\frac{dv_\mu}{ds} = \frac{1}{2} g_{\nu\lambda,\mu} v^\nu v^\lambda.$$

Это уравнение легко получить из действия:

$$S = -m \int ds = -m \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \Big|_{x(s)} ds \Rightarrow$$

$$\text{проварируем } \delta S = 0$$

и получим искомое уравнение.

Итак, геодезические это кривые, вдоль которых касательный вектор переносится параллельно, и они же являются кривыми стационарной дини, обращающими первую вариацию действия в ноль.

Нетензоры, свойства символов Кристоффеля

Под тензором мы понимаем то, что имеет правильный закон преобразования. Символы Кристоффеля не имеют такого преобразования и являются нетензором. Действительно, с помощью этих символов мы переводили прямые из пространства Минковского в прямые в криволинейных координатах ($\xi^a(x^\mu)$). Если бы Γ были тензорами, то они были бы отличны от 0 и в координатах Минковского, но $\Gamma_{bc}^a = 0$. Само координатное преобразование можно понимать следующим образом:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \Gamma_{bc}^a \xi_b^\nu \xi_c^\lambda x_a^\mu + \xi_{\mu\lambda}^a x_a^\nu -$$

нетензорный закон преобразования. Путем прямого преобразования получаем:

$$\Gamma_{\nu'\lambda'}^{\mu'} = \Gamma_{\nu\lambda}^\mu x_\mu^{\mu'} x_{\nu'}^\nu x_{\lambda'}^\lambda + x_{\mu'}^\mu x_{\nu\lambda}^{\mu'} -$$

нетензорный закон преобразования при преобразовании к другим криволинейным координатам. При локальном преобразовании инерция и гравитация неразличимы. Поэтому выведенные уравнения справедливы и для истинного гравитационного поля.

Есть еще вывод Дирака, основанный на том, что кривое многообразие можно вложить в плоское большей размерности. Рассмотрим пример. Допустим наше кривое пространство – сфера, рассмотрим экватор, который является геодезическим. Касательный вектор может лежать либо не лежать в самой сфере. Будем рассматривать бесконечно малые расстояния (необходимо для параллельного переноса). Координаты на сфере θ, φ , координаты в пространстве x, y, z . С одной стороны, касательный вектор переносится по правилам R^3 параллельно, но при переносе уже не лежит на сфере. Мы

можем спроектировать перенесенный вектор на сферу и получим тот вектор, который получается путем переноса кривой метрики. Это означает, что сам вектор испытывает изменение. На основании этого тоже можно получить символ Кристоффеля. Это реализовано в работе Дирака. То есть, вектор, который переносится в пространстве Минковского, может перестать принадлежать поверхности. А в смысле уравнения параллельного переноса на поверхности это уравнение переноса его проекции на поверхность.

Есть еще замечательные свойства символов Кристоффеля, которые просто получаются путем алгебраических вычислений, позволяющих установить ряд упрощений:

- 1) $\Gamma_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\ln \sqrt{-g})$,
где $g = \det \|g_{\mu\nu}\|$, $dg = dg_{\mu\nu} \frac{g^{\mu\nu}}{g} = -g_{\mu\nu} \frac{dg^{\mu\nu}}{g}$, следовательно
- 2) $\nabla_{\mu} A^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (A^{\mu} \sqrt{-g})$.
- 3) При несимметричном тензоре:
$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (F^{\mu\nu} \sqrt{-g}).$$
- 4) $F_{\mu\nu} = 2A[v; \mu] = 2A[v, \mu]$.

Лекция 5

к-формы в теории струн. Расслоение

Многообразие

Теперь перейдем к более общей геометрии. Здесь в основе лежит понятие гладкого многообразия. Речь, прежде всего, идет о многообразиях точек, хотя будем использовать и более широкие представления о многообразиях, например, многообразии точек и функций. В основе лежат понятия топологии, топологического пространства, непрерывности и открытых окрестностей.

Многообразие – это локальное евклидово пространство, накрываемое атласом, в котором может быть бесконечное, но счетное число карт.

Аксиома отделимости: для двух различных точек должны существовать открытые непересекающиеся окрестности.

Наглядными являются поверхности в многомерном евклидовом пространстве или псевдоевклидовом пространстве. На этот счет имеются строгие математические теоремы. Вообще, классификация многообразий – сложная задача. Известна полная классификация двумерных компактных многообразий без границы – это сферы, сферы с ручками, результат вклейки в сферу пленок Мебиуса и комбинаций этих преобразований. Были выделены некоторые классы трехмерных многообразий. Для многомерных многообразий ситуация более сложная. На самом деле те конкретные многообразия, которые используются, в теории относительности и физике в целом, образуют более узкие классы. С ними мы и хотим познакомиться.

Пространственно-временное многообразие – некоторое многообразие с метрикой, но на самом деле метрика не является первичным объектом. Пусть есть многообразие M , x^μ – точка в нем, $\mu = 1, \dots, n$. Оно покрыто открытыми окрестностями, которые пересекаются. В областях пересечения существуют гладкие отображения.

Вектор в многообразии — это производная, дифференцирующая скалярную функцию в направлении v^μ :

$$\hat{v} = v^\mu \partial_\mu.$$

Определенный таким образом вектор является скаляром относительно произвольных преобразований координат. Понятно, что такие операторы сами образуют линейное пространство. Это линейное пространство висит над каждой точкой и называется **касательным пространством TM** . То есть сами векторы – совокупность функций, причем их столько же, сколько координат. Конструкцию $M \cup TM$ называют **касательным расслоением**. Это снова многообразие, но теперь размерности $2n$. Кроме того, векторы образуют алгебру Ли по отношению к операции умножения, определенной как коммутатор:

$$[\hat{v}, \hat{u}]p = (v^\mu \partial_\mu u^\nu \partial_\nu - u^\nu \partial_\nu v^\mu \partial_\mu)p = (v^\mu u_{,\mu}^\nu - u^\mu v_{,\mu}^\nu) \partial_\nu p = w^\nu \partial_\nu p.$$

То есть справедливо тождество Якоби:

$$[[\hat{v}, \hat{u}]\hat{w}] + \text{цикл} = 0.$$

Далее определим *сопряженное пространство*: T^* - пространство линейных функционалов над касательным пространством или кокасательное расслоение. Спряженное пространство должно быть линейным, в квантовой механике при обсуждении свойств гильбертова пространства можно вспомнить сопряженные бра и кет векторы. Если ω – элемент касательного пространства, тогда его можно определить как линейную комбинацию:

$$\omega(v) = \omega_\mu v^\mu,$$

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu -$$

1-форма, скаляр, ω_μ – ковектор.

Производная Ли

Будем теперь оснащать многообразие понятиями. Первое важное возникающее понятие – *производная Ли*. Производная Ли обобщает производную по направлению, применимую к тензорам $T_{\mu\dots}^{v\dots}$:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \varepsilon v^\mu = x'^\mu, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Закон преобразования тензора:

$$T_{\mu\dots}^{v\dots}(x) = T_{\mu'\dots}^{v'\dots}(x') \frac{\partial x^v}{\partial x^{v'}} \dots \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \Big|_{x'}$$

$$T_{\mu'\dots}^{v'\dots}(x') = T_{\mu\dots}^{v\dots}(x) - \varepsilon(\partial_v T')v, \quad \frac{\partial x^v}{\partial x^{v'}} = \delta_{v'}^v + \varepsilon v_{v'}^v, \quad \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^{\mu'} - \varepsilon v_\mu^{\mu'}.$$

Производная Ли означает, что мы рассматриваем вариацию тензора:

$$\delta T_{\mu\dots}^{v\dots} = T_{\mu\dots}^{v\dots}(x) - T_{\mu'\dots}^{v'\dots}(x) = -\varepsilon(\mathcal{L}_{\hat{v}}T)_{\mu\dots}^{v\dots} -$$

вариация формы. Для вектора будет одна матрица преобразования, которая складывается следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\hat{v}}u^\mu = v^\nu u_{,\nu}^\mu - u^\nu v_{,\nu}^\mu \equiv [\hat{v}\hat{u}]^\mu -$$

это коммутатор векторного поля с направлением переноса, вектор.

Производная Ли не меняет число компонент векторов и обладает двумя общими свойствами:

1) удовлетворяет правилу Лейбница:

$$\mathcal{L}_v(AB) = \mathcal{L}_vA B + A \mathcal{L}_vB.$$

2) $[\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_u] = \mathcal{L}_{[v,u]}$.

Производная Ли используется, например, в теореме Нетр.

Производная Ли от ковектора записывается следующим образом:

$$\mathcal{L}_v u_\mu = v^\nu u_{\mu,\nu} + u_\nu v_{,\mu}^\nu.$$

Действие на тензор:

$$\mathcal{L}_v T_{\mu\dots}^{\nu\dots} = v^\lambda \partial_\lambda T - v_{,\lambda}^\nu T_{\mu\dots}^{\lambda\dots} + \dots + T^{\text{нижн}}.$$

Внешняя производная

Есть важная надстройка для ковекторов – пространство антисимметричных форм. Рассмотрим 1-форму как совокупности дифференциал-координат:

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu.$$

Возьмем физический пример – *антисимметричный тензор*:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Из него можно построить 2-форму, которая является тензором, но уже антисимметричным. Тогда можно использовать следующую запись:

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu -$$

внешнее произведение 1-форм, образует тензорное произведение с антисимметризацией. При разных индексах можно понимать это как тензорное изображение элемента площади. При этом элемент площади нельзя записать как произведение, потому что закон преобразования неправильный – не возникает Якобиана. Элемент площади: $dx^\nu \wedge dx^\mu$. При этом при преобразовании координат будут возникать Якобианы. И далее при появлении метрики сами эти Якобианы будут выражаться через детерминант метрики.

Путем добавления внешних дифференциалов можно продолжить и определить форму $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}$, $k \leq n$, при $k = n$ – форма объема, позволяет производить интегрирование, поскольку интегрирование антисимметричных тензоров производится по объему. И сам объемный интеграл от 1 – это интеграл от формы, натянутой на символ Леви-Чивита. k -форму можем интегрировать по подмногообразию размерности k , если ее ранг совпадает с размерностью пространства, то мы имеем скаляр, умноженный на форму объема. Интегрирование как тензора хорошо определено, если в каком-то многообразии M есть поверхность S_k , где k – размерность, и мы можем интегрировать по этой поверхности. То есть, определен интеграл:

$$\int_{S_k} \omega_{a_1 \dots a_k}^k d\sigma^{a_1} \wedge \dots \wedge d\sigma^{a_k},$$

σ^a – координаты на поверхности, $a = 1, \dots, k$.

При форме более высокого ранга:

$$B_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} \Big|_S$$

можно свести ее к объекту, определенному на поверхности, если записать:

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^a} d\sigma^a \Rightarrow$$

$$B_{\mu_1 \dots \mu_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma^{a_1}} \dots d\sigma^{a_1} \wedge \dots \wedge d\sigma^{a_n} -$$

Проекция (pull-back), далее можем интегрировать как объемный интеграл.

Итак, у нас есть пространство антисимметричных форм произвольного ранга, их ранг может быть от 1 до размерности пространства. Каждую из таких форм можем интегрировать по подмногообразию соответствующей размерности.

Где используются формы? Прежде всего, электродинамика выглядит изящно на языке форм (используются формы не выше второго ранга). Многомерные формы применяются в моделях, где размерность пространства больше, в частности в теории струн.

В электродинамике:

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = dA = A_{\mu,\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu = \frac{1}{2} (A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}) dx^\nu \wedge dx^\mu,$$

Где исходной величиной является форма потенциала:

$$A = A_\mu dx^\mu -$$

1-форма, а d – внешний дифференциал. Напряженности от нее – внешние производные, являющиеся 2-формами. 3-форма в четырехмерном пространстве-времени сводилась бы к производной от скаляра через дуализацию. Так, в четырехмерном пространстве других форм нет. В пятимерном пространстве появляются формы как независимые поля.

В теории струн целый набор таких форм. В случае произвольного ранга формы:

$$(d\omega_k)_{k+1} = \frac{\partial \omega_{a_1 \dots a_k}}{\partial \sigma^a} d\sigma^a \wedge d\sigma^{a_1} \wedge \dots \wedge d\sigma^{a_k}.$$

Рассмотрим все формы ω_k ранга $0 \leq k \leq n$ в пространстве размерности n :

$\dim(\omega_k)$	k
1	0
n	1

$\frac{n(n-1)}{2}$	2
...	...
$\frac{n!}{k!(k-n)!} = \binom{n}{k}$	k
n	n-1
1	n

На самом деле такие формы в теории струн появляются как потенциалы (аналогично электродинамике).

На языке форм калибровочные преобразования следующие:

$$A \rightarrow A + df,$$

$$d^2A = ddA = 0,$$

$$dF = \frac{1}{2} F_{[\mu\nu,\lambda]} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

Аналогично обобщается для произвольных форм:

$$B_{[k]} \rightarrow B_{[k]} + d\omega_{[k-1]},$$

где $\omega_{[k-1]}$ — калибровочный параметр для теории форм.

Электродинамика имеет такой простой геометрический смысл, потому что мы имеем дело с электродинамикой точечных частиц, где вычисляется интеграл взаимодействия, являющийся естественным интегралом от 1-формы потенциала по мировой линии:

$$\int_{int} = e \int_{WL} A.$$

Мировая линия — это подмногообразие, которое заметает точечные частицы. Если бы исходным объектом была бы струна или барабанная перепонка, в общем случае какая-то брана (поверхность), то мы получили бы совершенно похожую теорию. В случае лоренцева пространства она была бы лоренц-инвариантна для протяженных объектов, которые называются бранами.

Мы не будем сильно выходить за рамки ОТО, но общее представление о многомерии полезно иметь. Общность конструкций заключается в теореме Стокса для форм, пригодная для всех размерностей.

Теорема Стокса

Итак, мы имеем хорошо определенные интегралы по многообразию такой же размерности, каков ранг формы. Пусть есть форма ранга $p - 1$, будем интегрировать ее по многообразию размерности p с границей ∂U ее внешний дифференциал:

$$\int_{U_p} d\omega_{p-1} = \int_{(\partial U)_{p-1}} \omega_{p-1}.$$

Далее можно говорить о **цепях**, когда рассматривается набор таких поверхностей. Это основа не только полезного в физике соотношения, но и основа теории кохомологии, которая пытается классифицировать многообразия по размерности неприводимых форм.

Рассмотрим два известных примера – теорему Остроградского-Гаусса и теорему Стокса.

$$p = 2: \int_{U_2} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \right)_{(k < i)} dx^k \wedge dx^i = \oint_{\partial U_2} A_i dx^i -$$

Интеграл от ротора по поверхности есть интеграл по границе циркуляции этого вектора - **теорема Стокса**.

$$p = 3: \int_{U_3} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 =$$

$$= \int_{\partial U_3} (\omega_1 dx^2 \wedge dx^3 + \omega_2 dx^3 \wedge dx^1 + \omega_3 dx^1 \wedge dx^2) -$$

теорема Остроградского-Гаусса.

Также можно ввести понятие скалярного произведения. Тогда дивергенция станет кодифференциалом:

$$\int_{M_n} (\omega_p \wedge (d\alpha_{n-p-1})_{n-p})_n = \int_{M_n} ((d^+ \omega_p)_{p-1} \wedge \alpha_{n-p-1})_n$$

M_n – компактно и не имеет границы, $d^+ \omega_p$ – кодифференциал.

Ковариантное дифференцирование

Итак, мы познакомились с производными Ли и внешними производными. Это те операции, которые имеют характер производных от полей и не нуждаются в понятиях связности. Теперь сформулируем принцип, по которому вводится связность. Она

предшествует метрике. Связность можно ввести исходя из понятия ковариантного дифференцирования.

Пусть есть тензор $T_{\mu\dots}^{\nu\dots}$, при дифференцировании его ковариантным образом получим тензор:

$$\nabla_{\lambda} T_{\mu\dots}^{\nu\dots} = \text{тензор.}$$

Частное дифференцирование:

$$\partial_{\lambda} T_{\mu\dots}^{\nu\dots} = \text{нетензор.}$$

Более общая конструкция апеллирует к связности в расслоении. Начнем с него. Пример такого расслоенного пространства – триплет полей Хиггса: $\Phi_{1,2,3}^a$.

Построим лагранжиан Хиггса в криволинейном пространстве. На множество $\Phi_{1,2,3}^a$ действует группа преобразований, структурная группа слоя, действующая локально в слое:

$$G\Phi_{1,2,3}^a: SO(3)(x) -$$

ассоциированное расслоение, где Φ^a – представление группы. Главным расслоением является сама группа. Если поля заряженные, то вводится ковариантная производная. Мы требуем, чтобы сохранялось представление. Если выбрано представление группы, то ковариантная производная следующая:

$$\Phi^a \in \text{Rep } G \Rightarrow \text{def } \nabla_{\mu} : \nabla_{\mu} \Phi^a \in \text{Rep } G.$$

Это позволяет строить лагранжиан из ковариантных производных. Для того, чтобы ввести ковариантную производную, нужно компенсирующее поле, которое скомпенсирует локальное действие группы.

Введем векторное поле:

$$\nabla_{\mu} = 1 \partial_{\mu} + A_{\mu}^A T_A.$$

Убедимся в том, что наша связность, которую мы ввели раньше – символ Кристоффеля, воспроизводится из этого принципа. Можно сказать, что Φ^a – векторные поля, имеют индексы той же природы: v^{μ} . Символы Кристоффеля должны быть ковариантны относительно локального действия общего преобразования координат, то есть группы $GL(4, R)(x)$, ее элементы $x_{,\mu}^{\mu'}$ и обратные матрицы. Эти матрицы преобразования как функции x – калибровочные преобразования нашей теории.

$$(\Gamma_{\mu})_{\lambda}^{\nu} = \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}.$$

Лекция 6

Гравитация как кривизна

Ковариантное дифференцирование

То, что мы делали путем преобразования к криволинейным координатам в пространстве Минковского, это частный случай выбора связности в пространстве с заданной метрикой. Однако метрика пока не задана. Связность – это калибровочное поле. Предполагается, что есть многообразие M и некоторый слой, например, может быть представление группы. В качестве примера мы начали рассматривать триплет полей Хиггса Φ^a с действующей на них группой $G(x)$ с локальным действием. С точки зрения дифференциальной геометрии мы рассматриваем слой, который состоит из $\Phi^a(x)$. Действие группы означает, что допустимы преобразования:

$$\Phi^a \rightarrow U_b^a \Phi^b, \quad (6.1)$$

$U_b^a \in \text{Rep } G$ – матрицы конечного группового преобразования.

$$\partial_\mu \Phi^a \rightarrow U_b^a \partial_\mu \Phi^b + (\partial_\mu U_b^a) \Phi^b -$$

не принадлежит тому же представлению группы. Исправление состоит в следующем:

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu + A_\mu \Rightarrow$$

$$(\nabla_\mu)_b^a = \delta_b^a \partial_\mu + (A_\mu)_b^a,$$

где δ_b^a – матричнозначный ковектор, лежит в алгебре Ли группы G .

На поле накладывается условие: преобразование (6.1) должно сопровождаться преобразованием векторного матричнозначного поля:

$$(A_\mu)_b^a \rightarrow (A'_\mu)_b^a = U_c^a A_{\mu d}^c U_b^d + U_c^a (\partial_\mu U^{-1})_b^c.$$

$U_c^a (\partial_\mu U^{-1})_b^c$ – неоднородный член, призван скомпенсировать добавку $(\partial_\mu U_b^a) \Phi^b$.

Закон преобразования ковариантной производной:

$$\nabla_\mu \Phi = (\partial_\mu + A_\mu) \Phi \rightarrow U \partial_\mu \Phi + \partial_\mu U \Phi + U A_\mu \Phi + U \partial_\mu U^{-1} U \Phi,$$

$$U U^{-1} = 1 (\partial_\mu U) U^{-1} + U \partial_\mu U^{-1} = 0 \Rightarrow$$

$$\partial_\mu U^{-1} = -U^{-1} (\partial_\mu U) U^{-1} \Rightarrow$$

$$\nabla_\mu \Phi = (\partial_\mu + A_\mu)\Phi \rightarrow U(\partial_\mu + A_\mu)\Phi.$$

Если мы будем строить теорию с ковариантными производными, то она будет симметрична относительно локальных групповых преобразований.

Понятно, что определение неоднозначное, такой закон можно реализовать различными способами, но прежде всего это зависит от представлений.

Алгебра Ли с точки зрения касательного пространства:

$$\text{Lie}(G) = T_e(G).$$

Ее можно реализовать дифференциальными операторами, как любое касательное пространство, а можно реализовать матрицами. Здесь имеется в виду матричное представление. Существует матричное представление для конечных преобразований группы и есть представление для ее алгебры. Матрица $(A_\mu)_b^a$ лежит в алгебре, которую образуют матрицы $[T^A T^B] = f_c^{AB} T^C$.

$$(A_\mu)_b^a = A_\mu^A (T_A)_b^a,$$

T_A — генератор, матричнозначный элемент алгебры Ли. $(A_\mu)_b^a$.

Само калибровочное поле лежит в другом представлении. Рассмотрим более общий объект:

$$B_b^a \xrightarrow{G} U_c^a B_d^c (U^{-1})_b^d. \quad (6.2)$$

Локализация приводит к ковариантной производной, которая действует более сложно:

$$(\nabla_\mu B)_b^a = \partial_\mu B_b^a + [A_\mu B]_b^a,$$

$$[A_\mu B]_b^a = A_{\mu d}^c B_b^d - B_d^c A_{\mu b}^d.$$

При дифференцировании 6.2 получим:

$$\partial_\mu \dots \partial U \dots \partial U^{-1} \dots$$

$$\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu + [A_\mu A_\nu].$$

Само определение зависит от представления. Основных определений 2. Если тензор более высокого порядка, то возникают коммутаторы для каждого из членов

преобразования. Два основных объекта — это фундаментальное представление и тензорное представление с верхним и нижним индексами.

Интересно посмотреть, что с этой точки зрения аффинная связность, в частности связность Леви-Чивита, которая возникла в пространстве с метрикой. Там можно сказать, что калибровочной группой является сама группа диффеоморфизмов. Исходными объектами являются векторы, ковекторы и тензоры в многообразии. Предполагается, что теория инвариантна относительно диффеоморфизмов, то есть является обще ковариантной. Это означает, что есть локальное действие группы $GL(4, \mathbb{R})(x)$. Закон преобразования для вектора:

$$v'^{\mu} = U^{\mu}_{\nu} v^{\nu},$$

где v и a одной природы. Преобразование ковектора:

$$u'^{\mu} = u_{\nu} (U^{-1})^{\nu}_{\mu}.$$

Эту группу диффеоморфизмов можно понимать как локальное действие матричнозначной группы $GL(4, \mathbb{R})$.

Связность в таком случае:

$$(A_{\mu})^{\lambda}_{\tau} = \Gamma^{\lambda}_{\tau\mu} -$$

нетензор, где μ — индекс векторного поля. Разница в том, что теперь связность не обязана быть симметричной, антисимметричная часть представляет собой тензор кручения, является тензором:

$$\Gamma^{\lambda}_{[\tau\mu]} = T^{\lambda}_{\tau\mu}.$$

Вариация связности $\delta\Gamma^{\lambda}_{\tau\mu}$ является тензором.

Как убедиться в том, что мы имеем дело с известным ранее введенным объектом? Это тоже была связность, которая давала возможность вводить ковариантную производную, но она была симметричной по нижним индексам и была построена из метрики. Сейчас мы вводим связность аксиоматически, без использования метрики. Преобразуем связность по матричным индексам:

$$\Gamma^{\lambda'}_{\tau'\mu} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\alpha}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\tau'}} + \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\tau'}}.$$

В безындексном обозначении:

$$\Gamma' = U\Gamma U^{-1} + \Gamma\partial_\mu U^{-1}.$$

Теперь достаточно преобразовать индекс μ , тогда получится закон преобразования, рассмотренный ранее. Необходимо домножить выражение на $\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}$. Это правило подчеркивает, что в обозначении трехиндексного значения связности индексы имеют разный групповой смысл. То есть μ - индекс векторного поля, оставшиеся индексы – матричные индексы матрицы U , принадлежащей групповому преобразованию диффеоморфизмов.

Понятие ковариантного дифференцирования остается прежним, чтобы различать будем обозначать ковариантное дифференцирование по связности Γ следующим образом:

$$\nabla_\mu(\Gamma).$$

В одной и той же теории могут употребляться разные связности, тогда необходимо различать ковариантные производные.

Напряженность поля

Вспомним, что такое напряженность поля. В электродинамике A_μ – матричный скаляр. Напряженность поля:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu -$$

Тензор, независящий от калибровочного преобразования:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f.$$

Ковариантная производная:

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + A_\mu.$$

Коммутатор двух ковариантных производных можно понимать как результат параллельного переноса. Применимо к скаляру:

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu \nabla_\nu] \phi &= (\partial_\mu + A_\mu)(\partial_\nu + A_\nu)\phi - \text{asym} \Rightarrow \\ &(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\phi. \end{aligned}$$

Напряженность поля – коммутатор ковариантных производных.

Что будет напряженностью поля для коммутатора ковариантных производных с аффинной связностью?

- Действие на скаляр:

$$[\nabla_\mu(\Gamma), \nabla_\nu(\Gamma)]\phi = T_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \phi -$$

остается только кручение.

- Действие коммутатора на вектор:

$$[\nabla_\mu(\Gamma), \nabla_\nu(\Gamma)]v^\lambda = T_{\mu\nu}^\tau \nabla_\tau v^\lambda + R_{\tau\mu\nu}^\lambda v^\tau$$

Кручение остается, но возникает кривизна $R_{\tau\mu\nu}^\lambda$ – четырехиндексный тензор, имеющий один верхний индекс и три нижних, причем нижние индексы имеют разную природу. Определение тензора кривизны не требует метрики, зависит только от Γ . В частности, можем его свернуть по паре индексов, получим то, что называется тензором Риччи.

- Действие на ковектор:

$$[\nabla_\mu(\Gamma), \nabla_\nu(\Gamma)]u_\lambda = T_{\mu\nu}^\tau \nabla_\tau u_\lambda - R_{\tau\mu\nu}^\lambda u_\tau.$$

- Для тензоров $[\nabla_\mu(\Gamma), \nabla_\nu(\Gamma)]T_{\nu\dots}^{\mu\dots}$ возникает столько же членов с кривизной, сколько индексов.

Выберем индексы λ, τ :

$$[\nabla_\lambda, \nabla_\tau]A_\mu = \nabla_\lambda A_{\mu;\tau} - \nabla_\tau A_{\mu;\lambda},$$

где $A_{\mu;\tau} = A_{\mu,\tau} - \Gamma_{\mu\tau}^\alpha A_\alpha$,

$$A_{\mu;\tau;\lambda} = A_{\mu;\tau,\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha A_{\alpha;\tau} - \Gamma_{\tau\lambda}^\alpha A_{\mu;\alpha}$$

Вычтем результат перестановки индексов $\lambda \leftrightarrow \tau$, тогда произойдет сокращение членов. В результате коммутатор превращается в следующий оператор:

$$[\nabla_\lambda, \nabla_\tau]A_\mu = \left(\partial_\tau \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\tau}^\alpha + \Gamma_{\mu\tau}^\beta \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha - \Gamma_{\mu\lambda}^\beta \Gamma_{\beta\tau}^\alpha \right) A_\alpha,$$

β – внутренний индекс суммирования.

Мы разобрали истолкование кривизны тензора кривизны Римана-Кристоффеля, с точки зрения калибровочных полей. Метрика пока не фигурировала. При рассмотрении связности Леви-Чивита, она бы выражалась в качестве первых производных от метрики. То тогда бы различие состояло в следующем: лагранжиан в конечном итоге будет функционалом метрики, тензор кривизны выражался бы через вторые производные от метрики.

Так, квадрат тензора кривизны был бы аналогом Максвелловского лагранжиана. Он был бы калибровочно-инвариантным, но это не ОТО. Более того, константа связи была бы безразмерной. В связи с уравнениями четвертого порядка для метрики возникают духи, тахионы. Известно, что ОТО основана на лагранжиане, линейном по кривизне (скаляр кривизны). В этом смысле ОТО не типичная калибровочная теория. Все выглядит громоздко, но можно использовать дифференциальные формы для упрощения.

Нильпотентные операторы, тождество Бьянки

Для упрощения можем ввести 1-формы связности.

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} dx^{\nu} = \Gamma_{\mu}^{\lambda} \Rightarrow$$

$$d\Gamma_{\mu}^{\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\tau}} dx^{\tau} \wedge dx^{\nu}.$$

Теперь введем двухиндексную 2-форму кривизны:

$$\mathbb{R}_{\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2} R_{\mu\tau\lambda}^{\alpha} dx^{\tau} \wedge dx^{\lambda},$$

$$\mathbb{R}_{\mu}^{\alpha} = d\Gamma_{\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta}^{\alpha} \wedge \Gamma_{\mu}^{\beta} = D\Gamma_{\mu}^{\alpha} -$$

Внешний ковариантный дифференциал от связности. Действие внешнего ковариантного дифференциала на произвольную форму ранга n:

$$D\Omega_n = d\Omega_n + \Gamma \wedge \Omega_n + \dots$$

Это *нильпотентный оператор*: $DD = 0$. Пусть есть метрика, тогда мы понимаем, что может быть связность, зависящая от метрики. Можно выбрать такую систему координат, в которых связность зануляется в точке. Тогда следующие члены исчезают, остается только частная производная, оператор, который нильпотентен. Теперь ковариантизуем его. Очевидно, что оператор должен оставаться нильпотентным.

Так, если записать ковариантный дифференциал от кривизны, то получим:

$$D\mathbb{R}_{\mu}^{\alpha} = 0 -$$

тождество Бьянки. Запишем его на языке тензоров:

$$R_{\mu[\lambda\tau;\beta]}^{\alpha} = 0 -$$

можно убедиться в верности тождества путем непосредственного вычисления. В геометрическом смысле это 3-форма:

$$D^2\Gamma = 0.$$

Так, на языке форм вычисления проще.

Все коммутаторы, примененные к тензорам высшего порядка, содержат кручение.

Геометрический смысл кручения и кривизны

Теперь можно сказать пару слов о геометрическом смысле кручения и кривизны. Мы определили их как антисимметризацию связности. Параллельный перенос означает, что вектор испытывает приращение:

$$\delta_a v^\lambda = -a^\mu \Gamma_{\nu\mu}^\lambda v^\nu.$$

Кручение же подразумевает перенос самого dx . При рассмотрении параллельного переноса вектора b^μ и переносе вектора переноса a^μ возникает невязка параллелограмма (рис. 6.1). Расстояние между концами перенесенных векторов – тензор кручения:

$$\delta x^\mu = T_{\nu\lambda}^\mu a^\nu b^\lambda.$$

Так, **кручение** - это невязка геодезического параллелограмма.

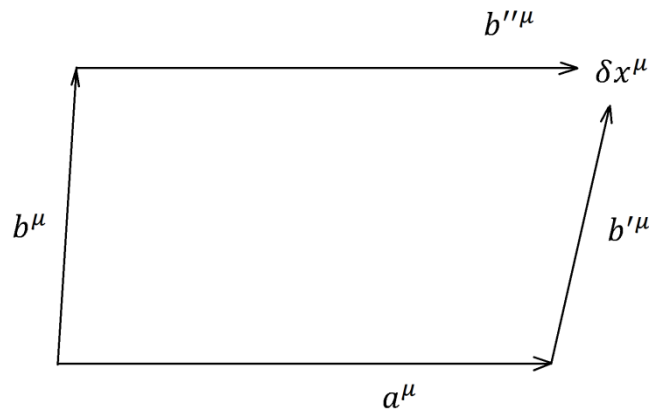


Рис. 6.1. Кручение. Невязка геодезического параллелограмма.

Пусть теперь кручение равно нулю: $T = 0$. В таком случае параллелограмм замыкается. Имеем геодезический параллелограмм, и теперь по двум путям переносим некоторый третий вектор (рис. 6.2). При переносе сверху и снизу получим разные направления – доворот δV :

$$\delta V^\mu = R_{\nu\lambda\tau}^\mu V^\nu a^\lambda b^\tau.$$

Если кручение присутствует, то одновременно будут и непопадание в точку, и разность векторов.

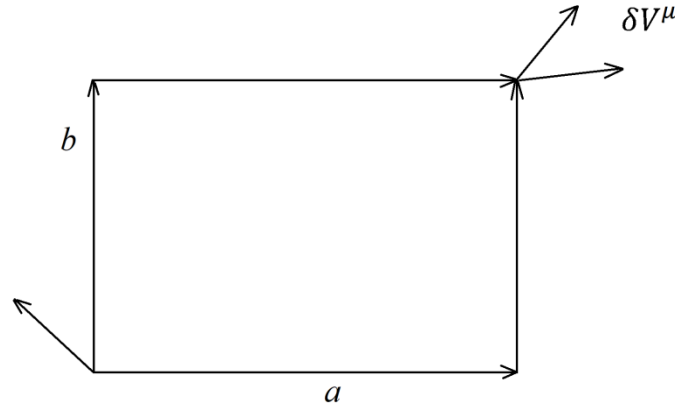


Рис. 6.2. Доворот.

Теперь можно посчитать количество компонент. Сама связность – нетензор третьего ранга (64 компоненты). При антисимметризации по нижним индексам получаем кручение:

$$\dim T_{[\mu\nu]}^\lambda = 24.$$

В последние годы теорию активно развивают. Можно сформулировать ОТО в пространстве без кривизны.

Мы говорили про внешнее дифференцирование и нильпотентные операторы, порождающие тождество Бьянки. То же самое можно сделать на языке коммутаторов. Введем трехиндексный оператор:

$$\hat{J}_{[\mu\nu\lambda]} = [\nabla_\mu[\nabla_\nu\nabla_\lambda]] + \text{цикл.} = 0 -$$

тождество Якоби в операторном виде. Интересно применение оператора к разным величинам.

- В применении к скаляру:

$$\hat{J}_{[\mu\nu\lambda]}\phi = 0 \Rightarrow$$

$$R_{[\nu\lambda\tau]}^\mu + \nabla_\lambda T_{\tau\nu}^\mu + T_{[\lambda\tau}^\rho T_{\nu]\rho}^\mu \Rightarrow$$

при отсутствии кручения получим тождество Бьянки:

$$R_{[\nu\lambda\tau]}^\mu = 0.$$

• В применении к вектору возвращаемся к тому тождеству Бьянки, которое было объявлено на языке форм результатом нильпотентности внешней ковариантной производной:

$$\hat{J}_{[\mu\nu\lambda]}v^\tau = 0 \Rightarrow$$

$$R^\mu_{v[\lambda\tau;\sigma]} + T^\rho_{[\sigma\lambda}R^\mu_{\lambda\tau]\rho} \Rightarrow$$

при отсутствии кручения получим тождество Бьянки:

$$R^\mu_{v[\lambda\tau;\sigma]} = 0.$$

Тождество Бьянки – производная от кривизны, является уравнением.

Итак, мы обсудили понятие кривизны. Прежде всего, кривизна является тензором. На самом деле гравитация – это кривизна. Отличие истинного поля гравитационного от поля в неинерциальной системе отсчета, полученного чистым преобразованием координат пространства Минковского, дает физический критерий гравитации.

Лекция 7

Спинорные поля. Общая ковариантность теории гравитации. Принципы минимальности и отсутствия высших производных

Лоренцева связность

Мы остановились на определении связности как калибровочного поля. Последняя связность, которая нам понадобится – лоренцева связность. Пусть есть многообразие M_n , над которым висит слой. В слое заданы 1-формы $e^a = e^a_\mu dx^\mu$.

Группа преобразований $SO(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$. Преобразование выглядит следующим образом:

$$e^a \rightarrow e'^a = \Lambda^a_b e^b.$$

Метрика группы: $\eta_{ab} = (+, +, -, -)$. В многообразии метрика пока не введена. Конструкция состоит в том, что преобразование зависит от точки $\Lambda^a_b = \Lambda^a_b(x)$, а элементами являются реперы. Это расслоение реперов, известное как метод Картана.

Для того, чтобы ввести ковариантную производную, позволяющую производную от 1-формы считать тензором, используется та же идеология, что и раньше. Введем калибровочное поле, являющееся матрицей, компенсирующее локальность:

$$(A_\mu)^a_b = \omega^a_{b\mu} -$$

это и есть *лоренцева связность*. Она берется из дополнительных условий. Например, если это метрическая связность, то мы накладываем условие ковариантного постоянства метрики.

Также можно ввести 1-формы без индекса μ , сворачивая по этому индексу:

$$\omega^a_{b\mu} dx^\mu = \omega^a_b.$$

Поскольку это формы, то на них более естественно действует внешняя производная:

$$de^a + \omega^a_b \wedge e^b = T^a = \frac{1}{2} T^a_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu -$$

2-форма, кручение, ассоциированное со связностью ω^a_b , или *первое уравнение Картана*. Можно понимать как внешнее ковариантное дифференцирование репера.

Внешнее дифференцирование самой формы связности:

$$d\omega_b^a + \omega_c^a \Lambda \omega_b^c = R_b^a(\omega) = \frac{1}{2} R_{b\mu\nu}^a dx^\mu \wedge dx^\nu -$$

форма кривизны лоренцевой связности, *второе уравнение Кармана*.

Заметим, что:

$$\omega_b^a \xrightarrow{SO(p,q)} \Lambda_c^a \omega_d^c (\Lambda^{-1})_b^d + \Lambda_c^a (d\Lambda^{-1})_b^c -$$

нетензор. T^a и $R_b^a(\omega)$ тензоры:

$$T^a \rightarrow \Lambda_b^a T^b;$$

$$R_b^a(\omega) \rightarrow \Lambda_c^a R_d^c (\Lambda^{-1})_b^d.$$

Уравнение Дирака

Мы ввели лоренцеву связность в первую очередь для того, чтобы ввести поле Дирака. Это еще одно расслоение:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_n \end{pmatrix} 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Дираковский спинор вводится в произвольной размерности тем, что извлекается корень из метрики η^{ab} с помощью матриц Дирака.

$$\eta^{ab} = \gamma^{(a} \gamma^{b)} -$$

Алгебра Клиффорда. γ – матрицы размерности $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Группа та же: $SO(p, q)$. Ее действие на спинор:

$$\psi \rightarrow e^{\frac{\sigma_{ab} \epsilon^{ab}}{2}} \psi,$$

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{4} [\gamma_a, \gamma_b].$$

Выбор матриц γ сильно неоднозначный. Эти матрицы имеют различные представления и нам важно, что они извлекают корень из метрики. В результате получается уравнение Дирака. В плоском пространстве само уравнение Дирака для безмассовой частицы можно записать следующим образом:

$$\gamma^a \partial_a \psi = 0.$$

Перейдем в криволинейное пространство. Ясно, что мы можем обойтись лоренцевой связностью, которая локализует действие группы. Генераторы σ_{ab} реализуют спинорное представление группы $SO(p, q)$. В таком представлении компенсирующее неоднородный член поле будет иметь индексы γ – матриц i, j :

$$(A_\mu)^i_j = \frac{1}{2} \omega_\mu^{ab} (\sigma_{ab})^i_j.$$

Действуют две группы

1) $GL(n, \mathbb{R})(x) \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \Rightarrow \psi(x) \rightarrow \psi'(x')$. В произвольной размерности введение спинорного поля – представление алгебры Клиффорда.

Более тонкий вопрос связан с определением спина. Потому что определение спина связано с четырехмерной группой Пуанкаре. Есть квадратичный казимир, который является сверткой с символом Леви-Чивита генераторов вращения и трансляции. Так, спин привязан к четырехмерии.

Спиноры относительно алгебры Клиффорда существуют в любой размерности. Спинорное расслоение реализуется $\psi(x)$, которое реализуется скалярами.

2) под действием группы $SO(p, q)$: $\psi \rightarrow e^{\frac{\sigma_{ab} \varepsilon^{ab}}{2}} \psi$, ε^{ab} – параметр.

Поле использует лоренцеву связность, но сворачивается с генераторами в спинорном представлении:

$$(A_\mu)^i_j = \frac{1}{2} \omega_\mu^{ab} (\sigma_{ab})^i_j \equiv (\Gamma_\mu)^i_j.$$

Само уравнение Дирака будет переписано как:

$$D_\mu \psi = 0,$$

$$D_\mu = (\partial_\mu + \Gamma_\mu) \psi = 0 -$$

Γ_μ – коэффициенты Фока-Иваненко.

Итак, мы ввели еще одну связность и еще один слой, допустили возможность спинорных полей. И у нас пока нет метрики в пространстве-времени, то есть в нашем

многообразии метрика не вводилась, а вводились связности: символы Кристоффеля (связность Леви-Чивита), аффинная связность, лоренцева связность.

Полная ковариантная производная

Действие на спинор:

$$\nabla_\mu \psi = (\partial_\mu + \Gamma_\mu) \psi = 0.$$

При действии ∇_μ на 1-форму может быть две связности. Может быть связность общая, то есть и та, и другая группы действуют локально, мы должны скомпенсировать доворот локальных реперов. e_v^a является ковектором, преобразуется как ковектор по группе диффеоморфизмов – аффинная связность. Кроме того, e_v^a преобразуется вращением индекса a – лоренцева связность. В результате получим:

$$\nabla_\mu e_v^a = \partial_\mu e_v^a - \Gamma_{v\mu}^\lambda e_\lambda^a + \omega_{b\mu}^a e_v^b -$$

полная ковариантная производная от двухиндексного объекта (с лоренцевым индексом и с координатным).

Как правило, налагается дополнительное условие. Самое простое – предположить, что репер, который мы ввели, мы будем разносить из некоторой точки параллельно, то есть:

$$\nabla_\mu e_v^a = \partial_\mu e_v^a - \Gamma_{v\mu}^\lambda e_\lambda^a + \omega_{b\mu}^a e_v^b = 0.$$

Из этого уравнения найдем $\omega_{b\mu}^a$, потому что для аффинной ковариантной производной можем ввести обозначение по определению:

$$\partial_\mu e_v^a - \Gamma_{v\mu}^\lambda e_\lambda^a = e_{v;\mu}^a.$$

Домножим уравнение на обратную матрицу:

$$(e_v^b)^{-1} = e_b^v,$$

$$e_b^v e_\mu^b = \delta_\mu^v, \quad e_v^b e_a^v = \delta_\mu^v \Rightarrow$$

$$\omega_{c\mu}^a = e_{v;\mu}^a e_c^v.$$

Так, мы выразили лоренцеву связность явно через ковариантную производную по аффинной связности.

Метрика, метрический тензор и тензорные плотности

Последний шаг в оснащении многообразия необходимыми структурами – введение метрики. Метрика вводится как канонический тензор многообразия с двумя индексами:

$$g_{\mu\nu}(x).$$

Свойства метрики:

- 1) Локально приводится к метрике Минковского путем перерастяжки координат.
- 2) Является симметричным тензором:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}.$$

Пусть есть заданное поле. Определим скалярное произведение:

$$V^\mu W^\nu g_{\mu\nu} = \text{скаляр. пр} - \text{е.}$$

Скалярное произведение определяет «углы» между векторами. Расстояние локально: $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Так, при введении метрики получаем ряд новых объектов. Теперь мы можем поднимать и опускать индексы: $V_\mu = V^\nu g_{\mu\nu}$. Если метрика зависит от координат, то это существенно другое поле.

Введем обратную метрику:

$$(g_{\mu\nu})^{-1} = g^{\mu\nu},$$

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu.$$

Теперь мы можем сворачивать векторы репера по метрике:

$$e_\mu^a e_\nu^b g^{\mu\nu} = \eta^{ab}.$$

Такая совокупность реперных величин называется **тетрадой** (n-bein).

Метрический тензор – это матрица, из которой можно составить детерминант, определяющий инвариантную меру интегрирования, объем. Детерминант этой матрицы не является скаляром:

$$\det \|g_{\mu\nu}\| = g \Rightarrow$$

$$x \rightarrow x' \Rightarrow$$

$$g_{\mu' \nu'}(x') = g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \Rightarrow$$

$$g' = g J^2 -$$

закон преобразования детерминанта метрики. Это дает нам величины, называемые тензорными плотностями. При бесконечно малом преобразовании такая матрица будет выдавать след матрицы преобразования. Определение тензорной плотности:

$$T_{\mu\dots}^{\nu\dots} \rightarrow T'_{\mu\dots}^{\nu\dots} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}} \dots J^{-\omega}.$$

Корень детерминанта по абсолютной величине $\sqrt{|g|}$ – скалярная плотность веса 1.

Можно написать формулы преобразования для тензорных плотностей и дифференцирования:

$$\mathcal{L}_v T_{\dots}^{\dots} = \mathcal{L}_v T_{\dots}^{\dots} - \omega v_{,\mu}^{\mu} T_{\dots}^{\dots}$$

$$\nabla_{\mu} v^{\nu} = \partial_{\mu} v^{\nu} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} v^{\lambda} - \omega \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} v^{\nu}.$$

Комбинация $g^{\mu\nu} \sqrt{-g}$ приводит к упрощению целого ряда формул, является типичной тензорной плотностью.

Символ Леви-Чивита $\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_n}$ сам по себе тоже является тензорной плотностью.

$$\sqrt{-g} \varepsilon_{\mu_1\dots\mu_n} = \text{тензор} = E_{\mu_1\dots\mu_n},$$

$$E^{\mu_1\dots\mu_n} = \frac{\varepsilon^{\mu_1\dots\mu_n}}{\sqrt{-g}}.$$

Теперь, введя метрику, можем получить разложение общей связности. Связность, введенная аксиоматически, не была привязана к метрике, и мы не знаем, переносится ли она ковариантно. Можем разложить полную связность, выделив связность Леви-Чивита, кручение. Кроме того, не обязательно требовать, чтобы метрика была ковариантно постоянной. Ковариантные производные от метрического тензора можно считать заданной величиной, некоторым полем. Так, наши структуры позволяют ввести помимо связности Леви-Чивита еще две дополнительные трехиндексные структуры – кручение и метричность.

Мы не предполагаем симметричности по нижним индексам, и кроме того, мы не предполагаем, что ковариантная производная метрики равна нулю. Пусть есть ковариантная производная от связности общего типа:

$$\nabla_{\mu}(\Gamma) = >$$

$$\nabla_{\mu} g_{\nu\lambda} = -Q_{\mu\nu\lambda} -$$

тензор неметричности.

$$T_{\mu\nu}^{\lambda} = 2\Gamma_{[\mu\nu]}^{\lambda} -$$

тензор кручения.

У самой аффинной связности удобно опустить индекс:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\tau} g_{\lambda\tau} = \Gamma_{\lambda\mu\nu} -$$

связность 1-го рода.

$$Q_{\mu\nu\lambda} = -\partial_{\mu} g_{\nu\lambda} + \Gamma_{\lambda\nu\mu} + \Gamma_{\nu\lambda\mu}$$

$$+Q_{\nu\lambda\mu} = \dots$$

$$-Q_{\lambda\mu\nu} = \dots$$

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) + L_{\lambda\mu\nu} + K_{\lambda\mu\nu}$$

$$K_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\lambda\mu\nu} - T_{\lambda\nu\mu} - T_{\mu\nu\lambda}) - \text{тензор конторсии};$$

$$L_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(Q_{\lambda\mu\nu} - Q_{\lambda\nu\mu} - Q_{\mu\nu\lambda}) - \text{ковариантная производная от метрики, тензор.}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\tau}(g_{\tau\mu,\nu} + g_{\tau\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\tau}) = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} -$$

связность Леви-Чивита, нетензор. Само разложение выглядит аналогично, разница в поднятых индексах.

Общая ковариантность

Нас интересует общековариантная теория: действие является скаляром относительно группы диффеоморфизмов притом, что связность мы вводим как калибровочное поле, а метрику вводим независимо от связности. В таком случае возникают два дополнительных тензора, которые можем использовать в теории. Поэтому вариантов становится гораздо больше

Мы знаем, что кручение получается из уравнения Картана. Действие может быть функционалом от метрики и содержать связность Леви-Чивита, но кроме того может зависеть от тензоров $L_{\mu\nu}^{\lambda}$ и $K_{\mu\nu}^{\lambda}$. Таких теорий множество. В частности кривизна. Тензор

кривизны является функционалом чистой связности, внешней ковариантной производной от связности:

$$R_{\nu}^{\mu}(\Gamma) = D\Gamma_{\nu}^{\mu},$$

$$\mathbb{F}_{\nu}^{\mu} = \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} dx^{\lambda}.$$

Тензор Риччи для такой вещи становится несимметричным, коммутаторы приобретают дополнительные члены, связанные с кручением. Формулы получаются громоздкими. Тензор Риччи:

$$R_{\tau\lambda} \neq R_{\lambda\tau} = R_{\lambda\mu\tau}^{\mu}(\Gamma).$$

Многие формулы, к которым мы привыкли в отсутствие кручения, например, сокращение ковариантных производных, перестают выполняться:

$$T \neq 0: A_{[\mu,\nu]} \neq A_{[\mu,\nu]}.$$

Далее, имея аффинную связность, мы можем лоренцеву связность к ней привязывать. Мы можем задать общую связность Γ и общую лоренцеву связность ω , которые связаны через репер:

$$R_{\nu}^{\mu}(\Gamma) - \text{тензор кривизны}, R_b^a(\omega);$$

$$\nabla(\Gamma)e_{\mu}^a = 0.$$

Репер определяется метрикой, при этом если метрика не ковариантно постоянна, то присутствует неметричность, передающаяся реперу:

$$e_{\mu}^a e_{\nu}^b \eta_{ab} = g_{\mu\nu}.$$

$$\omega_{abc}(e) = -\Omega_{abc} + \Omega_{bcd} - \Omega_{cad},$$

$$[\hat{e}_a \hat{e}_b] = -2\Omega_{ab}^c \hat{e}^c, \quad \hat{e}_a = e_a^{\nu} \partial_{\nu}.$$

Ω_{ab}^c — частные производные тетрады, коэффициенты вращения Риччи.

Для связности общего вида, содержащей неметричность кручения, неметричность будет запрятана в характер симметрии по индексам.

$$\omega_{a(bc)} = \frac{1}{2}(Q_{abc} + \partial_a g_{bc}),$$

$$\text{при } Q = 0: \omega_{ab}^c = \omega_{ab}^c(e) + R_{ab}^c.$$

Последняя формула применяется в теории супергравитации. В супергравитации появляется спинорное поле гравитина. Оно в четырехмерном пространстве является четырехкомпонентным спинором, но еще несет векторный индекс.

Так, из всего, что было сказано, следует, что неметричность является наименее востребованной. А кручение напротив – неотъемлемая часть теории супергравитации.

Подведем некоторые итоги. Основное свойство теории гравитации (как Эйнштейновской, так и более общих) ее общая ковариантность. Общая ковариантность не фиксирует теорию как теорию Эйнштейна. Это специальный выбор. Например, в теории можно иметь высшие поправки по кривизне, которые также являются общековариантным тензором. Общая ковариантность в некотором смысле обобщение принципа эквивалентности. Однако это не одно и то же. Есть еще принцип минимальности гравитационного взаимодействия.

Принципы минимальности, отсутствия высших производных

Принцип минимальности заключается в следующем: взяв теорию материи, заменим частные производные на ковариантные по метрической связности в лагранжиане в действии материи:

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu \left(\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} \right).$$

В некоторых случаях это не годится (например, конформная симметрия для безмассовых полей). Тогда мы можем вводить в лагранжиан структуры, которые исчезают в отсутствие гравитации. Например, в теории скалярного поля:

$$\mathcal{L} \sim (\partial\Phi)^2 + V(\varphi).$$

Это была бы минимальная теория при замене на ковариантную производную.

Могло бы быть следующее выражение:

$$\mathcal{L} \sim (\partial\Phi)^2 + V(\varphi) + R\Phi^2,$$

где R — скалярная кривизна. Тогда можно сделать теорию конформной, то есть так, чтобы она допускала преобразование метрики умножением на конформный фактор:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2 g_{\mu\nu}.$$

Обобщение теории безмассового скалярного поля на криволинейное пространство, как правило, сопровождается наложением конформности. Это значит, что взаимодействие будет неминимальным. Неминимальность ведет к нарушению принципа эквивалентности.

Еще один принцип – *отсутствие высших производных*. Он означает, что лагранжиан (будем рассматривать действие как функционал от метрики) содержал бы только первые производные:

$$S[g_{\mu\nu,\lambda}].$$

Такой можно построить, но он не будет общековариантным. Возникают вторые производные, потому что тензор кривизны, записанный через метрику, содержит вторые производные:

$$R^{\mu}_{\nu\lambda\tau} \sim \partial^2 g_{\mu\nu}.$$

Если лагранжиан от метрики имеет вторые производные, то нужно задуматься о вариационном принципе. Если мы производим варьирование в каком-то мировом объеме Ω с границей $\partial\Omega$, то обычно для простоты полагается, что вариации метрики на границе $\delta g_{\mu\nu}$ исчезают. Если в лагранжиане есть вторые производные, то на границе появляются первые производные.

Проблема решается. Из лагранжиана со вторыми производными удастся выделить полную дивергенцию и свети ее к поверхностному члену. Этот поверхностный член не меняет уравнений движения, но меняет само действие, имеющее непосредственный физический смысл.

При рассмотрении теорий с высшими членами по кривизне возникает другая опасность: уравнения движения будут высшего порядка, в них возникнут духи Остроградского, то есть уравнения приобретут неустойчивости. Поэтому при построении жизнеспособной теории приходится лавировать между такими принципами как общая ковариантность, минимальность/неминимальность, отсутствие высших производных или духов Остроградского.

Лекция 8

Классификация пространств

Дуализация и внешнее произведение на пространстве форм

Мы хотим дать определение кодифференциала при введенной метрике. Р-форма – антисимметричный тензор ранга p , свернутый с решеткой дифференциалов и представляющий собой элементарный базис форм:

$$\omega_p = \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \frac{1}{p!}.$$

Формы существуют до n размерности многообразия:

$$M_n, \quad p \leq n, \quad p \geq 0.$$

Последняя форма – произведение всех дифференциалов координат:

$$p = n: \frac{\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}}{n!} \sqrt{|g|} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} = Vol_n -$$

форма объема. На множестве форм определена операция внешнего дифференцирования (обобщение ротора):

$$d\omega_p = \frac{\partial \omega_{\mu_1 \dots \mu_p}}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \frac{1}{p!}.$$

В электродинамике $F_2 = dA_1$, 1-форма четырехпотенциала A_1 порождает 2-форму напряженности F_2 .

Теперь в пространстве с метрикой можно ввести понятие дуализации форм. Это умножение этого антисимметричного тензора на ε . Обозначается $*$, называется Hodge dual:

$$* \omega_p = \Omega_{n-p}.$$

Дуализация координатной формы:

$$* dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} = \frac{\sqrt{|g|}}{(n-p)!} g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_p \nu_p} \varepsilon_{\nu_1 \dots \nu_p \lambda_1 \dots \lambda_{n-p}} dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_{n-p}}.$$

При $n = 4$ дуальной к 1-форме будет 3-форма, дуальной к 2-форме будет 2-форма:

$$* F_2 = \tilde{F}_{\mu\nu} \frac{1}{2} dx^\mu \wedge dx^\nu, \text{ где}$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau} \sqrt{|g|} F^{\lambda\tau}.$$

Так, с физической точки зрения электрический и магнитный секторы равноправны.

Предположим, что производим дуализацию дважды. Эта операция приведет к начальной форме, но может измениться знак (зависит от полного ранга ε , ранга каждой из форм и сигнатуры формы g):

$$** \omega_p = (-1)^{p(n-p)} \text{sign}(g) \omega_p = \pm \omega_p.$$

Вторая операция, которая определена на пространстве форм, это внешнее произведение:

$$\omega_p \wedge \Omega_q \omega \dots dx \wedge dx \wedge \dots dx \wedge \dots$$

При этом внешнее произведение будет формой $n + q$. При перестановке будет меняться знак в зависимости от p и q .

Скалярное произведение в пространстве форм

С помощью дуализации можем определить понятие скалярного произведения в пространстве форм. Формы должны быть одного ранга. Скалярное произведение хорошо определено на многообразии $M_n = \text{compact}$ без границ.

$$\begin{aligned} (\alpha_p, \beta_p) &= \int_{M_n} \alpha_p \wedge * \beta_p = \frac{1}{p!} \int_{M_n} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} \beta^{\mu_1 \dots \mu_p} \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = (\beta_p, \alpha_p) \\ &= \frac{1}{p!} \int_{M_n} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} \beta^{\mu_1 \dots \mu_p} * 1, \end{aligned}$$

$* \beta_p$ обладает рангом $n - p$, $\alpha_p \wedge * \beta_p$ имеет ранг формы объема $n \sim \text{Vol}_n$. Объемный интеграл определен даже при $n = p$ – в таком случае $* \beta_p$ – скаляр. $* 1 = \frac{1}{n!} \varepsilon \dots \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ – короткая запись элемента объема.

Например, максвелловское действие запишется следующим образом:

$$\frac{1}{2} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{|g|} d^4x = \int * F \wedge F,$$

$$F = dA.$$

Во-первых, запись более коротка, во-вторых, более удобно варьировать. Для интегрирования по частям вводится сопряженный оператор:

$$(\alpha_p, d \beta_{p-1}) = (d^+ \alpha_p, \beta_{p-1})$$

$d \beta_{p-1}$ – форма ранга p , $d^+ \alpha_p$ – форма ранга $p - 1$, кодифференциал.

$$\begin{aligned} \int_{M_n} d\beta \wedge \alpha &= \int_{M_n} d(\beta \wedge \alpha) - (-1)^{p-1} \beta \wedge d \alpha = (-1)^p \int_{M_n} \beta \wedge d \alpha \\ &= (-1)^{p+p(n-p)} \text{sign}(g) \int_{M_n} \beta \wedge (* d \alpha), \text{ где} \end{aligned}$$

$$d^+ = (-1)^{p+p(n-p)} \text{sign}(g) * d *$$

$$d^+ \omega_p = \pm \frac{1}{(p-1)!} \nabla^\mu \omega_{\mu\mu_1 \dots \mu_{p-1}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} -$$

ковариантная дивергенция по одном из индексов.

Можно записать максвелловский лагранжиан и действие на языке форм:

$$S = \frac{1}{2} \int * F \wedge F - \int * j \wedge A,$$

$A = A_\mu dx^\mu$, $j = j_\mu dx^\mu$ – 1-формы, $* j$ – 3-форма. Для варьирования запишем $F = dA$:

$$\delta S = - \int * F \wedge d\delta A - \int * j \wedge \delta A \Rightarrow$$

$$(d^+ F - j) \wedge \delta A = 0 \Rightarrow$$

$$d^+ F = j \Rightarrow$$

$$dx^\mu F^{\mu\nu} = j^\nu.$$

Так, уравнения Максвелла могут получаться путем варьирования действия, записанного в виде скалярного произведения в функциональном пространстве. С формами высокого ранга так работать удобнее.

Разложение формы на гармонические

Теперь у нас есть два оператора d и d^+ и мы можем ввести оператор Ходжа-Лапласа:

$$\Delta = d^+ d + d d^+ -$$

применим не только к скалярам, но и к любым антисимметричным тензорам. При этом при сопряжении он будет переходить в себя:

$$\Delta^+ = \Delta.$$

Есть теорема о разложении произвольной формы на гармонические точные и ко-точные.

Гармоническая форма – решение уравнения Лапласа с нулем: $\Delta\alpha = 0$.

Общая форма ранга p представляется в виде:

$$\omega_p = d\beta_{p-1} + d^+\gamma_{p+1} + \alpha,$$

$d\beta_{p-1}$ – точная форма, $d^+\gamma_{p+1}$ – ко-точная форма.

Если $d\mu = 0$, то μ - замкнута форма. Форма v будет называться ко-замкнутой, если $d^+v = 0$. Такие замкнутые и ко-замкнутые формы не будут точными и ко-точными. Разница будет в решениях уравнения Лапласа, то есть в гармонических формах. Они зависят от топологии. Например, на плоскости всегда, если форма замкнута, то она будет точна. На торе такого не получить.

Группа изометрий

Когда мы пытаемся разобраться и классифицировать возможные многообразия с метрикой, нам прежде всего интересно пространство с симметриями. Мы привыкли к пространству Минковского, в котором есть 10 преобразований симметрии: сдвиги, повороты. На языке дифференциальной геометрии это преобразование, не меняющее метрики, называющееся изометрией.

Некоторые интересные пространства в гравитации также имеют действие изометрии, это максимально симметрические пространства, их всего 3. Существуют пространства с симметриями, которые называются однородными, их много. В этом случае существует группа трансляций (нетривиальная), и можно найти большие классы о большие классы однородных пространствах.

Все это в совокупности опирается на производные Ли.

$$\mathcal{L}_K U_\mu = K^\nu \partial_\nu U_\mu + K_{,\mu}^\nu U_\nu$$

$$\mathcal{L}_K g_{\mu\nu} = K^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} + K_{,\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} + K_{,\nu}^\lambda g_{\mu\lambda} = K_{\mu;v} + K_{v;\mu}, \quad \text{где}$$

$$K_{\mu;v} = K_{\mu,v} = (K^\lambda g_{\mu\lambda})_{,v} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda K_\lambda.$$

Уравнение в форме ковариантных производных более удобно, это *система уравнений Киллинга*:

$$K_{\mu;v} + K_{v;\mu} = 0.$$

Нам интересно искать именно те векторные поля, которые приводят к изометриям. По смыслу сдвинутая производная является изменением формы метрики.

Рассмотрим подробнее систему уравнений Киллинга. Тензор антисимметричен:

$$K_{\mu;v} = -K_{v;\mu}.$$

Предполагается метрическая связность:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}.$$

Количество независимых плоскостей в четырехмерном пространстве 6, а компонент 4. Понятно, что решение существует не всегда. Пусть мы нашли некоторое количество векторов Киллинга, докажем, что в четырехмерном пространстве их будет не более 10. Обозначим вектора Киллинга следующим образом:

$$\hat{K}_i = K_i^{\mu} \partial_{\mu}.$$

Производные Ли обладают общим свойством: они образуют алгебру Ли:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{K_i} g_{\mu\nu} &= 0, \\ [\mathcal{L}_{K_i}, \mathcal{L}_{K_j}] &= \mathcal{L}_{[\hat{K}_i, \hat{K}_j]}. \end{aligned}$$

Это означает, что если векторов Киллинга несколько, то они образуют замыкающуюся на себя алгебру Ли. При экспоненцировании алгебра Ли переходит в группу Ли – группу изометрии.

Классификация изометрий

Максимально симметричное пространство

Как классифицировать такие изометрии? Любое многообразие локально подобно евклидову пространству или псевдоевклидову пространству. Поэтому мы понимаем, что локально в окрестности каждой точки такие преобразования будут или трансляциями или вращениями. Трансляции сдвигают точку относительно начального положения, вращения оставляют точку неподвижной.

Зададим начальные данные для системы уравнений Киллинга. Для этого мы можем воспользоваться тождеством Риччи:

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] K_{\lambda} = R_{\lambda\mu\nu}^{\tau} K_{\tau}.$$

Кроме того есть тождество Риччи для тензора кривизны:

$$R_{[\lambda\mu\nu]}^{\tau} = 0.$$

Отсюда можно получить следующее:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu K_\lambda = R_{\lambda\mu\nu}^\tau K_\tau,$$

$$\partial_\mu \partial_\nu K_\lambda \sim K.$$

В точке заданы начальные данные:

$$x_0: K_\lambda(x_0), \quad \partial_\nu K_\lambda(x_0).$$

Но если мы хотим классифицировать как вращения и трансляции, то производные удобно сгруппировать в антисимметричную комбинацию: $\partial_{[\nu} K_{\lambda]}$ (x_0). Начальных данных типа $K_\lambda(x_0)$ будет 4, типа $\partial_{[\nu} K_{\lambda]}$ (x_0) будет 6. Далее будем решать уравнение с этими начальными данными, которые глобально могут существовать, могут существовать частично для каких-то начальных данных. В результате получаем некоторую группу изометрий.

$$K_\mu^{(i)} = A_\mu^\nu(x, x_0) K_\nu^{(i)}(x_0) + B_\mu^{\nu\lambda}(x, x_0) (K_{\lambda,\nu}^{(i)} - K_{\nu,\lambda}^{(i)}) \Big|_{x_0}.$$

Решение будет состоять в том, найдутся ли глобально без особенностей матрицы $A_\mu^\nu(x, x_0)$, $B_\mu^{\nu\lambda}(x, x_0)$. Мы можем задавать начальные данные как некоторое поле, которое в пределе:

$$\lim K_\mu^{(\rho)}(x, x_0) \rightarrow \delta_\mu^\rho -$$

при сближении точек мы будем получать символ Кронекера. $K_\mu^{(\rho)}(x, x_0)$ – генератор трансляции, всего их n штук. При вращениях:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} K_{\mu,\nu}^{[\alpha\beta]}(x, x_0) = \delta_{\nu\mu}^{\alpha\beta} - \delta_{\nu\mu}^{\beta\alpha}.$$

Вектора $K_{\mu,\nu}^{[\alpha\beta]}(x, x_0)$ – генераторы локальных вращений, всего их $n(n-1)$ штук. Суммарно генераторов трансляции и вращения $\frac{n(n+1)}{2}$ штук.

В итоге мы получаем **максимально симметричное пространство**, если существуют все подобные изометрии. Их не трудно представить себе в виде поверхностей. Одно из них нам хорошо известно – пространство Минковского. Два других можно представить в виде поверхностей, вложенных в пятимерное пространство с сигнатурой Лоренца с одним или двумя временами. Можно также сказать, что в Евклидовой сигнатуре трехмерные пространства:

$$E_3, S^3, H_3.$$

Метрику во всех случаях удобно изобразить в сферических координатах:

$$dl^2 = dr^2 + \left(\frac{\sin^2 r}{r^2} \right) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Случай $\sin^2 r$ является S^3 , $0 \leq r \leq \pi$. Для $sh^2 r$ r меняется в бесконечных пределах.

Псевдоевклид: $M_{1,3}$, *deSitter*, *Anti deSitter*. Эти пространства можно представить в виде поверхностей. *deSitter* – пространство постоянной положительной кривизны: полярная кривизна $R = const > 0$. В пространстве Минковского $M_{1,3}$ $R = 0$. В *AntideSitter* $R = const < 0$.

Если пространство максимально симметричное, то можно его тензор кривизны записать через скаляр:

$$R_{\mu\nu\lambda\tau} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau} - g_{\nu\lambda}g_{\mu\tau}).$$

Тензор кривизны зависит от координат, но как метрика. При этом метрика ковариантно постоянная. Поэтому любая ковариантная производная от тензора кривизны нулевая:

$$\nabla_{\lambda} R_{\mu\nu\lambda\tau} = 0.$$

Скалярная кривизна является константой:

$$R = const.$$

Также можно будет сказать, что Кречман тоже будет постоянным:

$$R_{\mu\nu\lambda\tau} R^{\mu\nu\lambda\tau} = const.$$

Так, количество максимально симметричных пространств очень маленькое, и это наиболее жесткая конструкция в смысле кривизны.

Однородное пространство

Есть промежуточный случай, когда группа изометрий обладает подгруппой изотропии:

$$G_{iso}, H_{изотроп} \in G_{iso}.$$

Вспомним, что такое фактор пространства. Возьмем алгебру Ли полной группы:

$$\mathcal{L}ie(G_{iso}) = L.$$

Теперь можем взять алгебру Ли подгруппы изотропии:

$$\mathcal{L}ie(H_{изотроп}) = L_0.$$

Из полной алгебры на теоретико-множественном языке:

$$L_1 = L - L_0.$$

$$[L_0, L_0] \subset L_0, \quad [L_1, L_0] \subset L_1, \quad [L_1, L_1] \subset L_0 \Rightarrow$$

$$L_1 \rightarrow \frac{G_{iso}}{H_{изотроп}} -$$

ко-сет, однородное пространство группы G_{iso} , факторизация всех преобразований по вращениям. Это приводит к классификации самих однородных пространств. Наглядный пример:

$$M_{1,3} = \frac{ISO(1, 3)}{SO(1, 3)}.$$

Мы приходим к выводу, что существует большое число однородных пространств. Такие пространства замечательны тем, что они имеют кривизну ковариантно постоянную как и максимально симметрические пространства, но условия менее жесткие.

Свойства однородный пространств:

- 1) $\nabla_\lambda R_{\mu\nu\lambda\tau} = 0$;
- 2) Постоянство скаляра кривизны R, R^2 .

Другие примеры многообразий:

1)

$$\frac{SO(4)}{SO(3)} = S^3 \Rightarrow$$

$$S^n = \frac{SO(n+1)}{SO(n)}.$$

На сфере S^3 действует группа $SO(4)$, причем действует транзитивно – любую точку сферы можно получить из любой другой точки сферы, действуя группой изометрии. В итоге тензор кривизны сферы имеет нулевую ковариантную производную.

2)

$$\frac{SO(1,4)}{SO(1,3)} = deSitter.$$

$$\frac{SO(2,3)}{SO(1,3)} = AntideSitter.$$

3) Однородные пространства возникают не только как пространства-времена, но и как пространства скалярных функций. В теории поля возникают скалярные модели, в которых сами скалярные поля заданы с некоторой метрикой на пространстве скалярных функций. Например:

$$dl^2 = \frac{1}{2}(dx^2 + e^{2x} dy^2).$$

Если вычислить здесь тензор кривизны, то он будет ковариантно постоянным, скаляр кривизны будет постоянным.

$$\frac{SO(1,2)}{SO(2)}$$

Не обязательно должны быть компактные группы. Существуют пространства первого и второго рода. Если группы компактные, то пространство первого рода, в противном случае второго. Также у групп может быть разная сигнатура. Существует большая теория пространств, изложена в книге Хелгасона. Дубровин, Новиков, Фоменко дают достаточно пояснений.

Интересно, что в теории поля со скалярными полями на однородных многообразиях нам нужно уметь строить метрики, зная групповые свойства (экспоненцирование алгебры). Есть специальная процедура, позволяющая построить метрику, а также матричное представление для ко-сетов в виде дифференциалов, то есть записать метрику в виде квадрата дифференциала от некоторой матрицы. Матрица связана с алгеброй Ли. В частности, это способ решения уравнений Эйнштейна с одной симметрией Киллинга, например все стационарные решения сводятся к трехмерным - моделям на однородных пространствах. И не только уравнения Эйнштейна, но и уравнения Эйнштейна с некоторыми видами материи, со скалярами и тензорами, которые возникают в супергравитации. Это является некой скрытой симметрии всей теории.



Лекция 9

Теория P-brane

p-brane

Мы последовательно вводили структуры и многообразия, причем мы отделили связность от метрики. ОТО является метрической теорией, поэтому постепенно будем возвращаться к более простой теории. Сегодня обсудим, какие виды материи нам интересны. Знакомые нам виды материи: заряженные частицы, электромагнитное поле, гравитационное поле. Существуют в современных теориях встречаются и другие виды материи, такие как p-браны. То есть точечная частица является частным случаем класс объектов, называемых бранами, они существенно используются в теории струн.

Есть иерархия. Нам интересны объекты, обладающие релятивистской симметрией. Будем рассматривать пространство Минковского размерности D ($D-1$ пространственных координат и 1 временная), группу Лоренца, p-brane. По сути, когда мы говорим о материальной точке, в первую очередь мы рассматриваем кривые в пространстве-времени, которые параметризованы $x^\mu(\tau)$. Это будет 0-brane (рис. 9.1). То есть речь о времени подобной или изотропной кривой.

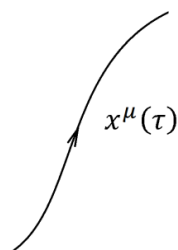


Рис. 9.1. 0-brane.

Можно рассматривать, например, двумерные поверхности, которые можно физически ассоциировать. На поверхности можно ввести два параметра: τ, σ . τ будет времениподобной, а σ пространственноподобной. Тогда возникает метрическое уравнение поверхности:

$$x^\mu = x^\mu(\tau, \sigma).$$

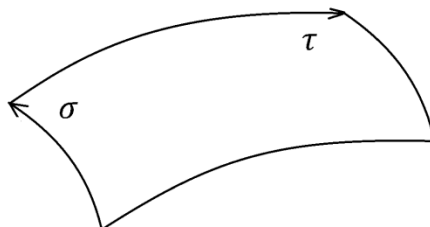


Рис. 9.2. 1-brane.

Обычно это интерпретируется как струна или 1-brane (рис. 9.2). То есть это уже протяженный объект, который не нарушает СТО. Мы знаем, что твердое тело этот принцип нарушает, то есть нельзя ввести протяженную частицу со структурой твердого тела, не нарушая СТО.

Далее следует произвольный случай поверхности с множеством координат (рис. 9.3):

$$\sigma^a = (\tau, \sigma^1 \dots \sigma^p).$$

Уравнение такой поверхности:

$$x^\mu = x^\mu(\sigma^a).$$

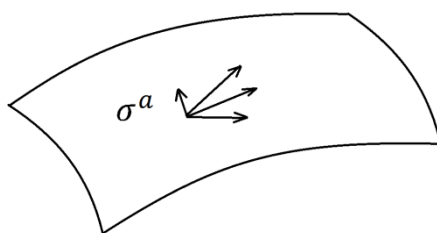


Рис. 9.3. Поверхность с множеством координат.

При $1 + p = D$ мы плавно переходим в то, что называется полем. Это уже будет система, заполняющая все пространство.

Действие, которое выбирается для всех p -brane и для полей, как правило, разные. Поле дает более широкие возможности для выбора лагранжиана, в то время как для p -brane выбирается действие, обобщающее длину пространства Минковского (геометрическое действие, условно минимизирующее размер поверхности).

Интерес к таким объектам заключается в следующем: если взять струну, то из релятивистской симметрии будет следовать, что brane должна быть растянута, в ней возникают колебания. На других brane аналогично. Это все нетривиальные протяженные объекты с внутренней динамикой, которые описываются Лоренц-инвариантным образом.

Математическое описание здесь единое – это прямое обобщение движения точечной частицы. Именно в таком смысле получаются близкие геометрические структуры. Также мы хотели бы предусмотреть достаточное количество сведений, необходимых для дальнейшего изучения наук, которые отталкиваются от гравитации.

Поверхности в евклидовом пространстве

Поскольку речь идет о поверхностях в пространстве-времени, то вспомним для начала теорию поверхностей в евклидовом пространстве. Рассмотрим евклидово

пространство E_3 , в котором есть векторы $\vec{\xi}$ (рис. 9.4). Это плоское пространство. Зададим поверхность, на которой введены координаты x^i , $i = 1, 2$ (легко обобщается на произвольные размерности). Сама поверхность является искривленной, $\vec{\xi} = \vec{\xi}(x^i)$. Производная:

$$\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial x^i} = \vec{\xi}_i \in S.$$

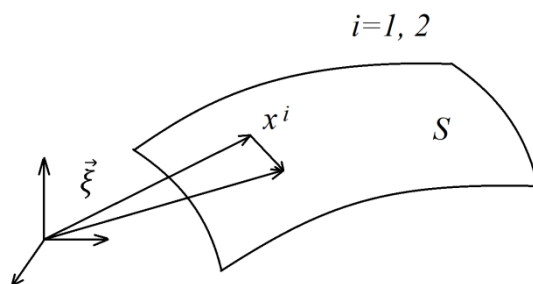


Рис. 9.4. Поверхность в евклидовом пространстве.

Метрика в евклидовом пространстве δ_{ij} . Поэтому метрика, которая индуцируется на этой поверхности:

$$dl^2 = d\vec{\xi} \cdot d\vec{\xi} \Big|_S = \vec{\xi}_i \vec{\xi}_j dx^i dx^j,$$

$$g_{ij} = \vec{\xi}_i \vec{\xi}_j -$$

1-квадратичная форма, невырожденная метрика. Удобно думать, что она диагональна, тогда можно будет из двух имеющихся векторов без труда построить вектор нормали. Однако вектор нормали можно ввести и более абстрактным образом:

$$\vec{n} = \vec{\xi}_i = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{n}_j \cdot \vec{\xi}_i = -\vec{\xi}_{ij} \vec{n}.$$

Теперь можем ввести 2-квадратичную форму, кривизну поверхности. Она определяется вторыми производными $\vec{\xi}$:

$$\partial_j \vec{\xi}_i = \vec{\xi}_{ij} = \vec{\xi}_{ji}.$$

$$K_{ij} = \vec{\xi}_{ij} \cdot \vec{n} = -\vec{n}_{(i} \vec{\xi}_{j)} -$$

вторая квадратичная форма или тензор внешней кривизны, \vec{n} — вектор нормали, может выходить за пределы поверхности.

Итак, у нас есть системе векторов $\vec{n}, \vec{\xi}_i$, образующая базис в E_3 . Разложение вектора $\vec{\xi}_{ij}$ по этому базису:

$$\vec{\xi}_{jk} = \Gamma_{jk}^i \vec{\xi}_i + K_{ij} \vec{n}.$$

Не трудно показать, что Γ_{jk}^i – символы Кристоффеля или связность Леви-Чивита в метрике g_{ij} :

$$g_{ij,k} = (\vec{\xi}_{ik} \cdot \vec{\xi}_j) + (\vec{\xi}_i \cdot \vec{\xi}_{jk}) = \Gamma_{ik}^l g_{lj} + \Gamma_{jk}^l g_{li} \Rightarrow$$

$$\Gamma_{jk}^i = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} (g) -$$

символы Кристоффеля по внутренней метрике.

При следующем дифференцировании можем ввести тензор Римана. Введем векторы с тремя индексами:

$$\vec{\xi}_{ijk} = \partial_n \vec{\xi}_{ij},$$

$$\vec{\xi}_{i[jk]} = K_{i[j,k]} \cdot \vec{n} - K_{i[j} K_{k]}^l \vec{\xi}_l + \partial_{[k} \Gamma_{ij]}^l \vec{\xi}_l + \Gamma_{i[j}^l (K_{k]l} \vec{n} + \Gamma_{k]l}^m \vec{\xi}_m) = 0.$$

Формула Гаусса-Кодацци:

$$R_{ikj}^l = K_{ij} K_k^l - K_{ik} K_j^l.$$

Условие на тензор внешней кривизны:

$$K_{ij;k} - K_{ik;j} = 0.$$

В качестве упражнения можно рассмотреть гиперboloид:

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 = R,$$

$$\xi^1 = R \operatorname{ch} \psi \cos \varphi,$$

$$\xi^2 = R \operatorname{ch} \psi \sin \varphi,$$

$$\xi^3 = R \operatorname{sh} \psi.$$

Гауссова кривизна:

$$K = \frac{\det K_{ij}}{\det g_{ij}}.$$

Поверхности в римановом пространстве

Теперь перейдем к поверхностям более общего вида, которые погружены в риманово пространство (рис. 9.5). Пространство размерности D (bulk) кривое, введем

метрику $g_{\mu\nu}(x)$ как метрику внешнего пространства. Заданы функции погружения $X^\mu(\sigma^a) = x^\mu$. Время может быть направлено вдоль одной из нормалей или лежать на поверхности. Вектор в пространстве D:

$$\begin{aligned}\partial_a X^\mu &= X_a^\mu, \\ a &= 1 \dots q.\end{aligned}$$

Нормали:

$$\begin{aligned}n_i^\mu n_{\mu i} &= \begin{cases} \delta_{ij} \\ \eta_{ij} \end{cases}, \\ i &= 1 \dots D - q.\end{aligned}$$

$$ds_D^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \Big|_S = \gamma_{ab} d\sigma^a d\sigma^b$$

$\gamma_{ab} = g_{\mu\nu} X_a^\mu X_b^\nu$ – индуцированная метрика.

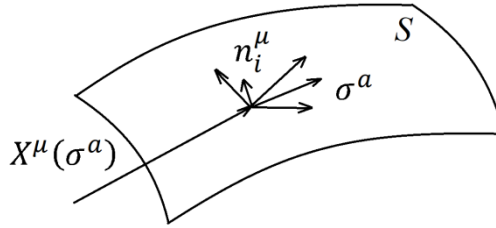


Рис. 9.5. Поверхность в римановом пространстве размерности D.

В D-мерном пространстве введена метрика и метрическая связность $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu(g)$. Будем обозначать ковариантную производную по этой связности как $;$; γ_{ab} можно сопоставить связность $\mathfrak{F}_{ba}^c = \left\{ \begin{smallmatrix} c \\ ba \end{smallmatrix} \right\}(\gamma_{ab})$, ковариантную производную по этой связности будем обозначать $|$ перед индексом.

Поскольку нормалей несколько, то и внешних кривизн столько же:

$$K_{ab}^i = -n_{\mu;\nu}^i X_a^\mu X_b^\nu = (n_{\mu;\nu}^i - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda n_\lambda^i) X_a^\mu X_b^\nu.$$

Из условия ортогональности:

$$n_\mu^i X_a^\mu = 0 \quad \forall i.$$

$$X_{a|b}^\mu n_\mu^i + X_a^\mu n_{\mu;b}^i = 0.$$

Используя полученное выше, перепишем:

$$K_{ab}^i = X_{a|b}^\mu n_\mu^i + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda n_\lambda^i X_b^\nu X_a^\mu -$$

типичный случай дифференцирования тетрады, можем записать следующим образом:

$$\begin{aligned} K_{ab}^i &= \nabla_b X_a^\mu n_\mu^i. \\ \nabla_c \gamma_{ab} &= \gamma_{ab|c} = 0 \Rightarrow \\ \nabla_b X_a^\mu &= K_{ab}^i n_i^\mu. \end{aligned}$$

Распишем третьи производные, используя ковариантные производные.

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\lambda\tau}(g), \quad \mathcal{R}_{abcd}(\gamma) &\Rightarrow \\ R_{\mu\nu\lambda\tau}(g) X_a^\mu X_b^\nu X_c^\lambda X_d^\tau &= \mathcal{R}_{abcd}(\gamma) - K_{ac}^i K_{ibc} + K_{ad}^i K_{jbc}^i; \\ R_{\mu\nu\lambda\tau}(g) X_a^\mu X_b^\nu X_c^\lambda n^{\tau i} &= \nabla_b K_{ac}^i - \nabla_a K_{bc}^i. \end{aligned}$$

Полученные формулы имеют различное применение, в частности при переходе к гамильтонову формализму.

Действие p-brane

Пока мы просто говорили о свойствах поверхностей, погруженных с коразмерностью D-q. Теперь перейдем к действию p-brane.

Индукцированная метрика у нас возникала как проекция метрики bulk. В действии удобно вводить независимую метрику на brane с тем, чтобы потом определять ее из уравнений движения:

$$\begin{aligned} S[X^\mu(\sigma), h_{ab}(\sigma)] &= -\frac{\mu_p}{2} \int \left(h^{ab} X_a^\mu X_b^\nu - (p-1) \right) \sqrt{|h|} d^{p+1} \sigma, \\ a &= 1 \dots p. \end{aligned}$$

$h_{ab}(\sigma)$ – неизвестная заранее метрика на мировом объеме браны, определяется из варьирования, $h = \det h_{ab}$, $(h_{ab}) = (h_{ab})^{-1}$.

Мы записали действие, которое дважды ковариантно – по метрике bulk и по индексам ab с помощью введения метрики, которую мы не задаем, она является аргументом действия. Это способ наложения связей с помощью лагранжевых множителей. Способ позволяет сделать действие квадратичным.

Будем независимо варьировать по $X^\mu(\sigma)$ и $h_{ab}(\sigma)$. h_{ab} – лагранжевый множитель, поскольку входит в действие без производных. Варьирование по нему будет определять связи:

$$\begin{aligned} h_{ab}(p-1 - h^{cd} \gamma_{cd}) + 2\gamma_{ab} &= 0, \\ h_{ab} &= \gamma_{ab} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\delta_{h_{ab}} S[X_a^\mu] = -\mu_p \int \sqrt{|\gamma(X_a^\mu)|} d^{p+1} \sigma -$$

формула Намбу-Гота. При $p = 0$ S – действие частицы. $\sqrt{|\gamma(X_a^\mu)|} d^{p+1} \sigma$ – мировой объем браны. Для $p=1$ – струна и $\sqrt{|\gamma(X_a^\mu)|} d^2 \sigma$ – мировой лист. Так, «минимизируется» мировой объем, действие частицы обобщается на произвольную брану, то есть на действие для протяженного объекта.

Общая идеология состоит в том, что нужно сделать действие общековариантным по двум метрикам. Это действие сводится к известной нам форме теории относительности.

Варьируя по X_a^μ без подстановки связей, можно получить уравнение движения:

$$\frac{1}{\sqrt{|h|}} \partial_a (\sqrt{|h|} h^{ab} X_b^\mu) + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(g) X_a^\nu X_b^\lambda h^{ab} = 0$$

$\frac{1}{\sqrt{|h|}} \partial_a (\sqrt{|h|} h^{ab} X_b^\mu) = \square(h_{ab}) X^\mu = \frac{1}{\sqrt{|h|}} \partial_a (\sqrt{|h|} h^{ab} \partial_b X^\mu)$ – ковариантный оператор Даламбера, X^μ – скаляр на бране. Это прямое обобщение того, что было бы, если индекс пробежал только одно значение, тогда мы бы получили уравнение для частицы в форме Полякова. Теперь же мы имеем ковариантное уравнение, которое не более чем квадратично по X^μ , однако пока не наложены связи. Можем продолжить решение без связей, наложив их в конце. Обобщение уравнения:

$$\frac{DX^\mu(\tau)}{d\tau} = 0.$$

Если $\sigma^a = \tau$, то *лагранжиан в форме Полякова*:

$$S_{Pol} = -\frac{m}{2} \int \left(\frac{1}{\sqrt{h_{11}}} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu g_{\mu\nu} + \sqrt{h_{11}} \right),$$

$$h_{11} = g_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu.$$

h_{11} можем выбрать, от этого будет зависеть параметризация:

$$h_{11} = 1 \leftrightarrow \tau = s \Rightarrow \dot{X}^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{DX^\mu}{ds} = 0.$$

Выбор h_{11} – репараметризация мировой линии. Варьирование по X приводит к уравнениям, в которые нужно подставить h .

Тензор энергии-импульса

Итак, мы получили обобщение уравнения движения частицы. На случай протяженного объекта. Случай частицы выделен тем, что это бесструктурный объект, не обладающий внутренней динамикой, то есть материальная точка не может вращаться или осциллировать. Здесь же принципиальная разница таких уравнений в том, что они представляют собой действие растянутой мыльной пленки. Вычислим тензор энергии-импульса как вариационную производную по $T^{\mu\nu}$. Выберем координаты $\sigma^a = x^a$, предположим, что брана покоится: $X^\mu = X_0^\mu + U_a^\mu \sigma^a$, $U_a^\mu = \delta_a^\mu$ является решением, индуцированная метрика на бране будет постоянной $\gamma_a = \eta_{ab}$.

$$T^{\mu\nu} = \mu \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \\ \hline & & & 0 \\ \text{мировой объем} & & & \\ & & & 0 \end{array} \right) = \{\tau_p \eta_{ab}, 0 \dots 0\} -$$

тензор энергии-импульса, η_{ab} – космологическая постоянная на бране. Плотность энергии единичная, давление экстремальное отрицательное (натяжение). Экстремальное натяжение означает возникновение колебаний браны при малейшем воздействии, то есть существует тенденция к образованию внутренних движений. В частности теория струн основана на том, что струна, раздвинутая из материальной точки, начинает осциллировать. Осцилляции дают внутреннюю систему полей в пространстве-времени.

Лоренц-инвариантность позволяет вводить протяженные объекты. Далее это обобщается на общую ковариантность на bran и на bulk. Все это совместимо с принципами как СТО, так и ОТО. Последняя брана (корузмерность 1) называется доменной стенкой.

Гравитационное поле такого объекта можно сосчитать в линеаризованной теории. Оказывается, что в зависимости от корузмерности браны они могут как притягиваться, так и отталкиваться. Если взять в четырехмерном пространстве две струны, то в линеаризованной теории они нейтральны, не взаимодействуют; две барабанные перепонки в таком пространстве отталкиваются; две материальные точки притягиваются. На этой идеологии построено много моделей.

Еще одно замечание: каждая такая поверхность имеет соответствующее поле формы, с которым ей желательно взаимодействовать, а именно форма ранга $p + 1$, где p – размерность браны. Действие для поля, которое взаимодействует с траекторией мировой линии:

$$\int_{S_{int}} A_\mu dx^\mu.$$

Поэтому электродинамика – теория точечных частиц. Четырехвектор A_μ можно интегрировать только вдоль кривой, в итоге получаем взаимодействие точечной частицы с векторным полем. Для двумерной поверхности ровно такой же смысл будет иметь интеграл:

$$\int_S B_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

Любая поверхность естественным образом порождает поле антисимметричной формы: $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$. А с другой стороны это естественный интеграл для внешнего поля. Для произвольной p -brane мы бы получили многоиндексное поле ранга $p+1$, где p – размерность браны.

В теории супергравитации возникает 3-форма, а в промежуточных измерениях все различные формы, допустимые данным измерением, как правило, встречаются. Они связаны с самой идеей взаимодействия с антисимметричными формами как объемного интеграла по мировой поверхности.



Лекция 10

Омбилические поверхности, поля

Теория p-brane

Мы рассматриваем пространство, являющееся многообразием размерности $D \leq 11$, при этом время одно. Первое с чего мы начали – обобщение частицы теорией кривых в пространстве-времени на p-brane. P-brane – это объекты, в которых есть два пространства: пространство x^μ (bulk) и мировой лист σ^a (brane) (рис. 10.1). Теория Bulk & Brane является платформой для теории струн и других многочисленных моделей.

В пространстве-времени задается функция погружения поверхности $X^\mu(\sigma^a)$ - параметрическое уравнение поверхности.

При дифференцировании получим следующее:

$$\partial_a X^\mu = X^\mu_{,a} -$$

Вектор в bulk, касательный к brane.

Также можно ввести векторы нормали n^i_μ . Их будет столько, сколько измерений остается в bulke помимо измерений brane: $D - (p + 1)$. Нормали будем предполагать ортогональными:

$$n^i_\mu n^{j\mu} = \delta^{ij}.$$

В совокупности векторы $\{X^\mu_{,a}, n^i_\mu\}$ образуют базис в bulk, по которому можно разложить любой вектор.

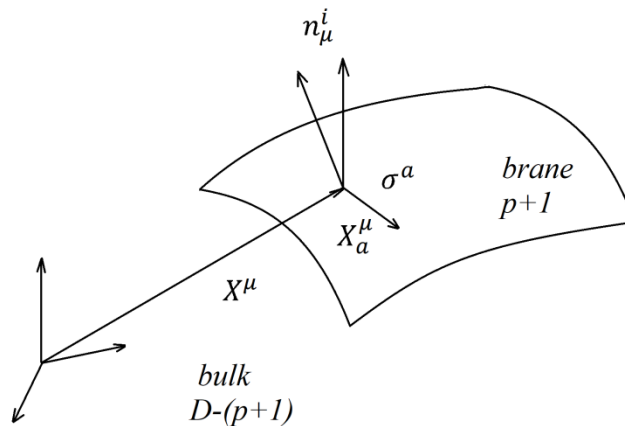


Рис. 10.1. Пространство x^μ (bulk) и мировой лист σ^a (brane) в теории Bulk & Brane.

Управляющее действие такой браны – обобщение действия частицы в форме с неразрешенными связями:

$$S[X^\mu, h_{ab}] = -\tau_p \int (g_{\mu\nu}(x) X_a^\mu X_b^\nu h^{ab}) \sqrt{|h|} d^{p+1}\sigma,$$

где h_{ab} – произвольная метрика, действие общековариантно по bulk и brane.

$$\delta_{h_{ab}} S = 0 \Rightarrow h_{ab} = \gamma_{ab} = g_{\mu\nu} X_a^\mu X_b^\nu -$$

индуцированная метрика. $\mathfrak{S}_{ab}^c = \left\{ \begin{smallmatrix} c \\ ab \end{smallmatrix} \right\}(\gamma)$ – метрическая связность.

$$\delta_{X^\mu} S = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{|h|}} \partial_a \left(\sqrt{|h|} h^{ab} \partial_b X^\mu \right) + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu X_a^\nu X_b^\lambda h^{ab} = 0 -$$

уравнение Намбу-Гота, уравнение движения браны, в которое можно подставить условие связи, $\frac{1}{\sqrt{|h|}} \partial_a \left(\sqrt{|h|} h^{ab} \partial_b X^\mu \right) = -\square_{p+1} X^\mu$ – оператор Даламбера, действующий на скаляр на бране.

$$\frac{1}{\sqrt{|h|}} \partial_a \left(\sqrt{|h|} h^{ab} \partial_b X^\mu \right) = [h_{ab} = \gamma_{ab}] = X_{b|a}^\mu \gamma^{ab}$$

Индекс | заменяет ; для bulk: $\nabla_a X^\mu = X_{|a}^\mu$.

Полная ковариантная производная:

$$\overset{tot}{\nabla}_\lambda X_a^\mu = \partial_\lambda X_a^\mu - \mathfrak{S}_{ac}^b X_b^\mu X_\lambda^c + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu X_a^\nu = X_{a|c}^\mu X_\lambda^c + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu.$$

Уравнение движения браны можно переписать в виде полных ковариантных производных:

$$\nabla^a \nabla_a X^\mu \equiv \nabla^a X_a^\mu = 0 \Rightarrow$$

$$p = 0: \frac{D}{d\tau} \dot{X}^\mu = 0.$$

Кроме того, интересна связь с внешней кривизной. На прошлой лекции мы ввели вторую квадратичную форму:

$$K_{ab}^i = -n_{\mu;\nu}^i X_a^\mu X_b^\nu,$$

$$K^i = K_{ab}^i \gamma^{ab}.$$

Для прямой: $K_{\tau\tau}^i = K^i$ – **кривизны Френе-Серре**. Уравнение прямой состоит в том, что все кривизны Френе-Серре равны нулю. Предварительно докажем, что полная ковариантная производная векторов, касательных к бране дает величины, ортогональные бране, то есть проектируются на нормаль.

$$\nabla_b X_a^\mu X_c^\nu g_{\mu\nu} = 0$$

Покажем, что вектор в bulk $\nabla_b X_a^\mu$ ортогонален всем X_c^ν .

$$\begin{aligned} \gamma_{ab} &= g_{\mu\nu} X_a^\mu X_b^\nu; \\ \nabla_c \gamma_{ab} &\equiv \gamma_{ab|c} = 0. \end{aligned} \quad (*)$$

Так как \mathfrak{S} – метрическая. В определение внешней кривизны входит ковариантная производная по bulk, распишем ее более подробно:

$$\begin{aligned} n_\mu^i X_a^\mu &= 0 \quad \forall i. \\ n_{\mu,b}^i &= n_{\mu,b}^i X_b^\nu = n_{\mu;b}^i X_b^\nu + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda X_b^\nu n_\lambda^i \Rightarrow \\ n_{\mu,\lambda}^i X_a^\mu &= -n_\mu^i \partial_\lambda X_a^\mu. \\ K_{ab}^i &= \nabla_b X_a^\mu n_\mu^i - \end{aligned}$$

второе определение внешней кривизны.

$$(\nabla_c X_a^\mu) g_{\mu\nu} X_b^\nu + X_a^\mu (\nabla_c X_b^\nu) g_{\mu\nu} + X_a^\mu X_b^\nu g_{\mu\nu;\lambda} X_c^\lambda = 0 -$$

Эквивалентно уравнению (*).

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu;\lambda} &= 0 \Rightarrow \\ (\nabla_c X_a^\mu) g_{\mu\nu} X_b^\nu &= 0 \text{ и } X_a^\mu (\nabla_c X_b^\nu) g_{\mu\nu} = 0. \\ \nabla_c X_a^\mu &- \text{векторы bulk, } \nabla_c X_a^\mu \perp X_b^\nu \Rightarrow \\ \nabla_c X_a^\mu &= B_{ab}^i n_\mu^i. \\ K_{ab}^i &= \nabla_a X_b^\mu n_\mu^i \Rightarrow K_{ab}^i = B_{ab}^i. \end{aligned}$$

Вспомним уравнение Намбу-Гота:

$$\gamma^{ab} \nabla_a X_b^\mu = 0 \Leftrightarrow K^i = 0 \quad \forall i,$$

то есть все кривизны обращаются в ноль. В некотором смысле мы имеем дело с плоской поверхностью, однако в ней есть внутренняя динамика. То же самое работает для прямых.

Итак, мы рассмотрели другой подход к геодезическим и поверхностям. Поверхность, которую заматает брана, подобна геодезической линии, поскольку все внешние кривизны нулевые.

Омбилические поверхности

С помощью тензора кривизны мы нашли другую форму уравнений минимальных поверхностей, в частности геодезических. Кроме того есть еще такие поверхности в коразмерности $i=1$, для которых:

$$K_{ab} = \lambda \gamma_{ab},$$

$$\gamma_b^a = D - 1 \Rightarrow$$

$$K_{ab} = \lambda \gamma_{ab} = \frac{K}{D - 1} \gamma_{ab}, \quad \text{где}$$

$$K = \gamma^{ab} K_{ab}.$$

Такие поверхности называются *омбилическими в пространстве-времени*. При запуске света вдоль омбилической поверхности, он живет там всегда. То есть это замкнутые фотонные поверхности. Простейший пример омбилической поверхности – сфера в метрике Шварцшильда радиуса $r_0 = \frac{3}{2} r_g$ (рис. 10.2). Когда фотон попадает в окрестность поверхности сферы в метрике Шварцшильда, то он начинает навиваться вокруг поверхности многократно, после чего уходит. Если фотон послан ровно на поверхность, то он падает на дыру. Это имеет отношение к тени черных дыр - омбилические поверхности определяют форму тени.

То есть изображения с телескопа на самом деле не являются изображениями горизонта событий, а являются изображениями фотонной поверхности. Черная дыра подсвечивается снаружи, лучи рассеиваются и попадают к нам и могут быть зарегистрированы. А сама по себе область между r_g и $\frac{3}{2} r_g$ вполне достижима в обе стороны.

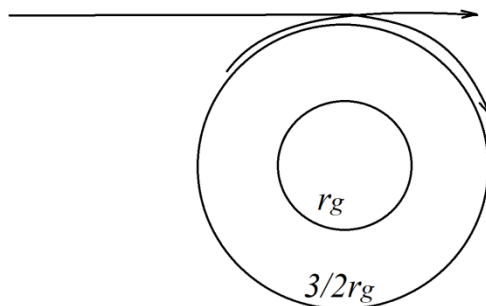


Рис. 10.2. Простейший пример омбилической поверхности – сфера в метрике Шварцшильда радиуса $r_0 = \frac{3}{2} r_g$.

Поля

Перейдем к другим видам материи. Мы доходим до ситуации, где брана уже все пространство и переходим к теории поля.

Скалярное поле

В теории поля лагранжианы тоже связаны с теорией бран. Например, если мы рассмотрим скалярное поле, то действие обычно записывается следующим образом:

$$S = \frac{1}{2} \int (\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi g^{\mu\nu} - V(\varphi)) \sqrt{-g} d^D x,$$

$$V(\varphi) = m^2 \varphi^2 + \dots$$

Записанное существует в произвольной размерности D . Это то, что мы называем минимальным скалярным полем. Можем переписать действие, используя ковариантные производные:

$$\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi g^{\mu\nu} = \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi g^{\mu\nu}.$$

Потенциал положим равным нулю:

$$V(\varphi) = 0.$$

Вариация уравнения приводит к:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) = 0 -$$

Ковариантный оператор Даламбера: $\nabla_\mu \nabla^\mu \varphi = -\square \varphi = 0$.

Скалярные поля в гравитации часто играют роль не материи, а дополнительных компонент самого гравитационного поля. Более интересными являются не минимальные теории.

Если для скалярного поля ввести взаимодействие с частицей (бранной), то возникает теория с переменной массой. Действие в элементарном изображении:

$$S = - \int (m + g\varphi) ds.$$

Поле Максвелла

Согласно принципу эквивалентности сохраняем запись действия:

$$S = - \frac{1}{16\pi} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4 x - \int A_\mu j^\mu \sqrt{-g} d^4 x.$$

Варьирование этого действия приводит к ковариантным уравнениям:

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = -4\pi j^\mu.$$

Минимальное взаимодействие означает, что мы заменили частные производные на ковариантные. Нюанс состоит в том, что выражение для вектор-потенциала содержит тензор Риччи в лоренцевой калибровке:

$$j = 0;$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 = \partial_\nu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu).$$

В плоском пространстве:

$$\partial_\nu \partial^\mu A^\nu = \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 0; \quad \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \square A^\mu.$$

В криволинейном пространстве:

$$\begin{aligned} \nabla_\nu (\nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu A^\mu) &= 0; \\ [\nabla_\nu \nabla_\mu] A^\nu &= -R_{\lambda\nu\mu}^\nu A^\lambda = -R_\lambda^\mu A^\lambda \Rightarrow \\ \nabla_\nu \nabla^\mu A^\nu &= -R_{\lambda\nu}^{\nu\mu} A^\lambda \Rightarrow \\ \square A^\mu &= R_\lambda^\mu A^\lambda. \end{aligned}$$

Это можно принять как факт «неминимальности» взаимодействия.

Если пространство Риччи плоское $R_{\mu\nu} = 0$ и K_μ – вектор Киллинга ($K_{\mu;\nu} = -K_{\nu;\mu}$) существует, то:

$$\begin{aligned} K_{\mu;\nu} g^{\mu\nu} &= 0, \\ \nabla_\mu K^\mu &= 0 - \end{aligned}$$

поле имеет нулевую дивергенцию. При коммутации:

$$\begin{aligned} \square K^\mu &= -R_\lambda^\mu K^\lambda = 0 - \text{уравнение Максвелла} \Rightarrow \\ K^\mu &= A^\mu. \end{aligned}$$

Так, вектор Киллинга одновременно порождает вектор-потенциал, решение уравнений Максвелла в этом поле.

В метрике Шварцшильда:

$$\begin{aligned} \hat{K} = \partial_t &\rightarrow K^\mu = (1, 0, 0, 0), \\ \hat{K} = \partial_\varphi &\rightarrow A_\varphi. \end{aligned}$$

Отождествляя с векторами Киллинга в Риччи-плоском пространстве решения уравнений Максвелла, мы получаем нетривиальный вектор-потенциал, который порождает характерную для этого поля конфигурацию электромагнитных полей. В частности одним из них является однородное магнитное поле. Это востребовано, потому как в окрестности черных дыр магнитные поля есть, в некоторых случаях их можно аппроксимировать как однородные. Эти поля порождаются токами в плазме.

Еще одно приложение векторов Киллинга мы уже упомянули, антисимметрия, которая здесь проявляется, делает его в некотором смысле аналогичным $F^{\mu\nu}$. Если для такого тензора вычислять потоки через двумерные поверхности, то получается теорема Гаусса. Разность двух потоков между поверхностями будет выражаться как тензор Риччи внутри, а тензор Риччи – это материя.

Поля антисимметричных форм

Нас интересуют классические виды материи, поэтому дальше идут поля антисимметричных форм. Так как у нас есть поверхности, уравнения Максвелла взаимодействуют в классической теории с точечными зарядами, то есть с мировой линией частицы, а поля антисимметричных форм взаимодействуют с мировыми поверхностями бран. Поэтому прямое обобщение записанного действия для бран будет выглядеть очень просто:

$$\begin{aligned} S[A_{p+1}, X_{a=p+1}^\mu] &= -\frac{1}{2} \int_{M_D} F_{p+2} \wedge * F_{p+2} - q \int_{Brane} A_{[p+1]} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(p+2)!} \int F_{\mu_1 \dots \mu_{p+2}} F^{\dots} \sqrt{-g} d^D x - \\ &- \frac{q}{(p+1)!} \int A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} X_{a_1}^{\mu_1} \dots X_{a_{p+1}}^{\mu_{p+1}} d\sigma^{a_1} \wedge \dots \wedge d\sigma^{a_{p+1}}, \text{ где} \end{aligned}$$

$F_{p+2} = dA_{p+1}$, $\int_{Brane} A_{[p+1]}$ не зависит от метрики.

Для уравнений Максвелла интеграл также не зависит от метрики:

$$\begin{aligned} \int A_\mu dx^\mu &= \int A_\mu U^\mu \delta^D(x - x(\tau)) d\tau d^D x, \\ U^\mu &= \frac{dx^\mu}{d\tau}. \end{aligned}$$

Полезно помнить, что все интегралы взаимодействия антисимметричных форм с поверхностями, в том числе и для частицы, зависят от метрики.

$$\begin{aligned} \frac{q}{(p+1)!} \int A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} X_{a_1}^{\mu_1} \dots X_{a_{p+1}}^{\mu_{p+1}} d\sigma^{a_1} \wedge \dots \wedge d\sigma^{a_{p+1}} &= \\ = \frac{1}{(p+1)!} \int A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} J^{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} \sqrt{-g} d^D x, \\ J^{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} &= q \int X_{a_1}^{[\mu_1} \dots X_{a_{p+1}}^{\mu_{p+1}]} \frac{\delta^D(x - X)}{\sqrt{-g}} \sqrt{-h} d^{p+1} \sigma \Rightarrow \end{aligned}$$

Получаем уравнение:

$$\nabla_\mu F^{\mu\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = J^{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}.$$

Видна полная аналогия с теорией Максвелла для всех полей антисимметричных форм, взаимодействующих с поверхностями.

Лекция 11

Линейная теория Фирца-Паули

Замечание к общим свойствам действия р-бран

Вернемся к р-бранам, разберем момент, который упустили при просмотрении. Для браны есть нормаль и касательные векторы. Действие Полякова записывается следующим образом:

$$S_{Pol}(X^\mu, h_{ab}) = -\frac{\mu_p}{2} \int \left(h^{ab} g_{\mu\nu} X_a^\mu X_b^\nu - (p-1) \right) \sqrt{-h} d^{p+1}\sigma,$$

где $X_a^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^a}$, рассматриваемые браны безмассовы. Это действие имеет симметрию относительно преобразований:

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'}(x);$$

$$\sigma^a \rightarrow \sigma^{a'}(\sigma).$$

Особый случай: $p=1$ – струна \Rightarrow зависимость от метрики на мировом листе сводится к $h^{ab}\sqrt{-h}$, $2dim$ и остается инвариантной при конформном преобразовании метрики:

$$h^{ab}\sqrt{-h} \rightarrow h^{ab}\sqrt{-h};$$

$$h_{ab} = \Omega(\sigma)h_{ab}.$$

Это приводит к тому, что симметрия на мировом листе становится бесконечномерной. Именно с этим связана выделенная роль теории струн, которая лучше теории частиц. Конформная симметрия обуславливает конечность теории струн.

Варьирование действия по h_{ab} $\delta_{h_{ab}}S$ приводит к уравнению:

$$h_{ab} = \gamma_{ab} = g_{\mu\nu} X_a^\mu X_b^\nu \Rightarrow$$

$$S \rightarrow S_{NG} = -\mu_p \int \sqrt{-\gamma} d^{p+1}\sigma -$$

действие в форме Намбу-Готта.

Еще одно замечание касается того, что введение лагранжевого множителя явно обеспечивает инвариантность относительно репараметризации. Обратим внимание на то, что в случае частицы это тоже полезная запись. В этом случае метрика одномерна и содержит одну компоненту h . Интересно, что при обеспечении инвариантности действия относительно репараметризации на мировом листе (для частицы – линии), то канонический гамильтониан нулевой – можно перейти к Гамильтонову формализму.

Мы переходим к Гамильтонову формализму для частицы обычно в трехмерном смысле, то есть независимыми переменными являются три компоненты пространственного импульса. Но можно это сделать и в четырехмерном виде:

$$S_{p=0}[h, x^\mu(\lambda)] = -\frac{1}{2} \int \left(h^{-1} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + hm^2 \right) d\lambda \Rightarrow$$

$$\delta_h S = 0 \Rightarrow$$

$$(hm)^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} -$$

поверхность связей.

$$\lambda \rightarrow \lambda'(\lambda) \rightarrow h(\lambda).$$

$h(\lambda)$ – функция, которая ответственна за репараметризацию.

$$\delta_{x^\mu} S = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(h^{-1} \frac{dx^\nu}{d\lambda} g_{\mu\nu}(x) \right) \Big|_{x(s)} = \frac{1}{2} h^{-1} g_{\alpha\beta,\mu} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}.$$

$$\text{fix: } \lambda = s \Rightarrow h^{-1} = m \Rightarrow$$

$$1 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \Rightarrow$$

Касательный вектор в аффинной параметризации является единичным.

Кроме того, записанное действие вполне годится при массе равной нулю:

$$m = 0: g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, h - \text{неопред.} \Rightarrow$$

h – параметр, заменяющий массу для безмассовой частицы, можно связать его с энергией этой частицы. В этом случае h будет параметром, определяемым траекторией, энергией фотона на этой траектории.

Перейдем к Гамильтонову формализму в четырехмерном виде. Обобщенный импульс:

$$P_\mu = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = h^{-1} g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu.$$

Гамильтониан:

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \dot{x}^\mu - L = \frac{h}{2} (m^2 - g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu).$$

На поверхности связей (в гамильтоновом формализме – поверхность в фазовом пространстве) получим следующее:

$$H = 0.$$

Здесь использована репараметризационная инвариантность одномерной теории. То же самое получается и для струн. Более того то же самое получается для теории относительности в целом, потому что эта теория репараметризационно инвариантна относительно преобразований метрик. В итоге, при построении канонического формализма, то есть при определении функциональных величин, и переходе к гамильтониану, на поверхности связей гамильтониан обращается в ноль. Это является основой так называемого гамильтонова квантования, которое успешно применяется в квантовой космологии.

Еще одно интересное свойство бран заключается в том, что тензор энергии-импульса можно понимать как тензор именно механической браны в bulk. То есть нужно вычислять производную по метрике $g_{\mu\nu}$. В таком случае мы получаем тензор энергии-импульса, похожий на тензор частицы, но не с одной компонентой, а целым пространственно-временным сектором на мировом листе. Тензор пропорционален метрике на мировом листе. Так, мы получаем что-то похожее на отрицательное давление, если сравнивать с космологическими решениями. И мы ожидаем, что в зависимости от p брана может создавать как притяжение, так и отталкивание. Чтобы это показать, мы перейдем к следующему разделу и начнем обсуждение самого гравитационного поля с линеаризованной теорией. Это интересно как с точки зрения общей идеологии, так и технически. Оказывается, что гравитационное действие не линейно и его можно записать в виде, близком к линейной теории, если выбрать правильные переменные. И таким образом можно обобщить линейную теорию до нелинейной. Линеаризованная теория будет нужна, потому что в ней мы можем определять гравитационное поле таких сингулярных источников как p -brane. Для p -brane решить уравнение общего вида невозможно, потому что для тензора энергии-импульса получим δ – функцию. В линеаризованной теории мы можем работать с δ – функциями. При этом в нелинейной теории солитон, построенный из метрики, (нелинейное образование, обладающее свойством частиц) переходит в черную дыру. P brane имеют аналогичные нелинейные решения – солитонные браны, образованные из непрерывной материи, то есть из метрики. При квантовании интересны механические браны. Квантование точечной частицы – теория поля. При квантовании струны точечные частицы получаются как концы струны. Они движутся вдоль мировых линий. И на самом деле то, что мы называем точечной частицей, это то, что прочерчивают концы струн. В итоге на основании квантовой теории струн можно построить квантовую теорию поля для концов открытых струн. Этот подход ведет к тому, что называется голографией, когда удастся получить аналитические методы для сильной связи.

Линейная теория Фирца-Паули

Перейдем к линейной теории. Такая теория на самом деле предлагалась позже, чем теория относительности Эйнштейна, и является линейным приближением теории относительности. С другой стороны ее можно сформулировать из общих принципов в пространстве Минковского. Это было сделано в 30-е годы Фирцем и Паули.

Теория Фирца-Паули основывается на выборе тензора второго ранга, симметричного, вещественного как переменной поля. По аналогии с электродинамикой необходимо предусмотреть калибровочную симметрию, которая будет исключать лишние компоненты. По сути, мы хотим построить теорию безмассового поля спина 2, в которой 10 независимых компонент. Калибровочные преобразования:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + b_{\mu\nu},$$

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu, \xi^\mu \ll 1 \Rightarrow$$

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu.$$

Дважды применяя преобразования, мы сможем устранить 8 из 10 компонент. Это бесконечно малое преобразование диффеоморфизма для полной метрики, если теорию Фирца-Паули мы понимаем как линеаризацию общей теории относительности.

Теперь удобно ввести другое поле в пространстве Минковского:

$$\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h,$$

$$h = h^\alpha_\alpha.$$

$\psi_{\mu\nu}$ — trace reversed field. Для этого поля преобразование легко получить, выписывать его не будем.

Одно из отличий от электродинамики: нет аналога $F_{\mu\nu}$, выражающегося через первые производные метрики. $F_{\mu\nu}$ — калибровочно инвариантный тензор в электродинамике.

Здесь инвариантным тензором был бы тензор Римана-Кристоффеля, выражающийся через вторые производные метрики. Поэтому мы либо имеем теорию с высшими производными, либо получим квадратичную теорию. Поэтому требование инвариантности распространяется только на уравнения движения, а действие будет меняться. Кроме того будет меняться соответствующий полю тензор энергии-импульса, и само введение действия становится проблематичным.

Лагранжиан в теории Фирца-Паули

Тем не менее, Фирц и Паули предложили лагранжиан, который оставляет инвариантными уравнения движения, а сам по себе меняется. Допустимое действие Фирца-Паули записывается следующим образом:

$$\mathcal{L}_{FP} = \frac{1}{4} \left(\psi_{\mu\nu,\lambda} \psi^{\mu\nu,\lambda} - 2\psi_{\mu\nu,\lambda} \psi^{\mu\lambda,\nu} - \frac{1}{2} \psi_{,\lambda} \psi^{,\lambda} \right).$$

Калибровочное преобразование:

$$\mathcal{L}_{FP} \xrightarrow{\xi} \mathcal{L}_{FP} + \partial_\mu V^\mu + O(\xi^2) \Rightarrow$$

уравнения движения инвариантны по ξ .

$$\psi_{,\lambda}^{\mu\nu,\lambda} - \psi_{,\lambda}^{\mu\lambda,\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \psi_{,\lambda}^{\lambda} = 0.$$

С помощью преобразований ξ можно выбрать калибровочное условие:

$$\begin{aligned} \text{Выбор } \xi: \quad \partial_\nu \psi^{\mu\nu} = 0, \quad \square = -\partial^2 \Rightarrow \\ \square \psi^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \square \psi = 0 \Rightarrow \\ \square \psi^{\mu\nu} = 0. \end{aligned}$$

Так, мы имеем *свободные гравитационные волны в линеаризованной теории*.

Канонический тензор энергии-импульса

Далее мы можем построить для этой теории канонический тензор энергии-импульса:

$$\begin{aligned} t_\mu^v = \psi_{\alpha\beta,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_{FP}}{\partial \psi_{\alpha\beta,\nu}} - \delta_\mu^v \mathcal{L}_{FP}, \\ t_{\mu\nu} \neq t_{\nu\mu}. \end{aligned}$$

Из уравнений Лагранжа:

$$\begin{aligned} \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_{FP}}{\partial \psi_{\alpha\beta,\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}_{FP}}{\partial \psi_{\alpha\beta,\nu}} = 0 \Rightarrow \\ \partial_\nu t_\mu^v = 0. \end{aligned}$$

Явный вид тензора:

$$t_\mu^v = \frac{1}{2} \psi_{\alpha\beta,\mu} (\psi^{\alpha\beta,\nu} - 2\psi^{\alpha\nu,\beta}) - \frac{1}{4} \psi_{,\mu} \psi^{,\nu} - \delta_\mu^v \mathcal{L}_{FP}.$$

Этот тензор не инвариантен относительно калибровочных преобразований, но меняется следующим образом:

$$t_\mu^v \xrightarrow{\xi} t_\mu^v + \delta t_\mu^v + O(\xi^2),$$

$$\partial_\nu \delta t_\mu^\nu = 0.$$

Вспомним, что цель использования тензора энергии-импульса состоит в том, чтобы взять мировую трубку и доказать следующее: если на боковой поверхности все равно нулю, то сохраняется поток через верхнюю и нижнюю поверхности, не зависит от времени. При калибровочных преобразованиях импульс не меняется:

$$P^\mu = \int t_\mu^0 \frac{d^3x}{ds_\nu}$$

определен в линейном порядке по ξ .

Калибровочные преобразования

Дальше мы можем стандартным образом разложить поле в интеграл Фурье, поскольку пространство плоское.

$$\square \psi_{\mu\nu} = 0,$$

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{k}} \left(e^{-ik_\lambda x^\lambda} \psi^{\mu\nu}(\vec{k}) + e^{ik_\lambda x^\lambda} \psi^{\mu\nu*}(\vec{k}) \right) \Big|_{k^0 = |\vec{k}|},$$

$$k = |\vec{k}| = k_0.$$

1) Первое калибровочное условие:

$$\partial_\nu \psi^{\mu\nu} = 0,$$

$$\frac{k^i}{k} = n^i,$$

$$\psi^{0i}(\vec{k}) = n^j \psi^{ij}(\vec{k}),$$

$$\psi^{00} = n^i \psi^{0i} = n^i n^j \psi^{ij}.$$

2) Второе калибровочное условие:

$$\square \xi_\mu = 0 \rightarrow \tilde{\xi}_\mu(\vec{k}),$$

$$\delta_{ij} = n_i n_j + e_i^\theta e_j^\theta + e_i^\varphi e_j^\varphi, \text{ где}$$

$$[\vec{e}^\theta \times \vec{n}] = \vec{e}^\varphi \text{ в пространстве } \vec{k} \Rightarrow$$

$$\psi_{ij}(\vec{k}) \rightarrow \psi'_{ij}(\vec{k}') + 2ik_{(i} \xi_{j)} \Rightarrow$$

$$e_{ij}^\oplus = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_i^\theta e_j^\theta - e_i^\varphi e_j^\varphi),$$

$$e_{ij}^{\otimes} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^{\theta} e_j^{\varphi} + e_i^{\varphi} e_j^{\theta}).$$

$e_{ij}^{\oplus}, e_{ij}^{\otimes}$ инвариантны относительно двойных калибровочных преобразований, описывают гравитационные волны двух поляризаций. Остальные компоненты кроме этих двух – нулевые.

Интересное тождество из условия полноты:

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j = \sum e_i^P e_j^P,$$

$$P = Pol = \theta, \varphi.$$

Дальше мы хотим ввести четырехиндексный проектор. Подставим разложение Фурье в формулу канонического тензора и вычислить полный P_{μ} .

$$P_{\mu} = \int t_{\mu}^0 d^3x = \int k_{\mu} \sum |\psi^{Pol}(\vec{k})|^2 d^3k,$$

$$k_0 = |k|, \quad Pol = \oplus \otimes \text{ либо } (\pm),$$

из e_{ij}^{\oplus} и e_{ij}^{\otimes} можно построить аналог круговых поляризаций:

$$\frac{e_{ij}^{\oplus} \pm i e_{ij}^{\otimes}}{\sqrt{2}} = e^{\pm}.$$

С помощью условия полноты можно раскрыть выражение для P_{μ} :

$$P_{\mu} = \int k_{\mu} \psi_{ij}(\vec{k}) \psi_{kl}^*(\vec{k}) \Lambda^{ijkl} d^3k,$$

$\Lambda^{ijkl} = \frac{1}{2}(\Delta^{ik} \Delta^{jl} + \Delta^{il} \Delta^{jk} - \Delta^{ij} \Delta^{kl})$ – четырехиндексный проектор,

$$\Delta \cdot k = 0, \quad k = (k^0, \vec{k}),$$

$$\Delta \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{k} = (k^0, -\vec{k}).$$

Мы выбрали систему координат, выбрав калибровку. Используем преобразования Лоренца, чтобы перейти к более общему виду. Запись в Лоренц-ковариантной форме:

$$P_{\mu} = \int k_{\mu} \psi_{\alpha\beta}(\vec{k}) \psi_{\gamma\delta}^*(\vec{k}) \Lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} d^3k,$$

$$\Lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\delta} \eta^{\beta\gamma} - \eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta}) + \text{продольные члены} \sim K^{\alpha} \dots$$

Аналогично мы делали в электродинамике при переходе в калибровку Лоренца.

Обычно нас будет интересовать свертка этих величин. Это дает определить пропагатор для такого поля и взаимодействие с внешним током. При этом все продольные члены зануляются:

$$K^\alpha \psi_{\alpha\beta}(k) = 0.$$

Понятие спина на классическом уровне

Зачем мы ввели круговые поляризации? Они позволяют вытащить спиральность при разложении. На самом деле квантование здесь вполне уместно, квантование свободного поля тривиально и сведется к тому, что амплитуды $\psi^{\mu\nu}(\vec{k})$ заменятся на операторы рождения и уничтожения допустимых дважды поперечных мод. Но понять, что такое спин, мы можем и на классическом уровне. Для этого необходимо произвести преобразование вращения и посмотреть, как само поле меняется при преобразованиях поворота.

Преобразование вращения:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu,$$

$$\varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}.$$

$$\psi_{\alpha\beta} \rightarrow \psi_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta\mu\nu}^{\gamma\rho} \psi_{\gamma\rho} \varepsilon^{\mu\nu} \Rightarrow$$

$$A_{\alpha\beta\mu\nu}^{\gamma\rho} = 2\delta_\alpha^\gamma \delta_{[\nu}^\rho \eta_{\beta\mu]} + 2\delta_\beta^\rho \delta_{[\nu}^\gamma \eta_{\alpha\mu]} -$$

матрица поворота для тензора второго ранга.

Спин – та добавка, которую нужна в законе сохранения при подставлении канонического тензора в орбитальную часть. Мы ищем сохраняющийся трехиндексный тензор:

$$M_{\mu\nu}^\lambda = -M_{\nu\mu}^\lambda,$$

$$\partial_\lambda M_{\mu\nu}^\lambda = 0: M_{\mu\nu}^\lambda = x_\nu \overset{can}{t_\mu^\lambda} - x_\mu \overset{can}{t_\nu^\lambda} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\alpha\beta,\lambda}} A_{\alpha\beta\mu\nu}^{\gamma\rho} \psi_{\gamma\rho} = M_{\mu\nu}^\lambda + S_{\mu\nu}^\lambda.$$

Орбитальный момент нас не интересует. Спиновый рассмотрим отдельно. Легко проверить, что в силу определений канонического тензора, вида добавки и прочего из уравнений движения Эйлера-Лагранжа будет следовать закон сохранения для полного момента.

Проделав все операции и перейдя в систему отсчета, где мы все обнулили, будем вычислять:

$$S_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \int S_{jk}^0 d^3x = 2 \int n_i (|\psi^{(+)}(\vec{k})|^2 - |\psi^{(-)}(\vec{k})|^2) d^3k.$$

Это означает, что мы так хорошо подобрали амплитуды, что они соответствуют единичной частице, у которой проекции спина на n равна $+$ или -2 . $|\psi^{(+)}(\vec{k})|^2$ – число частиц с правой спиральностью, $|\psi^{(-)}(\vec{k})|^2$ – число частиц с левой спиральностью. Нормировка определена тем, что мы хорошо записали P_μ с единичными коэффициентами

Квантование полей

Как производится квантование на уровне выбранной калибровки свободного поля? На самом деле это то же самое, что и квантование системы двух скалярных полей – оно соответствует поляризации \oplus , другое \otimes . По сути это две независимых скалярных моды, к которым свелся весь тензор.

$$\psi^{\alpha\beta}(x) \rightarrow \hat{\psi}^{\alpha\beta}(x),$$

$$\psi^P(\vec{k}) \rightarrow \hat{a}_P(\vec{k}) \text{ – оператор уничтожения,}$$

$$\psi^{P*}(\vec{k}) \rightarrow \hat{a}_P^+(\vec{k}) \text{ – оператор рождения.}$$

Проверяется то, что оператор поля $\hat{\psi}^{\alpha\beta}(x)$ должен удовлетворять Гейзенберговскому уравнению:

$$\partial_\mu \hat{\psi}^{\alpha\beta} = i[\hat{P}_\mu, \hat{\psi}^{\alpha\beta}].$$

На самом деле вторичное квантование сведется на замену амплитуд на операторы рождения и уничтожения.

$$\hat{P}_\mu = \frac{1}{2} \int \sum_P (a_P^+(\vec{k}) a_P(\vec{k}) + a_P(\vec{k}) a_P^+(\vec{k})) k_\mu d^3\vec{k},$$

$$S_i = 2 \int n_i (a^{(+)+} a^{(+)} - a^{(-)+} a^{(-)}) d^3\vec{k}.$$

Наше квантование уже с наложенными калибровочными условиями заведомо годится только для свободной теории. Но позволяет кое-что сказать и на счет взаимодействующей теории. В частности отсюда можно начать развивать теорию возмущений.

Дальше хотим ввести взаимодействие. На классическом уровне лагранжиан взаимодействия можно записать по аналогии с электродинамикой произведение поля на тензорный ток:

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\kappa}{2} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu},$$

$$\kappa^2 = 16\pi G_N.$$

Эта форма следует из определения тензора энергии-импульса в Эйнштейновской теории при ее линеаризации.

Если $T^{\mu\nu}$ сохраняется в плоском смысле:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0,$$

тогда калибровочные преобразования допустимы:

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \xi \dots$$

Уравнения движения:

$$\square \psi^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu},$$

$$\square h^{\mu\nu} = \kappa \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{D-2} \eta^{\mu\nu} T \right).$$

С помощью такой теории мы сможем сосчитать взаимодействие двух объектов. Если объекты покоятся, не возбуждены, то можно ввести потенциал взаимодействия по аналогии с механикой.

Лекция 12

Взаимодействие с частицей. Действие Эйнштейна-Гильберта

Взаимодействие браны с точечной частицей

Мы хотели показать, каким образом гравитационное поле p-brane действует на частицу. Пусть частица находится на некотором расстоянии от p-brane. Тензор энергии-импульса brane:

$$T = \mu \int X_a^\mu X_b^\nu h^{ab} \frac{\delta^D(x - X(\sigma))}{\sqrt{-g}} \sqrt{-h} d^{p+1}\sigma.$$

Взаимодействие с гравитационным током:

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\kappa}{2} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}.$$

Если brane не возбужденная, то можем решить задачу точно.

Можно ввести функцию Грина:

$$X^\mu = X_0^\mu + U_a^\mu \sigma^a, \quad X_0^\mu = const, U_a^\mu = const.$$

Уравнение Намбу-Готта для браны – уравнение второго порядка. Поэтому X^μ – возможное решение уравнения НГ.

Если выбрать на бране координаты σ^a , $a = 0, \dots, p$, то можем выбрать $x^a = \sigma^a$ в секторе, где лежит брана. Тогда $U_a^\mu = \delta_a^\mu$. Индуцированная метрика после подстановки решений уравнений связи:

$$h_{ab} = \gamma_{ab} = g_{\mu\nu} U_a^\mu U_b^\nu.$$

Тензор энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu} = \mu \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & -1 & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^{\tilde{a}}(\vec{y}).$$

Определим, какое поле будет создавать такой тензор энергии-импульса, то есть каково будет решение уравнения Даламбера:

$$\square \psi^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}.$$

Зависимости от времени нет, поэтому:

$$\square = \Delta,$$

$$\vec{y} \in \mathbb{R}^{\tilde{d}},$$

$\tilde{d} = D - (p + 1)$ – коразмерность браны.

$$\frac{\partial}{\partial \vec{y}} \frac{\partial}{\partial \vec{y}} G_{\tilde{d}}(\vec{y} - \vec{y}') = \delta^{\tilde{d}}(\vec{y} - \vec{y}') \Rightarrow$$

$$\tilde{d} = 1 \text{ – доменная стенка: } G_1 = \frac{1}{2} |y - y'|$$

$$\tilde{d} = 2: G_2 = -\frac{1}{2\pi} \ln |\vec{y} - \vec{y}'|;$$

$$\tilde{d} \geq 3: G_{\tilde{d}} = -\frac{1}{(\tilde{d} - 2)\Omega_{\tilde{d}}} \frac{1}{|\vec{y} - \vec{y}'|^{\tilde{d}-2}} \text{ – кулоновский потенциал.}$$

$$\psi^{\mu\nu}(y) = \int G(\vec{y} - \vec{y}') T^{\mu\nu} d^{\tilde{d}}\vec{y}'.$$

Применим формулу взаимодействия с точечной частицей:

$$h^{\mu\nu} = \psi^{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{D - 2} \psi,$$

$$\psi^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h.$$

Действие для взаимодействия точечной частицы можно привести к виду ньютоновского лагранжиана:

$$S_{int} = -\frac{\kappa}{2} \int h_{\mu\nu}(\vec{y}) T^{\mu\nu}(y) d^D x = \int_{\text{Newton}} U dt.$$

В результате для потенциала взаимодействия получим:

$$U(\vec{y}) = \frac{\kappa^2 \mu_p}{2} \frac{\tilde{d} - 2}{D - 2} G_{\tilde{d}}(\vec{y}).$$

Сила воздействия браны на точечную частицу:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = \begin{cases} \frac{y}{|y|} \text{ – отталкивание,} & \tilde{d} = 1 \\ 0 \text{ – взаимодействия нет,} & \tilde{d} = 2 \\ -\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|^{\tilde{d}}} \text{ – притяжение,} & \tilde{d} \geq 3 \end{cases}$$

Это иллюстрация применения линеаризованной теории.

Приближенность линеаризованной теории

Продолжим рассмотрение линеаризованной теории. Введение взаимодействия приводит к подтверждению того, что мы имеем дело с приближенной теорией. При введении взаимодействия мы получили уравнение движения в виде уравнения Даламбера, но это получалось в калибровке Лоренца, когда:

$$\partial_\nu \psi^{\mu\nu} = 0.$$

Это уравнение будет непротиворечиво, если тензор энергии-импульса удовлетворяет условию:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0.$$

Если вещество представлено в полном объеме с учетом взаимодействия, например, поле Максвелла и заряженные частицы, тогда тензор энергии-импульса такой системы в электродинамике сохраняется в силу уравнений Максвелла и уравнений движения частиц. Но мы ввели лагранжиан в линеаризованную теорию. Материя, которая представлена в $T^{\mu\nu}$, сама взаимодействует с гравитацией. Поэтому уравнение Даламбера уже нельзя представить как уравнение самосогласованной системы.

Приведем пример. Рассмотрим взаимодействие с точечной частицей в четырехмерном пространстве, тогда:

$$T^{\mu\nu} = m \int \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \delta^4(x - x(\tau)) d\tau,$$

сохранение тензора следует из уравнения движения:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} \Leftarrow \ddot{x}^\mu = 0 -$$

свободное движение частиц.

$$S_0 = -\frac{m}{2} \int \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu d\tau \Rightarrow$$

$$S_0 + S_{int} = -\frac{m}{2} \int (\eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu d\tau,$$

$$\text{УД: } \ddot{x}^\mu \neq 0 \Rightarrow \partial_\nu T^{\mu\nu} \neq 0 -$$

ввели гравитацию, частицы движутся не свободно. На самом деле это свойство универсальности гравитационного взаимодействия – любая материя, какую бы мы не ввели, ее уравнения движения с учетом гравитационного поля будут нарушать сохранение тензора энергии-импульса. Это означает, что линеаризованная теория приближенная.

Выход есть – добавление нелинейных членов в уравнение поля, то есть в лагранжиан Фирца-Паули, и учитывать в тензоре энергии-импульса следующий

порядок по гравитации. Если $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, то $g^{\mu\nu}\sqrt{-g} = \psi^{\mu\nu}$ - восстановление полной нелинейной теории.

Можно рассуждать иначе. При введении взаимодействия мы нарушили еще и калибровочную симметрию. При замене

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$$

для сохранения калибровочной симметрии мы могли бы сделать замену координаты:

$$x^\mu(\tau) \rightarrow x^\mu(\tau) + \xi^\mu.$$

То есть линеаризованная теория с симметрией проистекает из диффеоморфизмов пространства-времени. В частности на траектории с переменной является мировая линия. В результате мы бы пришли к выводу, что $x^\mu(\tau)$ зависит от калибровки. Это и является ключевым и означает, что координаты пространства-времени Минковского не являются физическими. А физическими скорее являются координаты Риманова пространства (условно).

Единственное, на что не обратили внимание:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}.$$

Тогда бы из ОТО в линейном по κ приближении мы бы все это и получили.

Задача о гравитационном излучении

Есть еще одна важная задача – задача о гравитационном излучении. Эта задача может решаться просто, если будем брать материю, сохраняющуюся за счет других сил. Например, атом водорода: есть и протон, и электрон, и кулоновское силовое поле. Для сохранения нужно учесть не только тензор энергии-импульса частицы в кулоновском поле, но и максвелловский тензор поля. Тогда такую задачу можно решить.

Линеаризованная теория позволяет решить только задачу гравитационного излучения негравитизирующих систем. Формула получается по аналогии с электродинамикой. Для атома водорода тензор энергии-импульса:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(e)} + F_{\mu\nu} \Rightarrow$$

$$\partial_\nu T_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow$$

$$\psi_{rot} \rightarrow \text{излучение.}$$

Более сложная задача – двойная система с массами M и m . Такая система взаимодействует сама по себе с помощью гравитации. В линеаризованной теории

обязательно нужно будет учитывать следующее приближение – гравитационное излучение гравитирующего источника.

Определения линеаризованной теории

Вернемся к полной теории, в основе которой лежат понятия римановой геометрии, ковариантной производной и тензора кривизны. Уточним обозначения:

- 1) $g_{\mu\nu}$ – метрика,
- 2) $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ – символы Кристоффеля,
- 3) $\nabla_{\lambda}A^{\mu} = \partial_{\lambda}A^{\mu} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}A^{\nu}$, $\nabla_{\lambda}V_{\mu} = \partial_{\lambda}V_{\mu} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}V_{\nu}$ -ковариантные производные,
- 4) $\Delta A_{\mu} = \oint \delta A_{\mu} = \int \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}A_{\nu}dx^{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\partial_{\tau}(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}A_{\lambda}) - \partial_{\nu}(\Gamma_{\mu\tau}^{\lambda}A_{\lambda})\right)\Delta S^{\tau\nu} = \frac{1}{2}R_{\mu\tau\nu}^{\lambda}A_{\lambda}\Delta S^{\tau\nu}$,

где $\delta A_{\mu} = \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}A_{\nu}dx^{\lambda}$ – нековариантное приращение, однако нужно иметь ввиду, что производится параллельный перенос:

$$A_{\lambda;\tau} = A_{\lambda;\tau} + \Gamma_{\lambda\tau}^{\alpha}A_{\alpha}, \quad \text{где } A_{\lambda;\tau} = 0 \Rightarrow$$

$$R_{\mu\tau\nu}^{\lambda}[\Gamma] = \Gamma_{\mu\nu,\tau}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\tau,\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\rho\tau}^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda}\Gamma_{\mu\tau}^{\rho} -$$

тензор кривизны. Вместо символов Кристоффеля можем ввести набор 1-форм:

$$\Gamma_{\mu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}dx^{\nu}.$$

И можно ввести набор 2-форм:

$$\mathbb{R}_{\mu}^{\lambda} = \frac{1}{2}R_{\mu\tau\nu}^{\lambda}dx^{\tau}\wedge dx^{\nu} \Rightarrow$$

$$\mathbb{R}_{\mu}^{\lambda} = d\Gamma_{\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\rho}^{\lambda}\wedge\Gamma_{\mu}^{\rho} = D\Gamma_{\mu}^{\lambda} -$$

ковариантный внешний дифференциал, обладающий свойством нильпотентности ($D^2 = 0$). Отсюда можно получить тождество Бьянки:

$$D\mathbb{R}_{\mu}^{\lambda} = 0.$$

$$D\mathbb{R}_{\mu}^{\lambda} = 0 = \mathbb{R}_{\mu[\tau\nu;\sigma]}^{\lambda}dx^{\tau}\wedge dx^{\nu}\wedge dx^{\sigma}.$$

Мы разобрали первый способ применения теоремы стока и параллельного переноса по замкнутому контуру ковектора. Иначе это изображается с помощью коммутатора:

$$[\nabla_{\nu}, \nabla_{\tau}]A_{\mu} = R_{\mu\tau\nu}^{\lambda}A_{\lambda} \quad \text{или} \quad [\nabla_{\nu}, \nabla_{\tau}]A^{\mu} = -R_{\lambda\tau\nu}^{\mu}A^{\lambda}.$$

Можно заметить, что это возвращает нас к связности как калибровочному полю. Например, в электродинамике:

$$[D_{\mu}D_{\nu}]\varphi = [\partial_{\mu} - A_{\mu}, \partial_{\nu} - A_{\nu}]\varphi = F_{\mu\nu}\varphi.$$

Коммутатор ковариантных производных – напряженность. Роль напряженности гравитационного поля играет тензор кривизны. А роль вектор-потенциала играют символы Кристоффеля. Кроме связности у нас есть еще и метрика. Тогда можно опустить первый индекс с помощью метрики:

$$R_{\lambda\mu\nu} = g_{\lambda\rho} R_{\mu\nu}^{\rho} = R_{\tau\nu\lambda\mu} = -R_{\mu\lambda\nu\tau} = -R_{\lambda\mu\nu\tau} = g_{\lambda[v,\tau]\mu} + g_{\mu[\tau,v]\lambda} + 2g_{\rho\sigma} \Gamma_{\lambda[v}^{\rho} \Gamma_{\tau]\mu}^{\sigma}.$$

Тождество Риччи:

$$R_{\lambda\{\mu\nu\}} = 0.$$

В размерности $D = 4$ получаем симметричный шестииндексный тензор, симметричный относительно попарной перестановки индексов. Число функций $21 \cdot 1 = 20$. Далее без метрики мы можем свернуть тензор кривизны по одному верхнему и нижнему индексам:

$$R_{\mu\nu}(\Gamma) = R_{\mu\nu\lambda}^{\lambda}$$

тензор Риччи, имеет 10 симметричных компонент.

Если свернуть тензор Риччи с помощью метрики, то получим скалярную кривизну:

$$R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = R[\Gamma, g].$$

На это необходимо обращать внимание, поскольку есть способ независимого варьирования по связности и метрике.

Действие Эйнштейна-Гильберта

Варьирование действия Эйнштейна-Гильберта, к которому мы сейчас перейдем, при определении связности без кручения эквивалентно приводит к уравнениям Эйнштейна как при варьировании по метрике, так и при независимом варьировании по метрике и по связности. Для более сложных теорий это не так.

Если образовать из тензора Риччи и скалярной кривизны тензор Эйнштейна и взять тождество Бьянки, начать работать с индексами, то получим ковариантную производную:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \equiv G_{\mu\nu},$$

$$\nabla_{\nu} G^{\mu\nu} = 0.$$

На самом деле уравнение Эйнштейна мы пока не записали, но у нас есть алгоритм получения правой части этого уравнения. Для материи мы использовали принцип эквивалентности, действие для материи:

$$\begin{aligned}
 & S_m(\Phi) \\
 & \quad \downarrow \\
 & \eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} \\
 & \quad \partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu \\
 & d^4_x = \sqrt{-g} d^4x
 \end{aligned}$$

Полное действие:

$$S = S_{EH} + S_m(\Phi) + S_{GH}$$

$$S_{EH} = \int R \sqrt{-g} d^4x,$$

S_{GH} – поверхностный член, R – скаляр. Скалярная кривизна содержит вторые производные. Их можно исключить с помощью дивергенции. Всякий Лагранжиан, который содержит высшие производные, будет приводить к уравнениям выше второго порядка, поэтому при квантовании возникают проблемы.

У нас уже есть формула для варьирования тензора материального действия, чтобы получить тензор энергии-импульса. Необходимо каноническое правило для запоминания положения индексов, от этого зависит знак.

$$S_m = - \int \frac{m}{2} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu g_{\mu\nu} \frac{\delta^4(x - x(\lambda))}{\sqrt{-g}} \sqrt{-g} d^4x d\lambda,$$

$$\frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\mu\nu} = - \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}},$$

$$\frac{\sqrt{-g}}{2} T_{\mu\nu} = \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

Теперь необходимо подобрать такой коэффициент, который будет давать правильную левую часть уравнения Эйнштейна. В нашей сигнатуре это коэффициент $-\frac{1}{16\pi G}$ при $c = 1$.

Рассмотрим поверхностный член S_{GH} .

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \left(\begin{array}{c} \partial^2 g \quad \text{квадр. } \partial g \\ 2\Gamma_{\mu[v,\lambda]}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\tau}^\tau - \Gamma_{\mu\tau}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\tau \end{array} \right),$$

$$\frac{(g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\sqrt{-g})_{,\lambda} - (g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}\sqrt{-g})_{,\nu} - (g^{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + (g^{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}$$

↓

поверхностный член GH

Первые два члена можно было бы отбросить при употреблении действия с целью варьирования. Но если нужна величина действия (например, в квантовой гравитации), то нужно сводить к поверхностному члену. Сведение к поверхностному члену апеллирует к теории поверхности.

Лекция 13

Уравнения Эйнштейна

Уравнение движения

Продолжим преобразование скалярной кривизны. Скалярная кривизна – это естественный лагранжиан для гравитационной части действия, но у него есть недостаток – зависимость от вторых производных метрики.

Тензор кривизны – функция только связности: $R_{\nu\lambda\tau}^{\mu}(\Gamma)$. Тензор Риччи – свертка по первым индексам каждой пары тензора кривизны также функция связности: $R_{\nu\tau} = R_{\nu\lambda\tau}^{\lambda}$. Скалярная кривизна содержит свертку с метрикой: $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

$$R\sqrt{-g} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\partial_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - (\lambda \leftrightarrow \nu) + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\tau}^{\tau} - \Gamma_{\mu\tau}^{\lambda}\Gamma_{\nu\lambda}^{\tau}),$$

где $g^{\mu\nu}\sqrt{-g}$ плотность контрвариантного метрического тензора. Ее производная удовлетворяет тождеству, которое можно получить из соотношений для символов Кристоффеля с опущенными первыми индексами:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \rightarrow \Gamma_{\lambda\mu\nu}$$

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} + \Gamma_{\nu\mu\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda} \Rightarrow$$

$$(g^{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\lambda} = g^{\mu\nu}\Gamma_{\lambda\tau}^{\tau} - g^{\mu\tau}\Gamma_{\tau\lambda}^{\nu} - g^{\nu\tau}\Gamma_{\tau\lambda}^{\mu}\sqrt{-g};$$

$$(g^{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\nu} = -\Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}g^{\lambda\nu}\sqrt{-g}.$$

Записанное тождество важно при переходе к линеаризованной теории. В итоге мы можем выделить вторые производные:

$$R\sqrt{-g} = (g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\sqrt{-g})_{,\lambda} - (g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}\sqrt{-g})_{,\nu} - (g^{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + (g^{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}.$$

В исходной формуле скалярной кривизны обозначим $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\tau}^{\tau} - \Gamma_{\mu\tau}^{\lambda}\Gamma_{\nu\lambda}^{\tau}) = \Gamma\Gamma$, тогда:

$$-(g^{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + (g^{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} = -2\Gamma\Gamma \Rightarrow$$

получаем выделение полной производной:

$$R\sqrt{-g} = g^{\mu\nu}(\Gamma_{\mu\tau}^{\lambda}\Gamma_{\nu\lambda}^{\tau} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\tau}^{\tau})\sqrt{-g} + \partial_{\mu}W^{\mu}.$$

Перейдем к варьированию гравитационного действия в форме Эйнштейна-Гильберта.

$$S_{g_{EH}} = -\frac{1}{16\pi G_N} \int R\sqrt{-g}d^4x = \dots \int g^{\mu\nu}\sqrt{-g}R_{\mu\nu}(\Gamma)d^4x \Rightarrow$$

$$\delta S_{g_{EH}} = \dots \int \left(\delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} \right) d^4 x$$

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \text{тензор} \Rightarrow$$

выберем локально лоренцеву систему:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0 \Rightarrow$$

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \partial_{\lambda} W^{\lambda},$$

$$W^{\lambda} = g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\nu}.$$

Мы записали тензорное равенство с локальной лоренцевой системе, в силу этого частные производные равны ковариантным. При возвращении в произвольную систему координат:

$$\partial_{\lambda} W^{\lambda} = \nabla_{\lambda} W^{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\lambda} (W^{\lambda} \sqrt{-g}).$$

В итоге при варьировании гравитационного действия в форме Эйнштейна-Гильберта получаем тензор Эйнштейна, умноженный на контрвариантную метрику плюс полная дивергенция. На уравнении движения полная дивергенция не сказывается. Однако дивергентный член нужно преобразовывать в поверхностный интеграл:

$$\int_{\Omega} div \rightarrow \oint_{\partial\Omega},$$

Поверхностный член выражается через внешнюю кривизну трехмерной гиперповерхности, являющейся границей объема. То есть само действие имеет поверхностный член.

Перепишем гравитационное действие с выделенной полной производной в другой форме. Введем лагранжиан:

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{16\pi G_N} g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\tau}^{\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^{\tau} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\tau}^{\tau}) \sqrt{-g} \Rightarrow$$

$$S_{g_{EH}} = \int \mathcal{L}_G d^4 x + \int div.$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_{\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial (g^{\mu\nu, \lambda})} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \equiv G^{\mu\nu}.$$

Таковыми манипуляциями мы, по сути, сказали, что для получения уравнений движения достаточно взять часть действия Эйнштейна-Гильберта. Кроме того

лагранжева производная от двухгамного действия дает нам тензор Эйнштейна. На самом деле эта система уравнений подчиняется условию, которое следует из тождеств Бьянки:

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0.$$

Псевдотензор Эйнштейна. Уравнения Эйнштейна

Теперь с помощью построенного лагранжиана можно построить *псевдотензор Эйнштейна* (к нему можно применять только линейные преобразования координат). Мы знаем, что из уравнения Лагранжа следует закон сохранения тока для канонического тензора энергии-импульса. Но мы должны помнить, что сам лагранжиан не является скаляром. Поэтому t_μ^v – псевдоскаляр Эйнштейна:

$$t_\mu^v = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial g_{\alpha\beta,v}} g_{\alpha\beta,\mu} - \delta_\mu^v \mathcal{L} \Rightarrow$$

$$(t_\mu^v \sqrt{-g})_{,v} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial g_{\alpha\beta,v}} \right)_{,v} g_{\alpha\beta,\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial g_{\alpha\beta,v}} g_{\alpha\beta,\mu\nu} - \partial_\mu \mathcal{L}(g, g).$$

$\mathcal{L}(g, g)$ – не зависит от x явно, значит других полей кроме гравитационного нет, то есть речь идет о свободном гравитационном поле.

$$\partial_\mu \mathcal{L}(g, g) = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial g_{\alpha\beta}} g_{\alpha\beta,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial g_{\alpha\beta,v}} g_{\alpha\beta,\nu\mu} \Rightarrow$$

$$(t_\mu^v \sqrt{-g})_{,v} = 0.$$

Тензор хороший, зависит только от первых производных метрики. При переходе к линеаризованной теории обратится в нормальный тензор энергии-импульса гравитационного поля.

Далее полученную конструкцию можно приспособить к уравнениям Эйнштейна с правой частью.

$$S = S_m + S_g \Rightarrow$$

$$\delta S_m = \frac{1}{2} \int \delta g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4 x,$$

$$\delta(S_m + S_g) = 0,$$

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_\mu -$$

Уравнение Эйнштейна в присутствии материи.

$$\Delta_\nu T^{\mu\nu} = 0 -$$

обеспечивается включением всех материальных источников.

Если теперь вернуться к определению псевдотензора, то мы получали ноль при варьировании свободного действия. Теперь можем обобщить на взаимодействующую систему, включающую источник:

$$G^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu},$$

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (T^{\mu\nu} \sqrt{-g}) - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\mu} T^{\alpha\beta} \Rightarrow$$

$$\left((t_\mu^\nu + T_\mu^\nu) \sqrt{-g} \right)_{,\nu} = 0.$$

Полученное равенство все еще не является тензорным выражение. Для взаимодействующей с материей гравитации можно построить что-то удовлетворительное и выделить вклад энергии гравитационного поля. Но локализовать эту энергию невозможно. Нелокализуемость отражается в зависимости от системы отсчета, допустимы только линейные преобразования координат. Но можем записать закон сохранения энергии:

$${}^m P_\mu + {}^g P_\mu = \int (t_\mu^\nu + T_\mu^\nu) \sqrt{-g} dS_\nu = 0.$$

Однако применяемое разбиение на части искусственное, поскольку работаем с нетензорными величинами.

Решение уравнений Эйнштейна. Метрика Шварцшильда

Современный компьютер позволяет решить задачу численно, задавая граничное и начальное условия. Как решать уравнение Эйнштейна аналитически? Уравнение решается относительно метрики, и мы решаем уравнение второго порядка. Однако есть условия связи, связанные с тем, что ковариантная дивергенция равна нулю. То есть не все уравнения Эйнштейна из десяти второго порядка по времени ∂_t^2 . Исходя из тождеств Бьянки можно показать, что из 10 уравнений Эйнштейна 4 не содержат вторых производных. Распишем тождество Бьянки выделив пространственную и временную части:

$$\partial_t G^{\mu\tau} = -\partial_i G^{\mu i} - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu G^{\nu\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^\nu G^{\mu\nu}.$$

Слева выделена полная производная по t, справа – комбинация, которая содержит не более чем вторые производные. Это означает, что смешенные компоненты $G^{\mu t}$ не содержат ∂_t^2 . Такие уравнения в смысле динамики мы называем связями.

При решении уравнений Эйнштейна на поверхности начальных данных должны быть заданы условия связи. При задании начальных данных для материи и гравитационного поля нужно обеспечить условие согласования:

$$G^{\mu t} - 8\pi G T^{\mu t} = 0.$$

Помимо начальных данных в задачах часто нужно закладывать данные на асимптотике. Часто решаются задачи на пространственной бесконечности, где или отсутствует материя и гравитационное поле (пустота, асимптотически плоское пространство-время), или иначе. В космологии другие условия согласование – пространство может быть бесконечным или замкнутым.

Для решения уравнений Эйнштейна нужно много условий связи. При аналитическом решении все упирается в выбор симметрии. То есть мы можем получать аналитические решения для каких-то симметричных конфигураций, в которых метрика задается меньшим числом функций. Самая простая физическая задача – задача сферически симметричная, статичная, в пустоте. Под статичностью понимаем следующее: существуют 4 вектора Киллинга L_i , такие что

$$[\widehat{L}_i, \widehat{L}_j] = \varepsilon_{ijk} L_k.$$

Кроме того вектором Киллинга является ∂_t :

$$(\widehat{\partial}_t, \widehat{L}_i) = \widehat{K}^a, \quad a = t, i.$$

Интервал, для которого условие заведомо будет выполняться, находим методом «просвещенной догадки»:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2 d\Omega,$$

$$K_{(\mu; \nu)}^a = 0 \quad \forall A, B,$$

с точностью до преобразования координат:

$$r, t \rightarrow r', t'.$$

Сейчас никто не занимается аналитическим вычислением символов Кристоффеля и тем более компонент тензора кривизны или тензора Риччи. Для этого были созданы такие вещи как MAPLE.

Итог следующий:

$$R_{tt} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{a} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{rB} = 0,$$

$$R_{rr} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{a} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{rB} = 0.$$

Систему можно упростить:

$$BR_{tt} + AR_{rr} = (AB)' \frac{1}{rB} = 0 \Rightarrow$$

$$AB = const = 1.$$

Выбор константы единичной не ограничивает общности. Таким образом, задача свелась к задаче одной переменной. Теперь достаточно взять еще одно уравнение Эйнштейна:

$$R_{\theta\theta} = 1 - \frac{1}{B} - \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$(rA)' = 1 \Rightarrow$$

$$A = 1 + \frac{C}{r}.$$

Константой C можно распорядиться исходя из закона Ньютона:

$$g_{00} = 1 + \frac{\varphi_N}{c^2},$$

$$r \rightarrow \infty, \quad \varphi_N = -\frac{GM}{c^2 r} \Rightarrow$$

$$C = \frac{GM}{c^2} = -r_g -$$

гравитационный радиус.

В итоге мы получили при $c = 1$ метрику Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 d\Omega.$$

Мы получили статичное поле. Статичность означает, что у нас есть два условия:

$$1) \exists \partial_t;$$

$$2) t \rightarrow -t.$$

Если второе условие не наложено, то имеем дело со стационарностью. Например, метрика Керра является стационарной, но не статичной, появляются смешанные компоненты.

Красное смещение

При выводе записанной метрики у нас не было предположения о том, что внутреннее распределение материи является статичным. То есть материя могла пульсировать или коллапсировать в радиальном направлении. Это *теорема Берхгофа*.

Для массы солнца $r_g \sim 3 \text{ км} \cdot \frac{M}{M_{\text{солнца}}}$. Если теперь покоящийся наблюдатель $dr = 0$ движется вдоль мировой линии, то ds — собственное время.

$$ds = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} dt.$$

Если в поле движется наблюдатель с хронометром, который работает с частотой $\omega \sim \frac{1}{dt}$, или же он способен испускать волны на частоте ω , тогда в его собственной системе отсчета это ω_0 . Отсюда получаем *красное смещение*:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}.$$

Чем больше гравитационное поле, тем меньше частота.

Интересен случай, когда радиус тела настолько мал, что подходит к гравитационному радиусу. Тогда красное смещение будет экстремальным. По нашим часам приближение к коллапсару будет происходить бесконечно долго. С другой стороны, если с поверхности коллапсара могут испускаться фотоны, то они начинают краснеть и при подходе к гравитационному радиусу коллапсар становится черным – черная дыра.

На самом деле все более хитро. Введенные шварцшильдовы координаты являются хорошими при $r > r_g$. Горизонт событий означает, что при подходе к этой поверхности $r = r_g$ мы видим горизонт, за которым что-то есть, но в наших координатах продолжения невидно. Поэтому нужно искать другие движущиеся системы координат.

Условие регулярности горизонта

Еще одно важное свойство этой метрики заключается в том, что тензор кривизны для нее:

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad R = 0,$$

$$R_{\mu\nu\lambda\tau} R^{\mu\nu\lambda\tau} = \frac{\sigma(GM)}{r^6}.$$

Отсюда видно, что точка $r = 0$ является сингулярностью, но на самом деле физически это не точка. При $r < r_g$ координата t становится пространственной, а координата r становится временем. Поэтому когда мы движемся в этих координатах внутри черной дыры это приближение к $r = 0$ по времени и нужно уже рассматривать геодезические линии. И это означает, что в момент времени $r = 0$ мы попадаем в сингулярность. Причем эта сингулярность не зависит от того, чему равны все остальные координаты. То есть эта сингулярность является трехмерной гиперповерхностью, заполняющей все пространство.

Для горизонта $r = r_g$ все величины конечные. Это называется условием регулярности горизонта.

Геометрические свойства метрики Шварцшильда

Сейчас сконцентрируемся на чисто геометрических свойствах метрики Шварцшильда. Это асимптотически плоское сферически симметричное статическое пространство в пустоте, обладающее регулярным горизонтом. Рассмотрим возможные предположения и следствия из них.

Если предположить, что есть пространство с регулярным горизонтом событий, статическое и асимптотически плоское, то можно доказать, что оно будет сферически симметричным. Или наоборот, если пространство с регулярным горизонтом является сферически симметричным, то оно является статическим и описывается метрикой Шварцшильда. То есть существуют разные формулировки *единственности для метрики Шварцшильда*. В совокупности все эти формулировки означают, что для метрики Шварцшильда выполнены все 4 условия, но достаточно задать 2 из них в нужной комбинации.

Для метрики Шварцшильда можно выбрать другие системы координат. Есть работы, в которых изучены все, представляющие физический или математический интерес параметризации метрики Шварцшильда. Наиболее интересны *изотропные координаты*. Здесь делается преобразование координат следующего вида:

$$r = \left(\rho + \frac{r_g}{4\rho} \right)^2.$$

В итоге метрика будет содержать пространственную часть в конформно плоском виде:

$$ds^2 = \left(\frac{4\rho - r_g}{4\rho + r_g} \right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{4\rho} \right) (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega).$$

Эта запись удобна для описания процессов, которые происходят в некоторый момент времени.

Другое полезное упражнение заключается в следующем: можно считать массу переменной величиной $M = M(t, r)$, а $G = 1, r_g = 2M$, тогда

$$A = e^{h(t,r)} \left(1 - \frac{2M(t,r)}{r} \right) \Rightarrow$$

$$G_t^r \sim - \frac{2\dot{M}}{r^2},$$

$$G_r^r = - \frac{2M'}{r^2} + \frac{2h'}{r} \left(1 - \frac{2M(t,r)}{r} \right).$$

В итоге из уравнений Эйнштейна получится, что

$$\dot{M} = M' = 0.$$

Это доказательство теоремы Берхгофа в конкретной параметризации метрики. В итоге для пустоты все равно получаем $M = const$.

И еще одно важное следствие: если правая часть не равна нулю в сферически симметричном статичном случае, то

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu},$$

$$T_{\mu}^{\mu} = 0 \Rightarrow$$

$$AB = 1.$$

То есть при нулевом тензоре энергии импульса мы получаем то же самое, что получали при сложении двух уравнений. Это важно для понимания решения, называемого **метрикой Рейсннеера-Нордстрема**:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\lambda} F_{\nu}^{\lambda} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2 \right),$$

$$T_{\mu}^{\mu} \equiv 0 -$$

для электромагнитного поля. В метрике Рейсннеера-Нордстрема задание анзаца для электромагнитного поля можно свести к следующему:

$$\hat{\partial}_t - \text{вектор Киллинга} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}_{\hat{\partial}_t} g_{\mu\nu} = 0,$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} \Rightarrow$$

Симметричное электромагнитное поле означает

$$\mathcal{L}_{\hat{\partial}_t} A_{\mu} = 0 \Rightarrow$$

$$A_{\mu} dx^{\mu} = \Phi(r) dt.$$

В итоге решается система уравнений Эйнштейна и система уравнений Максвелла. Система уравнений Максвелла:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (F^{\mu\nu} \sqrt{-g}) = 0.$$

При этом источника нет, а решение получается в виде кулоновского поля. В итоге получим метрику Рейсннеера-Нордстрема:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)} - r^2 d\Omega.$$

Q и M имеют размерность длины, $\Phi = \frac{Q}{r}$. Это «заряд без заряда», решение свободных уравнений Максвелла. Оно справедливо всюду, кроме сингулярностей.



Лекция 14

Фотонные орбиты и движение внутри черной дыры

Условие определения круговых орбит

Перейдем к фотонным орбитам. Примем $c = 1$. Изотропные геодезические: $x^\mu(\lambda)$. Интегралы движения в плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$ по изотропной геодезической:

$$\dot{t}g_{00} = \varepsilon;$$

$$r^2\dot{\phi} = l;$$

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0 \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2\dot{\phi}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\varepsilon^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - \frac{l^2}{r^2} = 0 -$$

Закон сохранения энергии:

$$\dot{r}^2 + V = \varepsilon^2,$$

$$V = \frac{l^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right).$$

Если изобразить кривую потенциала как функцию радиуса (рис. 14.1), то можно заметить, что на горизонте и на бесконечности потенциал обращается в ноль, между этими точками экстремумов нет.

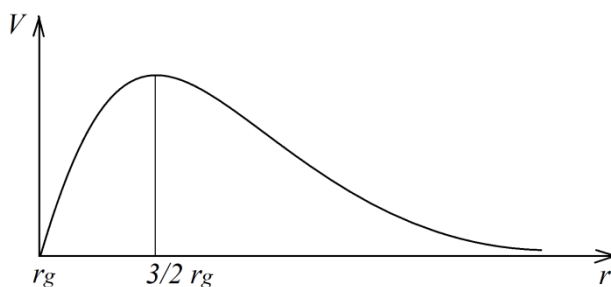


Рис. 14.1. Потенциал.

Нас прежде всего интересуют круговые орбиты. l - момент количества движения, при $r_g = 0$ - центробежный барьер.

Если ε^2 таково, что происходит отражение в точке поворота, то это означает, что происходит рассеяние на центральном поле.

Если посадим частицу в точку $\frac{3}{2}r_g$, то это будет неустойчивая круговая орбита.

Условие определения круговых орбит:

$$\frac{dV}{dr} = 0, \quad \dot{r} = 0 \Rightarrow$$

$$V = \varepsilon^2.$$

То есть на круговой орбите фиксированы радиус $\dot{r} = 0$ и момент $l(r_c)$ и энергия $\varepsilon(r_c)$. Для осуществления такого движения нужно точно задать два параметра – угловой момент и энергию. При этом положения неустойчив (вторая производная соответствует максимуму). Из вне в эту точку попасть не можем, только с помощью задания начальных условий. Это некоторая абстракция. Понятно, что если фотоны идут из бесконечности, то они имеют другие параметры. При пролете выше максимума все фотоны беспрепятственно падают на центр, то есть происходит падение на черную дыру.

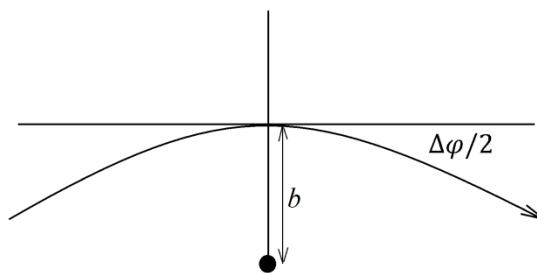
Фотонные орбиты – артефакт Эйнштейновской теории, в Ньютоновской ничего подобного нет. Это связано с наличием фактора красного смещения, понижающего потенциальный барьер.

Прицельный параметр

Теперь будем иначе рассматривать траектории рассеяния. Будем рассматривать те же уравнения, но для самого рассеяние вводим

$$b = \frac{l}{\varepsilon}$$

прицельный параметр. Трехмерная картина изображена на рисунке 14.2.



14.2. Прицельный параметр.

Уравнение асимптоты:

$$r \sin \varphi = \pm b.$$

Чтобы найти угол отклонения, запишем следующее:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}}.$$

Введем обратный радиус:

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3}{2}r_g u^2.$$

Здесь левая часть – гармонический осциллятор, правую часть можно считать возмущением при малом угле отклонения. В общем случае необходимо решать уравнение точно. Решение:

$$u = \frac{\sin \varphi}{b} + \frac{3}{2}r_g \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\varphi\right).$$

При $u \rightarrow \infty$: $\Delta\varphi = \frac{2r_g}{g}$ – эффект отклонения луча от поля солнца.

Теперь если мы находимся в окрестности максимума, то происходит следующее: по мере приближения к этой точке сверху происходит навивание орбит на черную дыру. Формулу для числа навиваний можно получить, если решить уравнение в окрестности и разложить по отклонениям параметров ε от параметров, получающихся для орбит. Для критического значения:

$$b_{cr} = \frac{3}{2}\sqrt{3}r_g$$

В результате мы получаем несколько изображений одного объекта на небесной сфере. Они, как правило, располагаются вдоль какой-то дуги на небосводе. Такая дуга называется *Эйнштейновской дугой*, это признак сильного гравитационного линзирования. Это явление достаточно редкое.

Гиперповерхности

В поле Шварцшильда есть замечательные поверхности – черная дыра с радиусом r_g , поверхность $\frac{3}{2}r_g$ – фотонная орбита, на которой происходит навивание, орбита $2r_g$ – ограничивает область круговых орбит массивных частиц, $3r_g$ – область устойчивых круговых орбит. Земля находится в точке устойчивой круговой орбитой. Но если бы Солнце было черной дырой, то такие орбиты существовали бы вплоть до $\frac{3}{2}r_g$.

Округ черных дыр может быть абляционные диски, заканчивающиеся на устойчивой круговой орбите. Так, зная радиус устойчивой круговой орбиты, можем оценить энерговыделение в диске (частица мигрирует в диске, теряя свою энергию).

Кроме того интересно, что поверхность $\frac{3}{2}r_g$ такова, что трехмерная гиперповерхность является омбилической:

$$K_{ab} = \gamma_{ab} \frac{K}{3};$$

$$K_a^a = K.$$

И в других центрально-симметричных метриках есть такие гиперповерхности. Их физический смысл – циклы, на которые навиваются изотропные геодезические. Это важно для наблюдений, поскольку мы видим на самом деле не сам горизонт событий, а скорее эту поверхность. Фотоны, заходящие внутрь, падают на черную дыру, их мы уже не видим. Построение таких поверхностей дает дополнительную информацию, которую другие инструменты не обеспечивают.

В последнее время развивается теория о том, аккреационные диски являются плазмой, а для фотонов в плазме есть показатель преломления. Возникает ленгмюровская частота, которая дает преломление. Квадрат этой частоты действует как масса – фотоны становятся массивными. Рассеяние массивных частиц аналогично рассеянию безмассовых, отличие заключается в радиусах. Для массивных частиц сам потенциал зависит от массы, имеет максимум и минимум.

Движение внутри черной дыры

Итак, мы разобрались с геодезическими, характерными моментами механики во внешней области черной дыры. Те же уравнения позволяют нам проникнуть внутрь черной дыры, но тогда нужно рассматривать радиальное падение и с помощью траекторий радиального падения можно ввести систему координат, ассоциированную с наблюдателем. В Ландау-Лифшице рассмотрена такая сложная система – координаты Новикова. Берутся координаты, сопутствующие радиальному движению массивной частицы. Но в литературе чаще рассматривают падающие фотоны, в таком случае получаются более простые формы. Хотя физически рассматривать наблюдателя, движущегося со скоростью меньше скорости света, было бы более правильно.

Можно ввести черепашую координату. Тогда уравнения движения радиально падающего фотона будут совсем простыми – прямая линия. Двумерная часть интервала становится конформно плоской:

$$\frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}} = dr^*;$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (dt - dr^{*2}) - r^2 d\Omega;$$

$$t = \pm r^* + const;$$

$$r^* = r_g \ln \left| \frac{r}{r_g} - 1 \right| + r \Rightarrow$$

$$r \rightarrow r_g \Rightarrow r^* \rightarrow -\infty.$$

Можно ввести светоподобные координаты, репараметризацию радиальной координаты:

$$v = t + r^*;$$

$$u = t - r^*.$$

Здесь конформный фактор будет обращаться в ноль на горизонте. При репараметризации возникают новые особенности пространства. Мы понимаем, что истинная геометрия, скрытая за многообразием на самом деле в координатах Шварцшильда полностью не видна. Потому что внутри r становится временем. Иногда внутреннюю область черной дыры называют временной областью. Новыми пространственными координатами внутри будут координаты на сфере и время. Внутри черной дыры мы имеем космологическое решение (схлопывающееся, имеет сингулярность в точке $r = 0$). Пространство Шварцшильда внутри черной дыры является динамическим, поэтому при аналитическом продолжении к метрике Шварцшильда подклеивается еще одна метрика, чтобы найти место траекториям геодезических, выходящим наружу. Геодезические, выходящие наружу, при продолжении назад должны были бы выйти из под горизонта событий – белая дыра. Такие объекты возможно реализовать в космологии. В итоге мы можем ввести такие координаты, при которых описываются и белые, и черные дыры. Их внутренние области динамические.

1) Перейдем от координата t, r к v, r . Метрика в новых координатах:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{M}{r}\right) dv^2 - 2 dv dr - r^2 d\Omega.$$

Карта пространства-времени должна содержать геодезические, о которых мы знаем из внешней части пространства. У нас были геодезические, падающие на черную дыру и геодезические в обратном направлении. Можем продолжить эти кривые до сингулярности.

$$v = x^\mu(\tau) -$$

времени подобная кривая. Тогда $\dot{v} > 0$.

$$\dot{v}^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) - 2\dot{v}\dot{r} = 1 \Rightarrow$$

$$\dot{r} < 0 -$$

возможно только движение внутрь. Но сама метрика Шварцшильда допускает и противоположное движение.

$$v = t + r^* -$$

Advanced, опережающая координата Эддингтона-Финкельштейна

$$u = t - r^* -$$

Retarded, запаздывающая.

Мы приобрели возможность записывать процессы внутри черной дыры, но не для всех геодезических.

2) Перейдем теперь к координатам u, r . Метрика в новых координатах

$$ds^2 = \left(1 - \frac{M}{r}\right) du^2 + 2 du dr - r^2 d\Omega.$$

Снова будем рассматривать времени подобную кривую $x^\mu(\tau)$. Тогда:

$$\dot{u}^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) + 2\dot{u}\dot{r} = 1,$$

$$\dot{u} > 0.$$

Видно, что $\dot{r} > 0$.

3) Можем рассматривать координаты v, u . Тогда мы понимаем, что аналитическое продолжение уже не может быть из того же шварцшильдова пространства.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) du dv - r^2 d\Omega,$$

$$r = r(u, v).$$

Недостаток такой записи – конформный фактор обращается в ноль на горизонте. Можем реализовать такое преобразование, которое уничтожит сингулярность конформного фактора.

Конформное пространство всегда двумерно плоское (три независимых компоненты метрики и два преобразования координат, можно добиться вынесения третьей функции за скобки).

Координаты Крускала

Проведем новое преобразование с помощью экспоненцирования, получим светоподобные координаты Крускала:

$$U = -e^{-\frac{u}{2r_g}};$$

$$V = e^{\frac{v}{2r_g}} \Rightarrow$$

$$VU = - \left(\frac{r - r_g}{r_g} \right) e^{\frac{r}{r_g}}.$$

Метрика в этих координатах:

$$ds^2 = \frac{4r_g^3}{r} e^{-\frac{r}{r_g}} dU dV - r^2(U, V) d\Omega.$$

В таких координатах с точностью до конформного фактора можем изображать диаграммы Пенроуза исходя из световых структур и световых конусов.

Продолжение геодезической в область II (рис. 14.3) означает, что стыкующиеся между собой и не изменяющие интервалов координаты.

$$T - R = U;$$

$$T + R = V.$$

$$\left. \begin{aligned} T &= \left(\frac{r}{r_g} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{2r_g}} \sinh \left(\frac{t}{2r_g} \right) \\ R &= \left(\frac{r}{r_g} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{2r_g}} \cosh \left(\frac{t}{2r_g} \right) \end{aligned} \right\} r > r_g \text{ (I);}$$

$$\left. \begin{aligned} T &= \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) e^{\frac{r}{2r_g}} \cosh \left(\frac{t}{2r_g} \right) \\ R &= \left(1 - \frac{r_g}{r} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{2r_g}} \sinh \left(\frac{t}{2r_g} \right) \end{aligned} \right\} r < r_g \text{ (II).}$$

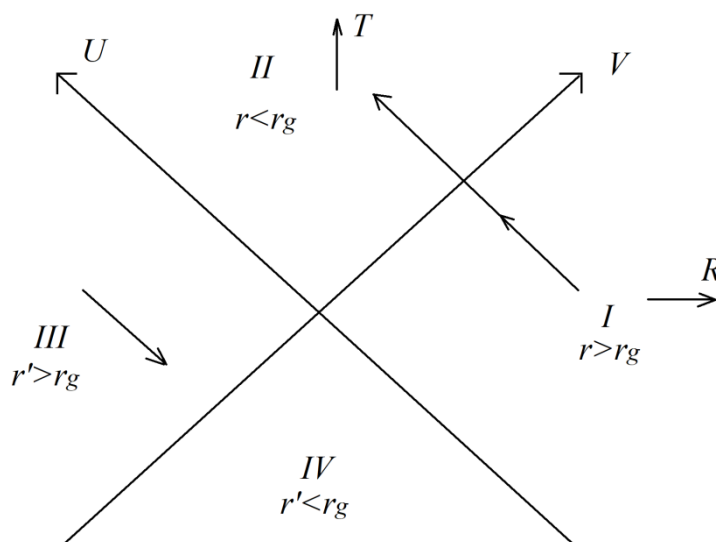


Рис. 14.3. Диаграмма Пенроуза в координатах Крускала.

Итак, работая с одним экземпляром метрики в шварцшильдовой области, мы методом последовательных преобразований координат перешли к координатам T, R :

$$ds^2 = \frac{4r_g^3}{r} e^{-\frac{r}{r_g}} (dT^2 - dR^2) - r^2(U, V)d\Omega.$$

Образующая $V=0$ тоже застывший световой конус. Эти линии являются горизонтами. Верхняя часть – горизонт событий черной дыры. Для описания четвертей III и IV нужна вторая метрика Шварцшильда. III симметрична I, но с другими координатами t, r', θ, φ . Снова запишем шварцшильдову метрику, но уже для r' и повторим рассуждения.

$$\left. \begin{aligned} T &= \left(\frac{r'}{r_g} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r'}{2r_g}} \sinh\left(\frac{t}{2r_g}\right) \\ R &= \left(\frac{r'}{r_g} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r'}{2r_g}} \cosh\left(\frac{t}{2r_g}\right) \end{aligned} \right\} r' > r_g \text{ (III);}$$

$$\left. \begin{aligned} T &= \left(1 - \frac{r_g}{r'}\right) e^{\frac{r'}{2r_g}} \cosh\left(\frac{t}{2r_g}\right) \\ R &= \left(1 - \frac{r_g}{r'}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r'}{2r_g}} \sinh\left(\frac{t}{2r_g}\right) \end{aligned} \right\} r' < r_g \text{ (IV).}$$

Не трудно заметить, что линии постоянного времени будут прямыми, которые при росте константы будут ложиться на горизонт $U = 0$. Область IV является внутренностью черной дыры, для нее прямая постоянного времени – горизонт будущего.

Линия $V=0$ – горизонт прошлого. Из горизонта прошлого мы можем продолжать геодезические, которые уходят на бесконечность в области I, в области IV упрутся в сингулярность Шварцшильда в координате $r'=0$ (аналогично для областей II и III).

Итак, мы получили полную систему геодезических (входящих и выходящих). Физический смысл такого построения в склейке черной и белой дыр. Все это называется системой Крускала.

Преобразование тангенсом

Единственное усовершенствование, которое здесь напрашивается – подтягивание бесконечности с помощью преобразования Пензроуза тангенсом.

$$UV \rightarrow \tilde{U}\tilde{V};$$

$$U = tg \tilde{U};$$

$$V = tg \tilde{V} \Rightarrow$$

$$\tilde{U}\tilde{V} \rightarrow \tilde{T}\tilde{R}.$$

Диаграмма Пенроуза для этих координат изображена на рисунке 14.4. Это аналитически полное сингулярное многообразие.

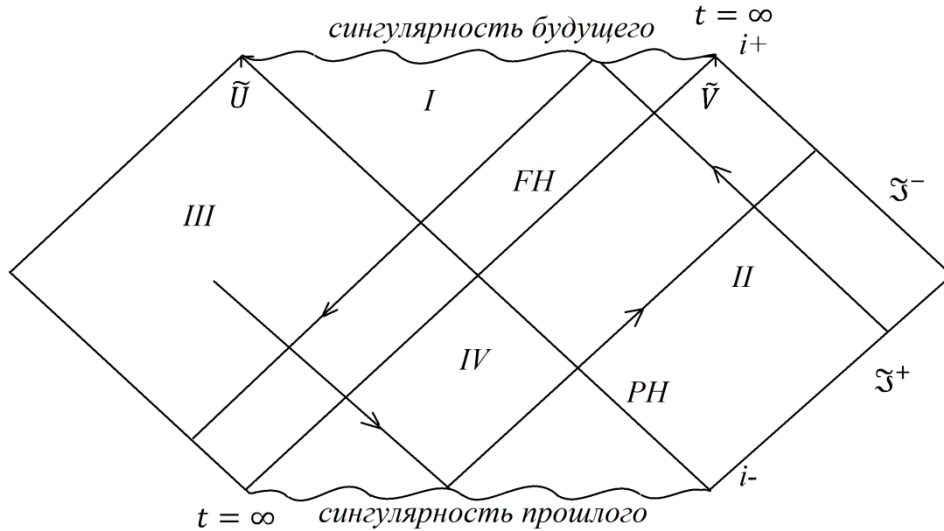


Рис. 14.4. Диаграмма Пенроуза в координатах $\tilde{U}\tilde{V}$.

Если рассмотрим трехмерное сечение и будем рассматривать только внешние области I и III. То есть достаточно зафиксировать координату $V=0$. Получаем трехмерное пространство, при $\theta = \pi/2$ - двумерное, метрика которого

$$dl_2^2 = \Omega(r)d\tilde{U}^2 - r^2 d\varphi^2.$$

Вернемся теперь к координате r , и предсказать результат достаточно просто:

$$dl_2^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Эту поверхность можно изобразить в трехмерном пространстве r, z, φ . На этой поверхности определим z :

$$z(r) = 2\sqrt{r_g(r - r_g)} + const.$$

Переход между областями I и III - мост Эйнштейна-Розина (рис. 14.5). А пересечение двух горизонтов является не точкой, а сферой.

Если рисовать аналогичные картины для $V>0$ и $V<0$, то получим динамику. На самом деле такой мост является мгновенным изображением, когда внутренняя динамика космологических решений проходит через пересечение. Но пройти через него нельзя, двигаясь со скоростями больше и меньше скорости света. То есть это

виртуальная кротовая нора, которую геометрически можно рассматривать как поверхность погружения.

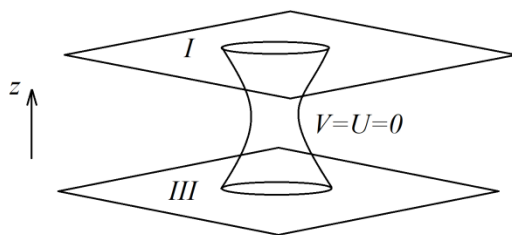


Рис. 14.5. Мост Эйнштейна-Розина.

Вопрос физического смысла всей этой конструкции не ставится. Вряд ли такую конструкцию можно создать, но мы используем ее как платформу для отыскания разного рода эффектов. Например, если рассматривать падающую времени подобную кривую, проходящую через горизонт (наблюдателя), то наблюдатель в квантовом смысле будет видеть, что частицы с энергией больше нуля обратятся в частицы с $E < 0$. Для каждой частицы возникает аналог под горизонтом, который имеет отрицательную энергию. Горизонт является регулярной поверхностью, поэтому для наблюдателя в его системе отсчета появляются частицы с положительной и отрицательной энергией. Почему бы парам таких частиц не рождались из вакуума? Это невозможно исходя из соотношений неопределенности. Можно показать следующее:

$$\Delta t \Delta E \sim \hbar \Rightarrow$$

$\Delta E = \varepsilon$ — энергия рождающихся частиц, при отождествлении энергии частицы с $\frac{\hbar}{\Delta t}$ нужно привести энергию к системе времени t . Тогда получим, что энергия частиц зависит только от радиуса горизонта событий.

Комптоновская длина таких частиц порядка гравитационного радиуса:

$$\bar{\lambda} = \frac{\hbar}{\varepsilon} \sim r_g.$$

Частицы появляются как флуктуации, и они должны выживать. Важно, что параметры частиц совпадают с радиусом горизонта событий, спектр таких частиц будет тепловым.

Лекция 15

Статические сферически симметричные решения с материей

Гравитационное поле звезды

Здесь наиболее интересно гравитационное поле звезды. Метрика Шварцшильда описывает внешнюю часть этого поля, а внутреннее решение в реальных случаях можно построить аналитически на моделях. Структура нейтронных звезд – большая задача астрофизики.

Нас будут интересовать статические поля:

$$ds^2 = A^2(r)dt^2 - B^2(r)dr^2 - r^2 d\Omega,$$

$$c = 1.$$

Рассмотрим звезду радиуса $R > r_g$, внутри находится идеальная изотропная жидкость $(\rho(r), P(r), v^\mu(r))$. Тензор энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)v^\mu v^\nu - P g^{\mu\nu}.$$

Уравнение гидродинамики:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0.$$

Поскольку мы будем решать уравнения Эйнштейна, приравнивая левую и правую части, то автоматически обеспечиваем выполнение закона сохранения тензора энергии-импульса. Уравнение Эйнштейна можно записать следующим образом:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right).$$

Перепишем компоненты тензора Риччи:

$$R_{tt} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{rB};$$

$$R_{rr} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{rB};$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - \frac{1}{B} - \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right);$$

$$R_{\varphi\varphi} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta.$$

A, B регулярные функции. Теперь мы должны решать эти уравнения совместно. Заметим, что эти компоненты тензора Риччи отличны от нуля, остальные нулевые. Из

правой части тензора энергии-импульса можно заметить, что $g^{\mu\nu}$ также не имеет недиагональных компонент. Отсюда будет следовать:

$$v^\mu = \frac{1}{\sqrt{A}} \delta_t^\mu; v_\mu = \sqrt{A} \delta_t^\mu.$$

$$R_{tt} = 4\pi G(\rho + 3P)A;$$

$$R_{rr} = 4\pi G(\rho - P)B;$$

$$R_{\theta\theta} = 4\pi G(\rho - P)r^2.$$

Запишем комбинацию:

$$\frac{R_{tt}}{A} + \frac{R_{rr}}{B} + \frac{2R_{\theta\theta}}{r^2} = 16\pi G\rho \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{1}{B}\right) + \frac{rB'}{B^2} = \frac{d}{dr} \left[r \left(1 - \frac{1}{B}\right) \right] = 8\pi G\rho \Rightarrow$$

После интегрирования:

$$\int_0^r \frac{d}{dr} \left[r \left(1 - \frac{1}{B}\right) \right] \Rightarrow$$

$$r \left(1 - \frac{1}{B}\right) = 2G \int_0^r \rho r^2 dr.$$

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr -$$

внутри шара радиусом R можно выбрать шар r , тогда $m(r)$ – масса выбранной части без учета гравитационного дефекта массы. Тогда получим простое выражение для коэффициента метрики B :

$$B^{-1} = 1 - \frac{2Gm(r)}{r}.$$

Найти функцию метрики A – более сложная задача. Можно воспользоваться следствием уравнений (законом сохранения тензора энергии-импульса), где отсутствуют вторые производные:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu [(\rho + P)v^\mu v^\nu \sqrt{-g}] + (\rho + P)\Gamma_{\nu\lambda}^\mu v^\nu v^\lambda - g^{\mu\nu} \partial_\nu P \Rightarrow$$

Поскольку все величины зависят только от радиальной переменной, то

$$\partial_v = \delta_v^r \partial_r.$$

$$v^r = 0 \Rightarrow \partial_v[(\rho + P)v^\mu v^\nu \sqrt{-g}] = 0.$$

$$\Gamma_{v\lambda}^\mu = \Gamma_{00}^\mu \Rightarrow (\rho + P)\Gamma_{v\lambda}^\mu v^\nu v^\lambda \rightarrow \frac{\rho + P}{2A} \partial_\mu A g^{\mu\nu}.$$

$$\frac{A'}{A} = -\frac{2P'}{\rho + P}$$

Давление и плотность массы связаны уравнением состояния, определяющим внутреннюю структуру: $\rho(P)$. Плотность массы примем постоянной.

$$R_{\theta\theta} = -\frac{1}{B} + 1 - \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) = 4\pi G \rho (\rho - P) r^2 \Rightarrow$$

$$\frac{B'}{B} = \frac{2G}{r^2} \frac{(m'r - m)}{1 - \frac{2Gm}{r}} \Rightarrow$$

$$R_{\theta\theta} = -\left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right) + 1 - \frac{r}{2} \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right) \left[\left(-\frac{2P'}{\rho + P}\right) + \left(\frac{2G}{r^2} \frac{(m'r - m)}{1 - \frac{2Gm}{r}}\right) \right] \Rightarrow$$

$$P'(r) = -\frac{G(\rho + P)}{r^2 \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)} (m + 4\pi r^3 \rho) -$$

уравнение Оппенгеймера–Волкова (конец 1930-х годов).

Задача с постоянной плотностью массы внутри тела

$$\rho = \text{const};$$

$$m = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} r^3 \rho, & r < R \\ M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho, & r \geq R \end{cases}.$$

В итоге уравнение записывается следующим образом:

$$P' = -\frac{4\pi G (\rho + 3P)(\rho + P)}{3 \left(1 - \frac{8\pi}{3} G \rho r^2\right)} \Rightarrow$$

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{(\rho + P)(\rho + 3P)} = -\frac{4\pi G}{3} \int_0^r \frac{r dr}{1 - \frac{8\pi G \rho r^3}{3}}, \text{ где}$$

P_0 – давление в центре шара.

Ответ:

$$\frac{\rho + 3P(r)}{\rho + P(r)} = \frac{\rho + 3P_0}{\rho + P_0} \sqrt{1 - \frac{8\pi G\rho r^2}{3}}$$

На границе шара $P(R) = 0$, а значит, из полученного выражения можем найти P_0 :

$$R^2 = \frac{3}{8\pi G\rho} \left[1 - \left(\frac{\rho + P_0}{\rho + 3P_0} \right)^2 \right] \Rightarrow$$

$$P_0 = \frac{\rho \sqrt{1 - \frac{r_g}{R}}}{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{R} - 1}}; \quad r_g = 2GM.$$

Мы видим, что знаменатель может обратиться в 0:

$$P_0 \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \frac{r_g}{R} \rightarrow \frac{8}{9}.$$

Для того, чтобы решение было регулярным: $R > \frac{9}{8}r_g$ – ограничение Бухдала.

Для реалистичной нейтронной звезды полученное приближение не очень хорошее, потому что в ней ферми-газ с другим уравнением состояний. Кроме того есть оценка устойчивости. Для нейтронной звезды уравнение состояний зависит от массы, и это уравнение политропы, в котором есть устойчивые и неустойчивые ветви. Срыв устойчивости происходит в зависимости от полной массы нейтронной звезды. С учетом неопределенности уравнения самой нейтронной жидкости ядерной материи, проводились вычисления – они показывают устойчивость при массах до 3 масс Солнца. Экспериментально нейтронные звезды больше 2 масс Солнца не наблюдаются.

$$P(r) = \rho \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{R^3}} - \sqrt{1 - \frac{r_g}{R}}}{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{R}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{R^3}}} \Rightarrow$$

$$B^{-1} = 1 - \frac{r_g r^2}{R^3};$$

$$A = \frac{1}{4} \left(3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{R}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{R^3}} \right).$$

Метрика Райсснера-Нордстрема

Теперь аналогичным образом можно вывести метрику Райсснера-Нордстрема для решений уравнений Эйнштейна-Максвелла без материи. Эта метрика очень похожа на метрику Шварцшильда, потому что основное соотношение между метрическими функциями является следствием равенства нулю следа тензора энергии-импульса.

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[F_{\mu\lambda} F_{\nu}^{\lambda} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right]$$

$$T_{\mu}^{\mu} = 0.$$

$$A_{\mu} dx^{\mu} = \Phi(r) dt; \quad E = -\partial_r \Phi \Rightarrow$$

$$R_{00} = \frac{GE^2}{B};$$

$$R_{rr} = -\frac{GE^2}{A};$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{GE^2 r^2}{AB}.$$

Закон равенства нулю ковариантной дивергенции $T_{\mu\nu}$, который эквивалентен уравнениям Максвелла. Уравнения Максвелла:

$$\nabla_{\nu} F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow$$

$$\partial_r (\sqrt{AB} r^2 F^{0r}) = 0 = \partial_r \left(\frac{r^2 E}{\sqrt{AB}} \right) \Rightarrow$$

$$E = \frac{\sqrt{AB} Q}{r^2},$$

Q – константа интегрирования.

$$R_{tt} B + R_{rr} A = 0 \Rightarrow$$

$$A' B + B' A = 0 \Rightarrow$$

$$AB = const,$$

константу можно выбрать такую, что $AB = 1$.

Из выражения для $R_{\theta\theta}$ получим:

$$\frac{A + rA'}{(rA)'} = \left(1 - \frac{GQ^2}{r^2} \right) \Rightarrow$$

$$A = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}, \quad B = \frac{1}{A} -$$

решение Райсснера-Нордстрема. Здесь, в отличие от решения Шварцшильда, совершенно другая внутренняя структура.

$$G = 1, \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)}$$

$$\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) = \Delta.$$

Если вычислять компоненты кривизны, то квадрат кривизны будет иметь особенность, также как и в метрике Шварцшильда: сингулярность в точке $r = 0$.

$$1 - \frac{2M}{r_{\pm}} + \frac{Q^2}{r_{\pm}^2} = 0 \Rightarrow$$

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2};$$

r_{\pm} – горизонты Киллинга ($|\partial_t|^2 = g_{00}$).

При $Q < 0$ ∂_t – пространственно-подобно, это внутренняя область Шварцшильда, внутри r_+ r – время, внутри r_- r – координата, $g_{00} > 0$. Это кардинально меняет структуру сингулярности. Диаграмма Пенроуза для метрики Райсснера-Нордстрема изображена на рисунке 15.1.

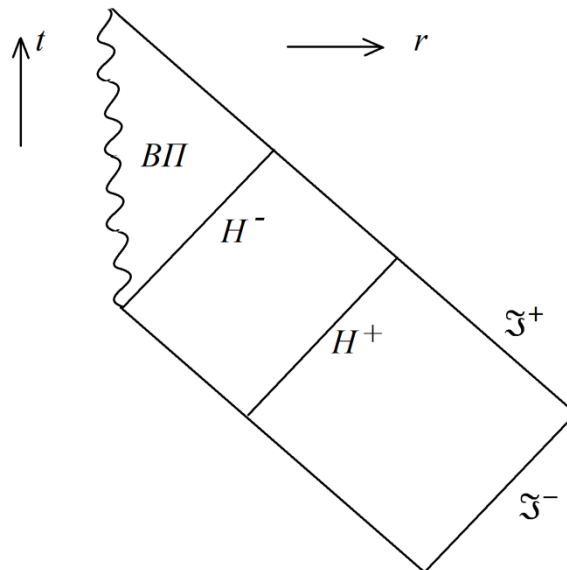


Рис. 15.1. Диаграмма Пенроуза для метрики Райсснера-Нордстрема.

Когда мы приближаемся снаружи к внешнему горизонту H^+ , наблюдается красное смещение. Далее мы входим в t -область, где характерно анизотропное космологическое решение Кантовского-Сакса. За внутренним горизонтом H^- будет сингулярность. В этой области времени подобные траектории не требуют уменьшения

координаты. Здесь можно попасть во внутреннюю r -область, двигаясь по геодезической. При этом мы не попадаем на сингулярность. На внутреннем горизонте r_+ характерно голубое смещение, то есть любая флуктуация будет бесконечно расти, конструкция неустойчива. Так, метрика Райсснера-Нордстрема устойчива только во внешней области.

Для сравнения на рисунке 15.2 приведена диаграмма Пенроуза метрики Шварцшильда. Движение из внутренней области наружу невозможно. Необходимо достраивание до координат Крускала. Для координат Райсснера-Нордстрема при вводе подклейки получаем необходимость достраивания до бесконечностей вверх и вниз.

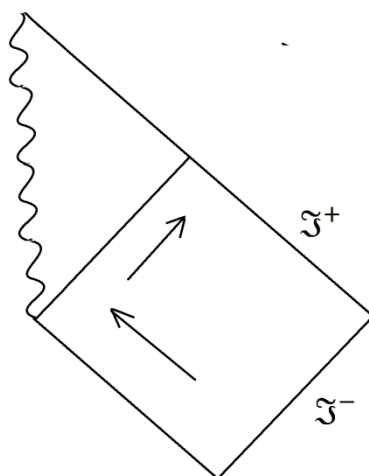


Рис. 15.2. Диаграмма Пенроуза метрики Шварцшильда.

При $Q = M$ горизонты сливаются, метрика g_{00} касается оси абсцисс, после чего уходит обратно вверх. Здесь и внутри, и снаружи R – область, но двойной горизонт дает совершенно новую физику. На диаграмме Пенроуза такая картина будет иметь совершенно другое продолжение.

При $Q > M$ никакого горизонта не существует, $g_{00} > 0$, а сингулярность есть. Такая сингулярность называется голой сингулярностью.

Пенроуз предложил *гипотезу космической цензуры* – сингулярности возможны, но должны быть скрыты горизонтом событий. Математического обоснования гипотеза не имеет.

Математическая теория и понимание решений с голыми сингулярностями пока незавершенно. Мы можем заменять голую сингулярность граничными условиями для полей и частиц в этой сингулярности. Например, можно ввести граничное условие того, голая сингулярность как аналог черной дыры, из которой выходящих решений нет.

В последнее время выяснилось, что фотонные поверхности могут быть разными. Такие поверхности в случае голых сингулярностей могут быть такими, что голую

сингулярность мы все равно не видим. Так, теория сингулярных решений находится в стадии разработки.

В решении Райсснера-Нордстрема стоит обратить внимание на то, что это система уравнений, в которой нет заряженной материи, «заряд без заряд». Заряд возникает как константа интегрирования в уравнениях Максвелла. Масса введена как константа интегрирования в уравнениях Эйнштейна.



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ