ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. СЕМИНАРЫ

КОЛЫБАСОВА
ВАЛЕНТИНА ВИКТОРОВНА

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
АХМАДЕЕВА ИЛЬДАРА ИЛНУРОВИЧА

Содержание

1 Семинар 1. Малые поперечные колебания струны 8

1.1 Примеры уравнений, рассматриваемых на курсе . . . 8
1.2 Уравнения малых поперечных колебаний . . . 9

2 Семинар 2.Задача Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в прямоугольных областях. 13

2.1 Теорема Стеклова . . . 16
2.2 Двумерная задача Штурма-Лиувилля в прямоугольнике . . . 17

3 Семинар 3. Уравнение Лапласа в прямоугольных координатах 20

3.1 Задача Штурма-Лиувилля . . . 20
3.2 Уравнение Лапласа в прямоугольных координатах . . . 21
3.3 Задача в прямоугольнике . . . 22
3.4 Краевая задача для уравнения Лапласа в прямоугольном параллелепипеде . . . 27
3.5 Внутренняя краевая задача для уравнения Пуассона . . . 28

4 Семинар 4.Решение уравнения Лапласа в полярных координатах 30

4.1 Краевая задача уравнения Лапласа в круге . . . 32

5 Семинар 5.Внешняя краевая задача для уравнения Лапласа на плоскости. 36

5.1 Уравнение Лапласа вне круга. . . . 37
5.2 Уравнение Лапласа в кольце . . . 38

6 Семинар 6. Краевая задача для уравнения Лапласа в круговом секторе 41

6.1 Краевая задача для уравнения Лапласа в кольцевом секторе . . . 45

7 Семинар 7. Внешняя краевая задача для уравнения Лапласа на плоскости 2 48

7.1 Внутренняя краевая задача для уравнения Лапласа в круговом секторе 48
7.2 Внутренняя краевая задача для уравнения Лапласа в кольцевом секторе 55

8 Семинар 8. Задача Штурма-Лиувилля в полярных координатах 1 58

8.1 Задача Штурма-Лиувилля в круге 58

9 Семинар 9. Задача Штурма-Лиувилля в полярных координатах 2 65

9.1 Задача Штурма-Лиувилля в круге 65
9.2 Задача Штурма-Лиувилля в круговом секторе 69
9.3 Задача Штурма-Лиувилля в кольце 70

10 Семинар 10. Уравнение Лапласа в сферических и цилиндрических координатах 73

10.1 Уравнение Лапласа в сферических координатах 73

11 Семинар 11. Задача Штурма-Лиувилля и уравнение Лапласа в сферических и цилиндрических координатах 79

11.1 Задача Штурма-Лиувилля на единичной сфере 79
11.2 Уравнение Лапласа в шаре 80
11.3 Внешняя краевая задача для уравнения Лапласа в пространстве 82
11.4 Краевая задача для уравнения Лапласа вне шара 83
11.5 Краевая задача для уравнения Лапласа в шаровом слое 84

12 Семинар 12. Задача Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в цилиндрических координатах 86

12.1 Задача Штурма-Лиувилля в цилиндре 86

13 Семинар 13. Задача Штурма-Лиувилля в шаровом слое и уравнение Лапласа в цилиндре 92

13.1 Задача Штурма-Лиувилля в шаровом слое 92
13.2 Уравнение Лапласа в цилиндре 95

14 Семинар 14. Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах (продолжение) 99

14.1 Уравнение Лапласа в цилиндре 99

15 Семинар 15. Решение краевых задач при помощи построения функции Грина 106

15.1 Фундаментальное решение уравнения Лапласа 106
15.2 Функция Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа . 107

15.3 Способы нахождения функции Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа . . . 109

16 Семинар 16. Нахождение функции Грина с помощью решения краевой задачи 113

16.1 Нахождение функции Грина с помощью решения краевой задачи . . . 113
16.2 Функция Грина для других граничных условий . . . 118

17 Семинар 17. Функция Грина для внешних краевых задач 120

17.1 Функция Грина для внешних краевых задач . . . 120
17.2 Построение функции Грина методом зеркальных отображений . . . 121
17.3 Построение функции Грина в плоской области методом конформных отображений . . . 126

18 Семинар 18. Построение функции Грина 128

18.1 Построение функции Грина методом зеркальных отображений . . . 128
18.2 Начальная краевая задача для уравнения теплопроводности . . . 134

19 Семинар 19. Решение начальной краевой задачи для уравнения колебаний 137

19.1 Начально-краевая задача для уравнения колебаний в ограниченной области с однородными граничными условиями . . . 137
19.2 Пример: решение начальной краевой задачи для уравнения колебаний 139

20 Семинар 20. Решение начально-краевых задач с однородными и неоднородными условиями в ограниченной области 145

20.1 Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности в ограниченной области с неоднородными граничными условиями . . . 145
20.2 Начально-краевая задача для уравнения колебаний в ограниченной области с неоднородными граничными условиями . . . 147
20.3 Пример: задача в единичном круге для уравнения теплопроводности . 148
20.4 Пример: задача с неоднородными граничными условиями . . . 150
20.5 Пример: уравнение колебаний в круге . . . 152

21 Семинар 21. Решение начально-краевых задач с однородными и неоднородными условиями в неограниченной области 157

21.1 Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности на прямой . 157

22 Семинар 22. Уравнение теплопроводности на полупрямой 164

22.1 Уравнение теплопроводности на полупрямой 164
22.2 Пример задачи на полупрямой 168

23 Семинар 23. Уравнение колебаний в неограниченной области 173

23.1 Уравнение колебаний на прямой 173
23.2 Неоднородное уравнение колебаний на прямой 176

24 Семинар 24. Начальная краевая задача для уравнения колебаний на полупрямой 179

24.1 Начальная краевая задача для уравнения колебаний на полупрямой . . 179
24.2 Начальная краевая задача с условиями Неймана 183

25 Семинар 25. Уравнение Гельмгольца 187

25.1 Уравнение Гельмгольца 187
25.2 Вывод волнового уравнения Гельмгольца 187
25.3 Вывод неволнового уравнения Гельмгольца 188
25.4 Краевые задачи для уравнения Гельмгольца в ограниченной области . 188
25.5 Частное решение однородного уравнения Гельмгольца в полярных координатах 190

26 Семинар 26. Волновое и неволновое уравнение Гельмгольца в сферических и цилиндрических координатах 195

26.1 Уравнение Гельмгольца в сферических координатах 195
26.2 Краевая задача в шаре для неволнового уравнения Гельмгольца 195
26.3 Краевые задачи для уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах 198

27 Семинар 27. Дельта-функция Дирака 203

27.1 Определение дельта-функции 203
27.2 Дельта-функция как слабый предел 204
27.3 Сдвиг аргумента дельта-функции 208
27.4 Четность дельта-функции 208
27.5 Растяжение аргумента дельта-функции 209

27.6 Замена переменной в дельта-функции 209
27.7 Дифференцирование дельта-функции 210
27.8 Первообразная дельта-функция 210
27.9 Преобразование Фурье дельта-функции 211
27.10 Многомерная дельта-функция 211

Семинар 1. Малые поперечные колебания струны

Примеры уравнений, рассматриваемых на курсе

Методы математической физики является частью математики, но сильно связаны с физикой. В этом предмете будут изучаться дифференциальные уравнения частных производных второго порядка, которые описывают многие физические процессы. Будут решаться математические задачи, которые являются моделями физических задач. Примеры уравнений, которые мы будем изучать в курсе:

- Уравнение теплопроводности: $u_t = a^2 \triangle u + 1$,

  где u_t - буквы с нижним индексом будут означать частную производную по соответствующей переменной.

  a^2 - это константа, всегда положительное вещественное число.

- - оператор Лапласиан:

  $\triangle u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$

  $z(x, y, z, t)$ - зависимые параметры.

- Уравнение колебаний:

  $u_{tt} = a^2 \triangle u + 1$ В зависимости от физической постановки задачи это уравнение может иметь разный смысл.

- Стационарное распределение электрического заряда, Уравнение Лапласа:

  $\triangle u = 0$

  Описывает стационарное распределение электрического заряда, так же может описывать стационарную диффузию или стационарную теплопроводность.

- Уравнение Гельмгольца:

  $\triangle u + cu = 0$. Уравнение описывает распространение оптических гармонических волн, звуковых либо электромагнитных.

- Уравнение Пуассона $\triangle u = f$

- Уравнение Гельмгольца $\triangle u + cu = f$

На курсе мы будем решать каждое из этих уравнений, где помимо самого уравнения будут заданы дополнительные условия.

Условия бывают **начальными**, в момент времени с заданными условиями:

$$u_{t=0} = \phi_{x,y,z}$$

$$u_{t=0} = \psi_{x,y,z}$$

Кроме того, ставятся условия на **границе области**. Если область трёхмерная, обозначим границы области как S. Тогда на этой поверхности зададим дополнительные условия, которые называются ограниченными условиями:

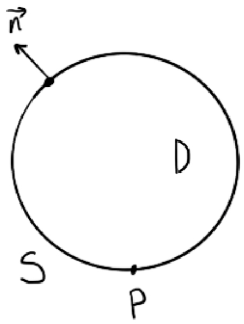

Рис. 1.1. Схема границ областей

- условие Дирихле или условие первого рода, где p - точка на поверхности s:

$$u_s = \mu(p,t)$$

- условие Неймана, второго рода:

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_s = \nu(p,t)$$

- граничное условие третьего рода:

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_s = x(p,t)$$

Уравнения малых поперечных колебаний

Рассмотрим натянутую струну в положении равновесия. Пусть один конец струны совпадает с началом координат.

T - сила натяжения струны.

Рис. 1.2. Натянутая струна

ρ - линейная плотность струны.

Будем считать, что струна отклоняется от положения равновесия незначительно. $\alpha << 1; u << l$ При колебании участок, который был прямолинейным, становится криволинейным. Его длина будет равняться:

$$\triangle\, l = \int_x^{x+\triangle x} \sqrt{1+u_x^2} d\xi$$

$$u_x - tg\alpha \approx tg\alpha \approx \alpha$$

$$u_x^2 \approx \alpha^2$$

$$\triangle \approx \int_x^{x+\triangle x} d\xi = \triangle\, x$$

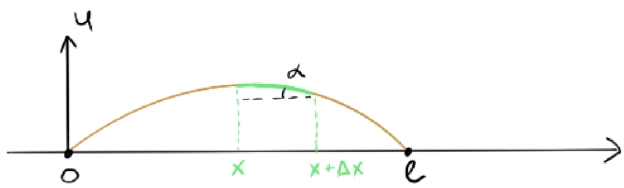

Рис. 1.3. Схема колебания струны

Сила натяжения была постоянная $T = T_0$. Сила натяжения пропорциональна удлинению струны.

$$T = k \triangle l = const$$

Проекция на ось x:

$$T\ cos\alpha = T(1-\alpha^2 + O(\alpha^2)) \approx T = T_0$$

Проекция на ось u:

$$T\ sin\alpha(x) - T\ sin\alpha(x + \triangle\, x) + F(x,t) = \frac{d}{dt} P_u$$

Запишем, чему равен импульс:

$$P_u = \int_x^{x+\triangle x} \rho(\xi) u_t(\xi,t) d\xi$$

$F(x,t)$ - внешняя сила;$T = T_0$; $sin\alpha(x) \approx \alpha(x)$

Запишем в виде интеграла:

$$T_0 \int_x^{x+\triangle x} u_{xx}(\xi,t) d\xi + \int_x^{x+\triangle x} \phi(\xi,t) d\xi = \int_x^{x+\triangle x} \rho(\xi,t) u_{tt}(\xi,t) d\xi$$

Применим формулу среднего значения для каждого из этих интегралов:

$$u_{xx}(\xi^{\star},t) \triangle x$$

$$\tilde{\phi}_{xx}(\xi^{\star\star},t) \triangle x$$

$$\rho_{xx}(\xi^{\star\star\star},t) \triangle x$$

Итого получим:

$$T_0 u_{xx}(\xi^{\star},t) + \phi(\xi^{\star\star},t) = \rho(\xi^{\star\star\star},t) u_{tt}(\xi^{\star\star\star},t)$$

$$T_0 u_{xx}(x,t) + \phi(x,t) = \rho(x,t) u_{tt}(x,t)$$

Преобразуем и получаем:

$$u_{tt} = \frac{t_0}{\rho(x,t)} u_{tt}(x,t) + \frac{\tilde{\rho}(x,t)}{\rho(x)}$$

Таким образом, мы вывели уравнение колебаний:

$$u_t t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

Зададим начальные условия:

$$u|_{t=0}$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x)$$

Концы закреплены и неподвижны:

$$u_x|_{t=0} = 0, u|_{x=l} = 0$$

Концы закреплены и подвижны:

$$u_x|_{t=0} = \mu_1(t), u|_{x=l} = \mu_2(t)$$

Концы свободны:

$$u_x|_{x=0} = 0; u_x|_{x=l} = 0$$

Концы закреплены упруго:

$$(u_x + hu)|_{x=0} = 0$$

$$(u_x + hu)|_{x=l} = 0$$

Сила натяжения u_x будет уравновешиваться силой упругости.

Так же еще возможны случаи, когда внешняя сила действует на концы.

Таким образом, математическая модель физической задачи состоит из дифференциального уравнения колебаний, начальных условий и граничных условий.

Если записать вместе уравнение, начальное и граничные условия, то получится начально краевая задача:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} = f(x,t), x \in (0,l), t > 0$$

На концах это уравнение не выполняется. В начальный момент времени t = 0.

$$u|_{t=0} = \phi(x), x \in (0,l)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), x \in (0,l)$$

$$u|_{x=0} = 0, t > 0$$

$$u|_{x=l} = 0, t > 0$$

$u(x,t)$- это неизвестная функция, которая зависит от двух переменных. Имеет непрерывность 2 порядка при $x \in (0,l), t > 0$

u, u_t непрерывна по t, при $t = 0$ так же функция непрерывна при $x = 0$ и $x = l$

Аналогично выводятся и другие уравнения.

Семинар 2.Задача Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в прямоугольных областях.

Прямоугольные области будем рассматривать одномерные – отрезок, двумерные – прямоугольник и трёхмерные – прямоугольный параллелепипед. Выясним, откуда появляется такая задача.

Вспомним начальную краевую задачу для уравнения колебаний:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (a^2 = const) \\ u|_t = 0 = \phi(x) \\ u_t|_t = 0 = \psi(x) \quad (x \in [0,l], t \geqslant 0) \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

Найдем решение уравнения колебаний вида: $u(x,t) = y(x)T(t) \not\equiv 0$ удовлетворяющее граничным условиям.

$$y(x)T''(t) = a^2 y''(x)T(t)$$

Разделяем переменные так, чтобы с одной стороны были все переменные, зависящие от t, с другой - зависящие от x.

Поделим на $y(x)T(t)a^2$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)}$$

Функции слева и справа тождественно равны друг другу при разных t и x. Это возможно только если в левой и правой части стоят константы. Иначе функции не могут быть равны, если они зависят от разных переменных. Если мы меняем t, то значение функции меняется, а так как правая часть от t не зависит равенство возможно только если левая и правая часть это одна и так же константа.

Пусть левая и правая часть $= -\lambda$

$$\frac{y''(x)}{y(x)} = -\lambda$$

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0$$

Подставим $u(x,t) = y(x)T(t)$:

$$y|_{x=0} \cdot T(t) = 0 \Rightarrow y(0) = 0$$

$$y|_{x=l} \cdot T(t) = 0 \Rightarrow y(l) = 0$$

Уравнение должно выполняться во всех точках отрезка Может существовать и не тривиальное решение при определенных значениях константы λ. Поставим задачу Штурма-Лиувилля. Ищем все значения λ, при которых существует не тривиальное решение $y(x)$. Такие λ называются *собственными значениями задачи Штурма-Лиувилля*, $y(x)$ - *собственные функции.*

Дифференциальное уравнение относительно функции y:

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad x \in (0, l) \\ y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

Пусть $\lambda > 0$:

$$y(x) = Acos\sqrt{\lambda}x + Bsin\sqrt{\lambda}x$$

$$\begin{cases} y(0) = A = 0 \\ y(l) = Acos\sqrt{\lambda}l + Bsin\sqrt{\lambda}l = 0 \end{cases}$$

$$Bsin\sqrt{\lambda}l$$

В не может быть $= 0$, т.к. это тривиальное решение. Поэтому

$$b \neq 0 \Rightarrow sin\sqrt{\lambda}l = 0$$

$$\sqrt{\lambda}l = \pi n, \quad n = 1, 2, 3...$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

$$y(x) = Bsin(\frac{\pi n}{l}x) \quad (B \neq 0)$$

Таким образом мы получили нетривиальное решение задачи Штурма-Лиувилля.

Ответ:

$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ - собственное значение.

$y_n(x) = sin\frac{pix}{l}x$ - собственная функция. $n = 1, 2, ..$

При $\lambda < 0$:

$$y'' - |\lambda| y = 0$$

Общее решение дифференциального уравнения:

$$y(x) = Ae^{\sqrt{|\lambda|}x} + Be^{-\sqrt{|\lambda|}x}$$

$$\begin{cases} y(0) = A + B = 0 \\ y(l) = Ae^{\sqrt{|\lambda|}l} + Be^{-\sqrt{|\lambda|}l} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow B = -A$

$$A(e^{\sqrt{|\lambda|}l}) = 0$$

Тривиальное решение:

$$A = B = 0$$

либо

$$e^{\sqrt{|\lambda|}l} - e^{-\sqrt{|\lambda|}l} = 0$$

$$e^{\sqrt{|\lambda|}l} = e^{-\sqrt{|\lambda|}l}$$

$$e^{2\sqrt{|\lambda|}l} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{|\lambda|}l = 0$$

Это невозможно. Поэтому существует только тривиальное решение.

Рассмотрим случай, где $\lambda = 0$:

$y''(x) = 0$

$y(x) = Ax + B$

$$\begin{cases} y(0) = B = 0 \\ y(l) = Al + B = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow A = B = 0$ Только тривиальное решение. Таким образом мы нашли собственные решения задачи Штурма-Лиувилля, когда на обоих концах ставится условие Дирихле.

Аналогично мы можем ставить другие граничные условия, будут получаться другие собственные функции. Можно записать общее свойство подобных задач Штурма-Лиувилля на отрезке:

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad x \in (a,b)$$

Однородные граничные условия при $x = a, x = b$

Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля:

1) в случае граничных условий Дирихле:

   $y(a) = 0, y(b) = 0.$

   Неймана $y'(a) = 0, y'(b) = 0.$

   3-го рода: $y(a) - h_1 y(a) = 0, y'(b) + h_2 y(b) = 0$, где $h_1 > 0, h_2 > 0$.

   А также смешанных граничных условий (любая комбинация выписанных выше условий).

   Все $\lambda \geqslant 0$

   Собственные значения $\lambda = 0$ есть $\Leftrightarrow y'(a) = 0, y'(b) = 0$ Этому собственному значению соответствует собственная функция $y(x) = const$

2) Собственных значений и собственных функций счётное количество:

   $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$

   $y_1(x), y_2(x), \ldots$

3) Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны на $[a,b]$:

   $\int_a^b y_k(x) y_l(x) dx = 0$

Аналогичные свойства будут справедливы для задач Штурма-Лиувилля в двумерных и трёхмерных, в ограниченных областях на плоскости и в пространстве.

Теорема Стеклова

Если $f(x) \in C^2[a,b]$ и удовлетворяет однородному граничному условию при $x = a, x = b$, то $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье по ортогональной системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x), \quad x\in[a,b]$$

$$f_n=\frac{(fmy_n)}{||y_n||^2}=\frac{1}{||y_n||^2}\int_a^b f(x)y_n(x)dx$$

$$||y_n||^2=\int_a^b y_n^2(x)$$

Двумерная задача Штурма-Лиувилля в прямоугольнике

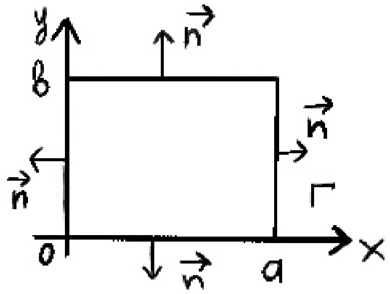

Рис. 2.1. Визуализация задачи

$$\Delta u+=0, 0<x<a,\ 0<y<$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma}=0$$
$$u(x,y)\not\equiv 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=a}=0 \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=b}=0$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}=0 \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}=0$$

Найдем решение методом разделения переменных. Найдем решения вида $u(x,y)=X(x)Y(y)\not\equiv 0$

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$$

$$X''(x)Y''(y)+X(x)Y''(y)+\lambda X(x)Y(y)=0$$

Поделим на $X(x)Y(y)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}+\lambda=0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}-\lambda=0$$

Получаем, что равенство возможно, только если в левой и правой части стоят константы. $\frac{X''(x)}{X(x)}=-\mu$, $-\frac{Y''(y)}{Y(y)}-\lambda=0=-\mu$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=a}=0$$

$$X'(0)Y(y)=0$$

$$X'(a)Y(y)=0$$

$$\begin{cases} X(x)+\mu X(x)=0 \\ X'(0)=0 \quad x\in(0,a) \\ X'(a)=0 \end{cases}$$

Собственные значения:

$$\mu_n=(\frac{\pi n}{a})^2, \quad n=0,1,2,...$$

Собственные функции:

$$X_n(x)=cos\frac{\pi nx}{a}$$

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)}-\lambda=-\mu$$

$$Y''(y)+(\mu_n+\lambda)Y(y)=0$$

$$\begin{cases} Y(y)+\nu Y(y)=0 \\ Y'(0)=0 \quad y\in(0,b) \\ Y'(b)=0 \end{cases}$$

Решения те же самые:

Собственные значения:

$$\nu_m = (\frac{\pi m}{b})^2, \quad m = 0, 1, 2, ...$$

Собственные функции:

$$Y_m(y) = cos\frac{\pi m y}{b}$$

$$-\mu_u + \lambda = \nu$$

$$\lambda = \mu_n + \nu_m$$

Собственные значения в прямоугольнике:

$$\lambda_{nm} = \frac{\pi n}{a})^2 + \frac{\pi m}{b})^2$$

Собственные функции в прямоугольнике:

$$u_{nm} = X_n(x)Y_m(y) = cos(\frac{\pi n}{a}x)cos(\frac{\pi m}{b})y)$$

Это полная система функций в прямоугольнике. Из этого следует, что система функций замкнутая. Других собственных функций и собственных значений нет.

Семинар 3. Уравнение Лапласа в прямоугольных координатах

Задача Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ \text{Однородное граничное условие на S} \end{cases}$$

Задача состоит в том, чтобы найти все значения константы λ при которых существует нетривиальное решение. Эти значения называются *собственными значениями* задачи Штурма-Лиувилля, u называются *собственными функциями* задачи Штурма-Лиувилля.

Система собственных функций задачи Штурма-Лиувилля является полной ортогональной системой. Из линейно-независимых собственных функций можно построить ортогональную систему u_n.

$$(f,g) = \int_D fg dv$$

$$f = \sum_n f_n u_n, \quad \text{где} \;\; f_n = \frac{(f,u_n)}{||u_n||^2}$$

Таблица 3.1. $y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < l$

ГУ	СЗ λ_n	СФ $y_n(x)$	$\|\|y_n\|\|^2$	n
$y(0) = 0;\ y(l) = 0$	$(\frac{\pi n}{l})^2$	$sin\frac{\pi n x}{l}$	$\frac{l}{2}$	1,2,3,...
$y'(0) = 0;\ y'(l) = 0$	$(\frac{\pi n}{l})^2$	$sin\frac{\pi n x}{l}$	$\frac{l}{2}(1+\partial_0)$	0,1,2,3,...
$y(0) = 0;\ y'(l) = 0$	$(\frac{\pi(n-\frac{1}{2}x}{l})^2$	$sin(\frac{\pi(n-\frac{1}{2}x}{l})^2$	$\frac{l}{2}$	1,2,3,...
$y'(0) = 0;\ y(l) = 0$	$(\frac{\pi(n-\frac{1}{2}x}{l})^2$	$cos(\frac{\pi(n-\frac{1}{2}x}{l})^2$	$\frac{l}{2}$	1,2,3,...

В дальнейшем будет встречаться специфическая задача Штурма-Лиувиля на отрезке с периодическими граничными условиями.

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, 0 < x < l$$

$$y(x) \equiv y(x+2l) \forall x \in R$$

$$\lambda_n = (\frac{\pi(n-\frac{1}{2}x}{l})^2 \quad ,\text{где} \quad n = 0,1,2,...$$

$$y_0(x) = 1$$

$$y_n(x) = \begin{cases} cos\frac{\pi nx}{l} \\ sin\frac{\pi nx}{l} \end{cases}$$

$$||y_n||^2 = l(1+\partial_{n0}) \quad ,\text{где}\partial_{n0} = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$

Уравнение Лапласа в прямоугольных координатах

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в ограниченной области D} \\ \text{Неоднородные граничные условия на S} \end{cases}$$

Рис. 3.1. Кривая Ляпунова

D - ограниченная область внутри краевая задача для уравнения Лиувиля. $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$

Условие Дирихле:

$$u|_s = f(p)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_s = f(p)$$

$$-gradu = a = \overrightarrow{E}$$

$$E_n|_s \sim \sigma(p)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial n}|_s$$

$$(\frac{\partial u}{\partial n} + hu)|_s = f(p)$$

Теорема о существовании и единственности решения внутри краевой задачи для уравнения Лапласа. Задача (*) $= \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в ограниченной области D} \\ \text{Неоднородные граничные условия на S} \end{cases}$

1) Задачи (*): Задачи Дирихле и третьего рода ($h(p) \geqslant 0, h(p) \not\equiv 0$), а также смешанные задачи однозначно разрешимы.

2) Задача (*) с условием Неймана разрешима $\Leftrightarrow \int_s f(p)ds = 0$. При этом решение определено с точностью до производной аддитивной постоянной.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в ограниченной области D} \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_s = f(p) \end{cases}$$

$$\iiint\limits_D \Delta u dv = \iiint\limits_D div(gradu)dv = \iint\limits_S (gradu, \overrightarrow{n})ds = \iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}ds = \iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}ds = \iint\limits_S f\ ds$$

Рассмотрим:

$$\widetilde{u} = u + c$$

$$\begin{cases} \Delta \widetilde{u} = 0 \\ \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial n}|_s = f(s) \end{cases}$$

Задача в прямоугольнике

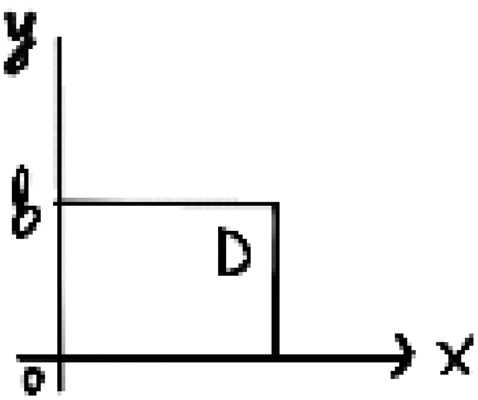

Рис. 3.2. Область решения задачи в прямоугольнике

$$\begin{cases} \Delta u = 0,\ 0 < x < a,\ 0 < y < b \\ u|_{x=0} = \varphi_1(y) \\ u|_{x=a} = \varphi_2(y) \\ u|_{y=0} = \psi_1(x) \\ u|_{y=b} = \psi_2(x) \end{cases}$$

$$u(a,b) = \varphi_2(b) = \psi_2(a)$$

$$u(a,0) = \varphi_2(0) = \psi_1(a)$$

$$u(0,b) = \varphi_1(b) = \psi_2(0)$$

$$u(0,0) = \varphi_1(0) = \psi_1(0)$$

Если мы знаем, что решение единственно – мы можем его подобрать. Будем искать решение в виде: $u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$. Получается новая краевая задача для функции $u_1 = (^*I)$:

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 \\ u_1|_{x=0} = 0 \\ u_1|_{x=a} = 0 \\ u_1|_{y=0} = \psi_1(x) \\ u|_{y=b} = \psi_2(x) \end{cases}$$

Для функции $u_2 = (^*II)$:

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0 \\ u_2|_{x=0} = \psi_1(y) \\ u_2|_{x=a} = \psi_2(y) \\ u_2|_{y=0} = 0 \\ u|_{y=b} = 0 \end{cases}$$

Решим задачу для u_1, для u_2 решается аналогично.

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 \text{ в прямоугольнике} \\ u_1|_{x=0} = 0 \\ u_1|_{x=a} = 0 \\ u_1|_{y=0} = \psi_1(x) \\ u|_{y=b} = \psi_2(x) \end{cases}$$

Найдем частные решения уравнения $\Delta u_1 = 0$, удовлетворяющие $u_1|_{x=0} = 0,\ u_1|_{x=a} = 0$ и имеющие вид $u_1(x,y) = X(x)Y(y) \not\equiv 0$:

$$\Delta u_1 = (u_1)_{xx} + (u_1)_{yy} = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

Поделим на $X(x)Y(y)$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < a$$

$$u_1|_{x=0} = 0$$

$$X(0)Y(y) = 0X(0) = 0$$

$$u_1|_{x=a} = 0X(a) = 0$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < a \\ X|_{x=0} = 0X|_{x=a} = 0 \end{cases}$$

Получается задача Штурма-Лиувилля, с уже известным решением:

$$\lambda_n = (\frac{\pi n}{a})^2$$

$$X_n(x) = sin(\frac{\pi n x}{a}),\quad n = 1, 2, ...$$

$$-\frac{Y_n''(y)}{Y_n(y)} = \lambda_n$$

$$Y_n''(y) - \lambda_n Y_n(y) = 0,\quad 0 < y < b$$

Найдем для каждого n общее решение.

$$Y_n''(y) - (\frac{\pi n}{a})^2 Y_n(y) = 0$$

Общее решение:$Y_n(y) = A_n e^{\frac{\pi n}{a} y} + B_n e^{\frac{\pi n}{a} y}$

Выберем такое ФСР, чтобы одно решение удовлетворяло одному граничному условию, при $y = 0$, а другое - при $y = b$:

$$Y_n(y) = A_n\ sh\frac{\pi n}{a} y + B_n\ sh(\frac{\pi n}{a}(b - y))$$

$$u_1 = (x, y) = X_n(x) Y_n(y) = sin(\frac{\pi n}{a} x)(A_n sh(\frac{\pi n}{a} y)) + B_n sh(\frac{\pi n}{a}(b - y))$$

Будем искать решение задачи (I) в виде ряда:

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right)\left(A_n sh\left(\frac{\pi ny}{a}\right) + Bsh\left(\frac{\pi n(b-y)}{a}\right)\right)$$

Будем предполагать, что этот ряд сходится и что его можно дважды дифференцировать почленно. Поскольку каждое слагаемое в этой сумме удовлетворяет уравнению Лапласа, тогда и сумма ряда удовлетворяет уравнению Лапласа и граничное условие при $x = 0$ и при $x = a$

Подставим $u_1(x,y)$ в условия:

$$u_1|_{y=0} = \psi_1(x), \quad u_1|_{y=b} = \psi_2(x):$$

$$u_1|_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right)\left(B_n sh\left(\frac{\pi nb}{a}\right) = \psi_1(x)\right.$$

$$u_1|_{y=b} = \sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{\pi ux}{a}\right)\left(A_n sh\left(\frac{\pi ub}{a}\right) = \psi_2(x)\right.$$

Представим функции в виде ряда. Они образуют полную ортогональную систему на отрезке. Разложим функции в ряд Фурье по системе:

$$sin\left(\frac{\pi ux}{a}\right), \quad [0,a]$$

$$\psi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n sin\frac{\pi nx}{a}$$

$$\psi_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n sin\frac{\pi nx}{a}$$

$$C_n = \frac{1}{||sin\frac{\pi nx}{a}||^2}\int_0^a \psi_1(x)\frac{\pi nx}{a}dx$$

$$D_n = \frac{1}{||sin\frac{\pi nx}{a}||^2}\int_0^a \psi_2(x)\frac{\pi nx}{a}dx$$

$$||sin\frac{\pi nx}{a}||^2 = \frac{a}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right) sh\left(\frac{\pi nb}{a}\right) = C_n sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right) sh\left(\frac{\pi nb}{a}\right) = D_n sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right)$$

$$\begin{cases} B_n sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) = C_n \\ A_n sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) = D_n \end{cases}$$

$$A_n = \frac{D_n}{sh(\frac{\pi n b}{a})} \quad B_n = \frac{C_n}{sh(\frac{\pi n b}{a})}$$

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \cdot \left(\frac{D_n}{sh(\frac{\pi n b}{a})}\right) sh\left(\frac{\pi n y}{a}\right) + \frac{C_n}{sh(\frac{\pi n b}{a})}) sh\left(\frac{\pi b - y}{a}\right)$$

Получается, что функция удовлетворяет уравнению Лапласа потому, что каждый член ряда ему удовлетворяет, это можно доказать. Функция удовлетворяет однородным граничным условиям при $x = 0$ и $x = a$ потому, что sin им удовлетворяет. И функция удовлетворяет не однородным граничным условиям, при $y = 0$ и $y = b$ потому, что мы получаем разложение в ряд Фурье. Полученная функция u_1 является решением задачи I и решение единственно.

Аналогично решается задача для функции u_2. Таким образом задача для уравнения Лапласа в прямоугольнике решена.

Частный случай:

$$\Delta u_1 = 0$$

$$u_1|_{x=0} = 0$$

$$u_1|_{x=a} = 0$$

$$u_1|_{y=0} = sin\frac{\pi x}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n sin\frac{\pi n x}{a}$$

$$u_1|_{y=b} = sin\frac{2\pi x}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n sin\frac{\pi n x}{a}$$

Отсюда следует, что:

$$C_1 = 1,\ C_n = 0 \text{при} n \neq 1$$

$$C_2 = 1,\ D_n = 0 \text{при} n \neq 2$$

В таком случае решение будет представляться не в виде ряда, а в виде конечной суммы:

$$u_1(x,y) = \frac{sin\frac{\pi n x}{a} sh\frac{\pi(b-y)}{a}}{sh\frac{\pi b}{a}} + \frac{sin\frac{2\pi x}{a} sh\frac{2\pi y}{a}}{sh\frac{2\pi b}{a}}$$

Краевая задача для уравнения Лапласа в прямоугольном параллелепипеде

$\Delta u = 0, 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = \phi_1(y,z) \\ u|_{x=a} = \phi_2(y,z) \\ u|_{y=0} = \phi_1(x,z) \\ u|_{y=b} = \phi_2(x,z) \\ u|_{z=0} = X_1(x,y) \\ u|_{z=c} = X_2(x,y) \end{cases}$$

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 \\ u_1|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=a} = 0 \\ u|_{y=0} = 0 \\ u|_{y=b} = 0 \\ u|_{z=0} = X_1(x,y) \\ u|_{z=c} = X_2(x,y) \end{cases}$$

$$u_1(x,y,z) = V(x,y)Z(z)$$

$$\Delta u_1 = (u_1)_{xx} + (u_1)_{yy} + (u_1)_{zz}$$

$$V_{xx}(x,y)Z(z) + V_{yy}(x,y)Z(z) + V(x,y)Z''(z) = 0$$

$$\frac{V_{xx}(x,y) + V_{yy}(x,y)}{V(x,y)} = \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda$$

Теперь уравнение выполняется в прямоугольнике, т.к. две переменные.

$$\begin{cases} \Delta v(x,y) + \lambda V(x,y) = 0, \quad 0 < x < a, 0 < y < b \\ V|_{x=0} = 0 \quad V|_{y=0} = 0 V|_{x=a} = 0 \quad V|_{y=b} = 0 \end{cases}$$

Это сводится к задаче Штурма-Лиувиля в прямоугольнике.

Внутренняя краевая задача для уравнения Пуассона

Уравнение Пуасона отличается от уравнения Лапласа тем, что оно неоднородно.

$$\begin{cases} \Delta u = f \in D \\ \text{неоднородные граничные условия на S} \end{cases}$$

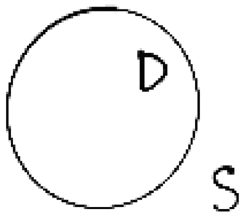

Рис. 3.3. Визуализация задачи

Ищем решения в виде $u = v + w$

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \in D \\ \text{неоднородные граничные условия на S} \quad v|_s = g \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta w = f \in D \\ \text{однородные граничные условия на S} \quad w|_s = 0 \end{cases}$$

Задача Штурма-Лиувиля в области D:

$$\begin{cases} \Delta a + \lambda a = 0 \Delta a = -\lambda a; \; \Delta a_n = -\lambda_n a_n \\ \text{однородные граничные условия на S} \end{cases}$$

Следовательно:

a_n - собственные функции, λ_n - собственные значения.

$$W = \sum_n w_n a_n(M) \quad f = \sum_n f_n a_n(M)$$

Остаётся добиться, чтобы выполнялось уравнение Пуассона.

$$\sum_n w_n \Delta a_n(M) = \sum_n f_n a_n(M)$$

$$f_n = \frac{1}{||a_n||^2} \iiint\limits_D f(m) a_n(m) dv$$

$$\sum_n -\lambda_n w_n a_n(m) = \sum_n f_n a_n(M)$$

$$-\lambda_n w_n = f_n$$

$$w_n = \frac{f_n}{\lambda_n}$$

Сумма будет: если $\lambda_0 = 0$ то $f_0 = 0,\ w_0$ - произвольное. Тогда будет единственное решение:

$$w = \sum_n -\frac{f_n}{\lambda_n} a_n(M)$$

Решение задачи с однородными граничными условиями. Когда есть λ, это решение для задачи Неймана:

$$w = w_0 + \sum_n -\frac{f_n}{\lambda_n} a_n(M)$$

Где w_0 - произвольная константа (условие разрешимости $\iiint_D f\ dv = 0$

Таким образом мы можем решить исходную задачу.

Семинар 4.Решение уравнения Лапласа в полярных координатах

$$\Delta u = 0$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$(x, y)(p, \varphi)$$

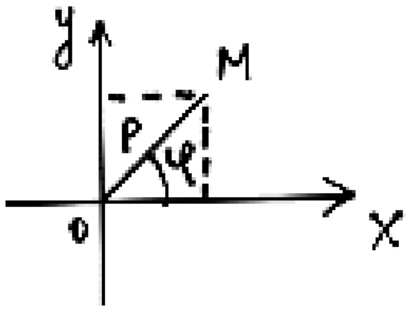

Рис. 4.1. Визуализация задачи

$$\begin{cases} x = \rho cos\varphi \\ y = \rho sin\varphi \end{cases}$$

$$x, y \in (-\infty, +\infty)$$

$$\rho \in [0, +\infty)$$

$$\varphi \in (0, 2\pi)$$

Если мы в уравнении Лапласа перейдем к полярным координатам:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} = 0$$

Ищем частные нетривиальные решения следующего вида: $u(\rho, \varphi) = P(p)\Phi(\varphi) \not\equiv 0$

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho P'(\rho)) + \frac{P(\rho)}{\rho^2}\Phi''(\rho) = 0$$

Умножаем уравнение на следующую величину: $\frac{\rho^2}{P(\rho)\Phi(\varphi)}$

$$\frac{\rho\frac{d}{d\rho}(\rho P'(\rho))}{P(\rho)} = \frac{\Phi''(\rho)}{\varphi\rho} = \lambda$$

Выполним преобразования:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0 \quad 0 < \varphi < 2\pi \\ \Phi(\varphi + 2\pi) \equiv \Phi(\varphi) \end{cases}$$

Собственные значения: $\lambda_n = n^2,\ n = 0, 1, 2, ...$

Собственные функции: $\Phi_0(\varphi) = 1, \Phi_n(\varphi) = \begin{cases} cos\ n\ \varphi \\ sin\ n\ \varphi \end{cases}$, n = 1,2,... .

$$\frac{\rho\frac{d}{d\rho}(\rho P'(\rho))}{P(\rho)} = \lambda_n$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}(\rho P'(\rho)) - \lambda_n P(\rho) = 0$$

Получаем дифференциальное уравнение для функции P.

$$\rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) - n^2 P(\rho) = 0$$

Это линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами – *уравнение Эйлера.* С помощью замены переменных сводится к уравнению с переменными с постоянными коэффициентами, $\rho > 0$.

$$\rho = e^t$$

$$P'(\rho) = \frac{dP(\rho)}{d\rho}$$

$$\dot{P}(t) = \frac{dP(t)}{dt} = \frac{dP((\rho(t))}{dt} = P'(\rho)e^t$$

$$P''(\rho) = \left(\frac{P(t(\rho))}{e^{t(\rho)}}\right)'_\rho = \left(\frac{P(t(\rho))}{\rho}\right)'_\rho = \frac{\ddot{P}\cdot\frac{1}{\rho} - \dot{P}}{\rho^2} = \frac{\rho\ddot{P} - \rho\dot{P}}{\rho^3}$$

$$\frac{\ddot{P} - \rho\dot{P}}{\rho} + \dot{P} - n^2 P = 0$$

$$\ddot{P} - n^2 P = 0$$

$$n \geqslant 0$$

Решим это уравнение при $n = 0$:

$$\ddot{P}(t) = 0$$

$$P = A_0 + B_0 t$$

$$P_0(\rho) = A_0 + B_0 ln\rho$$

при $n > 0$:

$$\ddot{P} - n^2 P = 0$$

$$P = A_n e^{nt} + B_n e^{-nt}$$

$$P_n(\rho) = A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}$$

Итого, частные решения в полярных координатах:

$$u_n(\rho,\varphi) = P_n(\rho)\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} A_0 + B_0 ln\rho, n = 0 \\ (A_n\rho^n + B_n\rho^{-n})cos\ n\varphi, n = 1,2,... \\ (C_n\rho^n + D_n\rho^{-n})sin\ n\varphi, n = 1,2,... \end{cases}$$

Краевая задача уравнения Лапласа в круге

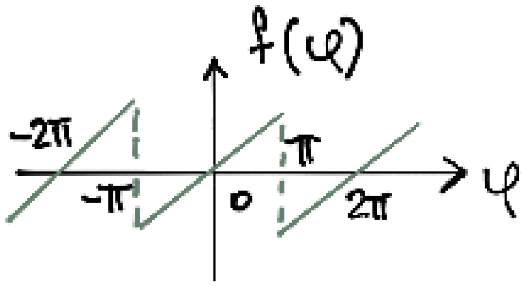

Рис. 4.2. Визуализация задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{в} D \\ \text{Неоднородные граничные условия на } \Gamma \end{cases}$$

Если мы знаем, что условие существует и единственно, то мы можем искать решение задачи в виде суммы частных решений, которые найдены ранее. Тогда в силу единственности - других решений нет.

Для примера рассмотрим задачу Неймана:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{в} D \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = f(\phi) \end{cases}$$

Условие разрешимости:

$$\int_0^{2\pi} f(\phi)d\phi = 0$$

Если это условие не выполняется, то краевая задача не имеет решений. Если выполняется, то краевая задача имеет множество решений, которые будут отличаться на произвольную константу.

В полярных координатах:

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial r}|_\Gamma$$

Ищем решение краевой задачи в виде суммы частных решений уравнения Лапласса, периодических по ϕ с периодом 2ϕ и ограниченных при $\rho = 0$

$$u(\rho, phi) = A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n cos\ n\phi + C_n sin\ n\phi)$$

Подставим в граничные условия:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1}(A_n cos' n\phi) + C_n sin\ n\phi$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}|_{\rho=a} = \sum_{n=0}^{\infty} na^{n-1}(A_n cos\ n\phi + C_n sin\ n\phi) = f(\phi)$$

Должно выполняться при всех $\phi \in [0, 2\pi]$ Представим $f(\phi)$ в виде ряда Фурье по системе функций:

$$\Big\{1, cos\ n\phi, sin\ n\phi$$

$$f(\phi) = E_0 + \sum_{n=1}^{\inf(E_n cos\ \ n\phi + F_n sin\ \ n\phi)}$$

$$E_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)d\phi$$

$$E_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi) cos\ n\phi d$$

$$E_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi) sin\ n\phi d$$

Значение нормальной производной u на границе:

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}(A_n\ cosn\phi + C_n\ sinn\phi) = E_0 + \sum_{n=1}^{\inf(E_n\ \ cosn\phi + F_n\ \ sinn\phi)}$$

Поскольку система полная замкнутая, если она разлагается в ряд Фурье, то разлагается единственным образом. Т.е. все коэффициенты в левой и правой части должны совпадать.

$$\begin{cases} E_0 = 0 \\ na^{n-1}A_n = E_n \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} f(\phi)d\phi = 0 \\ na^{n-1}C_n = F_n \end{cases}$$

$$A_n = \frac{E_n}{na^{n-1}} \quad C_n = \frac{F_n}{na^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Итого решение:

$$u(\rho, u) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{na^{n-1}}(E_n cos\ n\phi + F_n sin\ n\phi)$$

A_0 - произвольная константа.

Например, пусть $f(\phi) = \phi, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$ График будет выглядеть следующим образом (Рис. 4.3)

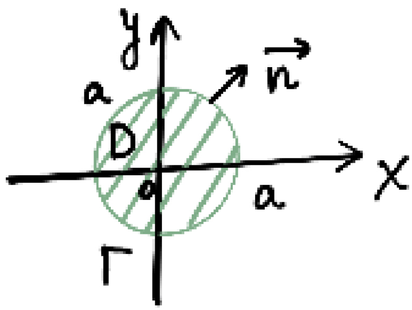

Рис. 4.3. Визуализация задачи

Условие разрешимости:

$$E_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f('phi)d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi d\phi = 0$$

$$E_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi cos\ n\phi d\phi = 0$$

$$F_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi sin\ n\phi d\phi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi sin\ n\phi d\phi$$

$$= \frac{2}{\pi}(-\frac{\phi cos\ n\phi}{n}|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} cos\ n\phi d\phi) = -\frac{2}{n}(-1)^n$$

В таком случае получилось решение:

$$u(\rho,\phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\inf \frac{2\rho^n(-1)^{n-1}}{n^2 a^{n-1}} sin\phi}$$

Семинар 5.Внешняя краевая задача для уравнения Лапласа на плоскости.

Рассмотрим задачу: Во внешней задаче граничных условий недостаточно для

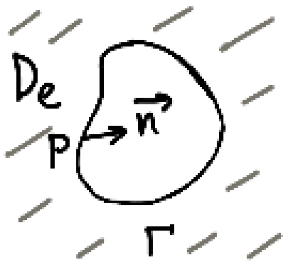

Рис. 5.1. Визуализация задачи

обеспечения единственности условий.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{в} D_e \subset R^2 \\ \text{неоднородные граничные условия на } \Gamma. \\ \text{Функция ограничена в} D_e \end{cases}$$

Во внешней задаче граничных условий недостаточно для обеспечения единственности условий.

Теорема существования и единственности.

1) В случае граничного условия 1-го рода, 3-то рода:

$$(\frac{\partial u}{\partial n} + hu)|_\Gamma = f(p), h \geqslant 0, h \not\equiv 0)$$

и смешанных граничных условий решение краевой задачи существует и едино.

2) В случае граничного условия 2-го рода на Г

$$\frac{\partial u}{\partial n}|\Gamma = f(p)$$

краевая задача имеет решения $\Leftrightarrow \oint f \ dl = 0$ При этом решение краевой задачи определяется с точностью до производной аддитивной плоскости.

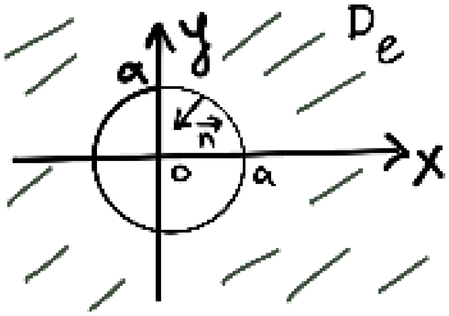

Рис. 5.2. Визуализация задачи

Уравнение Лапласа вне круга.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \rho > a \\ u|_{\rho} = a = f(\rho) \\ \text{и ограниченные в области} \rho > a \end{cases}$$

Будем искать решение в виде суммы найденных ранее частных решений в полярных координатах:

$$u_0(\rho,\varphi) = A_0 + B_0 ln\rho$$

$$u_n(\rho,\varphi) = \begin{cases} A_n\rho^n + B_n\rho^{-n} cosn\varphi \\ C_n\rho^n + D_n\rho^{-n} sinn\varphi \\ n = 1, 2, ... \end{cases}$$

Ищем решение краевой задачи в виде:

$$u(\rho,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n}(B_n cosn\varphi + D_n sinn\varphi)$$

Подставим в граничные условия:

$$u|_{\rho=a} = A_0 + \sum A^{-n}(B_n cosn\varphi) = f(\varphi) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(E_n\ cosn\varphi + F_n sin\ n\varphi)$$

$$E_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi$$

$$E_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)cos\ n\varphi d\varphi d\varphi$$

$$F_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi) sin\ n\varphi d\varphi d\varphi$$

$$\begin{cases} E_0 = A_0 \\ a^{-n}B_n = E_n, \quad n = 1,2,... \\ a^{-n}D_n = F_n \end{cases}$$

Решение задачи: $\longrightarrow A_0 = E_0, B_n = a^n E_n, D_n = a^n F_n$

$$u(\rho,\varphi) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\rho^n}(E_n cos\ n\varphi + F_n sin\ n\varphi)$$

Такая функция u удовлетворяет уравнению Лапласа вне круга, удовлетворяет граничному условию на границе круга и условию ограниченности.

Уравнение Лапласа в кольце

$$\begin{cases} \Delta u = 0,\ a < \rho < b \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\rho=a} = f_1 = (\varphi) \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\rho=b} = f_2 = (\varphi) \end{cases}$$

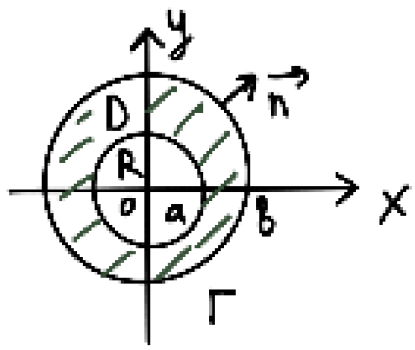

Рис. 5.3. Визуализация задачи

$$\oint \frac{\partial u}{\partial n} dl = 0$$

Если эти условия не выполняются, то задача не имеет решений.

$$\int_0^{2\pi} f_1(\varphi) a d\varphi + \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) b d\varphi = 0$$

Ищем решение краевой задачи в виде:

$$u(\rho,\varphi) = A_0 + B_0 ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}[(A_n\rho^n) + B_n\rho^{-n}cos\ n\varphi + (C_n\rho^n + D_n\rho^{-n})sin\ n\varphi]$$

$$\rho^2 P_n'' + \rho P_n'(\rho) - n^2 P_n(\rho) = 0$$

$$P_n(\rho) = A_n\rho^n + B_n\rho^{-n}$$

$$P_n(\rho) = A_n P_n^{(a)}(\rho) + B_n P_n^{(a)}(\rho)$$

$P_n^{(a)}(\rho)$ и $P_n^{(a)}(\rho)$ - решения уравнения Эйлера, удовлетворяющие условиям:

$$\frac{d}{d\rho}P_n^{(a)}|_{\rho=a} = 0 \qquad \frac{d}{d\rho}P_n^{(b)}|_{\rho=b} = 0$$

Для линейной независимости:

$$P_n^{(a)} \not\equiv 0 \qquad P_n^{(b)} \not\equiv 0$$

$$P_n^{(a)}(\rho) = d\rho^n + \beta\rho^{-n}$$

$$\frac{d}{d\rho}P^{(a)_n}|_{\rho=a} = (n\alpha\rho^{n-1} - n\beta\rho^{-n-1})|_{\rho=a} = n\alpha a^{n-1} - n\beta a^{-n-1} = 0$$

$$\alpha a^{2n} - \beta = 0 \Longrightarrow \beta = \alpha a^{2n}$$

Решение задачи:

$$P_n(a)(\rho) = \rho^n + a^{2n}\rho^{-n}$$

$$P_n(b)(\rho) = \rho^n + b^{2n}\rho^{-n}$$

При $n = 0:\quad \rho^2 P_0''(\rho) + \rho P_0'(\rho) = 0$ Общее решение:

$$P_0(\rho) = A_0 + B_0 ln\rho$$

Для задачи Дирихле:

$$P_0(\rho) = A_0 P_0^{(a)} + B_0 P_0^{(b)}\rho$$

$$P_0^{(a)}|\rho = a = 0 \quad P_0^{(b)}|\rho = b = 0$$

$$P_0^{(a)} \not\equiv 0 \quad P_0^{(b)} \not\equiv 0$$

$$P_0^{(a)} = \alpha + \beta ln\rho \longrightarrow \alpha = -\beta ln\ a$$

$$P_0^{(a)}(\rho) = -ln\ a + ln\rho = ln\frac{\rho}{a}$$

$$P_0^{(b)}(\rho) = ln\frac{\rho}{b}$$

Удобнее будет искать $u(\rho,\varphi)$ в виде:

$$u(\rho,\varphi) = A_0 + B_0 ln\rho +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(A_nP_n^{(a)}(\rho) + B_nP_n^{(b)}(\rho)cos\ n\varphi + (C_nP_n^{(a)}(\rho)) + D_nP_n^{(b)}(\rho)sinn\varphi]$$

где $P_n^{(a)} = \rho^n + a^{2n}\rho^{-n}$, $P_n^{(b)} = \rho^n + b^{2n}\rho^{-n}$

$$\frac{d}{d\rho}P_n^{(a)}|_{\rho=a} = 0 \quad \frac{d}{d\rho}P_n^{(b)}|_{\rho=b} = 0$$

Подставляем функцию $u(\rho,\varphi)$ в граничные условия:

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}|_{\rho=a} = \frac{B_0}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}[(A_n\frac{d}{d\rho}P_n^{(a)}|_{\rho=a} + B_n\frac{d}{d\rho}P_n^{(b)}|_{\rho=a})cos\ n\varphi$$

$$+(C_n\frac{d}{d\rho}P_n^{(a)}|_{\rho=a} + D_n\frac{d}{d\rho}P_n^{(b)}|_{\rho=a})sin\ n\varphi]$$

Итого, после всех преобразований получим:

$$E_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -f_1(\varphi)d\varphi$$

$$E_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} -f_1(\varphi)cos\ n\varphi d\varphi$$

$$F_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} -f_1(\varphi)sin\ n\varphi d\varphi$$

$$\begin{cases} \frac{B_0}{a} = E_0 \\ B_nn(a^{n-1} - b^{2n}a^{-n-1}) = E_n \\ D_nn(a^{n-1} - b^{2n}a^{-n-1}) = F_n \end{cases}$$

$$B_0 = aE_0$$

$$B_n = \frac{E_n}{n(a^{n-1} - b^{2n}a^{-n-1})}$$

$$D_n = \frac{F_n}{n(a^{n-1} - b^{2n}a^{-n-1})}$$

Семинар 6. Краевая задача для уравнения Лапласа в круговом секторе

Рассмотрим сектор круга:

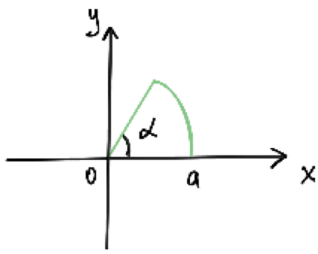

Рис. 6.1. Визуализация задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0,\ 0<\rho<a,\ 0<\varphi<\alpha \\ u|_{\rho=a} = f(\varphi) \\ u|_{\rho=0} = f_1(\rho) \\ u|_{\varphi=\alpha} = f_2(\rho) \end{cases}$$

Получается краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа в круговом секторе (0). Такая задача имеет только единственное решение.

Ищем решение в виде: $u(\rho,\phi) = v(\rho,\phi) + w(\rho,\phi)$

Краевая задача для функции v (1):

$$\begin{cases} \Delta v = 0,\quad 0<\rho<a,\ 0<\varphi<\alpha \\ v|_{\rho=a} = f(\varphi) \\ v|_{\rho=0} = 0 \\ u|_{\varphi=\alpha} = 0 \end{cases}$$

Краевая задача для функции W (2):

$$\begin{cases} \Delta w = 0,\quad 0<\rho<a,\ 0<\varphi<\alpha \\ w|_{\rho=a} = 0 \\ w|_{\rho=0} = f_1(\rho) \\ w|_{\varphi=\alpha} = f_2(\rho) \end{cases}$$

Найдём частные решения уравнения Лапласа вида $v(\rho,\varphi) = P(\rho)\phi(\varphi) \not\equiv 0$.

$$\Delta v = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\delta\partial}(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\partial}(\rho P'(\rho)\phi(\rho) + \frac{P(\rho)}{\rho^2}\phi''(\varphi) = 0$$

$$\frac{\rho\frac{d}{d\rho}(\rho P'(\rho))}{P(\rho)} = -\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)}$$

Равенство выполняется только если в левой и правой частях стоят константы. Обозначим их для λ

$$\begin{cases} \phi''(\varphi) + \lambda\phi(\varphi) = 0, \ 0 < \varphi < \alpha \\ \phi(0) = 0, \ \ \phi(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Собственные значения:

$$\lambda_n = (\frac{\pi n}{\alpha})^2$$

Собственные функции:

$$\phi_n(\varphi) = sin(\frac{\pi n}{\alpha}\varphi), \ \ n = 1,2,...$$

$$||\phi||^2 = \frac{\alpha}{2}$$

$$\rho\frac{\rho\frac{d}{d\rho}(\rho P'n(\rho))}{P_n(\rho)} = \lambda_n$$

$$\rho^2 P_n''(\rho) + \rho P_n'(\rho) - \lambda_n P_n(\rho) = 0, \ \ 0 < \rho < a$$

Найдем общее решение этого уравнения. Сделаем замену переменной и получим уравнение Эйлера.

$$\rho^2 P_n''(\rho) + \rho P_n'(\rho) - n^2 P_n(\rho) = 0$$

$$P_n(\rho) = \begin{cases} A_0 + B_0 ln\rho, n = 0 \\ A_n\rho^n + B_n\rho^{-n}, \ n = 1,2,3... \end{cases}$$

Общее решение этого уравнения будет иметь вид:

$$P_n(\rho) = A_n\rho^{\sqrt{\lambda_n}} + B_n\rho^{P} - \sqrt{\lambda_n}$$

Из условия ограниченности при $\rho = 0$:

$$B_n = 0$$

$$V_n(\rho,\varphi) = P_n(\rho)\phi_n(\varphi) = A_n \rho^{\lambda_n} sin(\frac{\pi n}{\alpha}\varphi)$$

$$\lambda_n = (\frac{\pi n}{\lambda})^2, \quad n = 1, 2, ...$$

Ищем решение краевой задачи вида:

$$v(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\inf A_n \rho^{\lambda n} sin(\frac{\pi n}{\lambda}\varphi)}$$

$$V|_{\rho=a} = \sum_{n=1}^{\inf A_n a^{\lambda n} sin(\frac{\pi n}{\lambda}\varphi) = f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\inf C_n sin(\frac{\pi n}{\lambda}\varphi)}}$$

$$C_n = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(\varphi) sin(\frac{\pi n}{\lambda}\varphi) d\varphi$$

$$A_n a^{\sqrt{\lambda_n}} = C_n \Longrightarrow A_n = \frac{C_n}{a^{\sqrt{\lambda_n}}}$$

Таким образом решение краевой задачи (1):

$$V(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\inf \frac{C_n}{a\sqrt{\lambda_n}} \rho^{a\sqrt{\lambda_n}} sin(\frac{\pi n}{\lambda}\varphi)}$$

Краевая задача для функции W (2):

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \quad 0 < \rho < a, \ 0 < \varphi < \alpha \\ w|_{\rho=a} = 0 \\ w|_{\rho=0} = f_1(\rho) \\ w|_{\varphi=\alpha} = f_2(\rho) \end{cases}$$

$$w = P(\rho)\phi(\varphi) \not\equiv 0$$

$$\frac{\rho \frac{d}{d\rho}(\rho P'(\rho))}{P(\rho)} = -\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)} = -\lambda$$

$$\begin{cases} \rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) + \lambda P(\rho) = 0, \quad 0 < \rho < a \\ P(a) = 0, \quad |P(0)| < \infty \end{cases}$$

При $\lambda < 0$ общее решение уравнения имеет вид:

$$P(\rho) = A\rho^{\sqrt{-\lambda}} + B\rho^{-\sqrt{-\lambda}}$$

Из граничных условий: $B = 0$; $Aa^{\sqrt{-\lambda}} = 0 \Longrightarrow A = 0$

При $\lambda = 0 : P(\rho) = A + Bln\rho$ только если A и B равны 0. Следовательно только тривиальное решение.

При $\lambda > 0$:

$$P(\rho) = Acos(\sqrt{\lambda}ln\rho) + Bsin(\sqrt{\lambda}ln\rho)$$

Разрывное решение при $\rho = 0$ нам не подходит.

Задачу (2) невозможно решить методом разделения переменных, но можно решить с помощью функции Грина.

Другой способ- будем искать w решение в виде: $w(\rho,\varphi) = w_1(\rho,\varphi) + w_2(\rho,\varphi)$, где $w_1(\rho,\varphi)$ - достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условиям:

$$w_1|_{\varphi=0} = f_1(\rho), \quad w_1|_{\varphi=\alpha} = f_2(\rho)$$

Например:

$$w_1|_{\varphi=0} = f_1(\rho) + \frac{\varphi}{\lambda}(f_2(\rho) - f_1(\rho))$$

Для w_2 получается задача (3):

$$\begin{cases} \Delta w_2 = Deltaw_1, \quad 0 < \rho < a, \ 0 < \varphi < \alpha \\ w_2|_{\rho=a} = -w_1|_{\rho=a} \\ w_2|_{\varphi=0} = 0 \\ w_2|_{\varphi=\alpha} = 0 \end{cases}$$

$$w_2 = \overline{w}_2 + \tilde{w}_2$$

$$\begin{cases} \Delta\overline{w}_2 = -\Delta w_1, 0 < \rho < a, \quad 0 < \varphi < \alpha \\ \overline{w}_2|_{\rho=a} = 0 \\ \overline{w}_2|_{\varphi=0} = 0 \\ \overline{w}_2|_{\rho=\alpha} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\tilde{w}_2 = 0, \quad 0 < \rho < a, 0 < \varphi < \alpha \\ \tilde{w}_2|_{\rho=a} = -w_1|_{\rho=a} \\ \tilde{w}_2|_{\rho=0} = 0 \\ \tilde{w}_2|_{\rho=\alpha} = 0 \end{cases}$$

Для w_2 решение ищется в виде:

$$\overline{w}_2 = \sum_n C_n S_n(\rho,\varphi), \text{ где } S_n(\rho,\varphi)$$

собственные задачи Штурма-Лиувиля в секторе:

$$\begin{cases} \Delta S + \lambda S = 0 \text{ в } D \\ S|_{\Gamma=0} \end{cases}$$

Краевая задача для уравнения Лапласа в кольцевом секторе

Рассмотрим сектор кольца:

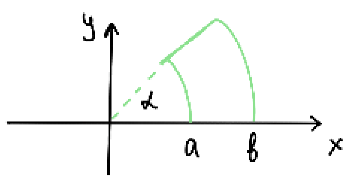

Рис. 6.2. Визуализация задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad a < \rho < b, 0 < \varphi < \alpha \\ u|_{\rho=a} = f_1(\varphi) \\ u|_{\rho=b} = f_2(\varphi) \\ u|_{\varphi=0} = g_1(\rho) \\ u|_{\varphi=0} = g_2(\rho) \end{cases}$$

Разобьем эту задачу на две: с однородными условиями по ρ и с однородными условиями по ϕ Ищем решение в виде суммы двух функций: $u = v + w$

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v|_{\rho=a} = f_1(\varphi) \\ v|_{\rho=b} = f_2(\varphi) \\ v|_{\varphi=0} = 0 \\ v|_{\varphi=\lambda} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \\ w|_{\rho=a} = 0 \\ w|_{\rho=b} = 0 \\ w|_{\varphi=0} = g_1(\rho) \\ w|_{\varphi=\lambda} = g_2(\rho) \end{cases}$$

$$V = P(\rho)\phi(\varphi)$$

$$\phi_n = sin(\frac{\pi n}{\alpha}\varphi)$$

$$\lambda_n = (\frac{\pi n}{\alpha})^2$$

$$P_n(\rho) = A_n$$

$$P_n(\rho) = A_n\rho^{\sqrt{\lambda n}} + B_n\rho^{-\sqrt{\lambda n}}$$

Либо в другом виде:

$$P_n(\rho) = A_n P_n^{(a)}(\rho) + B_n P_n^{(b)}(\rho)$$

$$P_n^{(a)}(a) = 0, \quad P_n^{(b)}(b) = 0$$

$$P_n^{(a)}(\rho) = (\frac{\rho}{a})^{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{a}{\rho})^{-\sqrt{\lambda_n}}$$

$$P_n^{(b)}(\rho) = (\frac{\rho}{b})^{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{b}{\rho})^{-\sqrt{\lambda_n}}$$

В случае других граничных условий будут другие функции.

Для функции w:

$$w = P(\rho)\phi(\varphi)$$

$$\begin{cases} \rho^2 P''(\rho) + \lambda P(\rho) = 0, \quad a < \rho < b \\ P(a) = 0 \quad P(b) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = (\frac{\pi n}{ln\frac{b}{a}})^2, \quad n = 1, 2, ..$$

$$P_n(\rho) = sin(\sqrt{\lambda_n} ln\frac{\rho}{a})$$

$$\phi_n''(\varphi) - \lambda_n \phi_n(\varphi) = 0, \quad 0 << \alpha$$

Частное решение:

$$\phi_n(\varphi) = A_n sh(\sqrt{\lambda_n}) + B_n sh(\sqrt{\lambda_n}(\alpha -))$$

Семинар 7. Внешняя краевая задача для уравнения Лапласа на плоскости 2

Уравнение Лапласа на плоскости записывается следующим образом:

$$\Delta u = 0$$

Решение в полярных координатах получаются следующие:

$$u_0(\rho,\varphi) = A_0 + B_0 \ln \rho$$

$$u_n(\rho,\varphi) = (A_n\rho^n + B_n\rho^{-n})\cos n\varphi + (C_n\rho^n + D_n\rho^{-n})\sin n\varphi \quad n = 1,2,3,\dots$$

Это решение удовлетворяет уравнению Лапласа на всей плоскости. С помощью этого решения можно найти решения для краевых задач Лапласа в круге. Вне круга остаются решения, которые ограничены на всей плоскости.

Внутренняя краевая задача для уравнения Лапласа в круговом секторе

Рассматривается внутренняя краевая задача для уравнения Лапласа в круговом секторе. Рассматривается центр круга с центром в начале координат на плоскости. Одна граница расположена на оси абсцисс. Угол раствора — α, радиус — a. Тогда уравнение Лапласа должно выполняться везде внутри этого сектора:

$$\Delta u = 0, \quad 0 < \rho < a, \quad 0 < \varphi < \alpha$$

На границе ставятся граничные условия. Граница состоит из трех участков: 2 прямолинейных участка и 1 участок, который представляет собой дугу окружности. На каждом участке некоторые граничные условия ставятся отдельно. Рассматриваются граничные условия первого порядка, что означает рассматривается задача Дирихле. На дуге задается:

$$u|_{\rho=a} = f(\varphi)$$

На двух прямолинейных границах задается:

$$u|_{\varphi=0} = f_1(\rho)$$

$$u|_{\varphi=\alpha} = f_2(\rho)$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < \rho < a, \quad 0 < \varphi < \alpha \\ u|_{\rho=a} = f(\varphi) \\ u|_{\varphi=0} = f_1(\rho) \\ u|_{\varphi=\alpha} = f_2(\rho) \end{cases} \tag{7.1}$$

Такая задача всегда имеет единственное решение.

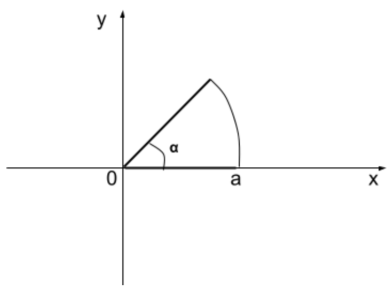

Рис. 7.1. Задача Дирихле

Когда уравнение Лапласа в прямоугольнике, то решение можно найти методом разделением переменных. По одной переменной ставится однородное граничное условие, а по другой переменной ставится неоднородное граничное условие. Когда уравнение Лапласа в круге, то по переменной φ нет граничных условий, а есть условие периодичности.

Решение этой задачи необходимо искать в виде суммы двух функций, для каждой из которых одно из граничных условий по одной переменной будет однородным.

$$u(\rho,\varphi) = v(\rho,\varphi) + w(\rho,\varphi)$$

Краевая задача для функции v:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \quad 0 < \rho < a, \quad 0 < \varphi < \alpha \\ v|_{\rho=a} = f(\varphi) \\ v|_{\varphi=0} = 0 \\ v|_{\varphi=\alpha} = 0 \end{cases} \tag{7.2}$$

Краевая задача для функции w:

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \quad 0 < \rho < a, \quad 0 < \varphi < \alpha \\ w|_{\rho=a} = 0 \\ w|_{\varphi=0} = f_1(\rho) \\ w|_{\varphi=\alpha} = f_2(\rho) \end{cases} \tag{7.3}$$

Поскольку уравнение Лапласа и граничные условия линейные, то если функции v и w являются решениями соответствующих краевых задач, то их сумма будет удовлетворять всем условиям исходной задачи.

Сначала необходимо найти решение задачи (7.2). Необходимо найти частное решение уравнения Лапласа, которое представляется в виде произведения функции, зависящей только от ρ, и функции, зависящей только от φ.

$$v(\rho,\varphi) = P(\rho)\Phi(\varphi) \not\equiv 0$$

Уравнение Лапласа в полярных координатах принимает следующий вид:

$$\Delta v = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho P'(\rho)\right)\Phi(\varphi) + \frac{P(\rho)}{\rho^2}\Phi''(\varphi) = 0$$

$$\frac{\rho\frac{d}{d\rho}(\rho P'(\rho))}{P(\rho)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda$$

Это уравнение должно выполняться везде внутри сектора, то есть оно должно выполняться тождественно. Сначала решается то уравнение, которое соответствует задаче Штурма-Лиувилля.

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0 \quad 0 < \varphi < \alpha$$

$$\Phi(0) = 0$$

$$\Phi(\alpha) = 0$$

Таким образом получается задача Штурма-Лиувилля на отрезке. Такое дифференциальное уравнение есть однородное граничное условие на концах этого отрезка. Задача Дрихле на отрезке Штурма-Лиувилля имеет следующее собственное значение и собственные функции:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2$$

$$\Phi_n(\varphi) = \sin\left(\frac{\pi n}{\alpha}\varphi\right) \quad n = 1, 2, \ldots$$

Квадрат нормы этих функций:

$$||\Phi_n||^2 = \frac{\alpha}{2}$$

Найденное λ подставляется в исходное равенство и записывается дифференциальное уравнение для функции $P(\rho)$.

$$\frac{\rho \frac{d}{d\rho}(\rho P_n'(\rho))}{P_n(\rho)} = \lambda_n$$

$$\rho^2 P_n''(\rho) + \rho P_n'(\rho) - \lambda_n P_n(\rho) = 0 \quad 0 < \rho < \alpha$$

Необходимо найти общее решение этого уравнения. Уравнение Эйлера записывается следующим образом:

$$\rho^2 P_n''(\rho) = \rho P_n'(\rho) - n^2 P_n(\rho) = 0$$

$$P_n(\rho) = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln\rho & n = 0 \\ A_n \rho^n + B_n \rho^{-n} & n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Таким образом, общее решение уравнения записывается следующим образом:

$$P_n(\rho) = A_n \rho^{\sqrt{\lambda_n}} + B_n \rho^{-\sqrt{\lambda_n}}$$

Решение должно быть ограничено из условии ограниченности при $\rho = 0$.

$$B_n = 0$$

$$v_n(\rho, \varphi) = P_n(\rho)\Phi_n(\varphi) = A_n \rho^{\lambda_n} \sin\left(\frac{\pi n}{\alpha}\varphi\right)$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2 \quad n = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, было получено нетривиальное частное решение, которое представляется в таком виде. Эти функции удовлетворяют уравнению Лапласа внутри сектора. Они являются ограниченными и удовлетворяют однородным граничным условиям по переменной φ. Чтобы найти функцию, которая удовлетворяет условию по ρ, необходимо найти ее в виде суммы всех найденных частных решений, то есть в виде ряда.

$$v(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \rho^{\sqrt{\lambda_n}} \sin\left(\frac{\pi n}{\alpha}\varphi\right)$$

$$v|_{\rho=a} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n a^{\sqrt{\lambda_n}} \sin\left(\frac{\pi n}{\alpha}\varphi\right) = f(\varphi)$$

Следовательно, получатся ряд Фурье.

$$V|_{\rho=a} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{\pi n}{\alpha}\varphi\right)$$

$$C_n = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(\varphi)\sin\left(\frac{\pi n}{\alpha}\varphi\right)d\varphi$$

$$A_n a^{\sqrt{\lambda_n}} = C_n \to A_n = \frac{C_n}{a^{\sqrt{\lambda_n}}}$$

Таким образом, решение краевой задачи (7.2) записывается в следующем виде:

$$v(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{a^{\sqrt{\lambda_n}}}\rho^{\sqrt{\lambda_n}} \sin\left(\frac{\pi n}{\alpha}\varphi\right)$$

Необходимо найти решение краевой задачи (7.3).

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \quad 0<\rho<a, \quad 0<\varphi<\alpha \\ w|_{\rho=a} = 0 \\ w|_{\varphi=0} = f_1(\rho) \\ w|_{\varphi=\alpha} = f_2(\rho) \end{cases}$$

Сначала надо найти частное решение уравнения Лапласа в следующем виде:

$$w = P(\rho)\Phi(\rho) \not\equiv 0$$

Происходит разделение переменных:

$$\frac{\rho\frac{d}{d\rho}(\rho P'(\rho))}{P(\rho)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\lambda$$

По φ неоднородные граничные условия, а по ρ однородные граничные условия. Поэтому сначала решается задача Штурма-Лиувилля для $P(\rho)$:

$$\rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) + \lambda P(\rho) = 0 \quad 0<\rho<a$$

Есть только одно граничное условие:

$$P(a) = 0$$

Ставится условие ограниченности:

$$|P(0)| < \infty$$

При $\lambda < 0$ общее решение этого уравнения имеет вид:

$$P(\rho) = A\rho^{\sqrt{-\lambda}} + B\rho^{-\sqrt{-\lambda}}$$

Из граничных условий:

$$B = 0$$

$$Aa^{\sqrt{-\lambda}} = 0 \rightarrow A = 0$$

В этой задаче имеется только тривиальное решение.

При $\lambda = 0$ общее решение имеет следующий вид:

$$P(\rho) = A + B\ln\rho$$

Из граничных условий:

$$B = 0$$

$$A = 0$$

Таким образом, $\lambda = 0$ не является собственным значением. При $\lambda > 0$ общее решение записывается в следующем виде:

$$P(\rho) = A\cos(\sqrt{\lambda}\ln\rho) + B\sin(\sqrt{\lambda}\ln\rho)$$

При $\rho = 0$ решение является разрывным. Такая задача Штурма-Лиувилля не имеет собственных значений и собственных функций. Это означает, что краевую задачу (7.3) невозможно решить методом разделения переменных. Согласно общей теории эта задача имеет единственное решение. Эту задачу можно решить с помощью построения функции Грина. Другим способом решения этой задачи является замена:

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \quad 0 < \rho < a \quad 0 < \varphi < \alpha \\ w|_{\rho=a} = 0 \\ w|_{\varphi=0} = f_1(\rho) \\ w|_{\varphi=\alpha} = f_2(\rho) \end{cases}$$

Необходимо искать функцию w в виде:

$$w(\rho,\varphi) = w_1 9\rho,\varphi) + w_2(\rho,\varphi)$$

Функция $w_1(\rho,\varphi)$ — достаточно гладкая функция, которая удовлетворяет неоднородным условиям по φ.

$$w_1|_{\varphi=0} = f_1(\rho)$$

$$w_1|_{\varphi=\alpha} = f_2(\rho)$$

Самый простой вид, который может иметь эта функция:

$$w_1(\rho,\varphi) = f_1(\rho) + \frac{\varphi}{\alpha}(f_2(\rho) - f_1(\rho))$$

Для функция w_2 получается задача:

$$\begin{cases} \Delta w_2 = -\Delta w_1 \quad 0<\rho<a \quad 0<\varphi<\alpha \\ w_2|_{\rho=a} = -w_1|_{\rho=a} \\ w_2|_{\varphi=0} = 0 \\ w_2|_{\varphi=\alpha} = 0 \end{cases} \tag{7.4}$$

Таким образом, получается новая краевая задача с однородными граничными условиями по φ и с неоднородными граничными условиями по ρ. Вместо уравнения Лапласа получается уравнение Пуассона.

$$w_2 = \overline{w}_2 + \tilde{w}_2$$

Для одной из этих функций выполняется уравнение Пуассона внутри сектора. Все граничные условия однородные.

$$\begin{cases} \Delta \overline{w}_2 = -\Delta w_1` \quad 0<\rho<a \quad 0<\varphi<\alpha \\ \overline{w}_2|_{\rho=a} = 0 \\ \overline{w}_2|_{\varphi=0} = 0 \\ \overline{w}_2|_{\varphi=\alpha} = 0 \end{cases}$$

Решение задачи:

$$\overline{w}_2 = \sum_n C_n s_n(\rho,\varphi)$$

Функция $s_n(\rho,\varphi)$ — собственная функция задачи Штурма-Луивилля в секторе. Внутри сектора выполняется следующее выражение:

$$\Delta s + \lambda s = 0$$

$$S|_{\Gamma} = 0$$

$$\begin{cases} \Delta\tilde{w}_2 = 0, \quad 0 < \rho < a \quad 0 < \varphi < \alpha \\ \tilde{w}_2|_{\rho=a} = -w_1|_{\rho=a} \\ \tilde{w_2}|_{\varphi=0} = 0 \\ \tilde{w}_2|_{\varphi=\alpha} = 0 \end{cases}$$

Таким образом, получается краевая задача типа (7.2).

Внутренняя краевая задача для уравнения Лапласа в кольцевом секторе

Рассматривается внутренняя краевая задача для уравнения Лапласа в кольцевом секторе. Угол раствора — α.

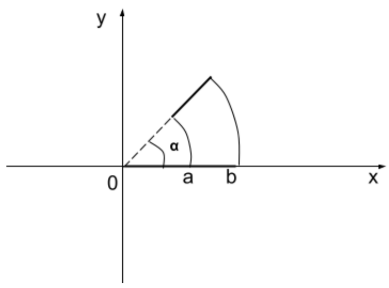

Рис. 7.2. Кольцевой сектор

Требуется, чтобы выполнялось уравнение Лапласа внутри сектора:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad a < \rho < b \quad 0 < \varphi < \alpha \\ u|_{\rho=a} = f_1(\varphi) \\ u|_{\rho=b} = f_2(\varphi) \\ u|_{\varphi=0} = g_1(\rho) \\ u|_{\varphi=\alpha} = g_2(\rho) \end{cases}$$

Эта задача разбивается на две задачи: с однородными условиями по ρ и с однородными значениями по φ. Необходимо найти решение в виде:

$$u = v + w$$

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v|_{\rho=a} = f_1(\varphi) \\ v|_{\rho=b} = f_2(\varphi) \\ v|_{\varphi=0} = 0 \\ v|_{\varphi=\alpha} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \\ w|_{\rho=a} = 0 \\ w|_{\rho=b} = 0 \\ w|_{\varphi=0} = g_1(\rho) \\ w|_{\varphi=\alpha} = g_2(\rho) \end{cases}$$

Эти краевые задачи можно решить методом разделения переменных.

$$v = P(\rho)\Phi(\varphi)$$

$$\Phi_n = \sin\left(\frac{\pi n}{\alpha}\varphi\right)$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2$$

Таким образом, частное решение функции v выглядит следующим образом:

$$P_n(\rho) = A_n\rho^{\sqrt{\lambda_n}} + B_n\rho^{-\sqrt{\lambda_n}}$$

$$P_n(\rho) = A_n P_n^{(a)}(\rho) + B_n P_n^{(b)}(\rho)$$

$$P_n^{(a)}(a) = 0$$

$$P_n^{(b)}(b) = 0$$

$$P_n^{(a)}(\rho) = \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\sqrt{\lambda_n}} - \left(\frac{a}{\rho}\right)^{-\sqrt{\lambda_n}}$$

$$P_n^{(b)}(\rho) = \left(\frac{\rho}{b}\right)^{\sqrt{\lambda_n}} - \left(\frac{b}{\rho}\right)^{-\sqrt{\lambda_n}}$$

Решение функции w необходимо найти в следующем виде:

$$w = P(\rho)\Phi(\varphi)$$

$$\rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) + \lambda P(\rho) = 0 \quad a < \rho < b$$

$$P(a) = 0$$

$$P(b) = 0$$

Получаются следующее собственное значение и собственные функции:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ln\frac{b}{a}}\right)^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

$$P_n(\rho) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n \ln\frac{\rho}{a}}\right)$$

$$\Phi_n''(\varphi) - \lambda_n \Phi_n(\varphi) = 0 \quad 0 < \varphi < \alpha$$

Частное решение записывается в следующем виде:

$$\Phi_n(\varphi) = A_n sh(\sqrt{\lambda_n}\varphi) + B_n \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_n}(\alpha - \varphi))$$

Семинар 8. Задача Штурма-Лиувилля в полярных координатах 1

Уравнение Лапласа имеет вид:

$$\Delta u = 0$$

Когда решается задача Штурма-Луивлля, решается следующая задача:

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

Такое уравнение решается внутри области. На границе ставятся однородные граничные условия. Необходимо найти все значения λ, для которых существует нетривиальное решение u.

Задача Штурма-Лиувилля в круге

Пусть есть круг с центром в начале координат с радиусом a.

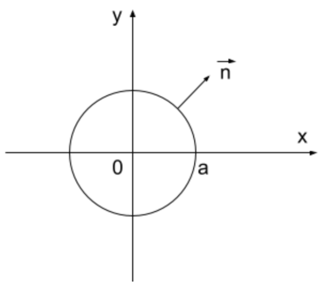

Рис. 8.1. Задача Штурма-Лиувилля в круге

Внутри круга решается дифференциальное уравнение:

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad \rho < a$$

На границе круга ставятся однородные граничные условия, которые могут быть первого, второго или третьего рода:

- Граничное условие Дирихле

$$u|_{\rho=a} = 0$$

- Граничное условие Неймана

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = 0$$

- Граничное условие третьего рода:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + hu\right)\bigg|_{\rho=a} = 0 \quad h = const > 0$$

Собственную функцию задачи Штурма-Луивилля необходимо найти в следующем виде:

$$u(\rho,\varphi) = P(\rho)\Phi(\varphi) \not\equiv 0$$

Оператор Лапласа в полярных координатах записывается следующим образом:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \lambda u = 0$$

Задача Штурма-Луивлля имеет неотрицательные собственные значения.

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho P'(\rho))\Phi(\varphi) + \frac{P(\rho)}{\rho^2}\Phi''(\varphi) + \lambda P(\rho)\Phi(\varphi) = 0$$

Происходит разделение переменных и получается следующее выражение:

$$\frac{\rho\frac{d}{d\rho}(\rho P'(\rho))}{P(\rho)} + \lambda\rho^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu$$

Дифференциальное уравнение для Φ получается с условиями периодичности:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \nu\Phi(\varphi) = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) \equiv \Phi(\varphi) \end{cases}$$

Собственные значения записываются следующим образом:

$$\nu_n = n^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Собственные функции записываются в следующем виде:

$$\Phi_0(\varphi) = 1$$

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix} \quad n = 1, 2\dots$$

Записывается задача для функции $P(\rho)$:

$$\frac{\rho\frac{d}{d\rho}(\rho P'(\rho))}{P(\rho)} + \lambda\rho^2 = \nu_n = n^2$$

Получается следующее дифференциальное уравнение:

$$\rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) + (\lambda \rho^2 - n^2) P(\rho) = 0$$

При $\lambda = 0$ получается уравнение Эйлера:

$$\rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) - n^2 P(\rho) = 0 \quad 0 \leqslant \rho < a$$

Общее решение записывается в следующем виде:

$$P_n(\rho) = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln \rho & n = 0 \\ A_n \rho^n + B_n \rho^{-n} & n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Из ограниченности при $\rho = 0$:

$$B_0 = B_n = 0$$

$$P_n(\rho) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \rho^n, & n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

При $\lambda > 0$ получается линейное дифференциальное уравнение второго порядка, которые имеет переменные коэффициенты:

$$\rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) + (\lambda \rho^2 - n^2) P(\rho) = 0$$

Происходит замена переменной:

$$\sqrt{\lambda} \rho = t \geqslant 0$$

Уравнение принимает следующий вид:

$$P' = \frac{dP(t(\rho))}{d\rho} = \frac{dP}{dt} \cdot \frac{dt}{d\rho} = \sqrt{\lambda} \frac{dP}{dt}$$

$$P'' = \frac{d^2 P}{d\rho^2} = \lambda \frac{d^2 P}{dt^2}$$

Таким образом, можно записать уравнение Бесселя n-порядка:

$$t^2 \frac{d^2 P}{dt^2} + t \frac{dP}{dt} + (t^2 - n^2) P = 0$$

В этом случае n принимает только натуральное значение. Уравнение Бесселя рассматривается для произвольного частного значения n. Это уравнение имеет 2 линейно независимых решения. Решение можно искать в виде степенного ряда по t. Также решение можно получить численно. Среди всех решений этого уравнения можно выделить два специальных решения, одно из которых является ограниченным в нуле, а другой неограниченным в нуле. Эти решения называются функциями Бесселя n-порядка ($J_n(t)$) и функциями Неймана n-порядка ($N_n(t)$).

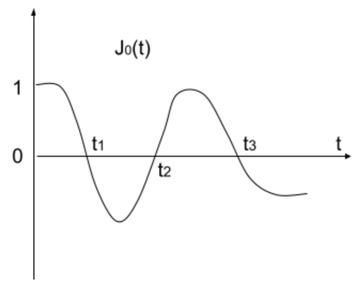

Рис. 8.2. Функция Бесселя

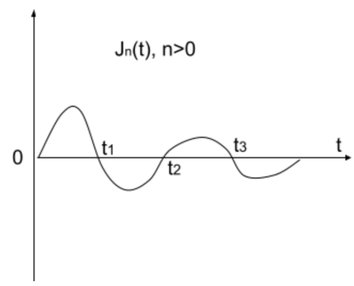

Рис. 8.3. Функция Бесселя для положительных n

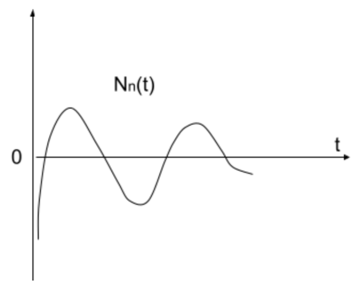

Рис. 8.4. Функция Неймана

Эти функции квазипериодические. При $t \to +\infty$ амплитуда убывает $\sim \frac{1}{\sqrt{t}}$, а период стремится к 2π. При $t \to 0+0$:

$$J_n(t) \sim t^n \quad (n \geqslant 0)$$

$$N_0(t) \sim \ln t$$

$$N_n(t) \sim -\frac{1}{t^n} \quad (n > 0)$$

Общее решение уравнения Бесселя n-порядка записывается следующим образом:

$$P(t) = AJ_n(t) + BN_n(t)$$

Из условия ограниченности при $t = 0$:

$$B = 0$$

Тогда:

$$P(t) = J_n(t)$$

$$P(\rho) = J_n(\sqrt{\lambda}\rho)$$

Необходимо подставить в граничные условия. Рассматривается первое граничное условие (граничное условие Дирихле):

$$P|_{\rho=a} = 0$$

$$J_n(\sqrt{\lambda}a) = 0$$

$J_n(t)$ имеет счетное число положительных нулей:

$$t_k^{(n)} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\sqrt{\lambda}a = t_k^{(n)}$$

Таким образом, собственные значения задачи Штурма-Луивлля записываются следующим образом:

$$\lambda = \left(\frac{t_k^{(n)}}{a}\right)^2$$

Собственные функции записываются в следующем виде:

$$U_{nk}(\rho, \varphi) = P_{nk}(\rho)\Phi_n(\varphi)$$

$$P_{nk}(\rho) = J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\rho)$$

Собственные функции образуют полную систему.

Рассматриваются граничные условия второго рода (условия Неймана):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = 0$$

$$P'(a) = 0$$

$$P(\rho) = J_n(\sqrt{\lambda}\rho)$$

$$J_n'(\sqrt{\lambda}a)\cdot\sqrt{\lambda} = 0 \quad (\lambda \neq 0)$$

$$J_n'(\sqrt{\lambda}a) = 0$$

$J_n'(t) = 0$ уравнение имеет счетное число положительных корней.

$$\tilde{t}_k^{(n)} \quad u = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\sqrt{\lambda}a = \tilde{t}_k^{(n)}$$

Собственные значения записываются в следующем виде:

$$\lambda_k^{(n)} = \left(\frac{\tilde{t}_k^{(n)}}{a}\right)^2$$

Собственные функции записываются в следующем виде:

$$U_{nk}(\rho,\varphi) = P_{nk}(\rho)\Phi_n(\varphi)$$

$$U_{nk}(\rho,\varphi) = P_{nk}(\rho) = J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\rho)$$

Для $\lambda = 0$:

$$P_0(\rho) = 1$$

$$P_n(\rho) = \rho^n \quad n = 1, 2, \ldots$$

Граничное условие $P'(a) = 0$ выполняется только для $P_0(\rho) = 1$. $\lambda_0 = 0$ — собственное значение, которому отвечает собственная функция:

$$U_{00}(\rho,\varphi) = P_0(\rho)\Phi_0(\varphi) = 1$$

Рассматриваются граничные условия третьего рода:

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + hu\right)\right|_{\rho=a} = 0 \quad h = const > 0$$

$$P'(a) + hP(a) = 0$$

$$P(\rho) = J_n(\sqrt{\lambda}\rho)$$

$$\sqrt{\lambda}J_n'(\sqrt{\lambda}a) + hJ_n(\sqrt{\lambda}a) = 0$$

Это уравнение имеет счетное число положительных корней. Таким образом, собственные значения имеют следующий вид:

$$\lambda_k^{(n)} \quad k = 1, 2, 3\ldots$$

Собственные функции записываются следующим образом:

$$U_{nk}(\rho, \varphi) = P_{nk}(\rho)\Phi_n(\varphi)$$

$$U_{nk}(\rho, \varphi) = P_{nk}(\rho) = J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\rho)$$

Семинар 9. Задача Штурма-Лиувилля в полярных координатах 2

Задача Штурма-Лиувилля в круге

Пусть есть круг с центром в начале координат с радиусом a. В этом круге решалась задача Штурма-Луивилля:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \rho < a$$

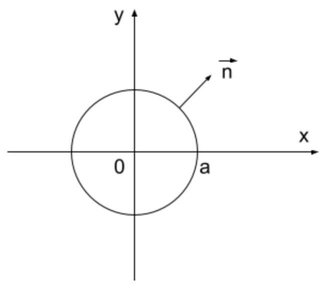

Рис. 9.1. Задача Штурма-Лиувилля в круге

Однородные граничные условия ставились на границе круга. Граничные условия были либо первого, либо второго, либо третьего рода:

- Граничное условие Дирихле

$$u|_{\rho=a} = 0$$

- Граничное условие Неймана

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = 0$$

- Граничное условие третьего рода:

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + hu\right)\right|_{\rho=a} = 0 \quad h = const > 0$$

Необходимо найти такие значения λ, при которых существуют нетривиальные решения. Собственные функции такой задачи записываются следующим образом:

$$u_{nk}(\rho,\varphi) = P_{nk}(\rho)\Phi_n(\varphi) \quad \underset{k=1,2,\dots}{n = 0,1,2,\dots}$$

Эти функции имеют следующий вид:

$$\Phi_0(\varphi) = 1$$

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix} \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$P_{nk}(\rho) = J_n(\sqrt{\lambda_k}^{(n)}\rho)$$

$\lambda_k^{(n)}$ — собственные значения, которые определяются из соответствующего уравнения. $\lambda_k^{(n)}$ — k-ый положительный корень. При граничном условии Дирихле уравнение имеет следующий вид:

$$J_n(\sqrt{\lambda}a) = 0$$

Такое уравнение имеет счетное число положительных нулей:

$$t_k^{(n)} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\sqrt{\lambda}a = t_k^{(n)}$$

При граничном условии Неймана уравнение имеет следующий вид:

$$J_n'(\sqrt{\lambda}a) = 0$$

$J_n'(t) = 0$ уравнение имеет счетное число положительных корней.

$$\tilde{t}_k^{(n)} \quad u = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\sqrt{\lambda}a = \tilde{t}_k^{(n)}$$

При граничном условии третьего рода, уравнение записывается в следующем виде:

$$\sqrt{\lambda}J_n'(\sqrt{\lambda}a) + hK_n(\sqrt{\lambda}a) = 0$$

Система собственных функций будет являться полной и ортогональной в круге. По этой системе функций можно раскладывать другие функции. Произвольную функцию в круге можно разложить на ряд Фурье. Пусть есть функция $f(\rho, \varphi)$, заданная в круге:

$$f(\rho, \varphi) = \sum_{n,k} C_{nk} u_{nk}(\rho, \varphi)$$

Коэффициенты ряда Фурье определяются следующим образом:

$$C_{nk} = \frac{1}{||u_{nk}||^2}\int\limits_0^a \rho d\rho \int\limits_0^{2\pi} f(\rho,\varphi)u_{nk}(\rho,\varphi)d\varphi$$

$$||u_{nk}||^2 = \int\limits_0^a \rho d\rho \int\limits_0^{2\pi} u_{nk}(\rho,\varphi)d\varphi = \rho P_{nk}^2(\rho)\int\limits_0^{2\pi}\Phi_n^2(\varphi)d\varphi$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\Phi_n^2(\varphi)d\varphi = \pi(1+\delta_{n0})$$

$$P_{nk}^2(\rho)d\rho = \int\limits_0^a \rho J_n^2(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\rho)d\rho$$

Такой интеграл можно посчитать в явном виде. Происходит следующая замена:

$$\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\rho = t$$

$$d\rho = \frac{dt}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}$$

$$\frac{1}{\lambda_k^{(n)}}\int\limits_0^{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a} tJ_n^2(t)dt$$

Необходимо вычислить следующий неопределенный интеграл:

$$\int tZ_n^2(t)dt$$

Рассматривается цилиндрическая функция ($Z_n(t)$), то есть произвольное решение уравнения Бесселя:

$$t^2Z_n''(t)+tZ_n'(t)+(t^2-n^2)Z_n(t)=0$$

$$\int(t^2Z_n''(t)Z_n'(t)+t(Z_n'(t))^2+(t^2-n^2)Z_n(t)Z_n'(t))dt = C$$

$$\int t^2Z_n''(t)Z_n'(t)dt+\int t(Z_n'(t))^2dt+\int(t^2-n^2)Z_n'(t)Z_n'(t)dt = C$$

Интегралы преобразуются следующим образом:

$$\frac{t^2(Zn'^2(t))^2}{2}-\int(Z_n'(t))^2tdt+\int t(Z_n'(t))^2dt+$$

$$+\frac{(t^2-n^2)}{2}Z_n^2(t)-\int tZ_n^2(t)dt=C$$

Окончательная формула для неопределенного интеграла:

$$\int tZ_n^2(t)dt=\frac{t^2(Z_n'(t))^2+(t^2-n^2)Z_n^2(t)}{2}+C$$

Воспользовавшись полученной формулой можно получить уравнение для определенного интеграла.

$$P_{nk}^2(\rho)d\rho=\frac{1}{\lambda_k^{(n)}}\int\limits_0^{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a}J_n^2(t)dt$$

Для неопределенного интеграла применяется следующая формула:

$$P_{nk}^2(\rho)d\rho=\left(\frac{t^2(J_n'(t))^2+(t^2-n^2)J_n^2(t)}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a}$$

Чтобы упростить полученное уравнение, можно воспользоваться граничными условиями. При граничных условиях Дирихле:

$$J_n^2(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a)=0$$

$$P_{nk}^2(\rho)d\rho=\frac{a^2}{2}(J_n'(\sqrt{\lambda^n}_k a))^2$$

$$||u_{nk}||^2=\frac{a^2}{2}(J_n'(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a))^2\pi(1+\delta_{n0})$$

При граничных условиях Неймана:

$$J_n'(\sqrt{\lambda^n}_k a)=0$$

$$\int\rho P_{nk}^2(\rho)d\rho=\frac{(\lambda_k^{(n)}a^2-n^2)}{2\lambda_k^{(n)}}J_n^2(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a)$$

$$||u_{nk}||^2=\frac{\lambda_k^{(n)}a^2-n^2}{2\lambda_k^{(n)}}J_n^2(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a)$$

При граничных условиях третьего рода:

$$\sqrt{\lambda_k^{(n)}}J_n'(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a)+hJ_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a)=0$$

$$J_n'(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a)=-\frac{h}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a)$$

Значение интеграла находят следующим образом:

$$\int_0^a \rho P_{nk}^2(\rho)d\rho = \frac{1}{2\lambda_k^{(n)}}\left(\frac{\lambda_k^{(n)}a^2h^2}{\lambda_k^{(n)}} + \lambda_k^{(n)}a^2 - n^2\right)J_n^2(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a)$$

$$||u_{nk}||^2 = \frac{a^2(h^2 - \lambda_k^{(n)}) - n^2}{2\lambda_k^{(n)}}J_n^2(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a)\pi(1+\delta_{n0})$$

Задача Штурма-Лиувилля в круговом секторе

Рассматриваются задачи Штурма-Лиувилля в круговом секторе.

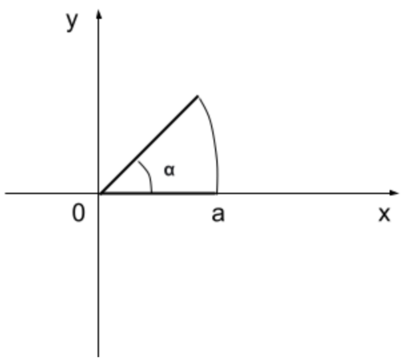

Рис. 9.2. Задача Штурма-Лиувилля в круговом секторе

Внутри сектора решается следующее дифференциальное уравнение:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \rho < a, \quad 0 < \varphi < \alpha$$

Однородные граничные условия следующие:

$$u|_{\rho=a} = 0$$

$$u|_{\varphi=0} = 0$$

$$u|_{\varphi=\alpha} = 0$$

Решение необходимо найти в следующем виде:

$$u(\rho,\varphi) = P(\rho)\Phi(\varphi) \not\equiv 0$$

После разделения переменных получается следующее неравенство:

$$\rho\frac{d}{d\rho}\frac{(\rho P'(\rho))}{P(\rho)} + \lambda\rho^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu$$

$$\Phi''(\varphi) + \nu\Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \alpha$$

$$\Phi(0) = 0$$

$$\Phi(\alpha) = 0$$

Получается задача Штурма-Луивилля на отрезке с условиями Дирихле. Собственные значения:

$$\nu_n = \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2 \quad n = 1, 2, \ldots$$

Соответствующая собственная функция:

$$\Phi_n(\varphi) = \sin\left(\frac{\pi n}{\alpha}\varphi\right)$$

$$\rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) + (\lambda\rho^2 - \nu_n)P(\rho) = 0 \quad 0 < \rho < a$$

При $\rho = 0$ присутствует условие ограниченности, а при $\rho = a$ наблюдаются ограниченные условия. Решение уравнения ограниченного в 0 записывается следующим образом:

$$P(\rho) = J_{\sqrt{\nu_n}}(\sqrt{\lambda}\rho)$$

$$J_{\sqrt{\nu_n}}(\sqrt{\lambda}a) = 0$$

Это уравнение имеет бесконечное число положительных корней. $\lambda_k^{(n)}$ — собственные значения. Соответствующая собственная функция:

$$P_{nk}(\rho) = J_{\sqrt{\nu_n}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\rho\right)$$

Таким образом, собственная функция исходной задачи записывается в следующем виде:

$$u_{nk}(\rho, \varphi) = P_{nk}(\rho)\Phi_n(\varphi)$$

Задача Штурма-Лиувилля в кольце

Рассматривается область в виде кольца. Внутренний радиус — a, внешний радиус — b. Дифференциальное уравнение в такой области:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad a < \rho < b$$

Однородные граничные условия могут быть первого, второго либо третьего рода. Рассматриваются граничные условия Неймана:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=b} = 0$$

Необходимо найти нетривиальные решения и λ, при которых они существуют.

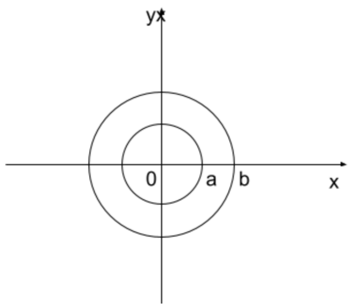

Рис. 9.3. Задача Штурма-Лиувилля в кольце

Решение надо найти в следующем виде:

$$u(\rho,\varphi) = P(\rho)\Phi(\varphi) \not\equiv 0$$

$$\frac{\rho\frac{d}{d\rho}(\rho P'(\rho))}{P(\rho)} + \lambda\rho^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu$$

$$\Phi''(\varphi) + \nu\Phi(\varphi) = 0$$

$$\Phi(\varphi + 2\pi) \equiv \Phi(\varphi)$$

Получается одномерная задача Задача Штурма-Лиувилля с периодическими граничными условиями.

Таким образом, собственные значения получаются следующие:

$$\nu_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Соответствующие собственные функции:

$$\Phi_0(\varphi) = 1$$

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Дифференциальное уравнение для:

$$\rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) + (\lambda\rho^2 - n^2)P(\rho) = 0 \quad a < \rho < b$$

Общее решение в виде линейной комбинации:

$$P(\rho) = AJ_n(\sqrt{\lambda}\rho) + BN_n(\sqrt{\lambda}\rho) \quad \lambda \neq 0$$

$$P'(a) = 0$$

$$P'(b) = 0$$

$$A\sqrt{\lambda}J_n'(\sqrt{\lambda}a) + B\sqrt{\lambda}Nn'(\sqrt{\lambda}a) = 0$$

$$A\sqrt{\lambda}J_n'(\sqrt{\lambda}b) + B\sqrt{\lambda}Nn'(\sqrt{\lambda}b) = 0$$

Определитель этой системы записывается в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} J_n'(\sqrt{\lambda}a) & N_n'(\sqrt{\lambda}a) \\ J_n'(\sqrt{\lambda}b) & N_n'(\sqrt{\lambda}b) \end{vmatrix} = 0$$

$$J_n'(\sqrt{\lambda}a)N_n'(\sqrt{\lambda}b) - J_n'(\sqrt{\lambda}b)N_n'(\sqrt{\lambda}a) = 0$$

Такое уравнение имеет бесконечно число положительных корней. Собственное значение — $\lambda_k^{(n)}$ — k-ый положительный корень этого уравнения. Собственные функции записываются в следующем виде:

$$AJ_n'(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a) + Bn_n'(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a) = 0$$

$$A = N_n'(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a)$$

$$B = -J_n'(\sqrt{\lambda}_k^{(n)}a)$$

$$P_{nk}(\rho) = N_n'(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a)J_n(\sqrt{\lambda}_k^{(n)}\rho) - J_n'(\sqrt{\lambda}_k^{(n)}a)N_n(\sqrt{\lambda}_k^{(n)}\rho)$$

Таким образом, собственные функции задачи Штурма-Луивилля в кольце получается в следующем виде:

$$u_{nk}(\rho, \varphi) = P_{nk}(\rho)\Phi_n(\varphi)$$

При $\lambda = 0$ дифференциальное уравнение упрощается:

$$u_{00}(\rho, \varphi) = 1$$

Образуется полная ортогональная система в кольце. В кольцевом секторе задача Штурма-Луивилля решается аналогично.

Семинар 10. Уравнение Лапласа в сферических и цилиндрических координатах

Уравнение Лапласа в сферических координатах

Рассматривается уравнение Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta u = 0$$

В прямоугольных координатах оператор Лапласа имеет простой вид.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

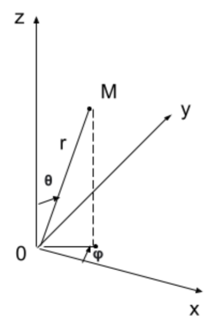

Рис. 10.1. Прямоугольные и сферические координаты

Происходит переход к сферическим координатам, которые обозначаются следующим образом:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

При таком случае, наблюдается следующее:

$$0 \leqslant r < +\infty$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

Происходит замена переменных в уравнении Лапласа и оператор Лапласа принимает следующий вид:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\varphi}u$$

$$\Delta_{\theta\varphi}u = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

Следовательно, уравнение Лапласа принимает следующий вид:

$$\Delta u = 0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\varphi}u = 0$$

Частное решение уравнения Лапласа необходимо найти в следующем виде:

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi) \not\equiv 0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2R'(r))Y(\theta,\varphi) + \frac{1}{r^2}(\Delta_{\theta\varphi}Y(\theta,\varphi))R(r) = 0$$

Происходит разделение переменных:

$$\frac{\frac{d}{dr}(r^2R'(r))}{R(r)} = -\frac{\Delta_{\theta\varphi}Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)} = \lambda$$

Это равенство выполняется во всех точках пространства кроме начала координат.

$$\Delta_{\theta\varphi}Y(\theta,\varphi) + \lambda Y(\theta,\varphi) = 0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0$$

Частное решение необходимо найти в виде произведения двух функций:

$$Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi) \not\equiv 0$$

В результате, получается следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\Theta'(\theta))\Phi(\varphi) + \frac{\Theta(\theta)}{\sin^2\theta}\Phi''(\varphi) + \lambda\Theta(\theta)\Phi(\varphi) = 0$$

Происходит разделение переменных:

$$\frac{\sin\theta\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\Theta'(\theta))}{\Theta(\theta)} + \lambda\sin^2\theta = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu$$

$$\Phi''(\varphi) + \nu\Phi(\varphi) = 0$$

Применяется условие периодичности:

$$\Phi(\varphi + 2\pi) \equiv \Phi(\varphi)$$

Собственные значения записываются следующим образом:

$$\nu_m = m^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Соответствующие собственные функции записываются следующим образом:

$$\Phi_0(\varphi) = 1$$

$$\Phi_m(\varphi) = \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} \quad m = 1, 2, \dots$$

Таким образом, получается следующее уравнение:

$$\sin\theta \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right) + (\lambda \sin^2\theta - m^2)\Theta(\theta) = 0$$

Это уравнение необходимо упростить:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta(\theta) = 0$$

Происходит замена переменных:

$$t = \cos\theta, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1$$

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d\Theta(t(\theta))}{d\theta} = \frac{d\Theta}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = -\sin\theta \frac{d\Theta}{dt}$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{d\Theta}{d\theta}$$

$$+\frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta \frac{d\Theta}{dt}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{d\Theta}{dt}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-t^2}\right)\Theta = 0, \quad -1 < t < 1$$

Получается линейное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Уравнение может иметь неограниченное решение в особых точках. Требуется, чтобы функция Θ была ограничена. Применяется условие ограниченности:

$$|\Theta|_{t=\pm 1} < \infty$$

Нетривиальные решения существуют только при определенных λ:

$$\lambda = \lambda_n = n(n+1), \quad n = m, m+1, \dots$$

Такая задача Штурма-Луивилля называется присоединенными функциями Лежандра:

$$\Theta_n^{(m)} = P_n^{(m)}(t)$$

Основными свойствами $P_n^{(m)}(t)$ являются:

1) Присоединенные функции Лежандра являются ортогональными:

$$\int_{-1}^{1} P_{n_1}^{(m)}(t) P_{n_2}^{(m)}(t) dt = 0 \quad n_1 \neq n_2$$

2) При каждом фиксированном m присоединенные функции Лежандра образуют полную ортогональную систему на $[-1, 1]$:

$$\{P_n^{(m)}(t)\} \quad (n = m, m+1, \dots)$$

3) Формула для вычисления присоединенных функций Лежандра:

$$P_n^{(m)}(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t)$$

$P_n(t)$ — полином Лежандра. Многочлен получается следующим образом:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2-1)^n]$$

Таким образом, получается формула Родрига. Присоединенные функции Лежандра при нулевом значении равны многочлену:

$$P_n^{(0)}(t) = P_n(t)$$

4) Выражение для квадрата нормы присоединенных функций Лежандра:

$$||P_n^{(m)}||^2 = \int_{-1}^{1} [P_n^{(m)}(t)]^2 dt = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

При четных m получается следующее:

$$\Theta_n^{(m)}(\theta) = P_n^{(m)}(\cos\theta)$$

Такая функция является многочленом относительно $\cos\theta,\ \sin\theta$.

$$Y(\theta,\varphi) = \Theta_n^{(m)}(\theta)\Phi_m(\varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}$$

Можно ввести следующее обозначение:

$$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi, \quad m = 0,1,2,\ldots$$

$$Y_n^{(-m)}(\theta,\varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi, \quad m = 1,2,\ldots$$

$Y_n^{(\pm m)}(\theta,\varphi)$ — сферические функции являются собственными функциями задачи Штурма-Луивилля на единичной сфере.

$$\Delta_{\theta\varphi}Y(\theta,\varphi) + \lambda Y(\theta,\varphi) = 0$$

Условие периодичности:

$$Y(\theta,\varphi+2\pi) \equiv Y(\theta,\varphi)$$

Условие ограниченности:

$$|Y(\theta,\varphi)||_{\theta=0,\pi} < \infty$$

Собственные значения записываются следующим образом:

$$\lambda_n = n(n+1)$$

Каждому λ_n отвечает $2n+1$ линейно независимых собственных функций:

$$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) \quad m \simeq -n,\ldots,0,\ldots,n$$

Свойствами $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$ являются:

1) Образуют полную ортогональную система функций на единичной сфере:

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

2) Выражение для квадрата нормы:

$$||Y_n^{(m)}||^2 = ||P_n^{(|m|)}||^2 \cdot ||\Phi_m||^2 = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}\pi(1+\delta_{m0})$$

Вычисление сферических функций:

$$n = 0, \quad m = 0 \quad Y_0^{(0)}(\theta,\varphi) = P_0^{(0)}(\cos\theta) = P_0(\cos\theta) = 1$$

$$n = 1 \quad P_1(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(t^2-1) = t = \cos\theta$$

$$m = 0 \quad P_1^{(0)}(t) = P_1(t) = \cos\theta$$

$$m = 1 \quad P_1^{(1)}(t) = \sqrt{1-t^2}\frac{d}{dt}P_1(t) = \sqrt{1-t^2} = \sin\theta$$

$$Y_1^{(0)}(\theta,\varphi) = P_1^{(0)}(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$Y_1^{(1)}(\theta,\varphi) = P_1^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi = \sin\theta\cos\varphi$$

$$Y_1^{(-1)}(\theta,\varphi) = P_1^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi = \sin\theta\sin\varphi$$

Формула для присоединенных функций Лежандра записывается следующим образом:

$$P_n^{(n)}(t) = (1-t^2)^{\frac{n}{2}}\frac{d^n}{dt^n}P_n(t) = (1-t^2)^{\frac{n}{2}}\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{1}{2^n n!}\frac{d}{dt^n}[(t^2-1)^n]\right) =$$

$$= \frac{1}{2^n n!}(1-t^2)^{\frac{n}{2}}\frac{d^{2n}}{dt^{2n}}[(t^2-1)^n] = \frac{1}{2^n n!}(1-t^2)^{\frac{n}{2}} \times (2n)!$$

$$P_n^{(n)}(\cos\theta) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sin^n\theta$$

Таким образом, соответствующая формула для сферических функций:

$$Y_n^{(n)}(\theta,\varphi) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sin^n\theta\cos n\varphi$$

$$Y_n^{(-n)}(\theta,\varphi) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sin^n\theta\sin n\varphi$$

$$\frac{\frac{d}{dr}(r^2R'(r))}{R(r)} = \lambda_n = n(n+1)$$

$$r^2R_n''(r) + 2rR_n'(r) - n(n+1)R_n(r) = 0$$

$$R_n(r) = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}$$

Следовательно, частное решение уравнения Лапласа:

$$U_n^{(m)}(r,\theta,\varphi) = R_n(r)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = \left(Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}\right)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$$

Семинар 11. Задача Штурма-Лиувилля и уравнение Лапласа в сферических и цилиндрических координатах

Уравнение Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta u = 0$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

Частное решение уравнения Лапласа во всем пространстве:

$$u_n^{(m)}(r,\theta,\varphi) = R_n(r)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) \quad n = 0,1,2,\dots \quad m = -n,\dots,n$$

$$R_n(r) = A_n^{(m)}r^n + \frac{B_n^{(m)}}{r^{n+1}}$$

$$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)(\theta,\varphi) = P_n^{|m|}(\cos\theta)\begin{cases}\cos m\varphi & m \geqslant 0\\ \sin|m|\varphi & m < 0\end{cases}$$

Задача Штурма-Лиувилля на единичной сфере

Оператор Лапласа записывается следующим образом:

$$\Delta_{\theta\varphi}Y(\theta,\varphi) + \lambda Y(\theta,\varphi) = 0 \quad 0 < \theta < \pi$$

$$Y(\theta,\varphi+2\pi) \equiv Y(\theta,\varphi)$$

$$|Y(\theta,\varphi)||_{\theta=0,\pi} < \infty$$

Собственные значения получаются следующими:

$$\lambda_n = n(n+1)$$

Такие сферические функции образуют ортогональную систему на единичной сфере.

$$\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi}Y_{n_1}^{m_1}(\theta,\varphi)Y_{n_2}^{(m_2)}(\theta,\varphi)d\varphi = 0 \quad (n_1,m_1) \neq (n_2,m_2)$$

Присоединенная функция Лежандра записываются в следующем виде:

$$P_n^{(m)}(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t)$$

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2-1)^n]$$

Если $m = 0$, то сферическая функция равна полиному Лежандра:

$$Y_n^{(0)}(\theta, \varphi) = P_n(\cos\theta)$$

$$P_0(\cos\theta) = 1$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

Если $n = 1$, то присоединенная функция Лежандра записывается следующим образом:

$$P_1^{(1)}(\cos\theta) = \sin\theta$$

$$P_2^{(1)}(\cos\theta) = 3\sin\theta\cos\theta$$

$$P_2^{(2)}(\cos\theta) = 3\sin^2\theta$$

$$P_3^{(1)}(\cos\theta) = \sin\theta \frac{15\cos^2\theta - 3}{2}$$

$$P_3^{(2)}(\cos\theta) = 15\sin^2\theta\cos\theta$$

$$P_3^{(3)}(\cos\theta) = 15\sin^3\theta$$

Уравнение Лапласа в шаре

Пусть есть шар радиуса a. Вводится прямоугольная система координат в центре шара. Внутри шара выполняется уравнение Лапласа:

$$\Delta u = 0 \quad r < a$$

Граничные условия могут быть первого, второго или третьего рода. Рассматриваются граничные условия Дирихле (первого рода).

$$u|_{r=a} = f(\theta, \varphi) = \cos^2\theta$$

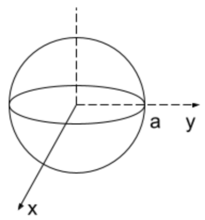

Рис. 11.1. Уравнение Лапласа в шаре

Необходимо найти решение в виде:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(A_n^{(m)}r^n+\frac{B_n^{(m)}}{r^{m+n}}\right)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$$

Из условия ограниченности при $r=0$:

$$B_n^{(m)}=0$$

Тогда получается следующее выражение:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_n^{(m)}r^nY_n^{(m)}(\theta,\varphi)$$

Необходимо определить неизвестный коэффициент:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_n^{(m)}a^nY_n^{(m)}(\theta,\varphi)=\cos^2\theta$$

Разложение в ряд по сферическим функциям:

$$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)=P_n^{(|m|)}(\cos\theta)\begin{cases}\cos m\varphi & m\geqslant 0\\ \sin|m|\varphi & m<0\end{cases}$$

$$Y_n^{(0)}(\theta,\varphi)=P_n(\cos\theta)$$
$$Y_2^{(0)}(\theta,\varphi)=P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos\theta-1)$$
$$Y_0^{(0)}(\theta,\varphi)=P_0(\cos\theta)=1$$
$$\cos^2\theta=\frac{2Y_2^{(0)}(\theta,\varphi)+Y_0^{(0)}(\theta,\varphi)}{3}$$

При подставлении в граничные условия получается следующее:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_n^{(m)}a^nY_n^{(m)}(\theta,\varphi)=\frac{1}{3}Y_0^{(0)}(\theta,\varphi)+\frac{2}{3}Y_2^{(0)}(\theta,\varphi)$$

$$A_0^{(0)} = \frac{1}{3}$$

$$A_2^{(0)} = \frac{2}{3a^2}$$

$$A_2^{(0)} a^2 = \frac{2}{3}$$

$$A_n^{(m)} a^n = 0$$

Таким образом, решением этой краевой задачи является:

$$u(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{3} + \frac{2r^2}{3a^2} \cdot \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$u(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{3} + \frac{r^2}{3a^2}(3\cos^2\theta - 1)$$

Внешняя краевая задача для уравнения Лапласа в пространстве

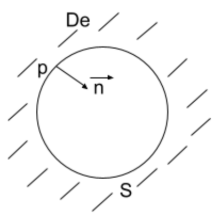

Рис. 11.2. Уравнение Лапласа вне шара

Записывается уравнение Лапласа вне шара в пространстве $D_e \subset R^3$:

$$\Delta u = 0$$

Граничные условия находятся на границе S. Дополнительное условие при бесконечности:

$$u \to 0 \quad r \to \infty$$

Равномерное стремление означает, что:

$$\sup_{\theta,\varphi} |u(r,\theta,\varphi)| \to 0 \quad r \to \infty$$

Тогда можно записать теорему существования и единственности.

Теорема 11.1. *Задачи Дирихле, Неймана, третьего рода:*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\bigg|_S = f(P)$$

$$h(P) \geqslant 0$$

А также смешанная задача имеют единственное решение в D_e.

Краевая задача для уравнения Лапласа вне шара

Рассматривается шар радиуса a. Вводится система координат в центре шара. Уравнение Лапласа вне шара:

$$\Delta u = 0 \quad r > a$$

Рассматриваются граничные условия Неймана:

$$\frac{u}{\partial r}\bigg|_{r=a} = f(\theta, \varphi)$$

Ставится равномерное стремление на бесконечности:

$$u \to 0 \quad r \to \infty$$

Решение необходимо найти в следующем виде:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left(A_n^{(m)} r^n + \frac{B_n^{(m)}}{r^{n+1}}\right) Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$$

Из условия равномерного стремления:

$$A_n^{(m)} = 0$$

Тогда получается следующий ряд:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{B_n^{(m)}}{r^{n+1}} Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$$

Происходит подставление в граничные условия:

$$\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} -\frac{(n+1)B_n^{(m)}}{a^{n+2}} Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$$

Пусть:

$$f(\theta,\varphi) = \sin\theta\sin\varphi = P_1^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi = Y_1^{(-1)}(\theta,\varphi)$$

Тогда получается следующее:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} -\frac{(n+1)B_n^{(m)}}{a^{n+2}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = Y_1^{(-1)}(\theta,\varphi)$$

$$-\frac{2B_1^{-1}}{a^3} = 1$$

$$B_1^{(-1)} = -\frac{a^2}{2}$$

Для остальных n и m:

$$B_n^{(m)} = 0$$

Таким образом, решение записывается следующим образом:

$$u(r,\theta,\varphi) = -\frac{a^3}{2r^2}\sin\theta\sin\varphi$$

Краевая задача для уравнения Лапласа в шаровом слое

В шаре радиуса b врезан маленький шар радиуса a. Необходимо решить задачу в пространстве между маленьким и большим шарами. Требуется, чтобы выполнялось уравнение Лапласа:

$$\Delta u = 0 \quad a < r < b$$

Рассматриваются смешанные граничные условия:

$$u|_{r=a} = f_1(\theta,\varphi)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\theta} = f_2(\theta,\varphi)$$

Решение необходимо найти в следующем виде:

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(A_n^{(m)} r^n + \frac{B_n^{(m)}}{r^{n+1}}\right) Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$$

Это выражение можно упростить и записать в следующем виде:

$$r^2R''(r) + 2rR'(r) - n(n+1)R(r) = 0$$

$$R(r) = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}$$

$$R(r) = AR^{(a)}(r) + BR^{(b)}(r)$$

Пусть:

$$R^{(a)}(a) = 0$$

$$\left.\frac{d}{dr}R^{(b)}\right|_{r=b} = 0$$

$$Aa^n + \frac{B}{a^{n+1}} = 0$$

$$A = 1 \quad B = -a^{2n+1}$$

Тогда получаются следующие выражения:

$$R^{(a)}(r) = r^n - \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}}$$

$$R^{(b)}(r) = (n+1)r^n + \frac{nb^{2n+1}}{r^{n+1}}$$

Решение необходимо найти в следующем виде:

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(A_n^{(m)}R_n^{(a)}(r) + B_n^{(m)}R_n^{(b)}(r)\right)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$$

Происходит подставление в граничные условия:

$$u|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} B_n^{(m)}R_n^{(b)}(a)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = f_1(\theta,\varphi) \to B_n^{(m)}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_n^{(m)}\left.\frac{d}{dr}R_n^{(a)}\right|_{r=b} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = f_2(\theta,\varphi) \to A_n^{(m)}$$

Семинар 12. Задача Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в цилиндрических координатах

Задача Штурма-Лиувилля в цилиндре

Рассматриваются задачи Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в цилиндрических координатах. Оператор Лапласа записывается в следующем виде:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta_{\rho\varphi}u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Формулы, которые связывают прямоугольные и цилиндрические координаты, записываются в следующем виде:

$$x = \rho\cos\varphi$$

$$y = \rho\sin\varphi$$

$$z = z$$

Рассматривается задача Штурма-Лиувилля в цилиндре. Пусть есть круговой ограниченный цилиндр. Радиус основания — a, а высота цилиндра — h. Ось z совпадает с осью цилиндра, а ось x и y находятся в плоскости нижнего основания цилиндра. Задача решается внутри такого цилиндра.

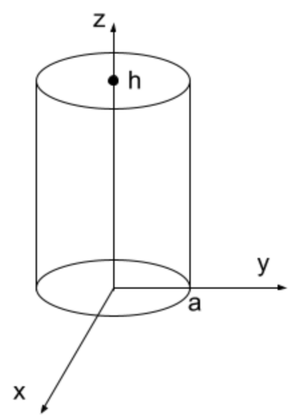

Рис. 12.1. Задача Штурма-Лиувилля в цилиндре

Дифференциальное уравнение внутри цилиндра:

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad \rho < a, \quad 0 < z < h$$

Граничные условия ставятся на границе области. Граница области состоит из боковой поверхности цилиндра, нижнего основания и верхнего основания. Граничные условия должны быть однородными. Ставятся граничные условия первого рода:

$$u|_{\rho=a} = 0$$

$$u|_{z=0} = 0$$

$$u|_{z=h} = 0$$

Необходимо найти все значения параметра λ, при которых существует нетривиальное решение этой задачи. Эти нетривиальные решения являются собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля в цилиндре. Решение необходимо найти в следующем виде:

$$u(\rho,\varphi,z) = v(\rho,\varphi)Z(z) \not\equiv 0$$

Это необходимо подставить в дифференциальное уравнение:

$$\Delta_{\rho\varphi} v(\rho,\varphi)\cdot Z(z) + v(\rho,\varphi)Z''(z) + \lambda v(\rho,\varphi)Z(z) = 0$$

Происходит разделение переменных:

$$\frac{\Delta_{\rho\varphi} v(\rho,\varphi)}{v(\rho,\varphi)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} - \lambda = -\nu$$

$$\Delta_{\rho\varphi} v(\rho,\varphi) + \nu v(\rho,\varphi) = 0, \quad \rho < a$$

Таким образом, дифференциальное уравнение выполняется внутри круга и получается следующее граничное условие:

$$v|_{\rho=a} = 0$$

Следовательно, получилась задача Штурма-Лиувилля в круге с граничным условием Дирихле. Собственные функции для такой задачи следующие:

$$v_{nk}(\rho,\varphi) = J_n\left(\sqrt{\nu_k^{(n)}}r\right)\Phi_n(\varphi)$$

$$\Phi_0(\varphi) = 1$$

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix} \quad n = 1,2,\ldots$$

Собственное значение этой задачи — $\nu_k^{(n)}$- k-й положительный корень уравнения

$$J_n(\sqrt{\nu}a) = 0 \quad k = 1, 2, \ldots$$

Уравнение для функции Z записывается следующим образом:

$$-\frac{Z''(z)}{Z(z)} - \lambda = -\nu_k^{(n)}$$

$$Z''(z) + (\lambda - \nu_k^{(n)})Z(z) = 0$$

$$Z''(z) + \mu Z(z) = 0, \quad 0 < z < h$$

Из граничных условий для функции u получаются следующие граничные условия:

$$Z(0) = 0$$

$$Z(h) = 0$$

Таким образом, получается задача Штурма-Лиувилля на отрезке. Собственные значения этой задачи записываются в следующем виде:

$$\mu_m = \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2 \quad m = 1, 2, \ldots$$

Собственные функции этой задачи следующие:

$$Z_m(z) = \sin\frac{\pi m z}{h}$$

Следовательно, можно найти λ:

$$\lambda - \nu_k^{(n)} = \mu_m$$

Таким образом, собственные значения задачи Штурма-Лиувилля в цилиндре записывается в следующем виде:

$$\lambda_{nkm} = \nu_k^{(n)} + \mu_m$$

Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля в цилиндре следующие:

$$u_{nkm}(\rho, \varphi, z) = v_{nk}(\rho, \varphi) Z_m(z)$$

ПОСФ в цилиндре:

$$||u_nkm||^2 = \int_0^h dz \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\phi} u_n^2 km(\rho,\varphi,z)d\varphi = \int_0^h Z_m^2(z)dz \int_0^a \rho \int_0^{2\pi} v_n^2 k(\rho,\varphi)d\varphi$$

Задачи Ш.Л. в сферических координатах:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\Delta_\theta \varphi u$$

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

В шаре:

$$\Delta u + \lambda u = 0, r < a$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}|_r = a = 0$$

Есть СЗ

$$\lambda_0^(0) = 0$$

и СФ

$$u_0 00(r,\theta,\varphi) = 1$$

Далее считаем, что $\lambda > 0$ Ищем СФ в виде

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi) \not\equiv 0$$

Подставляем в ДУ:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2R'(r))Y(\theta,\varphi) + \frac{R(r)}{r^2}\Delta_\theta \varphi Y(\theta,\varphi) + \lambda R(r)Y(\theta,\varphi) = 0$$

$$\frac{\frac{d}{dr}(r^2R'(r))}{R(r)} + \lambda r^2 = \frac{-\Delta_\theta \varphi Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)} = \mu$$

$$\Delta_\theta \varphi Y(\theta,\varphi) + \mu Y(\theta,\varphi) = 0$$

$$Y(\theta,\varphi + 2\pi) \equiv Y(\theta,\varphi)$$

$$|Y(\theta,\varphi)|_\theta = 0, \pi < \infty$$

$$C3 : \mu_n = n(n+1), n = 0, 1, 2, ...$$

Сферические функции (СФ):

$$Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) -$$

$$m = -n, ..., n$$

$$\frac{\frac{d}{dr}(r^2 R'(r))}{R(r)} + \lambda r^2 = \mu_n = n(n+1)$$

$$\frac{d}{dr}(r^2 R'(r)) + (\lambda r^2 - n(n+1))R(r) = 0$$

Замена:

$$R(r) = \frac{v(r)}{\sqrt{r}}$$

$$R'(r) = \frac{dR}{dr} = \frac{d}{dr}(\frac{v(r)}{\sqrt{r}}) = \frac{d}{dr}(v(r) \times \frac{1}{\sqrt{r}}) = \frac{v'(r)}{\sqrt{r}} - \frac{v(r)}{2r^{\frac{3}{2}}}$$

$$r^2 R'(r) = r^{\frac{3}{2}} v'(r) - \frac{\sqrt{r}}{2} v(r)$$

$$\frac{d}{dr}(r^2 R'(r)) = \frac{d}{dr}(r^{\frac{3}{2}} v'(r) - \frac{\sqrt{r}}{2} v(r)) = \frac{3}{2}\sqrt{r} v'(r) + r^{\frac{3}{2}} v''(r) - \frac{1}{4\sqrt{r}} v(r) - \frac{\sqrt{r}}{2} v'(r) =$$

$$= r^{\frac{3}{2}} r''(r) + \frac{\sqrt{r}}{2} v'(r) - \frac{1}{4\sqrt{r}} v(r)$$

Подставляем в ДУ:

$$r^{\frac{3}{2}} v''(r) + \sqrt{r} v'(r) - \frac{1}{4\sqrt{r}} v(r) + (\lambda r^2 - n(n+1))\frac{v(r)}{\sqrt{r}} = 0$$

$$r^{\frac{3}{2}} v''(r) + \sqrt{r} v'(r) + (\lambda r^{\frac{3}{2}} - \frac{n^2}{\sqrt{r}} - \frac{n}{\sqrt{r}} - \frac{1}{4\sqrt{r}}) v(r) = c$$

Умножим на $\sqrt{r}$:

$$r^2 v''(r) + r v'(r) + (\lambda r^2 - (n^2 + n + \frac{1}{4}))v(r) = 0$$

$$r^2 v''(r) + r v'(r) + (\lambda r^2 - (n + \frac{1}{2})^2) v(r) = 0$$

Для задачи Ш.-Л. в круге:

$$r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda r^2-n^2)R(r)=0$$

$$\to R(r)=AJ_n(\sqrt{\lambda}r)+BN_n(\sqrt{\lambda}r)$$

$$\to v(r)=AJ_n+\frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}r)+BN_n+\frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}r)$$

$$J_{\frac{1}{2}}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sin t$$

$$N_{\frac{1}{2}}(t)=-\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos t$$

$$J_n-\frac{1}{2}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}t^n(-\frac{1}{t}\frac{d}{dt})^n\cos t$$

$$N_n-\frac{1}{2}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}t^n(-\frac{1}{t}\frac{d}{dt})^n\sin t$$

$$R(r)=\frac{v(r)}{\sqrt{r}}=A\frac{J_n+\frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{r}}+B\frac{N_n+\frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{r}}$$

$$\frac{J_n+\frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{r}}\sim\frac{r^n+\frac{1}{2}}{\sqrt{r}}=r^n$$

при $r\to 0$.

$$J_0(t)\sim t^0$$

при $t\to 0+0$.

Из условия ограниченности в нуле $B=0$:

$$R(r)=\frac{J_n+\frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{r}}$$

$$R'(a)=0$$

Семинар 13. Задача Штурма-Лиувилля в шаровом слое и уравнение Лапласа в цилиндре

Задача Штурма-Лиувилля в шаровом слое

$$\Delta u + \lambda u = 0, a < r < b$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}|_r = a = 0$$

$$u|_r = b = 0$$

Ищем СФ в виде

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi) \not\equiv 0$$

$$\frac{\frac{d}{dr}(r^2R'(r))}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{\Delta_\theta \varphi Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)} = \mu$$

$$\Delta_\theta \varphi Y(\theta,\varphi) + \mu Y(\theta,\varphi) = 0$$

$$Y(\theta,\varphi+2\pi) \equiv Y(\theta,\varphi)$$

$$|Y||_\theta = 0, \pi < \infty$$

$$C3 : \mu_n = n(n+1)$$

$$n = 0, 1, ...$$

Сферические функции:

$$C\Phi : Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) \quad m = -n, ..., n$$

$$\frac{d}{dr}(r^2R'(r)) + (\lambda r^2 - n(n+1))R(r) = 0$$

$$R(r) = \frac{v(r)}{\sqrt{r}}$$

$$v(r) = AJ_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}r) + BN_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}r)$$

ГУ:

$$R'(a) = 0R(b) = 0$$

$$R'(a) = \frac{d}{dr}(\frac{v(r)}{\sqrt{r}})|_r = a = (\frac{v'(r)}{\sqrt{r}} - \frac{v(r)}{2r\sqrt{r}})|_r = a = \frac{2av'(a) - v(a)}{2a\sqrt{a}} = 0$$

$$R(b) = \frac{v(b)}{\sqrt{b}} = 0$$

$$2av'(a) - v(a) = 0$$

$$v(b) = 0$$

$$2a\sqrt{\lambda}J_n' + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}a)A + 2a\sqrt{\lambda}N_n' + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}a)B - J_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}a)A - N_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}a)B = 0$$

$$J_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}b)A + N_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}b)B = 0$$

Нетривиальное решение

$$A, B \Leftrightarrow \det = 0$$

$$2a\sqrt{\lambda}J_n' + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}a) - J_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}a)2a\sqrt{\lambda}N_n' + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}a) - N_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}a) = 0$$

$$J_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}b)$$

$$N_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}B)$$

$$(2a\sqrt{\lambda}J_n' + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}a) - J_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}a))N_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}b) =$$

$$= (2a\sqrt{\lambda}N_n' + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}a) - N_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}a))J_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda}b)$$

где $\lambda_k^{(n)}$ k-й положительный корень уравнения (*) СЗ задачи Штурма-Лиувилля.

A и B определяются из уравнения

$$J_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b)A + N_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b)B = 0$$

с точностью до производного множителя

$$A = N_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b)$$

$$B = -J_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b)$$

$$v_nk(r) = N_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b)J_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r) - J_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b)N_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r)$$

$$R_nk(r) = \frac{v_nk(r)}{\sqrt{r}}$$

$$u_nkm(r,\theta,\varphi) = R_nk(r)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) - C\Phi$$

-ПОСФ в шаровом слое

$$||u_nkm||^2 = \int\limits_a^b r^2dr\int\limits_0^\pi \sin\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi} u_n^2km(r,\theta,\varphi)d\varphi = \int\limits_a^b r^2R_n^2k(r)dr\int\limits_0^\pi \sin\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi}(Y_n^{(m)}(\theta,\varphi))^2d\varphi$$

$$||R_nk||^2 = \int\limits_a^b r^2R_nk^2(r)dr = \int\limits_a^b rv_n^2k(r)dr$$

$$v_nk(r)-$$

цилиндрическая функцияя аргумента $\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r$

порядка

$$\nu = n + \frac{1}{2}$$

$$\int\limits_t^Z {}_\nu^2(t)dt = \frac{t^2}{2}[(Z_\nu'(t))^2 + (1-\frac{\nu^2}{t^2})Z_\nu^2(t)] +$$

$$v_nk(r) = Z_n + \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r), t = \sqrt{\lambda_k^{(n)}}r$$

$$||R_nk||^2 = \int\limits_{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a}^{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}b} tZ_n + \frac{1}{2}(t)dt \times \frac{1}{\lambda_k^{(n)}} = ...$$

Уравнение Лапласа в цилиндре

$$\Delta u = 0, \rho < a, 0 < z < h$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}|_\rho = a = f(\varphi, z)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial z}|_z = 0 = f_1(\rho, \varphi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}|_z = h = f_2(\rho, \varphi)$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости:

$$\int\int \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$$

Предположим, что оно выполнено. Будем искать решение задачи (0)в виде

$$u(\rho, \varphi, z) = u_1(\rho, \varphi, z) + u_2(\rho, \varphi, z)$$

где

$$\Delta u_1 = 0\rho < a, 0 < z < h$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \rho}|_\rho = a = 0$$

$$-\frac{\partial u_1}{\partial z}|_z = 0 = f_1(\rho, \varphi)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}|_z = h = f_2(\rho, \varphi)$$

$$\Delta u_2 = 0 \rho < a, 0 < z < h$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \rho}|_\rho = a = f(\varphi, z)$$

$$-\frac{\partial u_2}{\partial z}|_z = 0 = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z}|_z = h = 0$$

$$\Delta u_1 = 0 \rho < a, 0 < z < h$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \rho}|_\rho = a = 0$$

$$-\frac{\partial u_1}{\partial z}|_z = 0 = f_1(\rho, \varphi)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}|_z = h = f_2(\rho, \varphi)$$

Пусть выполнено условие разрешимости

$$\int\int \frac{\partial u_1}{\partial n} dS = 0$$

$$\Delta u_1(\rho, \varphi, z) = \Delta_\rho \varphi u_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}$$

Найдем 4P уравнения Лапласа вида

$$u_1(\rho, \varphi, z) = v(\rho, \varphi) Z(z) \not\equiv 0$$

$$Z(z) \Delta_\rho \varphi v(\rho, \varphi) + v(\rho, \varphi) Z''(z) = 0$$

$$\frac{\Delta_\rho \varphi v(\rho, \varphi)}{v(\rho, \varphi)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda$$

$$\Delta_\rho \varphi v(\rho, \varphi) + \lambda v(\rho, \varphi) = 0, \rho < a$$

$$\frac{\partial v}{\partial \rho}|_\rho = a = 0 \text{– задача Штурма-Лиувилля в круге}$$

$C3$ и $C\Phi$:

$$\lambda_0^(0) = 0, v_0 0(\rho, \varphi) = 1$$

$$\lambda_k^{(n)} - \text{к-й положительный корень уравнения}$$

$$J_n'(\sqrt{\lambda} a) = 0$$

$$v_n k(\rho, \varphi) = J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r)\Phi_n(\varphi)$$

$$\Phi_0(\varphi) = 1$$

$$\Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi \sin n\varphi$$

$$k = 1, 2, ..$$

$$n = 0, 1, ...$$

$$Z''(z) - \lambda_k^{(n)} Z(z) = 0$$

$$Z_n k(z) = A_0 0 + B_0 0 Z$$

при

$$\lambda_0^(0) = 0$$

$$A_n k ch(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}) + B_n k ch(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}(z-h))$$

при

$$\lambda_k^{(n)} > 0$$

$$u_1^(nk)(\rho, \varphi, z) = v_n k(\rho, \varphi) Z_n k(z)$$

Ищем решение задачи (1) в виде

$$u_1(\rho,\varphi,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=a}^{\infty} u_1^(nk)(\rho,\varphi,z) = A_00 + B_00Z + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}})((A_nkch(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}z)+$$

$$+B_nkch(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}(z-h)))\cos n\varphi + (c_nkch(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}z) + D_nkch(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}(z-h)))\sin n\varphi)$$

$$B_00, A_nk, B_nk, C_nk, D_nk0$$

$$-\frac{\partial u_1}{\partial z}|_z = 0 = f_1(\rho,\varphi),$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}|_z = h = f_2(\rho,\varphi)$$

Семинар 14. Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах (продолжение)

Уравнение Лапласа в цилиндре

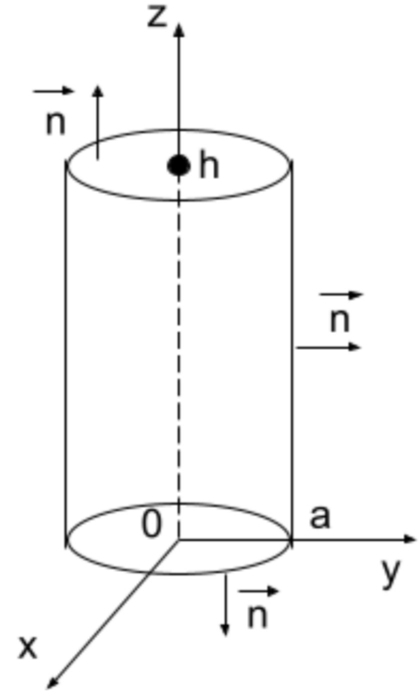

Рис. 14.1. Уравнение Лапласа в цилиндре

Рассматривается краевая задача Лапласа в цилиндре. Пусть высота цилиндра — h, а радиус цилиндра — a. В такой области внутри цилиндра решается следующее дифференциальное уравнение:

$$\Delta u = 0, \quad \rho < a, \quad 0 < z < h$$

На границе цилиндра ставятся граничные условия Неймана:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = f(\varphi, z)$$

$$-\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = f_1(\rho, \varphi)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h} = f_2(\rho,\varphi)$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости:

$$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$$

Предположено, что это условие выполнено. Решение задачи необходимо искать в следующем виде:

$$u(\rho,\varphi,z) = u_1(\rho,\varphi,z) + u_2(\rho,\varphi,z)$$

$$\Delta u_1 = 0 \quad \rho < a, \quad 0 < z < h$$

Граничные условия будут следующими:

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial u_1}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = 0 \\ -\left.\frac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=0} = f_1(\rho,\varphi) \\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=h} = f_2(\rho,\varphi) \end{cases} \tag{14.1}$$

$$\Delta u_2 = 0 \quad \rho < a, \quad 0 < z < h$$

Граничные условия будут следующими:

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial u_2}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = f(\varphi,z) \\ -\left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \\ \left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=h} = 0 \end{cases} \tag{14.2}$$

Задача (14.1) решена. Необходимо решить задачу (14.2).

$$\Delta u_2 = 0 \quad \rho < a, \quad 0 < z < h$$

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial u_2}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = f(\varphi,z) \\ -\left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \\ \left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=h} = 0 \end{cases}$$

Условие разрешимости записывается в следующем виде:

$$\iint\limits_S \frac{\partial u_2}{\partial n} ds = 0$$

Необходимо найти частное решение уравнения Лапласа вида:

$$u_2(\rho,\varphi,z) = v(\rho,\varphi)Z(z) \not\equiv 0$$

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах:

$$\frac{\Delta_{\rho\varphi} v(\rho,\varphi)}{v(\rho,\varphi)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda$$

$$Z''(z) + \lambda Z(z) = 0, \quad 0 < z < h$$

Граничные условия получаются следующими:

$$Z'(0) = 0$$

$$Z'(h) = 0$$

Таким образом, получается задача Штурма-Лиувилля на отрезке. Следовательно, собственные значения:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{h}\right)^2 \quad k = 0, 1, \ldots$$

Собственные функции:

$$Z_k(z) = \cos\frac{\pi k z}{h}$$

Рассматривается дифференциальное уравнение для функции v:

$$\Delta_{\rho\varphi} v(\rho,\varphi) - \lambda_k v(\rho,\varphi) = 0$$

Оператор Лапласа записывается в следующем виде:

$$\Delta_{\rho\varphi} v(\rho,\varphi) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}$$

Необходимо искать $v(\rho,\varphi)$ в виде:

$$v(\rho,\varphi) = P(\rho)\Phi(\varphi) \not\equiv 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho P'(\rho))\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho^2}P(\rho)\Phi''(\varphi) - \lambda_k P(\rho)\Phi(\varphi) = 0$$

Происходит разделение переменных:

$$\frac{\rho\frac{d}{d\rho}(\rho P'(\rho))}{P(\rho)} - \lambda_k\rho^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \mu$$

$$\Phi''(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0$$

Ставится периодическое граничное условие:

$$\Phi(\varphi + 2\pi) \equiv \Phi(\varphi)$$

Собственные значения и собственные функции:

$$\mu_n = n^2, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$\Phi_0(\varphi) = 1$$

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}(\rho P'(\rho)) - (\lambda_k\rho^2 + n^2)P(\rho) = 0$$

$$\rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) - (\lambda_k\rho^2 + n^2)P(\rho) = 0 \quad 0 \leqslant \rho < a$$

Ранее встречалось уравнение:

$$\rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) + (\lambda_k\rho^2 - n^2)P(\rho) = 0$$

Общее решение выглядит в следующем виде:

$$P(\rho) = \begin{cases} A + B\ln\rho & \lambda_k = 0 \;\; n = 0 \\ A\rho^n + B\rho^{-n} & \lambda_k = 0 \;\; n > 0 \\ AJ_n(\sqrt{\lambda_k}\rho) + BN_n(\sqrt{\lambda_k}\rho) & \lambda_k > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(\rho) = A + B\ln\rho & \lambda_k = 0 \;\; n = 0 \\ A\rho^n + B\rho^{-n} & \lambda_k = 0 \;\; n > 0 \\ AI_n(\sqrt{\lambda_k}\rho) + BK_n(\sqrt{\lambda_k}\rho) & \lambda_k > 0 \end{cases}$$

I_n — функция Инфельда. K_n — функция Макдональда. I_n и K_n — цилиндрические функции чисто мнимого аргумента.

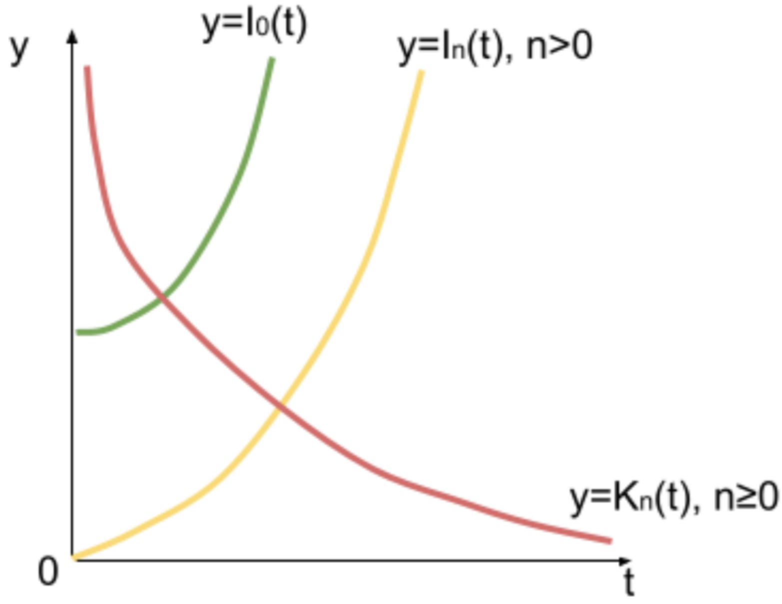

Рис. 14.2. График функции Инфельда и Макдональда

$$I_n(t) \sim \frac{e^t}{\sqrt{t}} \quad t \to +\infty$$

$$K_n(t) \sim \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \quad t \to +\infty$$

Функция $P(\rho)$ должна быть ограничена при:

$$\rho = 0$$

$$P(\rho) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \lambda_k = 0, \quad n = 0 \\ \rho^n & \lambda_k = 0, \quad n > 0 \\ I_n(\sqrt{\lambda_k}\rho) & \lambda_k > 0 \end{array} \right\}$$

$$u_2^{(nk)}(\rho, \varphi, z) = P_{nk}(\rho)\Phi_n(\varphi)Z_k(z)$$

Решение задачи (14.2) можно найти в виде ряда по найденным частным решениям:

$$u_2(\rho, \varphi, z) = A_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left(A_{n0}\cos n\varphi + B_{n0}\sin n\varphi\right) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} I_n(\sqrt{\lambda_k}\rho)\left(A_{nk}\cos n\varphi + B_{nk}\sin n\varphi\right)\cos\frac{\pi k z}{h}$$

Необходимо подставить в граничные условия:

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = f(\varphi, z)$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = \sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}\left(A_{n0}\cos n\varphi + B_{n0}\sin n\varphi\right) +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}I'(\sqrt{\lambda_k}a)\left(A_{nk}\cos n\varphi + B_{nk}\sin n\varphi\right)\cos\frac{\pi kz}{h} =$$

$$= f(\varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(C_{nk}\cos n\varphi + D_{nk}\sin n\varphi\right)\cos\frac{\pi kz}{h}$$

$$\begin{Bmatrix} C_n k \\ D_n k \end{Bmatrix} = \frac{1}{||\Phi_n||^2} \times \frac{1}{||Z_k||^2}\int\limits_0^h dZ \int\limits_0^{2\pi} f(\varphi, z)\begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix}\cos\frac{\pi kz}{h}d\varphi$$

$$||\Phi_n||^2 = \pi(1+\delta_{n0})$$

$$||Z_k||^2 = \frac{h}{2}(1+\delta_{k0})$$

Таким образом, определяются коэффициенты: A_{n0}, B_{n0}, A_{nk}, B_{nk}.

Пусть:

$$f(\varphi, z) = \cos\varphi + \sin 2\varphi\cos\frac{\pi z}{h}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}\left(A_{n0}\cos n\varphi + B_{n0}\sin\varphi\right) +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}I_n'(\sqrt{\lambda_k}a)\left(A_{nk}\cos n\varphi + B_{nk}\sin n\varphi\right)\cos\frac{\pi kz}{h} =$$

$$= \cos\varphi + \sin 2\varphi \cdot \cos\frac{\pi z}{h}$$

$$A_{10} = 1$$

$$\sqrt{\lambda_1}I_2'(\sqrt{\lambda_1}a)B_{21} = 1$$

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{h}\right)^2$$

$$\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{h}\right)^2$$

$$B_{21} = \frac{h}{\pi I_2'\left(\frac{\pi a}{h}\right)}$$

Все остальные A_{nk} и B_{nk} равны 0. Таким образом, решение краевой задачи записывается в следующем виде:

$$u_2(\rho, \varphi, z) = A_{00} + \rho \cos\varphi + I_2\left(\frac{\pi}{h}\rho\right) \sin^2\varphi \cos\frac{\pi z}{h}$$

Краевая задача записывается в следующем виде:

$$\Delta u_2 = 0 \quad \rho < a, \quad 0 < z < h$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = \cos\varphi + \sin 2\varphi \cos\frac{2\pi}{h}$$

$$-\left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial z}\right|_{z=h} = 0$$

Условие разрешимости:

$$C_{00} = 0$$

Таким образом, задача (14.2) неразрешима.

Семинар 15. Решение краевых задач при помощи построения функции Грина

Фундаментальное решение уравнения Лапласа

Помимо метода разделения переменных есть еще другой способ решения краевых задач. Это решение краевых задач *с помощью построения функции Грина.*

Определение 15.1. *Фундаментальным решением уравнения Лапласа называется регулярная обобщенная функция* $G(M,M_0)$ *в области* D*, если она удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:*

$$\Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0) \quad M,M_0 \in D$$

$\delta(M,M_0)$ *— дельта-функция действует по следующему правилу:*

$$(\delta(M,M_0),\varphi(M)) = \int\limits_D \delta(M,M_0)\varphi(M)dV_M = \varphi(M_0) \quad M_0 \in D$$

Обобщенные функции — это функционалы, которые действуют на основные функции. Обобщенные функции бывают регулярными и сингулярными. Действие регулярных обобщенных функций представляется в виде интеграла. Сингулярные обобщенные функции не представляются в таком виде. Примером сингулярной обобщенной функции является δ функция.

Регулярная обобщенная функция зависит от двух точек. Каждая точка имеет свои координаты. Если это двумерный случай, то у каждой точки есть 2 координаты. Тогда G — функция четырех скалярных переменных. Если это трехмерный случай, то у каждой точки есть 3 координаты и функция G — функция шести скалярных переменных.

В трехмерном случае:

$$M(x,y,z),\ M_0(x_0,y_0,z_0): \quad \delta(M,M_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$$

В двумерном случае:

$$M(x,y),\ M_0(x_0,y_0): \quad \delta(M,M_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$$

При $M \neq M_0$ функция G удовлетворяет однородному уравнению Лапласа:

$$\Delta_M G(M,M_0) = 0$$

При $M = M_0$ получается неограниченная функция $G(M, M_0)$, которая имеет особенность. Тогда, чтобы построить функцию G, можно попробовать найти частное решение в двумерном и трехмерном случаях для уравнения Лапласа, которые имеют особенность. Их них сконструировать такую функцию, которая будет удовлетворять этому дифференциальному уравнению в обобщенном смысле. Тогда решением этого уравнения является:

$$G(M,M_0) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MM_0}} + V(M) \\ \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{R_{MM_0}} + V(M) \end{cases}$$

$R(M, M_0)$ — расстояние между M и M_0.

$$\Delta V(m) = 0 \quad M \in D$$

Фундаментальное решение определяется не единственным образом, а с точностью до производного решения однородного уравнения Лапласа. Такая функция с особенностью имеет физический смысл. В частности однородному уравнению Лапласа удовлетворяет электрический потенциал в случае электростатики в тех точках, в которых нет заряда. Функция в трехмерном случае представляет собой электрический потенциал, который создает единичный точечный заряд, расположенный в точке M_0, в точке M. В двумерном случае функция представляет собой электрический потенциал, который создает бесконечно длинная тонкая нить, заряженная с единичной линейной плотностью. Нить расположена в точке M_0 и потенциал создается в точке M.

Функция Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа

Рассматривается внутренняя область D на ограниченной кусочно-гладкой границе S. Произвольные точки в области D: M и M_0. Произвольная точка на границе S: P. Добавляется внешняя нормаль $\vec{n}$.

Выводится третья формула Грина для следующей функции:

$$u(M) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$$

$$u(M_0) = -\int\limits_D G(M.M_0)\Delta u(M) dV_M + \int\limits_S \left(G,(P,M_0)\frac{\partial u(P)}{\partial n_p} - u(P)\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n_P} \right) dS_P \quad M_0 \in D$$

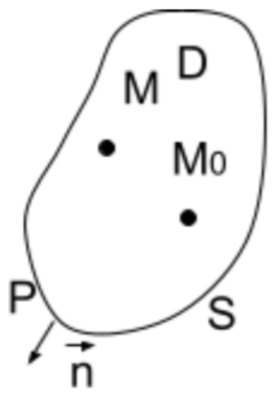

Рис. 15.1. Функция Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа

Третья формула Грина справедлива и для двумерного, и для трехмерного случаев. $G(M,M_0)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа. С помощью третьей формулу Грина можно выразить решение краевой задачи. Рассматривается внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta u(M) = F(M), \quad M \in D$$

Граничные условия Дирихле:

$$u|_S = f(P)$$

Пусть $G(M,M_0)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа:

$$G(M,M_0) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} + V(M) \\ \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{R_{MM_0}} + V(M) \end{cases}$$

$$\Delta V(M) = 0 \quad M \in D$$

Дополнительно требуется, чтобы $G(M,M_0) = 0$ при $M \in S$. Тогда существует единственная функция $G(M,M_0)$, удовлетворяющая этому условию. Для функции получается следующая краевая задача:

$$\Delta V(M) = 0 \quad M \in D$$

$$V|_{M\in S} = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}}\Big|_{M\in S} \\ -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{R_{MM_0}}\Big|_{M\in S} \end{cases}$$

Задачи Дирихле всегда разрешимы для уравнения Лапласа.

Определение 15.2. *Функция $G(M,M_0)$, удовлетворяющая условиям:*

$$\Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0) \quad M,m_0 \in D$$

$$G(M,M_0)|_{M\in S} = 0$$

Называется функцией Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области D.

Пусть граница S заземлена. Тогда функция Грина будет представлять собой электрический потенциал в области D, создаваемый точечным зарядом в точке M_0, и наведенными зарядами на заземленной поверхности S. В двумерном случае все аналогично, только в точке M_0 расположена заряженная нить. Это является физическим смыслом функции Грина.

Если третью формулу Грина записать в области D и в качестве G будет функция Грина, то формула упростится. Исходная формула:

$$u(M_0) = -\int_D G(M,M_0)\Delta u(M)dV_M + \int_S \left(G(P,M_0)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n_P}\right)dS_P$$

Упрощенная формула:

$$u(M_0) = -\int_D G(M,M_0)F(M)dV_M - \int_S \frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n_P} f(P)dS_P \quad M_0 \in D$$

Если известна функция Грина, то можно получить решение следующей краевой задачи в любой точке M_0:

$$\Delta u(M) = F(M), \quad M \in D$$

$$u|_S = f(P)$$

Способы нахождения функции Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа

Первым способом построения точной функции Грина является разложение функции Грина в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля.

$$\Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0) \quad M,M_0 \in D$$

$$G(M,M_0)|_{M\in S} = 0 \quad M_0 \in D$$

Рассматривается задача Штурма-Лиувилля в области D с граничным условием Дирихле:

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

$$u|_S = 0$$

Нетривиальным решением являются собственные функции. По собственным функциям можно построить полную ортогональную систему $\{u_n(M)\}$. Соответствующее собственное значение λ_n. Необходимо искать функцию Грина в следующем виде:

$$G(M,M_0) = \sum_n A_n u_n(M)$$

$$A_n = A_n(M_0)$$

При $M \in S$:

$$G(M,M_0) = 0$$

Подставив ряд в уравнение, получается следующее:

$$\Delta_M \left(\sum_n A_n u_n(M) \right) = -\delta(M,M_0)$$

Этот метод называется методом Галёркина:

$$\sum_n A_n \Delta_M u_n(M) = -\delta(M,M_0)$$

$$\sum_n A_n \lambda_n u_n(M) = \delta(M,M_0)$$

$$\sum_n \lambda_n A_n \int_D u_n(M) u_k(M) dV_M = \int_D \delta(M,M_0) u_k(M) dV_M$$

$$\lambda_k A_k ||u_k||^2 = u_k(M_0)$$

$$A_k = \frac{u_k(M_0)}{\lambda_k ||u_k||^2}$$

Таким образом, функция Грина записывается в следующем виде:

$$G(M,M_0) = \sum_n \frac{u_n(M) u_n(M_0)}{\lambda_n ||u_n||^2}$$

Такой ряд сходится. Таким образом, функцию Грина можно построить для любой внутренней области, для которой известны собственные функции и собственные значения.

Пример 15.1. *Рассматривается второй способ построения точной функции Грина. Рассматривается задача Дирихле в прямоугольнике.*

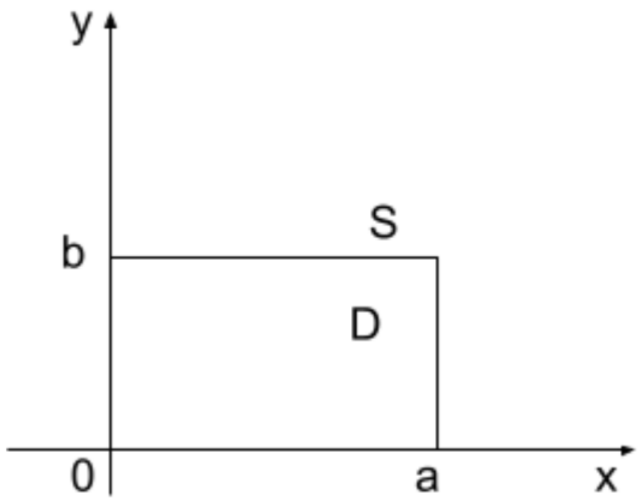

Рис. 15.2. Задача Дирихле в прямоугольнике

Задача Штурма-Лиувилля записывается в следующем виде:

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

$$u|_S = 0$$

Такую задачу удобно решать в прямоугольных координатах. Тогда получаются следующие собственные значения и собственные функции:

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2$$

$$u_{nm}(x,y) = \sin\frac{\pi n x}{a}\sin\frac{\pi m y}{b}$$

$$n, m = 1, 2, 3, \ldots$$

Необходимо найти квадрат формы:

$$||u_{nm}||^2 = \frac{ab}{4}$$

$$M(x,y) \quad M_0(x_0,y_0)$$

Тогда функция Грина имеет следующий вид:

$$G(M,M_0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi nx}{a}\sin\frac{\pi my}{b}\sin\frac{\pi nx_0}{a}\sin\frac{\pi my_0}{b}}{ab\left(\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{2}\right)^2\right)}$$

Можно доказать, что этот ряд сходится. Рассматривается краевая задача для уравнения Пуассона:

$$\Delta u(M) = F(M) \quad M \in D$$

$$u(P)|_{P\in S} = f(P)$$

$$U(M_0) = -\iint\limits_D G(M,M_0)F(M)dV_M - \int\limits_S f(P)\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n_P}dl_P$$

Семинар 16. Нахождение функции Грина с помощью решения краевой задачи

Нахождение функции Грина с помощью решения краевой задачи

Следующим способом нахождения функции Грина является нахождение функции с помощью решения краевой задачи. Функция Грина определяется как решение следующей задачи:

$$\Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0) \quad M,M_0 \in D$$

Для внутренней задачи Дирихле требуется, чтобы:

$$G(M,M_0)|_{M \in S} = 0, \quad M_0 \in D$$

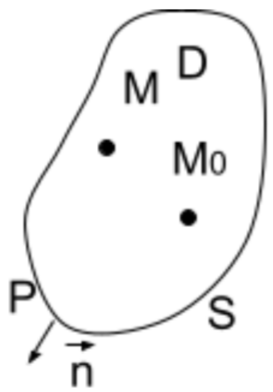

Рис. 16.1. Функция Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа

В двумерном и в трехмерном случаях будет следующее:

$$G(M,M_0) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} + V(M) \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R_{MM_0}} + V(M) \end{cases}$$

R_{MM_0} — расстояние между точками M и M_0. Общее решение дифференциального уравнения представляется в следующем виде:

$$\Delta V(M) = 0$$

В двумерном и в трехмерном случаях будет следующее:

$$V(M)|_{M\in S} = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MM_0}} \\ -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_0}} \end{cases}$$

Эта краевая задача решается следующим образом:

$$V(M) \to G(M,M_0)$$

Сначала необходимо решить простую краевую задачу, потом построить функцию Грина, с помощью которой можно будет решить более сложную краевую задачу.

$$\Delta u(M) = F(M) \quad M \in D$$

$$u(P)|_{P\in S} = f(P)$$

$$u(M_0) = -\int\limits_D G(M,M_0)F(M)dV_M - \int\limits_S \frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n_P} f(P)dS_P \quad M_0 \in D$$

Пример 16.1. *Рассматривается задача Дирихле в круге. Пусть есть круг радиуса a с центром в начале координат. Строится функция грина в двумерном случае:*

$$G(M,M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MM_0}} + V(M)$$

Получается следующая краевая задача, которая решается в полярных координатах:

$$\Delta v = 0 \quad \rho < a$$

$$v|_{\rho=a} = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{R_{PM_0}}$$

Пусть точка M_0 лежит на оси абсцисс. Пусть расстояние от центра до точки M_0 — ρ_0. Таким образом, получается краевая задача для уравнения Лапласа с граничными условиями Дирихле в круге. Общее решение уравнения Лапласа в полярных координатах в круге можно найти в виде ряда:

$$v(\rho,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\left(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\right)$$

Неизвестные координаты определяются из граничного условия:

$$V|_{\rho=a} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}a^n\left(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\right) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{PM_0}}$$

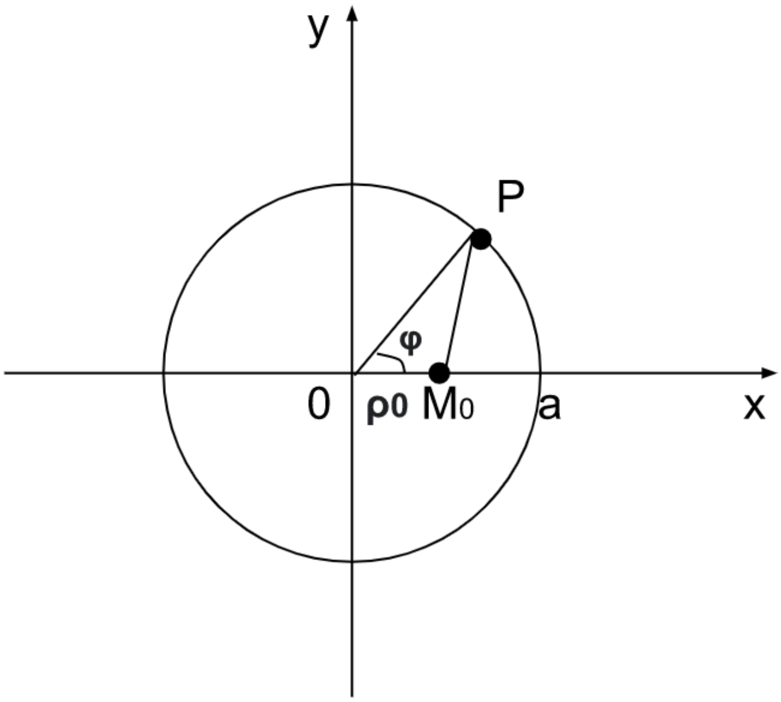

Рис. 16.2. Задача Дирихле в круге

Из M_0OP можно найти следующее:

$$R_{PM_0} = \sqrt{\rho_0^2 + a^2 - 2\rho_0 a\cos\varphi}$$

С помощью дифференцирования по параметру получается следующая формула:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\cos n\varphi}{n} = \ln\frac{1}{\sqrt{1-2q\cos\varphi+q^2}} \qquad q\in(-1;1) \tag{16.1}$$

Такая формула считается известной. Необходимо доказать, что этот ряд сходится.

$$\ln\frac{1}{R_{PM_0}} = \ln\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+a^2-2\rho_0 a\cos\varphi}} =$$

$$= \ln\frac{1}{a\sqrt{1-2\frac{\rho_0}{a}\cos\varphi+\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^2}} = \ln\frac{1}{a} + \ln\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{\rho_0}{a}\cos\varphi+\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^2}} =$$

$$= \ln\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^n\frac{\cos n\varphi}{n}$$

$$v|_{\rho=a} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{a} - \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^n \frac{\cos n\varphi}{n}$$

Таким образом, получается система уравнений, с помощью которой определяются коэффициенты:

$$\begin{cases} A_0 = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{a} \\ a^n A_n = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^n \frac{1}{n} \\ a^n B_n = 0 \end{cases}$$

$$A_0 = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{a}$$

$$A_n = -\frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^n$$

$$B_n = 0$$

Следовательно:

$$v(\rho,\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{a} - \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho\rho_0}{a^2}\right)^n \frac{\cos n\varphi}{n}$$

Пусть точка M_0 лежит не на оси абсцисс, а внутри круга. Поворот на угол φ_0 системы координат приводит к тому, что в исходной системе координат вместо φ в ответе будет $\varphi - \varphi_0$. Если $M_0(\rho_0, \varphi_0)$, то:

$$v(\rho,\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{a} - \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho\rho_0}{a^2}\right)^n \frac{\cos n(\varphi-\varphi_0)}{n}$$

Этот ряд можно просуммировать. Пусть:

$$q = \frac{\rho\rho_0}{a^2} = \frac{\rho}{a}\cdot\frac{\rho_0}{a} < 1$$

Применяется формула (16.1) *получается:*

$$v(\rho,\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{a} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{\rho\rho_0}{a^2}\cos(\varphi-\varphi_0) + \left(\frac{\rho\rho_0}{a^2}\right)^2}}$$

Пусть:

$$\rho_1 = \frac{a^2}{\rho_0} = \frac{a}{\rho_0}\cdot a > a$$

Тогда:

$$v(\rho,\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{a} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{\rho}{\rho_1}\cos(\varphi-\varphi_0) + \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{a} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{a} - \frac{1}{2\pi}\ln\rho_1 - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{\rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\rho_1}{a} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{\rho_1 - 2\rho\rho_1\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{a}{\rho_0} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MM_1}} = -\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{a}{\rho_0}\frac{1}{R_{MM_1}}\right)$$

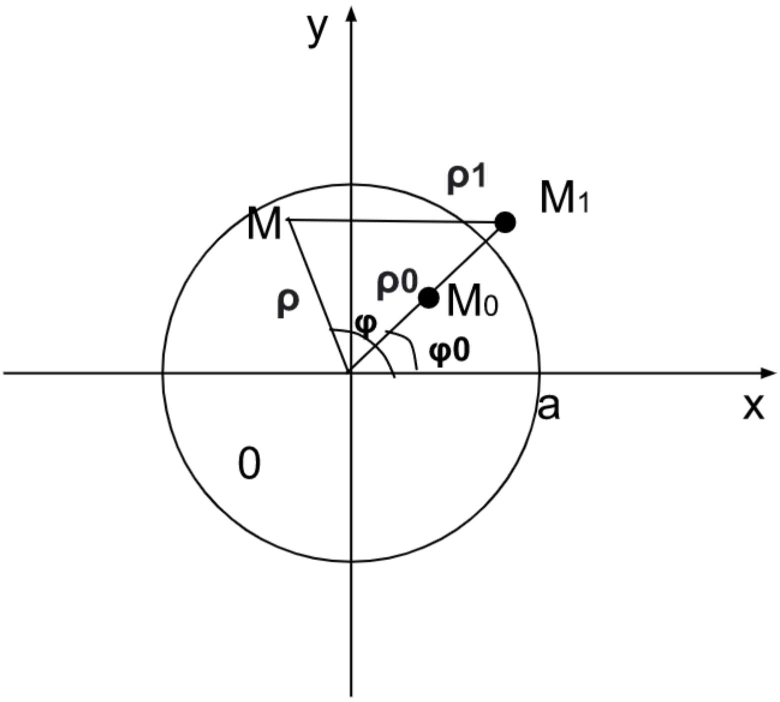

Рис. 16.3. Точка M_0 в круге

Из треугольника MM_1O:

$$R_{MM_1} = \sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos(\varphi-\varphi_0)}$$

Точка M_1 называется симметричной точке M_0 относительно окружности:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Функция Грина представляется в следующем виде:

$$G(M,M_0) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{R_{MM_0}} - \ln\left(\frac{a}{\rho_0}\frac{1}{R_{MM_1}}\right)\right)$$

Таким образом, получается функция Грина задачи Дирихле в круге для уравнения Лапласа.

Функция Грина для других граничных условий

Рассматривается внутренняя краевая задача с граничными условиями третьего рода:

$$\Delta u(M) = F(M) \quad M \in D$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\bigg|_S = f(P) \quad h(P) \geqslant 0 \quad h \not\equiv 0$$

Для этой задачи функция Грина определяется следующим образом:

$$\Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0) \quad M,M_0 \in D$$

На границе требуется следующее:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial n} + hG\right)\bigg|_{M\in S} = 0$$

Записывается третья формула Грина в области D:

$$u(M_0) = -\int\limits_D G(M,M_0)\Delta u(M)dV_M + \int\limits_S \left(G(P,M_0)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n_P}\right)dS_P =$$

$$= -\int\limits_D G(M,M_0)F(M)dV_M +$$

$$+\int\limits_S \left(G(P,M_0)\left(\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} + h(P)u(P)\right) - u(P)\left(\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n_P} + h(P)G(P,M_0)\right)\right)dS_P$$

Окончательно, получается следующая формула:

$$u(M_0) = -\int\limits_D G(M,M_0)F(M)dV_M + \int\limits_S G(P,M_0)f(P)dS_P$$

Таким образом, с помощью функции Грина можно решить краевую задачу с граничными условиями третьего рода. Для внутренней смешанной краевой задачи функция Грина определяется следующим образом:

$$\Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0) \quad M,M_0 \in D$$

Применяется однородное смешанное граничное условия при $M \in S$.

Рассматривается внутренняя задача Неймана для уравнения Лапласа:

$$\Delta u(M) = 0 \quad M \in D$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P)$$

Такая задача решаема тогда и только тогда, когда выполнено необходимое и достаточное условие:

$$\int_S f(P)dS = 0$$

Функция Грина определяется следующим образом:

$$\Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0) \quad M,M_0 \in D$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{M\in S} - -\frac{1}{S_0}$$

S_0 — площадь (длина) S. Третья формула Грина:

$$u(M_0) = -\int_D G(M,M_0)\Delta u(M)dV_M + \int_S \left(G(P,M_0)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n_P} \right) dS_P$$

Окончательно получается следующая формула:

$$u(M_0) = \int_S G(P,M_0)f(P)dS_P + const$$

Семинар 17. Функция Грина для внешних краевых задач

Функция Грина для внешних краевых задач

На функцию Грина необходимо наложить условия на бесконечности. Рассматривается двумерный случай.

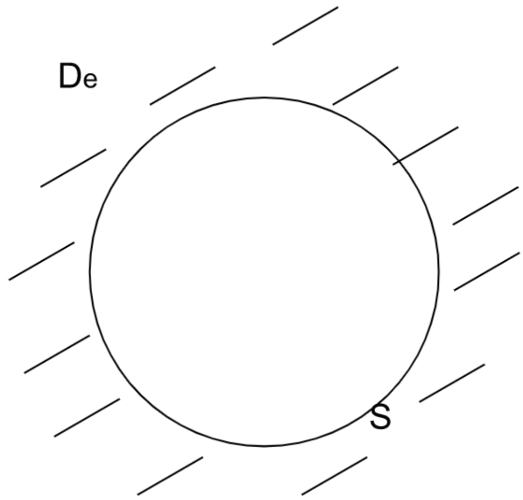

Рис. 17.1. Трехмерный случай

В трехмерном случае функция Грина имеет следующий вид:

$$\Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0) \quad M, M_0 \in D_e$$

Граничные условия ставятся следующие:

$$G|_{M \in S} = 0$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{M \in S} = 0$$

$$\left.\left(\frac{\partial G}{\partial n} + hG\right)\right|_{M \in S} = 0$$

Также ставится однородное смешанное граничное условие и $G \to 0$ при $r \to \infty$, где r — расстояние от M до начала координат. Функцию Грина можно считать решением этой задачи. Тогда можно доказать, что функция Грина будет существовать и будет единственным.

Рассматривается двумерный случай. Функция Грина в двумерном случае определяется следующим образом:

$$\Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0) \quad M,M_0 \in D_e$$

$$G|_{M\in S} = 0$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = -\frac{1}{S_0}$$

$$\left.\left(\frac{\partial G}{\partial n} + hG\right)\right|_{M\in S} = 0$$

Также можно поставить однородное смешанное граничное условие. Также ставится условие на бесконечности: $G(M,M_0)$ должна быть ограничена при $M \to \infty$ ($\exists R > 0: \ G(M,M_0)$ ограничена, если $M \in$ внешности круга радиуса R с центром в начале координат).

Построение функции Грина методом зеркальных отображений

Пример 17.1. *Рассматривается задача Дирихле в полупространстве.*

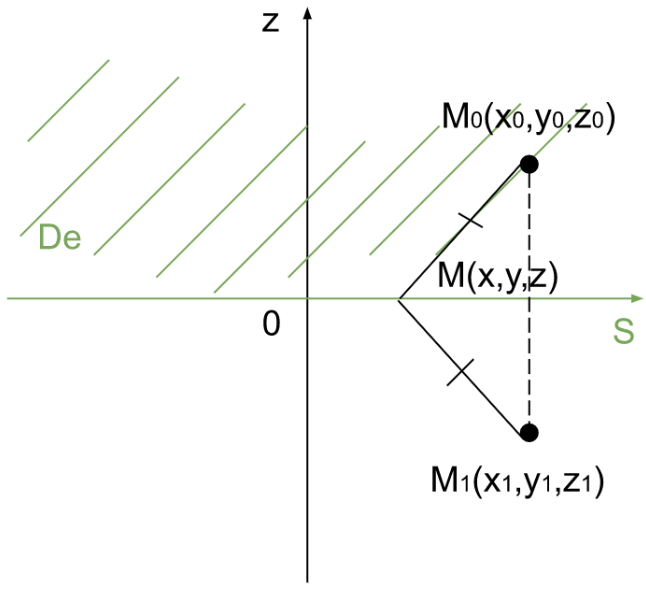

Рис. 17.2. Задача Дирихле в полупространстве

Пусть в пространстве задана некоторая плоскость, которая делит пространство на полупространство. Функция Грина для задачи Дирихле определяется следующим образом:

$$\Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0) \quad M, m_0 \in D_e$$

$$G|_{M \in S} = 0$$

Условие бесконечности:

$$G \to 0 \quad r \to \infty$$

r *— расстояние от точки* M *до начала координат. В трехмерном случае общее решение такого дифференциального уравнения имеет следующий вид:*

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R_{MM_0}} + V(M)$$

$$\Delta V(M) = 0 \quad z > 0$$

$$G|_{z=0} = 0$$

$$G \to 0 \quad r \to \infty$$

Рассматривается точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. *В эту точку помещен заряд. Чтобы потенциал на границе области был нулевым, должны появиться еще заряды (наведенные заряды), которые будут компенсировать исходный заряд. Таким образом, добавляется точка* $M_1(x_0, y_0, -z_0)$. *Если в точку* M_1 *поместить фиктивный заряд, то он будет создавать такой же электрический потенциал, но противоположный по знаку. Пусть:*

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R_{MM_1}}$$

$$G(M, M_0)|_{M \in S} = 0$$

Выполняется условие на бесконечности:

$$G \to 0 \quad r \to \infty$$

$$\Delta V(M) = 0 \quad z > 0$$

Тогда ответом является следующая функция:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R_{MM_1}}$$

Пример 17.2. *Рассматривается задача Неймана в полупространстве. Рассматривается такая же область, как и в предыдущем примере. Поскольку это трехмерный случай, то функция Грина должна удовлетворять следующим условиям:*

$$\Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0) \quad M,M_0 \in D_e$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = 0$$

$$G \to 0 \quad r \to \infty$$

Дифференциальное уравнение имеет общее решение в следующем виде:

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_0}} + V(M)$$

$$V(M) = 0$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$$

$$G \to 0 \quad r \to \infty$$

Рассматривается термодинамическая интерпретация. Рассматривается произвольная точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$, в которой находится источник тепла. Таким образом, получается задача распределения температуры в верхнем полупространстве, если есть точечный источник тепла, помещенный в точку M_0. Граница области является теплоизолированной, то есть через нее нет потока тепла.

Таким образом, функция Грина для задачи Неймана в полупространстве записывается следующим образом:

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_0}} + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MM_1}}$$

Пример 17.3. *Рассматривается задача Дирихле в круге. Пусть область представляет собой круг некоторого радиуса a. Граница круга — окружность S.*

Для функции Грина ставятся следующие условия:

$$\Delta_M G(M,M_0) = -\delta(M,M_0)$$

$$G|_{M\in S} = 0$$

$$G(M,M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MM_0}} + V(M)$$

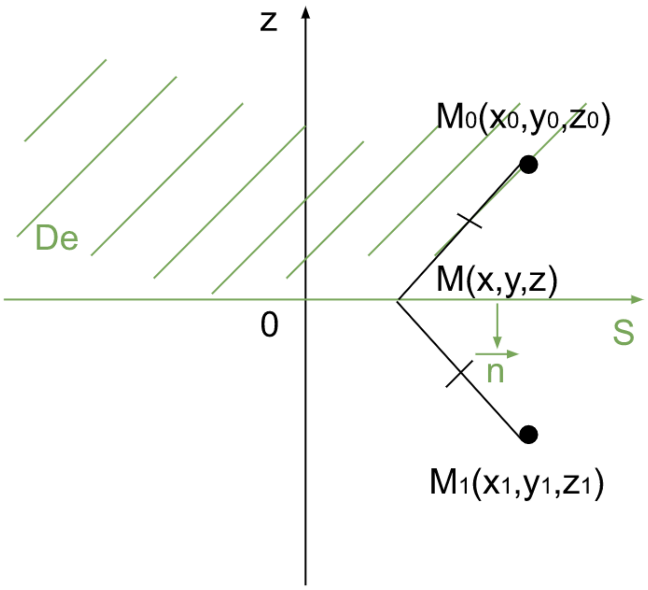

Рис. 17.3. Задача Неймана в полупространстве

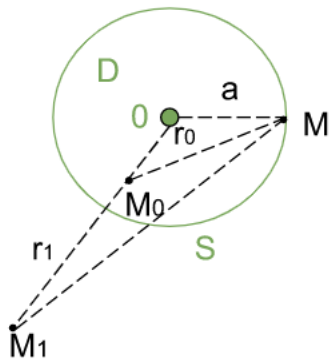

Рис. 17.4. Задача Дирихле в круге

$$\Delta V(M) = 0$$

$$G|_{M\in S} = 0$$

Пусть внутри круга есть точка M_0. На границе ставятся граничные условия Дирихле. Пусть вне круга есть точка M_1, в которую помещается заряженная нить.

Определение 17.1. *Точка M_1 называется симметричной точке M_0 относительно окружности S, если точка M_1 лежит на прямой, соединяющей центр окружности* *и точку* M_0*, причем:*

$$r_0 \cdot r_1 = a^2$$

$$r_0 = R_{M_0 0}$$

$$r_1 = R_{M_1 0}$$

Точка, симметричная центру окружности, является бесконечно удаленной.

Тогда справедливо следующее геометрическое свойство.

Лемма 17.1. *Если* $M \in S$*, то:*

$$R_{MM_0} = \frac{r_0}{a} R_{MM_1}$$

Доказательство.

Из следующего равенства следует, что:

$$r_0 r_1 = a^2 \to \frac{a}{r_1} = \frac{r_0}{a}$$

Тогда получается, что треугольники OMM_0 *и* OM_1M *подобны, так как стороны пропорциональны:*

$$\frac{OM}{OM_1} = \frac{M_0O}{OM}$$

$$\frac{M_0M}{OM_0} = \frac{MM_1}{OM_1}$$

$$\frac{R_{MM_0}}{r_0} = \frac{R_{MM_1}}{a}$$

$$R_{MM_0} = \frac{r_0}{a} R_{MM_1}$$

■

Пусть:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{a}{r_0} \frac{1}{R_{MM_1}} \right)$$

$$G|_{M \in S} = 0$$

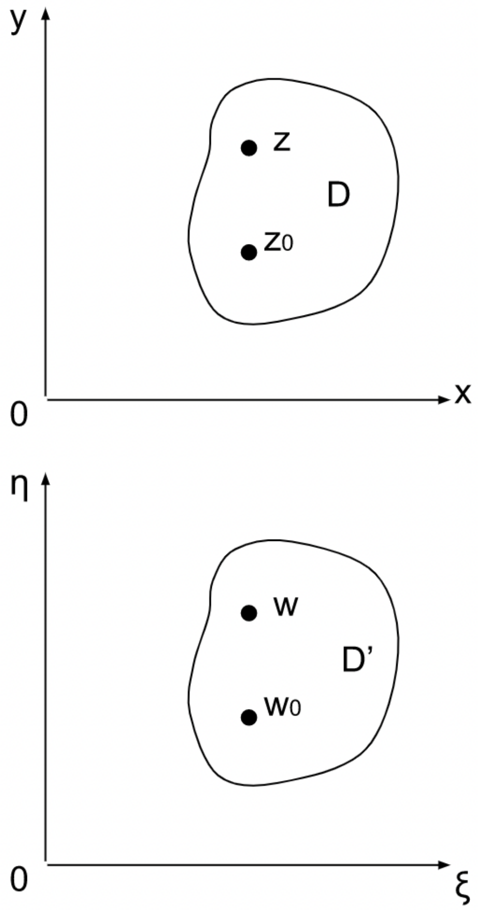

Рис. 17.5. Построение функции Грина в плоской области методом конформных отображений

Построение функции Грина в плоской области методом конформных отображений

Пусть есть внутренняя плоская область. Вводятся прямоугольная система координат и комплексная переменная:

$$z = x + iy$$

$$w = f(z)$$

Создается конформное отображение и получается новая область $D \to D'$.

$$w = \xi + i\eta$$

$f(z)$ — однозначная и однолистная, аналитическая функция и:

$$f'(z) \neq 0$$

$$\Delta_z = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\Delta_w = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$\Delta_z = |f'(z)|^2 \Delta_w$$

$$\Delta_z G(z, z_0) = -\delta(z, z_0) \quad M, M_0 \in D$$

$$G|_{z \in S} = 0$$

$$\delta(z, z_0) = |f'(z)|^2 \delta(w, w_0)$$

$$w_0 = f(z_0)$$

Таким образом, получается дифференциальное уравнение в новых координатах:

$$\Delta_w \tilde{G}(w, w_0) = -\delta(w, w_0)$$

$$\tilde{G}|_{w \in S'} = 0$$

$$\tilde{G}(w, w_0) = G(z, z_0)$$

$$w = f(z)$$

$$w_0 = f(z_0)$$

Семинар 18. Построение функции Грина

Построение функции Грина методом зеркальных отображений

Рассматривается построение функции Грина с помощью конформного отображения. Этот метод работает только в двумерном случае. Пусть есть некоторая область с прямоугольной системой координат.

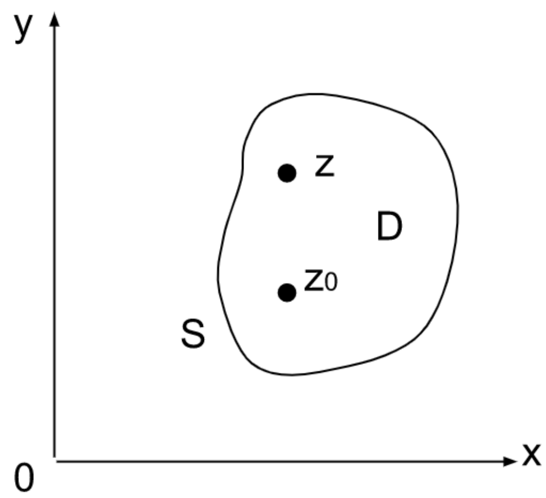

Рис. 18.1. Построение функции Грина с помощью конформного отображения

Применяются граничные условия Дирихле.

$$z = x + iy$$

Берутся две точки в области: z, z_0.

$$\Delta_z G(z, z_0) = -\delta(z, z_0), \quad z, z_0 \in D$$

$$G(z, z_0)|_{z \in S} = 0$$

Ставится условие бесконечности. Происходит следующее конформное отображение:

$$w = f(z)$$

$f(z)$ — однозначная, однолистная, аналитическая функция в области D. Требуется следующее:

$$f'(z) \neq 0$$

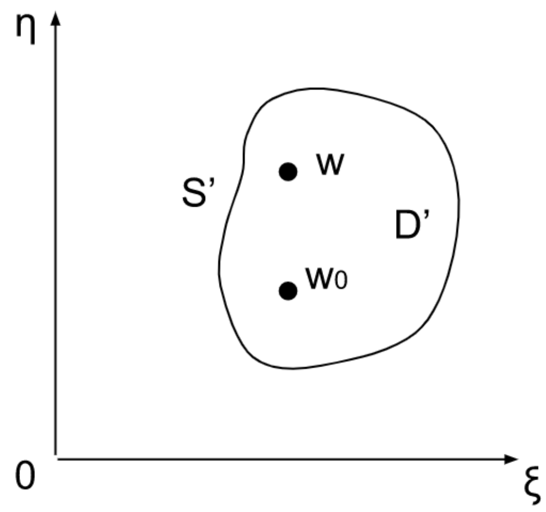

Рис. 18.2. Конформное отображение

Тогда эта функция осуществляет конформное отображение в новую область D'.

$$w = \xi + i\eta$$

$$w = f(z)$$

$$w_0 = f(z_0)$$

При таком конформном отображении можно вывести формулу как преобразуется оператор Лапласа.

$$z = f^{-1}(w)$$

$$z_0 = f^{-1}(w_0)$$

$$\Delta_z = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = |f'(z)|^2 \Delta_w = |f'(z)|^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)$$

$$\varphi(z_0) = \iint\limits_D \varphi(z)\delta(z, z_0) dx dy =$$

$$= \iint\limits_{D'} \varphi(f^{-1}(w))\delta(f^{-1}(w), f^{-1}(w_0)) \left| \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} \right| d\xi d\eta =$$

$$= \iint\limits_{D'} \tilde{\varphi}(w)\delta(w, w_0) d\xi d\eta = \tilde{\varphi}(w_0)$$

$$\delta(z, z_0) \cdot \left| \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} \right| = \delta(w, w_0)$$

Конформное отображение обладает свойством постоянства растяжения, то есть маленький отрезок, выходящий из z после отображения, превращается в маленький отрезок, выходящий из w. Длина, при этом, его увеличится в $|f'(z)|$ раз.

$$|f'(z)|^{-2}\Delta_w G(f^{-1}(w), f^{-1}(w_0)) = -|f'(z)|^{-2}\delta(w, w_0)$$

$$\tilde{G}(w, w_0) = G(z, z_0)$$

Тогда получается следующий оператор Лапласа:

$$\Delta_w \tilde{G}(w, w_0) = -\delta(w, w_0), \quad w, w_0 \in D'$$

$$\tilde{G}(w, w_0)|_{w \in S'} = 0$$

Функция Грина при конформном отображении не меняется. Записывается теорема Римана.

Теорема 18.1. *Если D — односвязная область и ее граница состоит хотя бы из одной точки, то D можно конформно отобразить на единичный круг, причем так, чтобы заданная точка $z_0 \in D$ перешла в центр круга.*

Пример 18.1. *Рассматривается построение функции Грина задачи Дирихле в полосе. Пусть есть следующая область, которая представляет с собой полосу:*

$$z = x + iy$$

Оператор Лапласа записывается в следующем виде:

$$\Delta_z G(z, z_0) = -\delta(z, z_0), \quad z, z_0 \in D$$

Условие Дирихле:

$$G(z, z_0)|_{z \in S} = 0$$

Условие ограниченности:

$$G(z, z_0) \quad z \to \infty$$

Необходимо найти конформное отображение $D \to$ единичный круг, такое что $z_0 \to$ центр круга. Сначала рассматривается экспоненциальное преобразование, при котором полоса перейдет в полуплоскость:

$$t = e^z = e^x e^{iy}$$

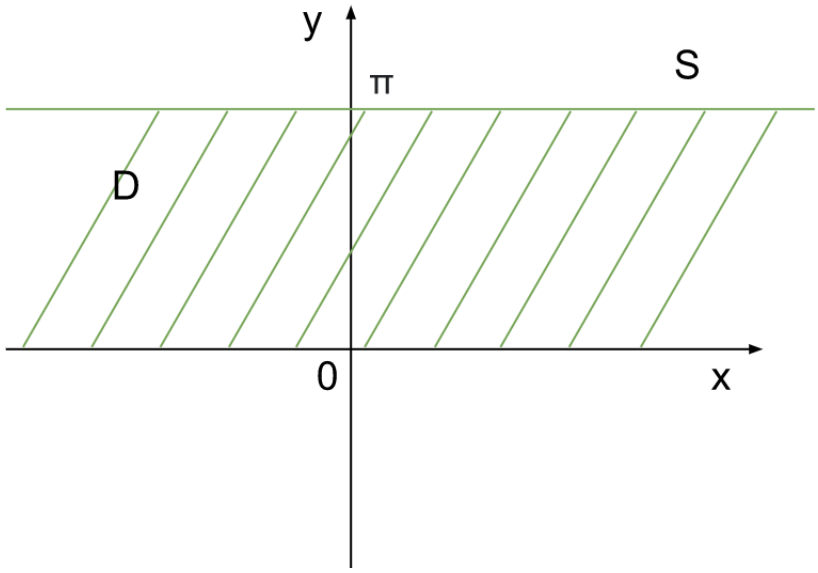

Рис. 18.3. Построение функции Грина задачи Дирихле в полосе

$$|t| = e^x$$

$$arg\ t = y$$

$$t_0 = e^{z_0}$$

Эта полуплоскость конформно отображается на единичный круг.

Любое дробно-линейное отображение имеет следующий вид:

$$w = \lambda \frac{t-\alpha}{t-\beta}$$

Требуется следующее:

$$t_0 \to 0 \longrightarrow \alpha = t_0$$

$$\bar{t}_0 \to \infty \longrightarrow \beta = \bar{t}_0$$

$$Im\ t = 0 \longrightarrow |w| = 1$$

$$|w| = |\lambda| \cdot \frac{|t-\alpha|}{|t-\beta|} = |\lambda| \cdot \frac{|t-t_0|}{|t-\overline{t_0}|} = |\lambda| = 1$$

$$\lambda = e^{i\varphi}, \quad \varphi \in R$$

Пусть:

$$\varphi = 0$$

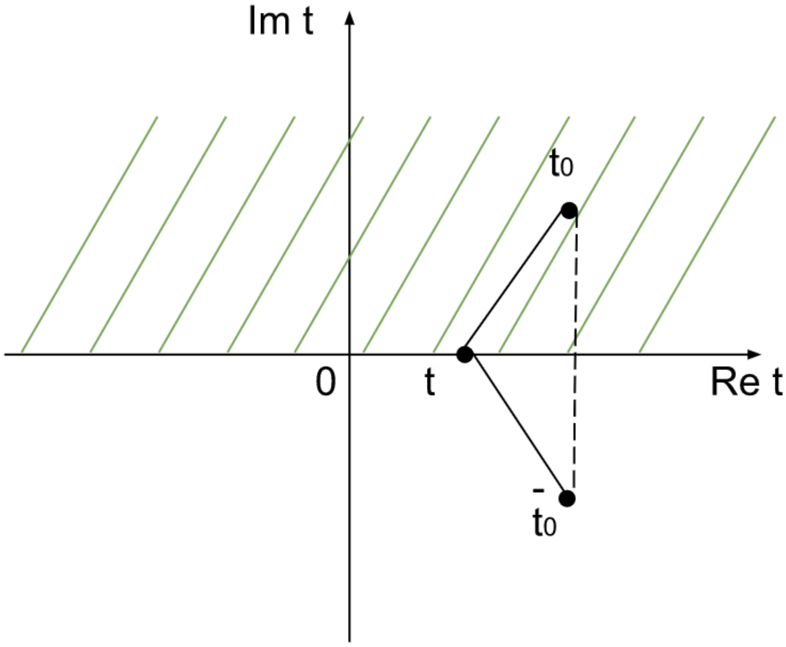

Рис. 18.4. Полуплоскость

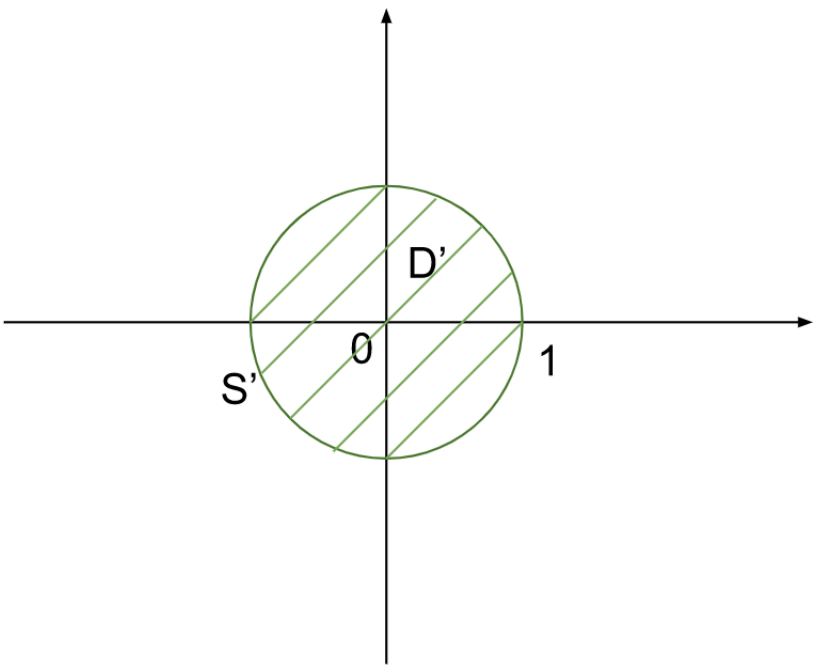

Рис. 18.5. Единичный круг

Тогда:

$$\lambda = 1$$
$$w = \frac{t - t_0}{t - \overline{t_0}}$$

Необходимо вернуться в исходную комплексную переменную:

$$z \to t \to w$$
$$w = f(z) = \frac{t - t_0}{t - \bar{t}_0} = \frac{e^z - e^{z_0}}{e^z - e^{\overline{z_0}}}$$
$$(D \to D')$$

Необходимо найти функцию Грина в этом единичном круге:

$$\Delta_w \tilde{G}(w,0) = -\delta(w,0), \quad w, w_0 \in D'$$

Условие Дирихле:

$$\tilde{G}(w,0)|_{w\in S'} = 0$$

Решение дифференциального уравнения в двумерном случае имеет следующий вид:

$$\tilde{G}(w,0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|w|} + V(w)$$
$$\Delta V(w) = 0$$

Граничные условия:

$$V(w)|_{w\in S'} = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|w|}\bigg|_{w\in S'} = 0 \to V(w) = 0$$
$$V(w) \equiv 0$$
$$\tilde{G}(w,0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|w|}$$

Функция Грина в исходной области получается следующим образом:

$$G(z,z_0) = \tilde{G}(f(z),0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|f(z)|} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{e^z - e^{\overline{z_0}}}{e^z - e^{z_0}}\right| = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{e^x e^{iy} - e^{x_0}e^{-iy_0}}{e^x e^{iy} - e^{x_0}e^{iy_0}}\right|$$

В итоге, после всех преобразований получается следующий окончательный ответ:

$$G(x,y,x_0,y_0) = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{ch(x-x_0) - \cos(y+y_0)}{ch(x-x_0) - \cos(y-y_0)}$$

Начальная краевая задача для уравнения теплопроводности

Рассматривается начальная краевая задача для уравнения теплопроводности в ограниченной области с однородными граничными условиями. Пусть есть ограниченная область и внешняя нормаль.

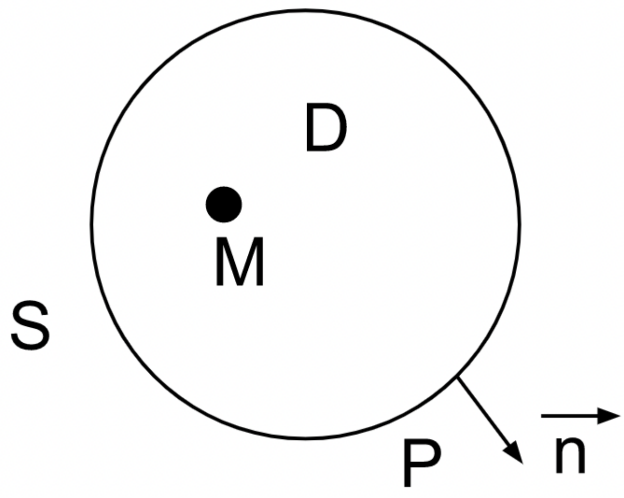

Рис. 18.6. Начальная краевая задача для уравнения теплопроводности

Уравнение теплопроводности должно выполняться в области D.

$$u_t = a^2\Delta u + f(m,t), \quad m \in D, \ \ t > 0$$

Граничные условия первого, второго, либо третьего рода имеют следующий вид:

$$\left.\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\right|_s = 0, \quad P \in S, \ \ t \geqslant 0$$

Начальное условие:

$$u|_{t=0} = \varphi(M), \quad M \in D$$

$$a = const > 0$$

$$|\alpha| + |\beta| \neq 0, \quad \alpha \cdot \beta \geqslant 0$$

Необходимо найти $u(M,t)$ при $M \in \overline{D}, \ t \geqslant 0$. Рассматривается задача Штурма-Лиувилля в области D:

$$\Delta V(M) + \lambda V(M) = 0, \quad M \in D$$

$$\left.\left(\lambda \frac{\partial v}{\partial n} + \beta v\right)\right|_s = 0$$

Собственные функции образуют полную ортогональную систему $\{V_n(M)\}$. Собственные значения — $\{\lambda_n\}$. Происходит разложение в ряд Фурье по $\{V_n(M)\}$ функции $f(M,t)$, $\varphi(M)$, $u(M,t)$:

$$\varphi(M) = \sum_n \varphi_n V_n(M)$$

$$\varphi_n = \frac{1}{||V_n||^2} \int_D \varphi(M) V_n(M) dV$$

$$f(M,t) = \sum_n f_n(t) V_n(M)$$

$$f_n = \frac{1}{||V_n||^2} \int_D f(M,t) V_n(M) dV$$

$$u(M,t) = \sum_n T_n(t) V_n(M)$$

Эти ряды необходимо подставить в дифференциальное уравнение, граничные условия и начальное условие:

$$\sum_n T_n'(t) V_n(M) = a^2 \sum_n T_n(t) \Delta V_n(M) + \sum_n f_n(t) V_n(M)$$

$$\sum_n T_n(t) \left.\left(\lambda \frac{\partial V_n}{\partial n} + \beta V_n\right)\right|_S = 0$$

$$\sum_n T_n(0) V_n(M) = \sum_n \varphi_n V_n(M)$$

$$T_n'(t) = -a^2 \lambda_n T_n(t) + f_n(t), \quad t > 0$$

$$T_n(0) = \varphi_n$$

Получается следующая задача Коши, которая имеет единственное решение:

$$T_n'(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = f_n(t)$$

$$T_n(0) = \varphi_n$$

$$\lambda_n \leqslant 0$$

Таким образом, решение исходной задачи находится следующим образом:

$$T_n(t) = \varphi_n e^{-\lambda_n a^2 t} + \int\limits_0^t e^{-\lambda_n a^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau$$

$$u(M,t) = \sum_n T_n(t) V_n(M)$$

Было получено решение исходной задачи, которое удовлетворяет уравнению теплопроводности. Аналогично решается внутренняя начальная краевая задача с однородными граничными условиями для уравнения колебаний.

Семинар 19. Решение начальной краевой задачи для уравнения колебаний

Начально-краевая задача для уравнения колебаний в ограниченной области с однородными граничными условиями

Пусть есть ограниченная область **D** с произвольной точкой **M** и **P**, и нормалью. Тогда внутри области **D** **u** удовлетворяет уравнению колебаний (дифференциальное уравнение):

$$u_{tt} = a^2\Delta u + f(M,t) \quad M \in D \quad t > 0$$

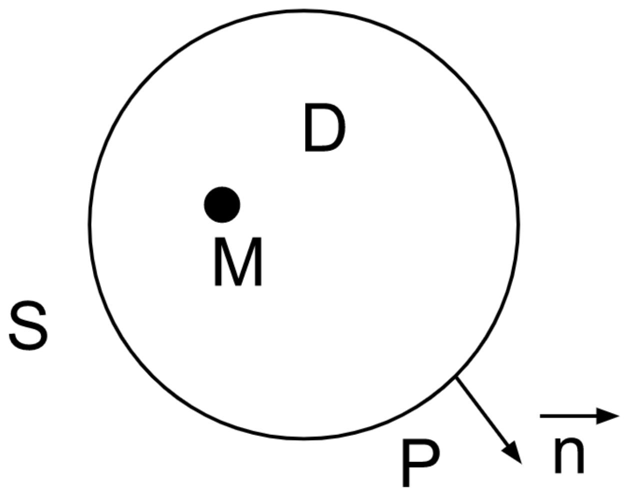

Рис. 19.1. Начально-краевая задача для уравнения колебаний

Для уравнения колебаний ставятся дополнительные условия. Граничные условия записываются в следующем виде:

$$\left.\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\right|_S = 0 \quad PinS \quad t \geqslant 0$$

Начальных условий в этой задаче 2:

$$u|_{t=0} = \varphi(M), \quad M \in D$$

$$u_t\big|_{t=0} = \psi(M), \quad M \in D$$

Сначала рассматривается задача Штурма-Лиувилля:

$$\Delta V(M) + \lambda V(M) = 0 \quad M \in D$$

$$\left(\alpha \frac{\partial V}{\partial n} + \beta V\right)\bigg|_S = 0$$

Это задача Штурма-Лиувилля имеет полную ортогональную систему функций $\{V_n(M)\}$ и собственные значения $\{\lambda_n\}$.

$$\lambda_n \geqslant 0$$

Функции представляются в виде ряда:

$$\varphi(M) = \sum_n \varphi_n V_n(M)$$

$$\varphi_n = \frac{1}{||V_n||^2} \int\limits_D \varphi(M) V_n dV$$

$$\psi(M) = \sum_n \psi_n V_n(M)$$

$$\psi_n = \frac{1}{||V_n||^2} \int\limits_D \psi(M) V_n dV$$

$$f(M,t) = \sum_n f_n(t) V_n(M)$$

$$f_n(t) = \frac{1}{||V_n||^2} \int\limits_D f(M,t) V_n(M) dV$$

$$u(M,t) = \sum_n T_n(t) V_n(M)$$

Таким образом, получается следующее дифференциальное уравнение в виде ряда:

$$\sum_n T_n''(t) V_n(M) = \sum_n T_n(t) a^2 \Delta V_n(M) + \sum_n f_n(t) V_n(M)$$

Необходимо подставить граничные условия:

$$\sum_n T_n(t) \left(\alpha \frac{\partial V_n}{\partial n} + \beta V_n\right)\bigg|_S = 0$$

Необходимо подставить начальные условия:

$$\sum_n T_n(0)V_n(M) = \sum_n \varphi_n V_n(M)$$

$$\sum_n T_n'(0)V_n(M) = \sum_n \psi_n V_n(M)$$

Тогда для конкретного n получается следующее дифференциальное уравнение:

$$T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = f_n(t) \quad t > 0$$

Для конкретного n получаются следующие начальные условия:

$$T_n(0) = \varphi_n$$

$$T_n'(0) = \psi_n$$

Такая задача имеет единственное решение.

$$T_n(t) = \varphi_n \cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + \frac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}}\sin(a\sqrt{\lambda_n}t) + \int\limits_0^t \frac{\sin(a\sqrt{\lambda_n}(t-\tau))}{a\sqrt{\lambda_n}} f_n(\tau)d\tau \quad \lambda_n > 0$$

$$T_n(t) = \varphi_n + \psi_n t + \int\limits_0^t (t-\tau) f_n(\tau)d\tau \quad \lambda_n = 0$$

Решение исходной задачи записывается в следующем виде:

$$u(M,t) = \sum_n T_n(t)V_n(M)$$

Таким образом, можно решить любую начальную краевую задачу для уравнения колебаний в любой ограниченной области.

Пример: решение начальной краевой задачи для уравнения колебаний

Пример 19.1. *Рассматривается задача о вынужденных колебаниях круглой мембраны. Следовательно, получится начальная краевая задача для колебательных уравнения в единичном круге.*

$$u_{tt} = a^2\Delta u + J_0(\chi\rho)\sin\sigma t \quad \rho < 1, \quad t > 0$$

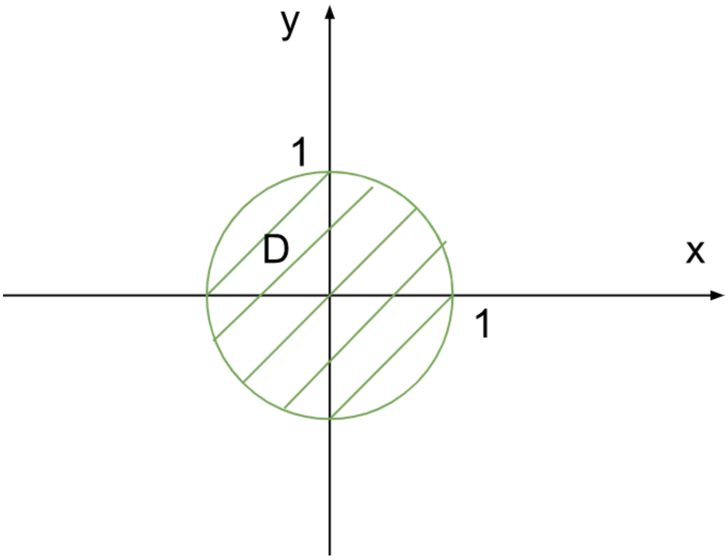

Рис. 19.2. Единичный круг

Однородные граничные условия Дирихле на границе круга:

$$u|_{\rho=1} = 0$$

Начальные условия должны быть однородными:

$$u|_{t=0} = 0$$

$$u_t|_{t=0} = 0$$

Константы:

$$r > 0 \quad a > 0$$

χ *— первый положительный корень уравнения* $J_0(\chi) = 0$.

Сначала необходимо решить соответствующую задачу Штурма-Лиувилля в круге:

$$\Delta V + \lambda V = 0 \quad \rho < 1$$

$$V|_{\rho=1} = 0$$

Собственные функции этой задачи:

$$V_{nk}(\rho, \varphi) = J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\rho)\Phi_n(\varphi) \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\Phi_0(\varphi) = 1$$

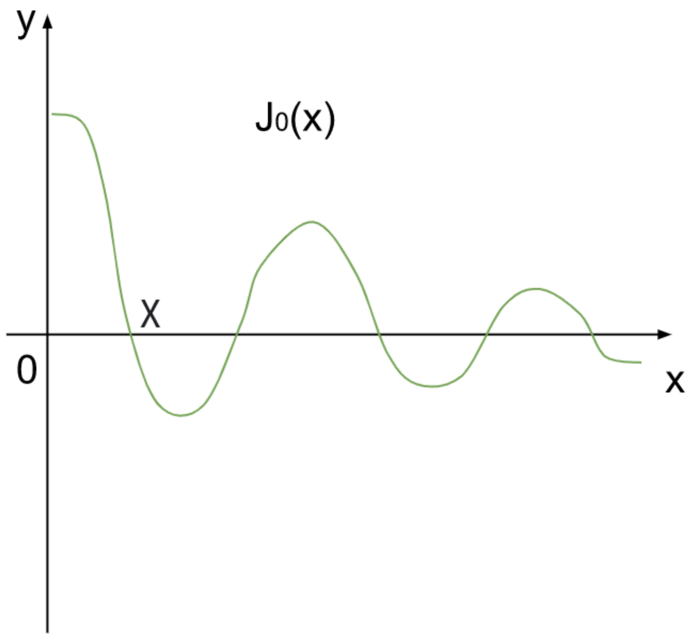

Рис. 19.3. График функции Бесселя нулевого порядка

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix}$$

Собственным значением этой задачи является $\lambda_k^{(n)}$ *- k-й положительный корень уравнения:*

$$J_n(\sqrt{\lambda}) = 0 \quad k = 1, 2, \ldots$$

Собственные функции образуют полную ортогональную систему функций. Происходит разложение функции в ряд Фурье:

$$J_0(\chi\rho)\sin\sigma t = \sum_{k=1}^{\infty} A_{0k} J_0(\lambda_k^{(0)}\rho) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} J_n(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\rho)\,(A_{nk}\cos n\varphi + B_{nk}\sin n\varphi)$$

$$\chi = \sqrt{\lambda_1^{(0)}}$$

$$J_0(\chi\rho)\sin\sigma t = J_0(\sqrt{\lambda_1^{(0)}}\rho)\sin\sigma t$$

$$J_0(\chi\rho)\sin\sigma t = A_{00} V_{01}(\rho,\varphi)$$

$$u(\rho,\varphi,t) = T_{01}(t) V_{01}(\rho,\varphi)$$

Таким образом, получается следующее дифференциальное уравнение:

$$T''_{01}(t) V_{01}(\rho,\varphi) = a^2 T_{01}(t)\Delta V_{01}(\rho,\varphi) + A_{01}(t) V_{01}(\rho,\varphi)$$

Необходимо подставить граничное условие:

$$T_{01}(t)V_{01}(\rho,\varphi)|_{\rho=1}=0$$

Необходимо подставить начальные условия:

$$T_{01}(0)V_{01}(\rho,\varphi)=0$$

$$T_{01}'(0)V_{01}(\rho,\varphi)=0$$

$$T_{01}''(t)+a^2\lambda_1^{(0)}T_{01}(t)=\sin\sigma t \quad t>0$$

$$T_{01}(0)=0$$

$$T_{01}'(0)=0$$

$$T_{01}''(t)+a^2\lambda_1^{(0)}T_{01}(t)=0$$

Общее решение этого однородного уравнения записывается в следующем виде:

$$T_{01}(t)=A\sin(a\sqrt{\lambda_1^{(0)}}t)+B\cos(a\sqrt{\lambda_1^{(0)}}t)$$

Необходимо найти частное решение неоднородного уравнения. При $\sigma\neq a\sqrt{\lambda_1^{(0)}}$ *— нерезонансный случай:*

$$\tilde{T}_{01}(t)=C\sin\sigma t+D\cos\sigma t$$

$$-C\sigma^2\sin\sigma t-D\sigma^2\cos\sigma t+a^2\lambda_1^{(0)}C\sin\sigma t+a^2\lambda_1^{(0)}D\cos\sigma t=\sin\sigma t$$

$$-C\sigma^2+a^2\lambda_1^{(0)}C=1\rightarrow C=\frac{1}{a^2\lambda_1^{(0)}-r^2}$$

$$-D\sigma^2+a^2\lambda_1^{(0)}D=0\rightarrow D=0$$

$$\tilde{T}_{01}(t)=\frac{\sin\sigma t}{a^2\lambda_1^{(0)}-\sigma^2}$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения записывается в следующем виде:

$$T_{01}(t)=A\sin(a\chi t)+B\cos(a\chi t)+\frac{\sin\sigma t}{a^2\lambda_1^{(0)}-\sigma^2}$$

$$T_{01}(0)=0$$

$$T_{01}'(0) = 0$$

$$T_{01}'(t) = Aa\chi\cos(a\chi t) - Ba\chi\sin(a\chi t) + \frac{\sigma\cos\sigma t}{a^2\lambda_1^{(0)} - \sigma^2}$$

$$\begin{cases} B = 0 \\ Aa\chi + \frac{\sigma}{a^2\chi^2-\sigma^2} = 0 \to A = -\frac{\sigma}{a\chi(a^2\chi^2-\sigma^2)} \end{cases}$$

$$T_{01}(t) = \frac{\sigma\sin(a\chi t)}{a\chi(\sigma^2 - a^2\chi^2)} + \frac{\sin(\sigma t)}{a^2\chi^2 - \sigma^2}$$

Таким образом, было получено решение задачи Коши при нерезонансном случае.

Рассматривается резонансный случай при:

$$\sigma = a\chi$$

Частное решение необходимо искать в следующем виде:

$$\tilde{T}_{01}(t) = Ct\sin\sigma t + Dt\cos\sigma t$$

$$\tilde{T}_{01}'(t) = C\sin\sigma t + C\sigma t\cos\sigma t + D\cos\sigma t - D\sigma t\sin\sigma t$$

$$T_{01}''(t) = C\sigma\cos\sigma t - C\sigma^2 t\sin\sigma t - 2D\sigma\sin\sigma t - D\sigma^2 t\cos\sigma t$$

Необходимо подставить в дифференциальное уравнение:

$$2C\sigma\cos\sigma t - C\sigma^2 t\sin\sigma t - 2D\sigma\sin\sigma t - D\sigma^2 t\cos\sigma t + C\sigma^2 t\sin\sigma t + D\sigma^2 t\cos\sigma t = \sin\sigma t$$

$$2C\sigma = 0 \to C = 0$$

$$-2D\sigma = 1 \to D = -\frac{1}{2\sigma}$$

$$\tilde{T}_{01}(t) = -\frac{t}{2\sigma}\cos\sigma t$$

Тогда общее решение в резонансном случае получается в следующем виде:

$$T_{01}(t) = A\sin\sigma t + B\cos\sigma t - \frac{t}{2\sigma}\cos\sigma t$$

Необходимо подставить граничное условие:

$$T_0'(t) = A\sigma\cos\sigma t - B\sigma\sin\sigma t - \frac{\cos\sigma t}{2\sigma} + \frac{t}{2}\sin\sigma t$$

Необходимо подставить начальные условия:

$$T_{01}(0) = 0$$

$$T'_{01}(0) = 0$$

$$B = 0$$

$$A\sigma - \frac{1}{2\sigma} = 0 \to A = \frac{1}{2\sigma^2}$$

Таким образом, получается решение задачи Коши:

$$T_{01}(t) = \frac{\sin \sigma t}{2\sigma^2} - \frac{t}{2\sigma} \cos \sigma t$$

Решение исходной задачи:

$$\sigma \neq a\chi \quad u(\rho, \varphi, t) = \frac{\sigma}{a\chi(\sigma^2 - a^2\chi^2)} J_0(\chi\rho) \sin a\chi t - \frac{1}{\sigma^2 - a^2\chi^2} J_0(\chi\rho) \sin \sigma t$$

$$\sigma = a\chi \quad u(\rho, \varphi, t) = \frac{1}{2\sigma^2} J_0(\chi\rho) \sin \sigma t - \frac{t^2}{2\sigma} J_0(\chi\rho) \cos \sigma t$$

Семинар 20. Решение начально-краевых задач с однородными и неоднородными условиями в ограниченной области

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности в ограниченной области с неоднородными граничными условиями

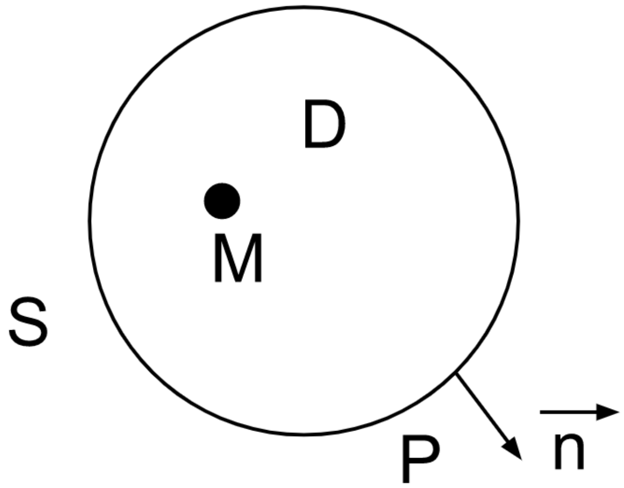

Рис. 20.1. Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности

Рассматривается уравнение теплопроводности в ограниченной области с неоднородными граничными условиями. Пусть есть ограниченная область D с произвольными точками M, P и внешней нормалью. В области D требуется, чтобы выполнялось дифференциальное уравнение:

$$u_t = a^2 \Delta u + f(M,t), \quad M \in D, \quad t > 0$$

Записываются граничные условия:

$$\left.\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\right|_S = \mu(P,t) \quad P \in S, \quad t \geqslant 0$$

Рассматривается случай, когда α и β кусочно постоянные. Ставится одно начальное условие:

$$u|_{t=0} = \varphi(M), \quad M \in D$$

Решение необходимо искать в следующем виде:

$$u(M,t) = v(M,t) + w(M,t)$$

$w(M,t)$ — достаточно гладкая и удовлетворяет следующему условию:

$$\left.\left(\alpha\frac{\partial w}{\partial n} + \beta w\right)\right|_S = \mu(P,t)$$

Необходимо подставить $u = v + w$ в исходную задачу:

$$v_t = a^2\Delta v + f(M,t) - w_t + a^2\Delta w = \tilde{f}(M,t)$$

$$\left.\left(\alpha\frac{\partial v}{\partial n} + \beta v\right)\right|_S = \mu(P,t) - \left.\left(\alpha\frac{\partial w}{\partial n} + \beta w\right)\right|_S = 0$$

$$v|_{t=0} = \varphi(M) - w|_{t=0} = \tilde{\varphi}(M)$$

Тогда для функции v получается следующая новая задача:

$$v_t = a^2\Delta v + \tilde{f}(M,t), \quad M \in D, \quad t > 0$$

$$\left.\left(\alpha\frac{\partial v}{\partial n} + \beta v\right)\right|_S = 0$$

$$v|_{t=0} = \tilde{\varphi}(M)$$

Таким образом, задачи с неоднородными граничными условиями можно свести к задаче с однородными граничными условиями. Во многих случаях удобно взять в качестве функции $w(M,t)$ решение краевой задачи для уравнения Лапласа в области D:

$$\Delta w = 0, \quad M \in D$$

$$\left.\left(\alpha\frac{\partial w}{\partial n} + \beta w\right)\right|_S = \mu(P,t)$$

В этой задача t фигурирует в качестве параметра.

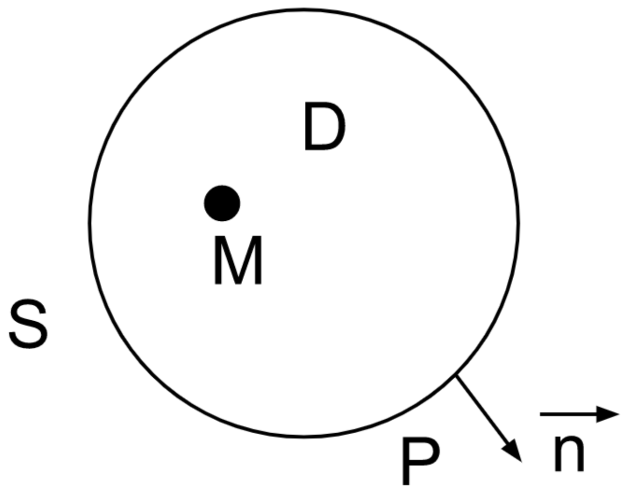

Рис. 20.2. Начально-краевая задача для уравнения колебаний

Начально-краевая задача для уравнения колебаний в ограниченной области с неоднородными граничными условиями

Пусть есть ограниченная область D с произвольными точками M, P и внешней нормалью. В области D требуется, чтобы выполнялось дифференциальное уравнение:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M,t), \quad M \in D \ \ t > 0$$

Граничное условие записывается в следующем виде:

$$\left.\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\right|_S = \mu(P,t)$$

Ставятся 2 начальных условия:

$$u|_{t=0} = \varphi(M)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(M)$$

Решение этой задачи необходимо найти в виде суммы:

$$u(M,t) = v(M,t) + w(M,t)$$

$w(M,t)$ — достаточно гладкая функция и удовлетворяет неоднородному граничному условию:

$$\left.\left(\alpha\frac{\partial w}{\partial n}+\beta w\right)\right|_S=\mu(P,t)$$

Тогда для функции v получается новая краевая задача:

$$v_{tt}=a^2\Delta v+\tilde{f}(M,t),\quad M\in D,t>0$$

$$\left.\left(\alpha\frac{\partial v}{\partial n}+\beta v\right)\right|_S=0$$

$$v|_{t=0}=\tilde{\varphi}(M)$$

$$v_t|_{t=0}=\tilde{\psi}(M)$$

$$\tilde{f}(M,t)=f(M,t)-w_{tt}+a^2\Delta w$$

$$\tilde{\varphi}(M)=\varphi(M)-w|_{t=0}$$

$$\tilde{\psi}(M)=\psi(M)-w_t|_{t=0}$$

Во многих случаях в качестве $w(M,t)$ удобно взять решение краевой задачи:

$$\Delta w=0,\quad M\in D$$

$$\left.\left(\alpha\frac{\partial w}{\partial n}+\beta w\right)\right|_S=\mu(P,t)$$

Пример: задача в единичном круге для уравнения теплопроводности

Пример 20.1. *Рассматривается задача в единичном круге для уравнения теплопроводности.*

Записывается однородное уравнение теплопроводности:

$$u_t=\Delta u,\quad \rho<1\quad t>0$$

Неоднородные граничные условия:

$$u|_{\rho=1}=t\sin 4\varphi$$

$$u|_{t=0}=0$$

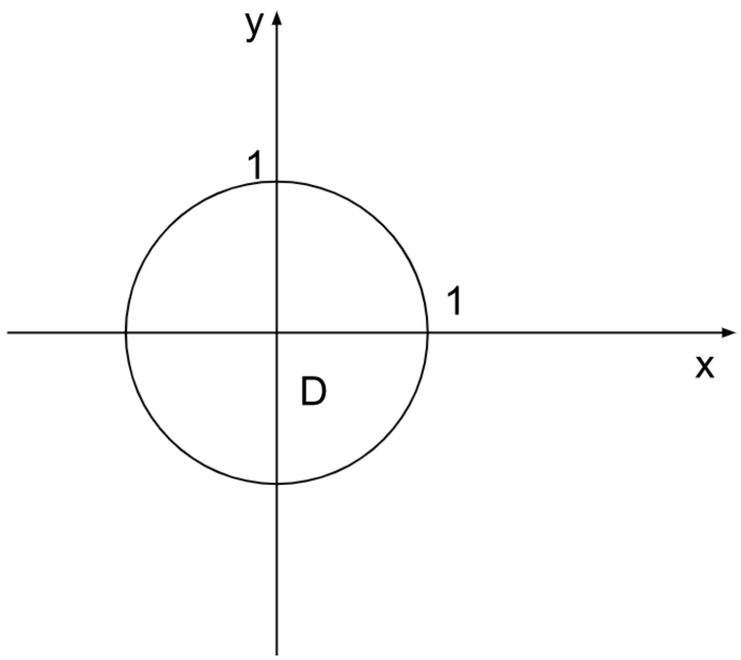

Рис. 20.3. Задача в единичном круге для уравнения теплопроводности

Необходимо искать w в виде:

$$u(M,t) = v(M,t) + w(M,t)$$

$w(M,t)$ *— достаточно гладкая функция и удовлетворяет неоднородному граничному условию:*

$$w|_{\rho=1} = t\sin 4\varphi$$

Пусть w — решение краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$\Delta w = 0, \quad \rho < 1$$

$$w|_{\rho=1} = t\sin 4\varphi$$

Общее решение уравнения Лапласа в полярных координатах записывается в следующем виде:

$$w(\rho,\varphi,t) = A_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left(A_n(t)\cos n\varphi + B_n(t)\sin n\varphi\right)$$

Необходимо подставить в граничные условия:

$$A_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n(t)\cos n\varphi + B_n(t)\sin n\varphi\right) = t\sin 4\varphi$$

$$B_4(t) = t$$

Остальные коэффициенты равны 0. Найденные коэффициенты необходимо подставить в найденный:

$$w(\rho, \varphi, t) = t\rho^4 \sin 4\varphi$$

Таким образом, получается достаточно гладкая функция, которая удовлетворяет неоднородным граничным условиям. Необходимо подставить $u = v + w$ в исходную задачу:

$$v_t = a^2\Delta v - w_t + a^2\Delta w$$

Однородные граничные условия:

$$v|_{\rho=1} = 0$$

Начальное условие:

$$v|_{t=0} = -w|_{t=0}$$

Получается новая краевая задача:

$$v_t = a^2\Delta v - \rho^4 \sin 4\varphi, \quad \rho < 0 \quad t > 0$$

$$v|_{\rho=1} = 0$$

$$v|_{t=0} = 0$$

Пример: задача с неоднородными граничными условиями

Пример 20.2. *Рассматривается задача на отрезке для уравнения теплопроводности.*

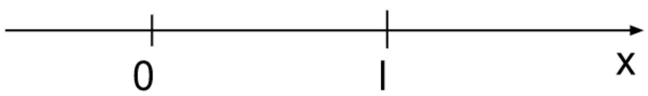

Рис. 20.4. Задача на отрезке для уравнения теплопроводности

Записывается уравнение теплопроводности:

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad 0 < x < l \quad t > 0$$

На концах отрезка ставятся граничные условия: на левом конце — условие Неймана, а на правом конце — условие Дирихле:

$$u_x|_{x=0} = 1$$

$$u|_{x=l} = l$$

Начальное условие:

$$u|_{t=0} = x$$

Решение необходимо искать в виде суммы:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

$w(x,t)$ *— достаточно гладкая функция и удовлетворяет неоднородным граничным условиям:*

$$w_x|_{x=0} = 1$$

$$w|_{x=l} = l$$

Пусть:

$$w(x,t) = x$$

Необходимо подставить $u = v + w$ *в исходную задачу:*

$$v_t = a^2 v_{xx} - w_t + a^2 w_{xx}$$

Граничные условия получаются однородными:

$$v_x|_{x=0} = 0$$

$$v|_{x=l} = 0$$

Начальное условие получается в следующем виде:

$$v|_{t=0} = x - w|_{t=0} = 0$$

Таким образом, получается новая краевая задача:

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad 0 < x < l \quad t > 0$$

$$v_x|_{x=0} = 0$$

$$v|_{x=l} = 0$$

$$v|_{t=0} = 0$$

Эта задача имеет тривиальное решение:

$$v \equiv 0$$

Решением исходной задачи является:

$$u = x$$

Пример: уравнение колебаний в круге

Пример 20.3. *Рассматривается задача для уравнения колебаний в круге.*

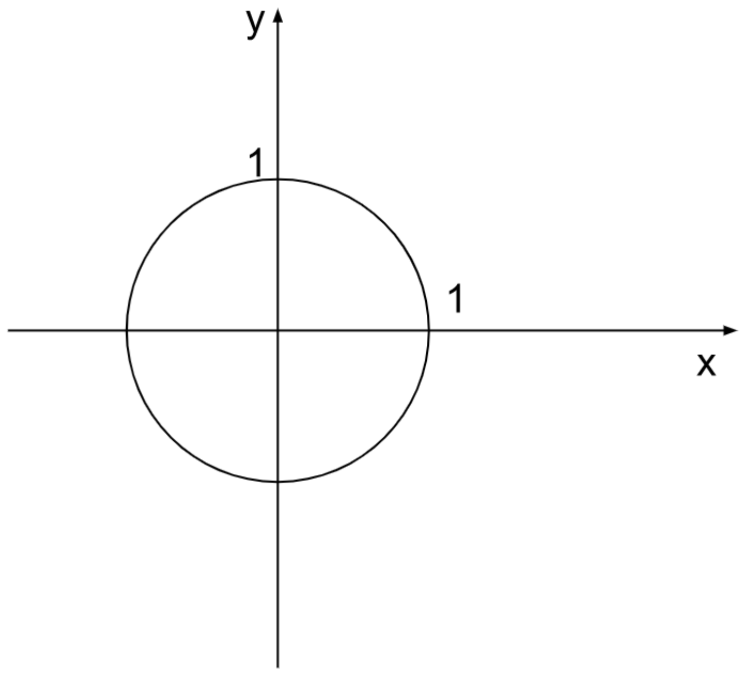

Рис. 20.5. Уравнение колебаний в круге

Записывается уравнение колебаний:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad \rho < 1 \quad t > 0$$

В виде граничных условий ставятся условия Неймнана:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = 1$$

Ставятся следующие начальные условия:

$$u|_{t=0} = \frac{\rho^2}{2}$$

$$u_t|_{t=0} = 0$$

Решение необходимо найти в виде суммы:

$$u(\rho,\varphi,t) = v(\rho,\varphi,t) + w(\rho,\varphi,t)$$

$w(\rho,\varphi,t)$ *— достаточно гладкая функция, которая удовлетворяет неоднородному граничному условию:*

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = 1$$

Пусть:

$$w(\rho,\varphi,t) = \rho$$

Разрывная в круге функция записывается в следующем виде:

$$\Delta\rho = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial\rho}\right) = \frac{1}{\rho}$$

Таким образом, такая функция w *не является достаточно гладкой. В качестве* w *берется решение краевой задачи:*

$$\Delta w = 0, \quad \rho < 1$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = 1$$

Условие разрешимости записывается в следующем виде:

$$\int_S \frac{\partial w}{\partial n} dl = 0$$

$$\int_0^{2\pi} 1 d\varphi = 0$$

Получается противоречие:

$$2\pi = 0$$

Таким образом, условие разрешимости не выполняется и краевая задача не имеет решения.

Пусть:

$$w(\rho, \varphi, t) = \frac{\rho^2}{2}$$

Тогда:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = 1$$

Необходимо найти Лаплассиан:

$$\Delta w = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\right) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho^2) = \frac{1}{\rho}\cdot 2\rho = 2$$

Таким образом, w — достаточно гладкая и удовлетворяет всем условиям. Необходимо подставить $u = v + w$ в исходную задачу:

$$v_{tt} = a^2\Delta v - w_{tt} + a^2\Delta w$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = 0$$

$$v|_{t=0} = \frac{\rho^2}{2} - w|_{t=0} = 0$$

$$v_t|_{t=0} = -w_t|_{t=0} = 0$$

Тогда для функции v получается новая краевая задача:

$$v_{tt} = a^2\Delta v + 2a^2 \quad \rho < 1, \quad t > 0$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = 0$$

$$v|_{t=0} = 0$$

$$v_t|_{t=0} = 0$$

Соответствующая задача Штурма-Лиувилля имеет следующий вид:

$$\Delta p + \lambda p = 0 \quad \rho < 1$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = 0$$

Собственные функции такой задачи следующие:

$$P_{00}(\rho,\varphi) = 1 \quad \lambda_{00} = 0$$

$$P_{nk}(\rho,\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\rho\right)\Phi_n(\varphi)$$

$$\Phi_0(\varphi) = 1$$

$$\Phi_n(\varphi)\begin{Bmatrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{Bmatrix}$$

$\lambda_k^{(n)}$ *— k-ый положительный корень уравнения $J_n'(\sqrt{\lambda}) = 0$.*

Неоднородность уравнения необходимо разложить по этим собственным функциям:

$$2a^2 = A_{00} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{0k} J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}\rho\right) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\rho\right)(A_{nk}\cos n\varphi + B_{nk}\sin n\varphi)$$

$$A_{00} = 2a^2$$

Остальные коэффициенты равны 0.

$$v(\rho,\varphi,t) = \chi(t)$$

$$\chi''(t) = 2a^2$$

$$\left.\frac{\partial\chi}{\partial\rho}\right|_{\rho=1} = 0$$

$$\chi(0) = 0$$

$$\chi'(0) = 0$$

Таким образом, получается задача Коши:

$$\begin{cases}\chi''(t) = 2a^2\\ \chi(0) = 0\\ \chi'(0) = 0\end{cases}$$

Решением этой задачи является:

$$\chi(t) = a^2t^2$$

Решением задачи для функции v является:

$$v(\rho,\varphi,t) = a^2t^2$$

Решение исходной задачи записывается в следующем виде:

$$u(\rho,\varphi,t) = v(\rho,\varphi,t) + w(\rho,\varphi,t)$$

$$u(\rho,\varphi,t) = a^2t^2 + \frac{\rho^2}{2}$$

Семинар 21. Решение начально-краевых задач с однородными и неоднородными условиями в неограниченной области

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности на прямой

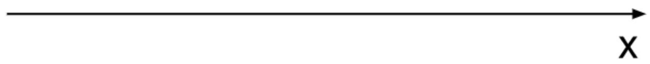

Рис. 21.1. Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности на прямой

Рассматривается одномерная задача на всей вещественной оси, которая является начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности на прямой. Записывается уравнение теплопроводности, которое выполняется на всей вещественной оси:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad x \in R \;\; t > 0$$

Ставится начальное условие:

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad x \in R$$

Ставится дополнительное условие на бесконечности — условие ограниченности:

$$|u| < const \quad x \in R \;\; t \geqslant 0$$

Необходимо найти функцию $u(x,t)$. Делается преобразование Фурье по переменной x. Пусть $f, \varphi, u.u_t, u_x, u_{xx}$ абсолютно интегрируемы по x на R. Дополнительно требуется, чтобы $u \to 0$, $u_x \to 0$ при $x \to \infty$.

$$U(\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\xi,t) e^{-i\lambda\xi} d\xi \quad \lambda \in R$$

$$F(\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,t) e^{-i\lambda\xi} d\xi \quad \lambda \in R$$

$$\Phi(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi \quad \lambda\in R$$

Берется преобразование Фурье от уравнения теплопроводности:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_t(\xi,t)e^{-i\lambda\xi}d\xi=\frac{a^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_{\xi\xi}(\xi,t)e^{-i\lambda\xi}d\xi+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,t)e^{-i\lambda\xi}d\xi$$

Рассматривается следующая переменная:

$$\frac{a^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_{\xi\xi}(\xi,t)e^{-i\lambda\xi}d\xi=\frac{a^2}{\sqrt{2\pi}}u_\xi e^{-i\lambda\xi}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{ia^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_\xi(\xi,t)e^{-i\lambda\xi}d\xi=$$

$$=\frac{ia^2\lambda}{\sqrt{2\pi}}ue^{-i\lambda\xi}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{i^2a^2\lambda^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(\xi,t)e^{-i\lambda\xi}d\xi=-a^2\lambda^2\cdot U(\lambda,t)$$

$$U_t(\lambda,t)=-a^2\lambda^2U(\lambda,t)+F(\lambda,t) \quad \lambda\in R \;\; t>0$$

Делается преобразование Фурье от начального условия:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(\xi,0)e^{-i\lambda\xi}d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi$$

Начальное условие применяется следующий вид:

$$U(\lambda,0)=\Phi(\lambda) \quad \forall\lambda\in R$$

Записывается новое дифференциальное уравнение, следовательно, получится задача Коши:

$$U_t(\lambda,t)+a^2\lambda^2U(\lambda,t)=F(\lambda,t) \quad \lambda\in R \;\; t>0$$

$$U(\lambda,0)=\Phi(\lambda) \quad \lambda\in R$$

Решение этой задачи единственное и записывается в следующем виде:

$$U(\lambda,t)=\Phi(\lambda)e^{-a^2\lambda^2t}+\int\limits_0^t F(\lambda,\tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}d\tau$$

Таким образом, исходная задача является начальной задачей для уравнения теплопроводности. Необходимо сделать обратное преобразование Фурье:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(\lambda,t) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\lambda) e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x} d\lambda +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_0^t G(\lambda,\tau) e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)} d\tau \right] e^{i\lambda x} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \right] e^{-a^{@}\lambda^2 t + i\lambda x} d\lambda +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) e^{-i\lambda\xi} d\xi \right] e^{-a^2\lambda^2(t-\tau) + i\lambda x} d\lambda =$$

Это выражение необходимо упростить:

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)} d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2(t-\tau) + i\lambda(x-\xi)} d\lambda$$

Рассматривается следующий интеграл:

$$I(p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 + i\lambda p} d\lambda \quad p \in R$$

Этот интеграл напоминает интеграл Пуассона:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = \sqrt{\pi}$$

Интеграл $I(p)$ можно выразить через интеграл Пуассона двумя способами: дифференцирование по параметру p или с помощью замены переменной и переходу к интегрированию по комплексной плоскости. Рассматривается второй способ:

$$I(p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\lambda^2 - 2\lambda\frac{ip}{2} + \left(\frac{ip}{2}\right)^2 - \left(\frac{ip}{2}\right)^2\right)} d\lambda =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\lambda-\frac{ip}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}} d\lambda = e^{-\frac{p^2}{4}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\lambda-\frac{ip}{2}\right)^2} d\lambda$$

Происходит замена переменных:

$$z = \lambda - \frac{ip}{2}$$

$$dz = d\lambda$$

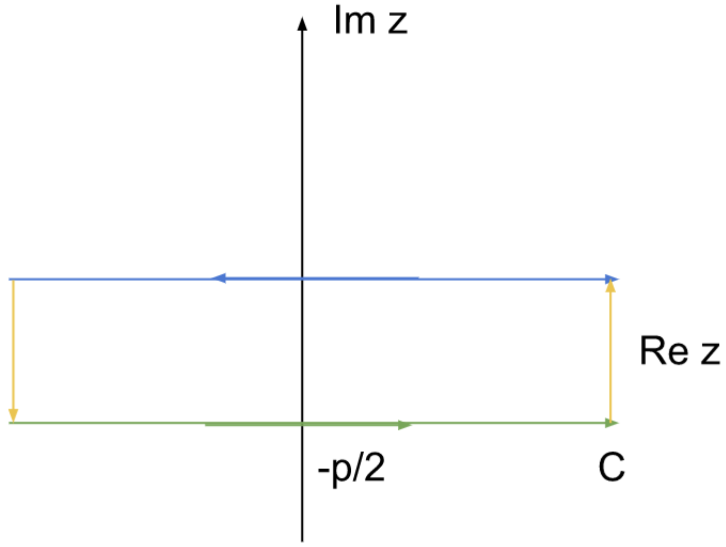

Рис. 21.2. Замена переменной и переход к интегрированию по комплексной плоскости

$$I(p) = e^{-\frac{p^2}{4}} \int\limits_C e^{-z^2} dz$$

Сначала можно рассмотреть интеграл по конечной части этой прямой и замкнуть его до замкнутого контура и отрезком вещественной оси. Тогда получится интеграл по замкнутому контуру.

$$I(p) = e^{-\frac{p^2}{4}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda$$

$$I(p) = \sqrt{\pi} e^{-\lambda^2+i\lambda p} d\lambda \quad p \in R$$

$$I(p) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{p^2}{4}}$$

Рассматриваются отдельные интегралы:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)} d\lambda \overset{(a\lambda\sqrt{t}=q)}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2+iq\frac{x-\xi}{a\sqrt{t}}} \frac{dq}{a\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2+iq\frac{x-\xi}{a\sqrt{t}}} dq = \frac{1}{a\sqrt{t}} I\left(\frac{x-\xi}{a\sqrt{t}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)+i\lambda(x-\xi)} d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t-\tau}} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

Таким образом, получается следующее выражение:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi$$

Окончательное решение исходной задачи записывается в следующем виде:

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) G(x,\xi,t) d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau) d\xi$$

Фундаментальное решение уравнения теплопроводности на прямой:

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$

Это решение удовлетворяет следующим условиям:

$$G_t = a^2 G_{xx} \quad x,\xi \in R \quad t > 0$$

$$G|_{t=0} = \delta(x-\xi) \quad \xi, x \in R$$

Физический смысл этого фундаментального решения: функция $G(x,\xi,t)$ описывает температуру в точке x в момент времени t, если в точке ξ в начальный момент времени мгновенно выделилось определенное количество тепла ($Q = c\rho$, начальная температура нулевая). При малом t максимальное значение большое и затухание быстрое.

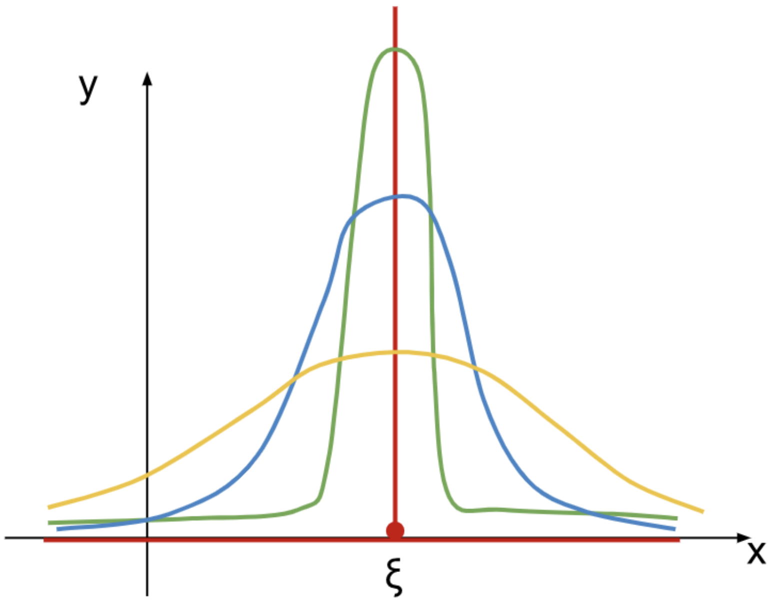

Рис. 21.3. График зависимости G при разных температурах

$$y = G(x, \xi, t)$$

Парадокс бесконечной теплопроводности: при $t = 0$ температура во всех точках, кроме $x = \xi$, равна 0. Но в любой последующий момент времени температура во всех точках не равна 0, то есть тепло распространяется с бесконечной скоростью.

На плоскости:

$$u(x,y,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi,\eta)G(x,\xi,y,\eta,t)d\xi d\eta + \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta,\tau)G(x,\xi,y,\eta,t-\tau)d\xi d\eta$$

Фундаментальное решение уравнения теплопроводности на плоскости:

$$G(x,\xi,y,\eta,t) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^2 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(t-\eta)^2}{4a^2 t}}$$

В пространстве:

$$u(x,y,z,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi,\eta,\zeta)G(x,\xi,y,\eta,z,\zeta,t)d\xi d\eta d\zeta +$$

$$+ \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta,\zeta,\tau)G(x,\xi,y,\eta,z,\zeta,t-\tau)d\xi d\eta d\zeta$$

Фундаментальное решение уравнения теплопроводности в пространстве:

$$G(x,\xi,y\eta,z,\zeta,t) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}$$

Семинар 22. Уравнение теплопроводности на полупрямой

Уравнение теплопроводности на полупрямой

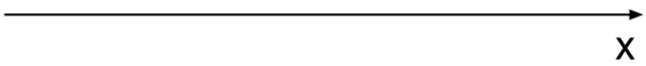

Рис. 22.1. Уравнение теплопроводности на прямой

Рассматривается уравнение теплопроводности на прямой. Записывается уравнение теплопроводности, которое выполняется на всей вещественной оси:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad x \in R \;\; t > 0$$

Ставится начальное условие:

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad x \in R$$

Ставится дополнительное условие на бесконечности — условие ограниченности:

$$|u| < const \quad x \in R \;\; t \geqslant 0$$

Необходимо найти функцию $u(x,t)$. Делается преобразование Фурье по переменной x. Решение записывается в следующем виде:

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) G(x,\xi t) d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau) d\xi$$

Таким образом, фундаментальное решение уравнения теплопроводности на прямой:

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

Рассматривается уравнение теплопроводности на полупрямой. Записывается неоднородное уравнение теплопроводности:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad x > 0 \;\; t > 0$$

Ставится следующее граничное условие с однородным условием Дирихле:

$$u|_{x=0} = 0$$

Ставится начальное условие:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \geqslant 0$$

Ставится условие ограниченности:

$$|u| < const, \quad x \geqslant 0, \ \ t \geqslant 0$$

Чтобы существовало классическое решение этой задачи, необходимо, чтобы граничное условие и начальное условие согласовались. Тогда условие согласования записывается в следующем виде:

$$\varphi(0) = 0$$

Необходимо построить продолжение на всю прямую:

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & x > 0 \\ -f(-x,t) & x < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \geqslant 0 \\ -\varphi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Эти функции являются нечетными функциями переменной x. Рассматривается начальная задача для уравнения теплопроводности с новыми функциями:

$$\tilde{u}_t = a^2\tilde{u}_{xx} + \tilde{f}(x,t), \quad x \in R, \ \ t > 0$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x), \quad x \in R$$

$$|\tilde{u}| < const, \quad x \in R, \ \ t \geqslant 0$$

Таким образом, получается начальная задача для уравнения теплопроводности на прямой:

$$\tilde{u}(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\xi)G(x,\xi,t)d\xi + \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)d\xi$$

Фундаментальное решение уравнения теплопроводности на прямой:

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

Необходимо убедиться, что $\tilde{u}(x,t)$ удовлетворяет всем условиям задачи на полупрямой:

1) уравнению теплопроводности при $x > 0$
2) начальному условию при $x \geqslant 0$
3) условию ограниченности при $x \geqslant 0$
4) граничному условию $\tilde{u}|_{x=0} = 0$

$$\tilde{u}|_{x=0} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} d\xi +$$
$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\xi,\tau) \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi = 0$$

Решением исходной задачи является:

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t)|_{x\geqslant 0}$$

Рассматривается уравнение теплопроводности на прямой с граничными условиями Неймана:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad x \geqslant 0 \;\; t > 0$$
$$u_x|_{x=0} = 0$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad x \geqslant 0$$
$$|u| < const \quad x \geqslant 0 \;\; t \geqslant 0$$

Необходимо построить четное продолжение на прямой:

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & x > 0 \\ f(-x,t) & x < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x > 0 \\ \varphi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Таким образом, получаются четные функции по переменной x. Записывается новая задача:

$$\tilde{u}_t = a^2\tilde{u}_{tt} + \tilde{f}(x,t) \quad x \in R \;\; t > 0$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x) \quad x \in R$$

$$|\tilde{u}| < const \quad x \in R \;\; t \geqslant 0$$

Решение этой задачи записывается в следующем виде:

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\xi)G(x,\xi,t)d\xi + \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\xi,\tau)G(x,\xi,t-\tau)d\xi$$

Фундаментальное решение:

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$

Необходимо убедиться, что $\tilde{u}(x,t)$ удовлетворяет всем условиям задачи на полупрямой:

1) уравнению теплопроводности при $x > 0$
2) начальному условию на полупрямой
3) условию ограниченности при $x \geqslant 0$
4) граничному условию $\tilde{u}_x|_{x=0} = 0$

$$\tilde{u}_x|_{x=0} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\xi)G_x(x,\xi,t)|_{x=0}d\xi + \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau)G_x(x,\xi,t-\tau)|_{x=0}d\xi$$

$$G(x,\xi,t)|_{x=0} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\right)\Bigg|_{x=0} =$$

$$= -\frac{2(x-\xi)}{2a\sqrt{\pi t}4a^2t}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\Bigg|_{x=0} = \frac{\xi}{4a^3t\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}$$

Таким образом, получились нечетные функции по переменной ξ.

$$G_x(x,\xi,t-\tau)|_{x=0} = \frac{\xi}{4a^3(t-\tau)\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

Следовательно, решение задачи на полупрямой сводится к решению задачи на прямой:

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t)|_{x\geqslant 0}$$

Пример задачи на полупрямой

Пример 22.1. *Рассматривается однородная задача на полупрямой с граничными условиями Дирихле:*

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad x>0 \;\; t>0$$

$$u|_{x=0} = 0 \quad t \geqslant 0$$

$$u|_{t=0} = 1 \quad x \geqslant 0$$

$$|u| < const \quad x\geqslant 0 \;\; t\geqslant 0$$

Необходимо построить нечетное продолжение на прямую:

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

Записывается новая задача:

$$\tilde{u}_t = a^2\tilde{u}_{xx} \quad x\in R \;\; t>0$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x) \quad x\in R$$

$$|\tilde{u}| < const \quad x\in R \;\; t>0$$

Записывается решение задачи на прямой:

$$\tilde{u}(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\xi)G(x,\xi,t)d\xi =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{0} G(x,\xi,t)d\xi + \int\limits_{0}^{+\infty} G(x,\xi,t)d\xi = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} G(x,\xi,t)d\xi = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}\right)^2} d\left(\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{-\infty} e^{-p^2} dp =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-p^2} dp = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-p^2} dp + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-p^2} dp$$

Интеграл Пуассона записывается в следующем виде:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} dp = \sqrt{\pi}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-p^2} dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-p^2} dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Вводится функция ошибок:

$$\Phi(q) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^q e^{-p^2} dp$$

Основными свойствами этой функции являются:

1) *нечетность*

$$\Phi(-q) = -\Phi(q)$$

2) *монотонно возрастающая*

3)

$$\lim_{1\to+\infty} \Phi(q) = 1$$

4)

$$\Phi(0) = 0$$

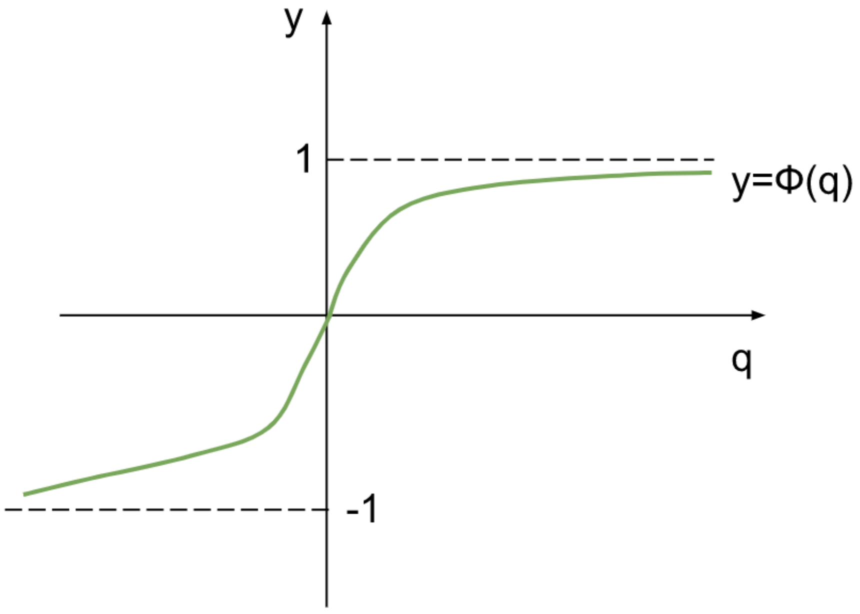

Рис. 22.2. Функция ошибки

В итоге получается следующее:

$$I_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

Рассматривается следующий интеграл:

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{0} G(x,\xi,t)d\xi \overset{-\xi=\zeta}{=} -\int\limits_{+\infty}^{0} G(x,-\zeta,t)d\zeta =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} G(x,-\zeta,t)d\zeta = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x+\zeta)^2}{4a^2 t}} d\zeta =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t} e^{-\frac{(-x-\zeta)^2}{4a^2 t}}} d\zeta = \int\limits_{0}^{+\infty} G(-x,\xi,t)d\xi =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(-\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

$$\tilde{u}(x,t) = I_1 - I_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

$$\tilde{u}(x,t) = \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x)$$

Решением исходной задачи является:

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t)|_{x\geqslant 0} = \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \quad t \neq 0$$

$$u|_{t=0} = 1$$

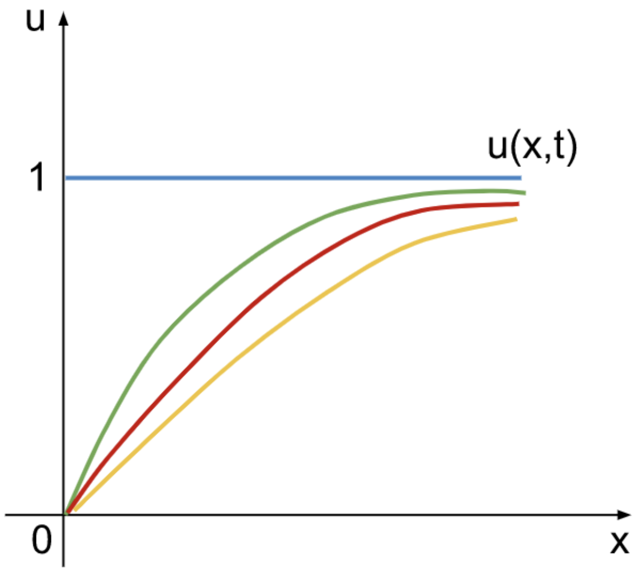

Рис. 22.3. График зависимости

Рассматривается случай, когда граничные условия неоднородные. Записывается уравнение теплопроводности с однородными граничными условиями Дирихле:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad x > 0 \;\; t > 0$$

$$u|_{x=0} = \mu(t) \quad t > 0$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad x \geqslant 0$$

$$|u| < const \quad x \geqslant 0 \;\; t \geqslant 0$$

Необходимо искать решение в виде:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

Где $w(x,t)$ — достаточно гладкая функция, которая удовлетворяет следующему условию:

$$w|_{x=0} = \mu(t)$$

Например:

$$w(x,t) = \mu(t)$$

$$v_t = a^2 v_{xx} + f(x,t) - \mu'(t) \quad x > 0 \;\; t > 0$$

$$v|_{x=0} = 0$$

$$v|_{t=0} = \varphi(x) - \mu(0) \quad x \geqslant 0$$

$$|v + \mu| < const \quad x \geqslant 0 \;\; t \geqslant 0$$

Записывается уравнение теплопроводности на полупрямой с неоднородными граничными условиями Неймана:

$$u_t = a^{@} u_{xx} + f(x,t) \quad x > 0 \;\; t > 0$$

$$u_x|_{x=0} = \nu(t) \quad t > 0$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad x \geqslant 0$$

$$|u| < const \quad x \geqslant 0 \;\; t \geqslant 0$$

Решение необходимо искать в виде:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

Где $w(x,t)$ — достаточно гладкая функция, которая удовлетворяет следующему условию:

$$w_x|_{x=0} = \nu(t)$$

Например:

$$w(x,t) = x\nu(t)$$

Новая задача записывается в следующем виде:

$$v_t = a^2 v_{xx} + f(x,t) - x\nu'(x) \quad x > 0 \;\; t > 0$$

$$v_x|_{x=0} = 0$$

$$v|_{t=0} = \varphi(x) - x\nu(0) \quad x \geqslant 0$$

$$|v + x\nu(t)| < const \quad x \geqslant 0 \;\; t \geqslant 0$$

Семинар 23. Уравнение колебаний в неограниченной области

Уравнение колебаний на прямой

Рассматриваются однородные уравнения колебаний на прямой. Пусть есть прямая x. Уравнение колебаний записывается в следующем виде:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad x \in R, \quad t > 0$$

Ставятся 2 начальных условия:

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad x \in R$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x) \quad x \in R$$

Рис. 23.1. Уравнение колебаний на прямой

Рассматривается метод распространяющихся волн, который применяется только при однородных уравнениях колебаний. Необходимо найти общее решение однородного уравнения колебаний на прямой.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

Происходит замена переменных:

$$\xi = x - at$$

$$\eta = x + at$$

$$(x,t) \to (\xi, \eta)$$

Тогда:

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t} u(\xi(x,t), \eta(x,t)) = u_\xi \cdot \chi_t + u_\eta \cdot \eta_t = -au_\xi + au_\eta$$

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}u_t = \frac{\partial}{\partial t}(-au_\xi(\xi(x,t),\eta(x,t)) + au_\eta(\xi(x,t),\eta(x,t))) =$$
$$= -au_{\xi\xi}\cdot\xi_t - au_{\xi\eta}\cdot\eta_t + au_{\xi\eta}\cdot\xi_t + au_{\eta\eta}\cdot\eta_t = a^2u_{\xi\xi} - 2a^2u_{\xi\eta} + a^2u_{\eta\eta}$$

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x}u(\xi(x,t),\eta(x,t)) = u_\xi\cdot\xi_\eta + u_\eta\cdot\eta_x = u_\xi + u_\eta$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}u_x = \frac{\partial}{\partial x}(u_\xi(\xi(x,t),\eta(x,t)) + u_\eta(\xi(x,t),\eta(x,t))) =$$
$$= u_{\xi\xi}\cdot\xi_x + u_{\xi\eta}\cdot\eta_x + u_{\xi\eta}\cdot\xi_x + u_{\eta\eta}\cdot\eta_x = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

Необходимо подставить в уравнение колебаний:

$$a^2u_{\xi\xi} - 2a^2u_{\xi\eta} + a^2u_{\eta\eta} = a^2u_{\xi\xi} + 2a^2u_{\xi\eta} + a^2u_{\eta\eta}$$

$$4a^2u_{\xi\eta} = 0$$

$$u_{\xi\eta} = 0$$

При интегрировании получается следующее:

$$u_\xi = \tilde{f}_1(\xi)$$

$$u = \int \tilde{f}_1(\xi)d\xi + f_2(\eta)$$
$$u(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

В исходных переменных:

$$u(x,t) = f_1(x-at) + f_@(x+at)$$

Получается общее решение уравнения колебаний на прямой $(f_1, f_2 \in C^2(R))$. Геометрический смысл этого общего решения: с возрастанием t постоянные значения первая функция будет иметь в точках $x = at$, а вторая функция — в точках $x = -at$. Это соответствует тому, что есть две волны, которые распространяются вдоль оси x со скоростью a.

Общее решение необходимо подставить в начальное условие, чтобы найти f_1, f_2:

$$u(x,t) = f_1(x-at) + f_2(x+at)$$

$$u|_{t=0} = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$

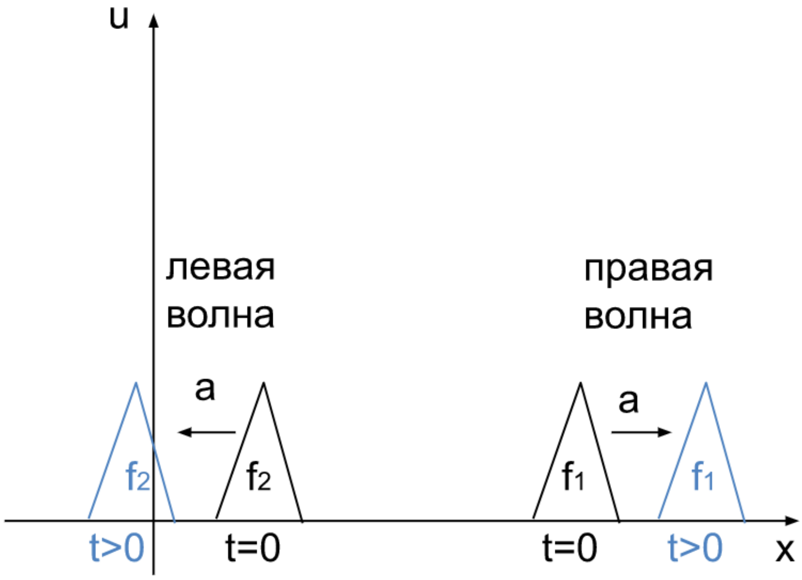

Рис. 23.2. Геометрический смысл общего решения

$$u_t|_{t=0} = -af_1'(x) + af_2'(x) = \psi(x)$$

Последнее неравенство интегрируется по сегменту $[0, x]$ в следующем виде:

$$\begin{cases} -f_1(x) + af_2(x) = \frac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(\xi)d\xi + C \\ f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\xi)d\xi + \frac{C}{2}$$

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\xi)d\xi - \frac{C}{2}$$

$$u(x,t) = f_1(x-at) + f_2(x+at) =$$

$$= \frac{1}{2}\varphi(x-at) - \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x-at} \psi(\xi)d\xi - \frac{C}{2} + \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at} \psi(\xi)d\xi + \frac{C}{2}$$

Записывается окончательный ответ:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi$$

Таким образом, получается формула Даламбера, которую можно использовать для нахождения решения начальной задачи для однородного уравнения колебаний на прямой.

Неоднородное уравнение колебаний на прямой

Рассматривается начальная задача для неоднородного уравнения колебаний на прямой.

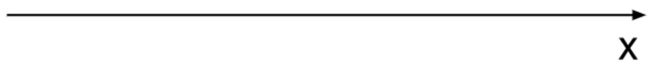

Рис. 23.3. Уравнение колебаний на прямой

Уравнение колебаний записывается в следующем виде:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in R \;\; t > 0$$

Ставятся два начальных условия:

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad x \in R$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x) \quad x \in R$$

Эта задача имеет единственное классическое решение. Эту задачу можно решить с помощью преобразования Фурье. Но есть и другой способ: метод интегрирования по фазовой плоскости. Фазовая плоскость — это плоскость с координатами (x,t).

Правая волна имеет постоянные значения в точке $x - at = C_1$, а левая волна — в точке $x + at = C_2$. На фазовой плоскости рассматривается треугольник LMN. Неоднородное уравнение колебаний записывается в следующем виде:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad x \in R \;\; t > 0$$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$$

$$\iint\limits_{\Delta MLN} (u_{tt} - a^2 u_{xx}) dxdt = \iint\limits_{\Delta MLN} f(x,t) dxdt$$

Интегралы преобразуются с помощью формулы Грина.

$$\oint\limits_{C} Pdx + Qdt = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} \right) dxdt$$

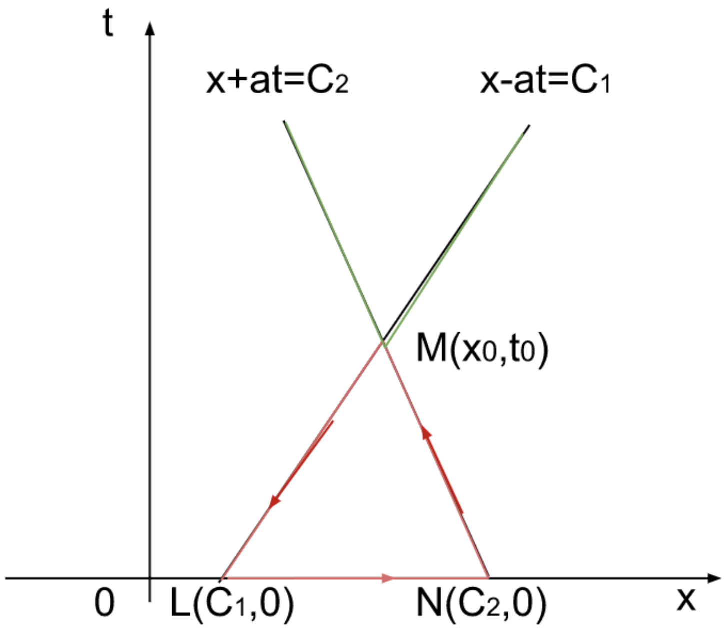

Рис. 23.4. Метод интегрирования по фазовой плоскости

$$\iint\limits_{\Delta MLN}(u_{tt}-a^2u_{xx})dxdt = \oint\limits_{MLN} -t_tdx - a^2u_xdt =$$

$$= \int\limits_{ML} -u_tdx - a^2u_xdt + \int\limits_{LN} -u_tdx - a^2u_xdt + -u_tdx - \underset{NM}{a^2}u_xdt =$$

$$= -a\int\limits_{ML}(u_tdx+u_xdx) + a\int\limits_{NM}(u_tdt+u_xdx) - \int\limits_{C_1}^{C_2}\psi(x)dx =$$

$$= -au(L)+au(M)+au(M)-au(N)-\int\limits_{C_1}^{C_2}\psi(x)dx =$$

$$= -a\varphi(C_1)+2au(x_0,t_0)-a\varphi(C_2)-\int\limits_{C_1}^{C_2}\psi(x)dx$$

$$\iint\limits_{\Delta MLN} f(x,t)dxdt = \int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{C_1+at}^{C_2-at} f(x,t)d$$

$$-a\varphi(C_2)+2au(x_0,t_0)-a\varphi(C_2)-\int\limits_{C_1}^{C_2}\psi(x)dx = \int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{C_1+at}^{C_2-at} f(x,t)dx$$

$$u(x_0,t_0) = \frac{\varphi(C_1)+\varphi(C_2)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{C_1}^{C_2}\psi(x)dx + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{C_1+at}^{C_2-at}f(x,t)dx$$

Таким образом:

$$C_1 = x_0 - at_0$$

$$C_2 = x_0 + at_0$$

Тогда окончательный ответ записывается в следующем виде:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{t}d\tau\int\limits_{x-a(t-t\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi$$

Семинар 24. Начальная краевая задача для уравнения колебаний на полупрямой

Начальная краевая задача для уравнения колебаний на полупрямой

Рассматривается неоднородное уравнение колебаний на прямой, которое выполняется по всей вещественной оси:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad x \in R \quad t > 0$$

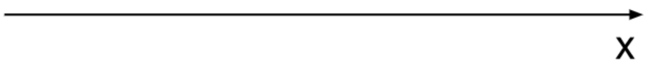

Рис. 24.1. Уравнение колебаний на прямой

Ставятся 2 начальных условия:

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad x \in R$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x) \quad x \in R$$

Формула для решения задачи записывается в следующем виде:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi$$

Рассматривается начальная краевая задача для уравнения колебаний на полупрямой. Выполняется неоднородное уравнение колебаний:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad x > 0 \quad t > 0$$

Ставятся неоднородные граничные условия Дирихле:

$$u|_{x=0} = \mu(t) \quad t > 0$$

Ставятся 2 начальных условия:

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad x \geqslant 0$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x) \quad x \geqslant 0$$

Решение необходимо искать в следующем виде:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

Где первая задача записывается в следующем виде:

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t) \quad x > 0 \;\; t > 0$$

$$v|_{x=0} = 0 \quad t > 0$$

$$v|_{t=0} = \varphi(x) \quad x \geqslant 0$$

$$v_t|_{t=0} = \psi(x) \quad x \geqslant 0$$

Вторая задача записывается в следующем виде:

$$w_t = a^2 w_{xx} \quad x > 0 \;\; t > 0$$

$$w|_{x=0} = \mu(t) \quad t > 0$$

$$w|_{t=0} = 0 \quad x \geqslant 0$$

$$w_t|_{t=0} = 0 \quad x \geqslant 0$$

Рассматривается первая задача:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t) \quad x > 0 \;\; t > 0 \\ v|_{x=0} = 0 \quad t > 0 \\ v|_{t=0} = \varphi(x) \quad x \geqslant 0 \\ v_t|_{t=0} = \psi(x) \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

Необходимо построить нечетное продолжение по всей прямой:

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & x > 0 \\ -f(-x,t) & x < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \geqslant 0 \\ -\varphi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x) & x \geqslant 0 \\ -\psi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Новое уравнение колебаний на прямой:

$$\tilde{v}_{tt} = a^2\tilde{v}_{xx} + \tilde{f}(x,t) \quad x \in R \;\; t > 0$$

$$\tilde{v}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x) \quad x \in R$$

$$\tilde{v}_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(x) \quad x \in R$$

Таким образом, решением этой задачи на прямой является:

$$\tilde{v}(x,t) = \frac{\tilde{\varphi}(x-at)+\tilde{\varphi}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\tilde{\psi}(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \tilde{f}(\xi,\tau)d\xi \quad x \in R \;\; t \geqslant 0$$

Необходимо убедиться, что функция $\tilde{v}(x,t)$ удовлетворяет всем условиям первой задачи:

1) уравнению колебаний на $x > 0$

2) начальному условию на $x \geqslant 0$

3) граничному условию при $x = 0$

Можно доказать, что решение является единственным. Таким образом, решением первой задачи является:

$$v(x,t) = \tilde{v}(x,t)|_{x \geqslant 0}$$

Рассматривается вторая задача:

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} \quad x > 0 \;\; t > 0 \\ w|_{x=0} = \mu(t) \quad t > 0 \\ w|_{t=0} = 0 \quad x \geqslant 0 \\ w_t|_{t=0} = 0 \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

Решение получается методом распространения волн. Общее решение однородного уравнения колебаний записывается в следующем виде:

$$w(x,t) = f_1(x-at) + f_2(x+at)$$

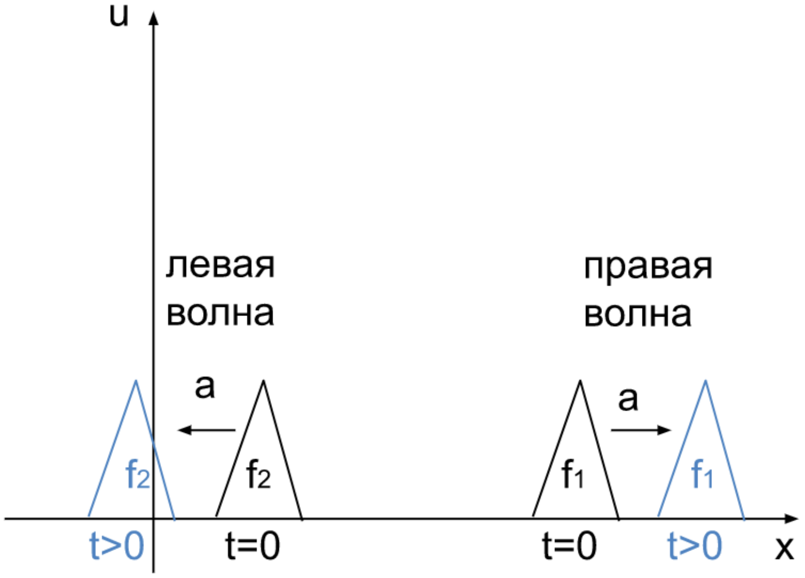

Рис. 24.2. Уравнение колебаний на прямой

Так как источник колебаний находится в точке 0, то в области $x > 0$ есть только правая волна:

$$w(x,t) = f_1(x-at)$$

Подставив в граничное и начальные условия, получается следующее:

$$w|_{x=0} = f_1(-at) = \mu(t) \quad t > 0$$

$$w|_{t=0} = f_1(x) = 0 \quad x \geqslant 0$$

$$w_t|_{t=0} = -af_1'(x) = 0 \quad x \geqslant 0$$

$$f_1(p) = \begin{cases} 0 & p \geqslant 0 \\ \mu\left(-\frac{p}{a}\right) & p < 0 \end{cases}$$

Таким образом, решение задачи на полупрямой записывается в следующем виде:

$$w(x,t) = f_1(x-at) = \begin{cases} 0 & x-at \geqslant 0 \\ \mu\left(t-\frac{x}{a}\right) & x-at < 0 \end{cases}$$

Начальная краевая задача с условиями Неймана

Рассматривается задача для уравнений колебаний на полупрямой с неоднородными граничными условиями Неймана:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad x > 0 \;\; t > 0$$

$$u_x|_{x=0} = \nu(t) \quad t > 0$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad x \geqslant 0$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x) \quad x \geqslant 0$$

Решение исходной задачи необходимо искать в следующем виде:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

Где первая задача записывается в следующем виде:

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t) \quad x > 0 \;\; t > 0$$

$$v_x|_{x=0} = 0 \quad t > 0$$

$$v|_{t=0} = \varphi(x) \quad x \geqslant 0$$

$$v_t|_{t=0} = \psi(x) \quad x \geqslant 0$$

Вторая задача записывается в следующем виде:

$$w_{tt} = a^2 w_{xx} \quad x > 0 \;\; t > 0$$

$$w_x|_{x=0} = \nu(t) \quad t > 0$$

$$w|_{t=0} = 0 \quad x \geqslant 0$$

$$w_t|_{t=0} = 0 \quad x \geqslant 0$$

Рассматривается первая задача:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t) & x > 0 \quad t > 0 \\ v_x|_{x=0} = 0 & t > 0 \\ v|_{t=0} = \varphi(x) & x \geqslant 0 \\ v_t|_{t=0} = \psi(x) & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Необходимо построить четное продолжение на всю прямую:

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & x > 0 \\ f(-x,t) & x < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \geqslant 0 \\ \varphi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{\psi} = \begin{cases} \psi(x) & x \geqslant 0 \\ \psi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Таким образом, для первой задачи получается задача на всей прямой:

$$\tilde{v}_{tt} = a^2 \tilde{v}_{xx} + \tilde{f}(x,t) \quad x \in R \quad t > 0$$

$$\tilde{v}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x) \quad x \in R$$

$$\tilde{v}_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(x) \quad x \in R$$

Решение этой задачи на прямой записывается в следующем виде:

$$\tilde{v}(x,t) = \frac{\tilde{\varphi}(x-at) + \tilde{\varphi}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi)d\xi + \frac{1}{2a} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \tilde{f}(\xi,\tau)d\xi$$

Необходимо убедиться, что функция $\tilde{v}(x,t)$ удовлетворяет условиям первой задачи:

1) уравнению колебаний на $x > 0$

2) начальным условиям на $x \geqslant 0$

3) граничному условия при $x = 0$

$$\tilde{v}_x|_{x=0} = \frac{\tilde{\varphi}'(-at)+\tilde{\varphi}'(at)}{2} + \frac{\tilde{\psi}(at)-\tilde{\psi}(-at)}{2a} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \left(\tilde{f}(a(t-\tau),\tau) - \tilde{f}(-a(t-\tau),\tau)\right) = c$$

Пусть есть следующая производная, которая применяется в предыдущем выражении:

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{a(x)}^{b(x)} g(\xi)d\xi = b'(x)g(b(x)) - a'(x)g(a(x))$$

Лемма 24.1. *Если четная функция $g(x)$ имеет производную $g'(x)$, то эта производная является нечетной функцией.*

Доказательство.

$$g'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$g'(-x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(-x+\Delta x)-g(-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x-\Delta x)-g(x)}{\Delta x} =$$

$$\overset{\Delta x=-\Delta y}{=} \lim_{\Delta y\to 0}\frac{g(x+\Delta y)-g(x)}{\Delta y} = -g'(x)$$

$$g'(-x) = -g'(x)$$

■

Таким образом, решением первой задачи является:

$$v(x,t) = \tilde{v}(x,t)|_{x\geqslant 0}$$

Рассматривается вторая задача:

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx} \quad x>0 \;\; t>0 \\ w_x|_{x=0} = \nu(t) \quad t>0 \\ w|_{t=0} = 0 \quad x\geqslant 0 \\ w_t|_{t=0} = 0 \quad x\geqslant 0 \end{cases}$$

Применяется метод распространяющихся волн. Решение необходимо искать в виде правой волны:

$$w(x,t) = f_1(x-at)$$

Подставив в граничное и начальное условия, получается следующее:

$$w_x|_{x=0} = f_1'(-at) = \nu(t) \quad t > 0$$

$$w|_{t=0} = f_1(x) = 0 \quad x \geqslant 0$$

$$w_t|_{t=0} = -af_1'(x) = 0 \quad x \geqslant 0$$

$$f_1(p) = \begin{cases} 0 & p \geqslant 0 \\ ? & \end{cases}$$

$$f_1'(p) = \nu\left(-\frac{p}{a}\right) \quad p < 0$$

$$f_1(p) - f_1(0) = \int\limits_0^p \nu\left(-\frac{q}{a}\right) dq = -a \int\limits_0^{-\frac{p}{a}} \nu(\tau) d\tau \quad p < 0$$

$$f_1(p) = \begin{cases} 0 & p \geqslant 0 \\ -a \int\limits_0^{-\frac{p}{a}} \nu(\tau) d\tau & p < 0 \end{cases}$$

Таким образом, решение второй задачи записывается в следующем виде:

$$w(x,t) = f_1(x-at) = \begin{cases} 0 & x - at \geqslant 0 \\ -a \int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} \nu(\tau) d\tau & x - at < 0 \end{cases}$$

Семинар 25. Уравнение Гельмгольца

Уравнение Гельмгольца

Однородное уравнение Гельмгольца имеет следующий вид:

$$\Delta u(M) + cu(M) = 0$$

$$c \neq 0$$

Если $c > 0$, $c = k^2$, то получается волновое уравнение Гельмгольца, которое описывает распространение волн:

$$\Delta u(M) + k^2 u(M) = 0 \quad k > 0$$

Если $c < 0$, $c = -\kappa^2$, то получается неволновое уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u(M) - \kappa^2 u(M) = 0 \quad \kappa > 0$$

Вывод волнового уравнения Гельмгольца

Рассматривается однородное уравнение колебаний:

$$\tilde{u}_{tt} = a^2 \Delta \tilde{u}$$

Решение необходимо искать в виде установившихся колебаний частоты ω:

$$\tilde{u}(M,t) = u(M)e^{i\omega t}$$

Подставив в уравнение колебаний, получится следующее:

$$u(M)(i\omega)^2 e^{i\omega t} = a^2 \Delta u(M) e^{i\omega t}$$

$$\Delta u(M) + \frac{\omega^2}{a^2} u(M) = 0$$
$$\Delta u(M) + k^2 u(M) = 0$$

Рассматривается неоднородное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u(M) + k^2 u(M) = f(M)$$

Вывод неволнового уравнения Гельмгольца

Рассматривается процесс диффузии, который описывается уравнением теплопроводности:

$$u_t = d\Delta u + f$$

$u(M,t)$ — концентрация вещества. $d > 0$ — коэффициент диффузии. $f(M,t)$ — удельная мощность источников вещества. Рассматривается радиоактивный газ. Он распадается со скоростью, пропорциональной концентрации:

$$f(M,t) = -\gamma u \quad \gamma > 0$$

$$u_t = d\Delta u - \gamma u$$

Пусть процесс диффузии стабилизировался. Рассматривается стационарный процесс диффузии:

$$u_t = 0$$

$$0 = d\Delta u - \gamma u$$

$$\Delta u - \frac{\gamma}{d} u = 0$$

Таким образом, получается неволновое уравнение, которое описывает стационарный процесс диффузии неустойчивого газа.

$$\Delta - \kappa^2 u = 0$$

Неоднородное уравнение записывается в следующем виде:

$$\Delta u - \kappa^2 u = f(M)$$

Краевые задачи для уравнения Гельмгольца в ограниченной области

Пусть есть ограниченная область D. Выполняется уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u + cu = f \quad M \in D$$

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\bigg|_S = \mu$$

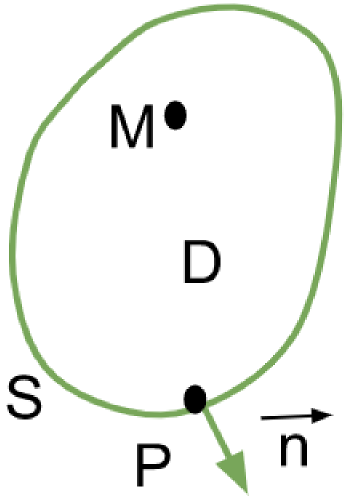

Рис. 25.1. ограниченная область D

Решение необходимо искать в следующем виде:

$$u(M) = v(M) + w(M)$$

Где первое уравнение является неоднородным уравнением Гельмгольца:

$$\Delta v + cv = f \quad M \in D$$

$$\left.\left(\alpha \frac{\partial v}{\partial n} + \beta v\right)\right|_S = 0$$

Второе уравнение является однородным уравнением Гельмгольца:

$$\Delta w + cw = 0 \quad M \in D$$

$$\left.\left(\alpha \frac{\partial w}{\partial n} + \beta w\right)\right|_S = \mu$$

Рассматривается первая задача:

$$\begin{cases} \Delta v + cv = f \quad M \in D \\ \left.\left(\alpha \frac{\partial v}{\partial n} + \beta v\right)\right|_S = 0 \end{cases}$$

Пусть $\{\varphi_n\}$ — полная ортогональная система функций из собственных функций задачи Штурма-Лиувилля:

$$\Delta\varphi = \lambda\varphi = 0 \quad M \in D$$

$$\left.\left(\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \beta\varphi\right)\right|_S = 0$$

λ_n — собственное значение. Необходимо разложить f и v в ряд по $\{\varphi_n\}$:

$$f(M) = \sum_n f_n\varphi_n(M)$$

$$f_n = \frac{1}{||\varphi_n||^2}\int_D f(M)\varphi_n(M)dv$$

$$v(M) = \sum_n v_n\varphi_n(M)$$

Подставив ряды в уравнение Гельмгольца, получится следующее:

$$\sum_n v_n\Delta\varphi_n(M) + \sum_n cv_n\varphi_n(M) = \sum_n f_n\varphi_n(M)$$

$$-\lambda_n v_n + cv_n = f_n$$

$$(c - \lambda_n)v_n = f_n$$

$$v_n = \frac{f_n}{c - \lambda_n}$$

Если $c = \lambda_n$ и $f_n = 0$, то v_n — произвольное. Если $c = \lambda_n$ и $f_n \neq 0$, то решения нет. Рассматривается вторая задача:

$$\begin{cases} \Delta w + cw = 0 \quad M \in D \\ \left.\left(\alpha\frac{\partial w}{\partial n} + \beta w\right)\right|_S = \mu \end{cases}$$

Частное решение однородного уравнения Гельмгольца в полярных координатах

Рассматривается волновое уравнение Гельмгольца.

$$\Delta u + k^2u = 0$$

В полярных координатах: $u(\rho,\varphi)$.

$$u_n(\rho,\varphi) = \begin{cases} A_0 J_0(k\rho) + B_0 N_0(k\rho) & n = 0 \\ (A_n J_n(k\rho) + B_n N_n(k\rho))\cos n\varphi & n = 1,2,\ldots \\ (C_n J_n(k\rho) + B_n N_n(k\rho))\sin n\varphi & n = 1,2,\ldots \end{cases}$$

Рассматривается неволновое уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u - \kappa^2 u = 0$$

В полярных координатах: $u(\rho,\varphi)$.

$$u_n(\rho,\varphi) = \begin{cases} A_0 I_0(\kappa\rho) + B_0 K_0(\kappa\rho) & n = 0 \\ (A_n I_n(\kappa\rho) + B_n K_n(\kappa\rho))\cos n\varphi & n = 1,2,\ldots \\ (C_n I_n(\kappa\rho) + D_n K_n(\kappa\rho))\sin n\varphi & n = 1,2,\ldots \end{cases}$$

Пример 25.1. *Рассматривается задача Дирихле в круге для неволногово уравнения Гельмгольца. Пусть есть круг радиуса a. Внутри круга выполняется неволновое уравнение Гельмгольца:*

$$\Delta u - \kappa^2 u = 0 \quad \rho < a$$

$$u|_{\rho=a} = f(\varphi)$$

Решение необходимо искать в следующем виде:

$$u(\rho,\varphi) = A_0 I_0(\kappa\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\kappa\rho)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

Подставив в граничное условие, получится следующее:

$$u|_{\rho=a} = A_0 I_0(\kappa a) + \sum_{n=1}^{\infty} I_0(\kappa a)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) =$$

$$= f(\varphi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi)$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi$$

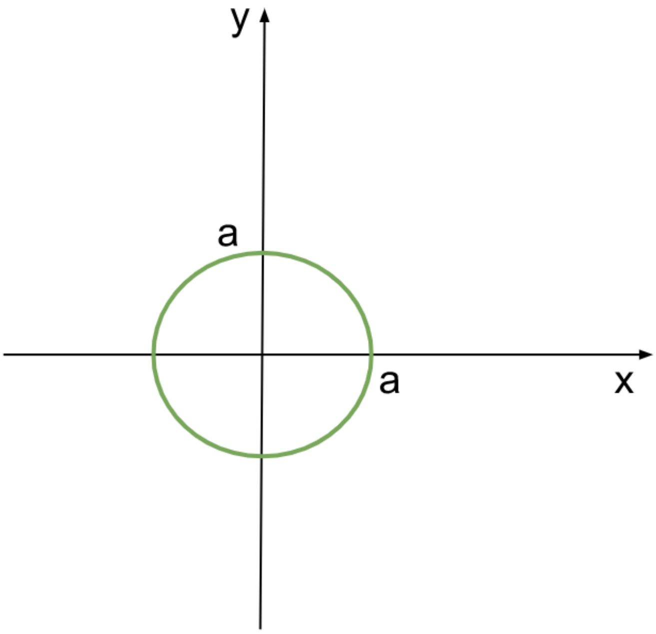

Рис. 25.2. Задача Дирихле в круге для неволнового уравнения Гельмгольца

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi$$

$$D_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi$$

$$A_0 I_0(\kappa a) = C_0$$

$$A_n I_n(\kappa a) = C_n$$

$$B_n I_n(\kappa a) = D_n$$

$$A_0 = \frac{C_0}{I_0(\kappa a)}$$

$$A_n = \frac{C_n}{I_n(\kappa a)}$$

$$B_n = \frac{D_n}{I_n(\kappa a)}$$

$$u(\rho,\varphi) = C_0\frac{I_0(\kappa\rho)}{I_0(\kappa a)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n(\kappa\rho)}{I_n(\kappa a)}(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi)$$

Пример 25.2. *Рассматривается задача Дирихле в круге для волнового уравнения Гельмгольца.*

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \rho < a$$

$$u|_{\rho=a} = f(\varphi)$$

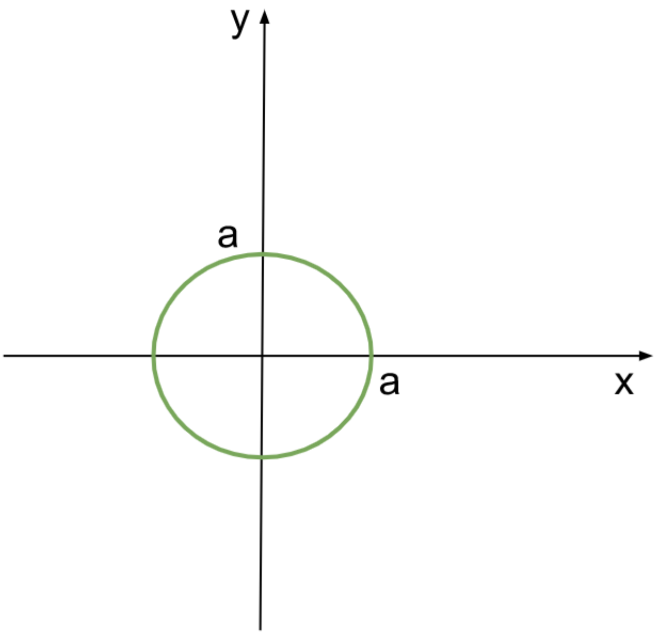

Рис. 25.3. Задача Дирихле в круге для волнового уравнения Гельмгольца

Решение необходимо найти в виде:

$$u(\rho,\varphi) = J_0(k\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(k\rho)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

Подставив в граничные условия:

$$u|_{\rho=a} = A_0 J_0(ka) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ka)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) =$$

$$f(\varphi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi)$$

$$A_0 J_0(ka) = C_0$$

$$A_n J_n(ka) = C_n$$

$$B_n J_n(ka) = D_n$$

Пусть ka *не является нулём ни одной из функции* $J_0, J_1, J_2, \ldots$.

$$J_0(ka) \neq 0$$

$$J_n(ka) \neq 0$$

Тогда:

$$A_0 = \frac{C_0}{J_0(ka)}$$

$$A_n = \frac{C_n}{J_n(ka)}$$

$$B_n = \frac{D_n}{J_n(ka)}$$

Решение существует в единственном виде:

$$u(\rho, \varphi) = C_0 \frac{J_0(k\rho)}{J_0(ka)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(k\rho)}{J_n(ka)} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi)$$

k^2 *не совпадает ни с одним из собственных значений задачи Штурма-Лиувилля в круге с условиями Дирихле.*

Пусть k^2 *совпадает с одним из собственных значений задачи Штурма-Лиувилля в круге с условиями Дирихле.*

$$J_{n_0}(ka) = 0$$

$$A_{n_0} J_{n_0}(ka) = C_{n_0}$$

$$B_{n_0} J_{n_0}(ka) = D_{n_0}$$

$$C_{n_0} = D_{n_0} = 0$$

Тогда A_{n_0}, B_{n_0} *— произвольные. Следовательно, решение записывается в следующем виде:*

$$u(\rho, \varphi) = C_0 \frac{J_0(k\rho)}{J_0(ka)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(k\rho)}{J_n(ka)} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) +$$
$$+ A_{n_0} J_{n_0}(k\rho) \cos n_0\varphi + B_{n_0} J_{n_0}(k\rho) \sin n_0\varphi$$

Если $C_{n_0} \neq 0$ *или* $D_{n_0} \neq 0$, *то краевая задача не имеет решения.*

Семинар 26. Волновое и неволновое уравнение Гельмгольца в сферических и цилиндрических координатах

Уравнение Гельмгольца в сферических координатах

рассматривается волновое уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

Частное решение в сферических координатах записывается в следующем виде:

$$u_{nm}(r,\theta,\varphi) = \left(A_{nm}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} + B_{nm}\frac{N_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}\right)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) \quad n = 0,1,\ldots \quad m = -n,\ldots,n$$

Рассматривается неволновое уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u - \kappa^2 u = 0$$

Частное решение в сферических координатах записывается в следующем виде:

$$u_{nm}(r,\theta,\varphi) = \left(A_{nm}\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(\kappa r)}{\sqrt{r}} + B_{nm}\frac{K_{n+\frac{1}{2}}(\kappa r)}{\sqrt{r}}\right)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) \quad n = 0,1,\ldots \quad m = -n,\ldots,n$$

Краевая задача в шаре для неволнового уравнения Гельмгольца

Рассматривается краевая задача в шаре для неволнового уравнения Гельмгольца.

$$\Delta u - \kappa^2 u = f(r,\theta,\varphi) \quad r < a$$

$$u|_{r=a} = g(\theta,\varphi)$$

Необходимо искать решение в виде:

$$u = v + w$$

Где первая задача записывается в следующем виде:

$$\Delta v - \kappa^2 v = 0 \quad r < a$$

$$v|_{r=a} = g(\theta, \varphi)$$

Вторая задача записывается в следующем виде:

$$\Delta w - \kappa^2 w = f(r, \theta, \varphi) \quad r < a$$

$$w|_{r=a} = 0$$

Рассматривается первая задача:

$$\begin{cases} \Delta v - \kappa^2 v = 0 \quad r < a \\ v|_{r=a} = g(\theta, \varphi) \end{cases}$$

Решение должно быть ограничено. Решение получается в виде следующего ряда:

$$v(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_{nm} \frac{I_{n+\frac{1}{2}}(\kappa r)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$$

$$v|_{r=a} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_{nm} \frac{I_{n+\frac{1}{2}}(\kappa a)}{\sqrt{a}} Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = g(\theta, \varphi)$$

$$g(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} C_{nm} Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$$

$$A_{nm} \frac{I_{n+\frac{1}{2}}(\kappa a)}{\sqrt{a}} = C_{nm}$$

$$A_{nm} = \frac{\sqrt{a}}{I_{n+\frac{1}{2}}(\kappa a)} C_{nm}$$

$$v(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{I_{n+\frac{1}{2}}(\kappa r)}{I_{n+\frac{1}{2}}(\kappa a)} \sqrt{\frac{a}{r}} C_{nm} Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$$

Например, пусть функция $g(\theta, \varphi) = 1$:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} C_{nm} Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$$

$$Y_0^{(0)}(\theta, \varphi) \to C_{00} = 1$$

Остальные:

$$C_{nm} = 0$$

$$v(r,\theta,\varphi)=\frac{I_{\frac{1}{2}}(\kappa r)}{I_{\frac{1}{2}}(\kappa a)}\sqrt{\frac{a}{r}}$$

$$I_{\frac{1}{2}}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}sh\ t$$

$$v(r,\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2}{\pi\kappa r}}\frac{sh\kappa r}{sh\kappa a}\sqrt{\frac{\pi\kappa a}{2}}\sqrt{\frac{a}{r}}=\frac{a}{r}\frac{sh\kappa r}{sh\kappa a}$$

Рассматривается вторая задача:

$$\begin{cases}\Delta w-\kappa^2 w=f(r,\theta,\varphi) \quad r<a\\ w|_{r=a}=0\end{cases}$$

Задача Штурма-Лиувилля в шаре с условиями Дирихле:

$$\Delta\psi+\lambda\psi=0 \quad r<a$$

$$\psi|_{r=a}=0$$

Собственные функции имеют три индекса:

$$\psi_{nml}(r,\theta,\varphi)=\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_l^{(n)}}r)}{\sqrt{r}}Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$$

Собственные значения $\lambda_l^{(n)}$ — l-й положительный корень уравнения:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a)=0$$

$$n=0,1,\ldots \quad m=-n,\ldots,n \quad l=1,2,\ldots$$

Получается следующая функция:

$$w(r,\theta,\varphi)==\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{l=1}^{\infty}A_{nml}\psi_{nml}(r,\theta,\varphi)$$

$$f(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{l=1}^{\infty}f_{nml}\psi_{nml}(r,\theta,\varphi)$$

Подставив в уравнение $\Delta w-\kappa^2 w=f$, получится следующее:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{l=1}^{\infty}A_{nml}\Delta\psi(r,\theta,\varphi)-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{l=1}^{\infty}\kappa^2 A_{nml}\psi_{nml}(r,\theta,\varphi)=$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \sum_{l=1}^{\infty} f_{nml} \psi_{nml}(r, \theta, \varphi)$$

$$-A_{nml} \left(\lambda_l^{(n)} + \kappa^2 \right) = f_{nml}$$

$$A_{nml} = -\frac{f_{nml}}{\lambda_l^{(n)} + \kappa^2}$$

Первая задача не всегда разрешима.

Краевые задачи для уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах

Рассматривается задача Дирихле в цилиндре для неволнового уравнения Гельмгольца.

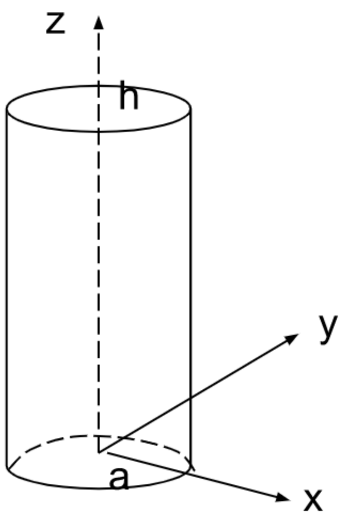

Рис. 26.1. Задача в цилиндре

$$\Delta - \kappa^2 u = f(\rho, \varphi, z) \quad \rho < a \quad 0 < z < h$$

$$u|_{z=0} = g_1(\rho, \varphi)$$

$$u|_{z=h} = g_2(\rho, \varphi)$$

$$u|_{\rho=a} = g(\varphi, z)$$

Решение задачи необходимо искать в следующем виде:

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$

Где первая задача записывается в следующем виде:

$$\Delta u_1 - \kappa^2 u_1 = f(\rho,\varphi,z) \quad \rho < a \;\; 0 < z < h$$

$$u_1|_{z=0} = 0$$

$$u_1|_{z=h} = 0$$

$$u_1|_{\rho=a} = 0$$

Вторая задача записывается в следующем виде:

$$\Delta u_2 - \kappa^2 u_2 = 0 \quad \rho < a \;\; 0 < z < h$$

$$u_2|_{z=0} = g_1(\rho,\varphi)$$

$$u_2|_{z=h} = g_2(\rho,\varphi)$$

$$u_2|_{\rho=a} = 0$$

Третья задача записывается в следующем виде:

$$\Delta u_3 - \kappa^2 u_3 = 0 \quad \rho < a \;\; 0 < z < h$$

$$u_3|_{z=0} = 0$$

$$u_3|_{z=h} = 0$$

$$u_3|_{\rho=a} = g(\varphi,z)$$

Рассматривается первая задача:

$$\begin{cases} \Delta u_1 - \kappa^2 u_1 = f(\rho,\varphi,z) \quad \rho < a \;\; 0 < z < h \\ u_1|_{z=0} = 0 \\ u_1|_{z=h} = 0 \\ u_1|_{\rho=a} = 0 \end{cases}$$

Задача Штурма-Лиувилля в цилиндре имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta\psi + \lambda\psi = 0 \quad \rho < a \;\; 0 < z < h \\ \psi|_{z=0} = 0 \\ \psi|_{z=h} = 0 \\ \psi|_{\rho=a} = 0 \end{cases}$$

Эта задача решается методом разделения переменных. Собственные функции имеют следующий вид:

$$\psi_{nml}(\rho,\varphi,z) = J_n(\sqrt{\nu_l^{(n)}}\rho)\cdot\begin{Bmatrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{Bmatrix}\cdot\sin\frac{\pi m z}{h}$$

Где $\nu_l^{(n)}$ — l-й положительный корень уравнения $J_n(\sqrt{\nu}a)=0$. Собственное значение:

$$\lambda_{nml} = \nu_l^{(n)} + \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2$$

Таким образом, решение записывается в следующем виде:

$$u_1(\rho,\varphi,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(A_{nml}\cos n\varphi + B_{nml}\sin n\varphi)\,J_n(\sqrt{\nu_l^{(n)}}\rho)\sin\frac{\pi m z}{h}$$

Подставив в уравнение Гельмгольца, можно найти A и B.

Рассматривается вторая задача:

$$\begin{cases}\Delta u_2 - \kappa^2 u_2 = 0 \quad \rho < a \quad 0 < z < h\\ u_2|_{z=0} = g_1(\rho,\varphi)\\ u_2|_{z=h} = g_2(\rho,\varphi)\\ u_2|_{\rho=a} = 0\end{cases}$$

Частное решение необходимо искать в следующем виде:

$$u_2(\rho,\varphi,z) = v(\rho,\varphi)Z(z) \not\equiv 0$$

Подставив в уравнение Гельмгольца, получается следующее:

$$\Delta_{\rho\varphi}v(\rho,\varphi)\cdot Z(z) + v(\rho,\varphi)Z''(z) - \kappa^2 v(\rho,\varphi)Z(z) = 0$$

$$\frac{\Delta_{\rho\varphi}v(\rho,\varphi)}{v(\rho,\varphi)} = \kappa^2 - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda$$

Таким образом, получается задача Штурма-Лиувилля в круге:

$$\begin{cases}\Delta_{\rho\varphi}v(\rho,\varphi) + \lambda v(\rho,\varphi) = 0 \quad \rho < a\\ v|_{\rho=a} = 0\end{cases}$$

Записывается решение этой задачи:

$$v_{nl}(\rho,\varphi) = J_n(\sqrt{\lambda_l^{(n)}})\begin{Bmatrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{Bmatrix}$$

$\lambda_l^{(n)}$ — l-й положительный корень уравнения:

$$J_n(\sqrt{\lambda}a) = 0$$

$$\kappa^2 - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda_l^{(n)}$$

$$Z''(z) - (\kappa^2 + \lambda_l^{(n)})Z(z) = 0 \quad 0 < z < h$$

Общее решение можно записать в следующем виде:

$$Z_{nl}(z) = A\ sh(\sqrt{\kappa^2 + \lambda_l^{(n)}}z) + B\ sh(\sqrt{\kappa^2 + \lambda_l^{(n)}}(h-z))$$

Решение краевой задачи получается в виде произведения:

$$u_2(\rho,\varphi,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} J_n(\sqrt{\lambda_l^{(n)}}\rho)\cdot$$

$$\left[(A_{nk}\cos n\varphi + B_{nk}\sin n\varphi)sh(\sqrt{\kappa^2 + \lambda_l^{(n)}}z) + (C_{nk}\cos n\varphi + D_{nk}\sin n\varphi)sh(\sqrt{\kappa^2 + \lambda_l^{(n)}})(h-z)\right]$$

Коэффициенты можно найти из граничных условий:

$$u_2|_{z=0} = g_!(\rho,\varphi)$$

$$u_2|_{z=h} = g_2(\rho,\varphi)$$

Рассматривается третья задача:

$$\begin{cases} \Delta u_3 - \kappa^2 u_3 = 0 \quad \rho < a \quad 0 < z < h \\ u_3|_{z=0} = 0 \\ u_3|_{z=h} = 0 \\ u_3|_{\rho=a} = g(\varphi,z) \end{cases}$$

Частное решение необходимо искать в виде:

$$u_3(\rho,\varphi,z) = w(\rho,\varphi)Z(z) \not\equiv 0$$

Подставив в уравнение Гельмгольца, получается следующее:

$$\Delta_{\rho\varphi}w(\rho,\varphi)Z(z) + w(\rho,\varphi)Z''(z) - \kappa^2 w(\rho,\varphi)Z(z) = 0$$

$$\frac{\Delta_{\rho\varphi}}{w(\rho,\varphi)} = \kappa^2 - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \kappa^2 + \lambda$$

$$Z''(z) + \lambda Z(z) = 0 \quad 0 < z < h$$

$$Z(0) = 0$$

$$Z(h) = 0$$

Собственные функции записываются в следующем виде:

$$Z_l(z) = \sin\frac{\pi l z}{h} \quad l = 1, 2, \ldots$$

$$\lambda_l = \left(\frac{\pi l}{h}\right)^2$$

Записывается задача для функции w:

$$\Delta_{\rho\varphi} w(\rho,\varphi) - (\kappa^2 + \lambda_l) w(\rho,\varphi) = 0 \quad \rho < 0$$

Таким образом, решение этой задачи записывается в следующем виде:

$$w_{nl}(\rho,\varphi) = I_n(\sqrt{\kappa^2+\lambda_l}\rho)\begin{Bmatrix}\cos n\varphi \\ \sin n\varphi\end{Bmatrix}$$

$$u_3(\rho,\varphi,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(A_{nl}\cos n\varphi + B_{nl}\sin n\varphi)\, I_n(\sqrt{\kappa^2+\lambda_l}\rho)\sin\frac{\pi l z}{h}$$

Коэффициенты находятся из граничного условия:

$$u_2|_{\rho=a} = g(\varphi, z)$$

Семинар 27. Дельта-функция Дирака

Определение дельта-функции

D — множество основных функций. Основной функцией называется функция вещественного аргумента x с вещественными значениями, если это финитная бесконечно дифференцируемая функция.

$$\varphi(x) \in D \quad x \in R$$

Определяется линейный непрерывный функционал, действующий на D, который на такой функции называется обобщенной функцией. Регулярной называется обобщенная функция вида:

$$\hat{f}\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

Обобщенная функция, которая не является регулярной, называется *сингулярной*. Сингулярной обобщенной функцией является дельта-функция.

Определение 27.1. *Дельта-функцией (Дирака) называется обобщенная функция, действующая по правилу:*

$$\hat{\delta}\varphi = \varphi(0)$$

Действие дельта-функции обозначается следующим образом:

$$\hat{\delta}\varphi = (\hat{\delta}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

Можно продолжить действие дельта-функции на функции, определенные и непрерывные в окрестности нуля.

$$\int_a^b \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0), \quad 0 \in (a,b)$$

$$\int_a^b \delta(x)\varphi(x)dx = 0, \quad 0 \notin [a,b]$$

Дельта-функция как слабый предел

рассматривается функциональная последовательность, которая задана на всей вещественной оси:

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{n}{1+n^2x^2} \quad x \in R$$

Пусть $\varphi(x) \in D$. Тогда существует интеграл по всей вещественной оси:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

Доказательство.

Рассматривается следующий интеграл, который сходится:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(nx)}{1+(nx)^2} = \frac{1}{\pi}\arctan(nx)\Big|_{\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Таким образом, получается следующее выражение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1$$

Рассматривается следующий интеграл:

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x) \quad \varphi(x) \in D$$

$$I_n - \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)dx - \varphi(0)\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)(\varphi(x)-\varphi(0))dx$$

$$I_n - \varphi(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x)-\varphi(0))\frac{n}{1+n^2x^2}dx$$

Происходит замена переменных:

$$nx = t$$

$$I_n - \varphi(0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - \varphi(0)\right)\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-A}\left(\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - \varphi(0)\right)\frac{dt}{1+t^2} + \int\limits_{-A}^{A}\left(\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - \varphi(0)\right)\frac{dt}{1+t^2} +$$

$$+ \int\limits_{A}^{+\infty}\left(\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - \varphi(0)\right)\frac{dt}{1+t^2} = J_1 + J_2 + J_3$$

$\varphi(x)$ — финитная, непрерывная и ограничена на R.

$$|\varphi(x)| \leqslant M \quad \forall x \in R$$

$$\left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - \varphi(0)\right| \leqslant \left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right| + |\varphi(0)| \leqslant 2M$$

Делается оценка для следующего интеграла:

$$|J_3| = \frac{1}{\pi}\int\limits_{A}^{+\infty}\left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - \varphi(0)\right|\frac{dt}{1+t^2} \leqslant \frac{2M}{A}\int\limits_{A}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$$

$$|J_1| \leqslant \frac{2M}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-A}\frac{dt}{1+t^2}$$

Так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$ сходится, то для $\forall\varepsilon > 0$ существует $A > 0$:

$$|J_1| < \varepsilon$$

$$|J_3| < \varepsilon$$

Рассматривается следующий интеграл:

$$|j_2| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-A}^{A}\left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - \varphi(0)\right|\frac{dt}{1+t^2}$$

Так как функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке 0, то для $\forall\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$:

$$\forall z \in (-\delta, \delta)$$

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon$$

Обозначается:

$$\delta = \frac{A}{N}$$

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon \quad \forall x \in \left[-\frac{A}{N}, \frac{A}{N}\right]$$

$$\left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - \varphi(0)\right| < \varepsilon \quad \forall t \in \left[-A\frac{n}{N}, A\frac{n}{N}\right] \supset [-A, A]$$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0$ существует $N > 0$:

$$\forall n > N \quad \left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - \varphi(0)\right| < \varepsilon \quad t \in [-A, A]$$

$$|J_2| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-A}^{A}\left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - \varphi(0)\right|\frac{dt}{1+t^2} < \frac{\varepsilon}{\pi}\int\limits_{-A}^{A}\frac{dt}{1+t^2} < \frac{\varepsilon}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\varepsilon}{\pi}\cdot\pi$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует $A > 0$ $N > 0$:

$$|J_1| < \varepsilon$$

$$|J_2| < \varepsilon$$

$$|J_3| < \varepsilon$$

$$\forall n > N$$

$$|I_n - \varphi(0)| \leqslant |J_1| + |J_2| + |J_3| < 3\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0: \quad \forall n > N$$

$$|I_n - \varphi(0)| < 3\varepsilon \to \lim_{n\to\infty} I_n = \varphi(0)$$

■

Поскольку:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

Тогда последовательность $f_n(x)$ сходится слабо к $\delta(x)$, где:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2x^2}\right) = \begin{cases} 0 & x\neq 0 \\ +\infty & x=0 \end{cases}$$

$$y = f_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2x^2}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1$$

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} +\infty & x=0 \\ 0 & x\neq 0 \end{cases}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

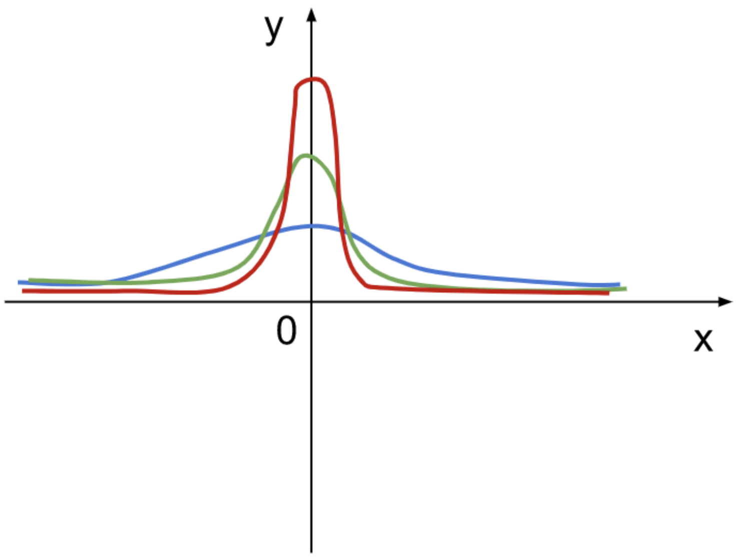

Рис. 27.1. График зависимости

Аналогично можно доказать, что дельта-функция является слабым пределом последовательностей следующего вида:

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x} \qquad \frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2} \qquad \frac{\sin^2 nx}{\pi n x^2}$$

$$f_n(x) = nf(nx)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad f(x)\geqslant 0$$

Сдвиг аргумента дельта-функции

Дельта-функция записывается в виде интеграла:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\varphi(x)dx \quad \varphi(x) \in D$$

$$t = x - x_0$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\varphi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t+x_0)dt = \varphi(x_0)$$

Происходит сдвиг аргумента:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\varphi(x)dx = \varphi(x_0)$$

Четность дельта-функции

Записывается интеграл следующего вида:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(-x)\varphi(x)dx \overset{t=-x}{=} \int\limits_{+\infty}^{-\infty} \delta(t)\varphi(-t)dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(-t)dt = \varphi(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx$$

$$\delta(x) = \delta(-x)$$

Как следствие получается следующий интеграл:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{2}\varphi(0) = \int\limits_{-\infty}^{0} \delta(x)\varphi(x)dx$$

$$\int\limits_{0}^{b} \delta(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{2}\varphi(0) \quad b > 0$$

$$\int\limits_{a}^{0} \delta(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{2}\varphi(0) \quad a < 0$$

Растяжение аргумента дельта-функции

рассматривается следующий интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax)\varphi(x)dx \quad a > 0$$

$$ax = t$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax)\varphi(x)dx = \frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi\left(\frac{t}{a}\right)dt = \frac{\varphi(0)}{a}$$

Аналогично при $a < 0$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax)\varphi(x)dx = -\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi\left(\frac{t}{a}\right)dt = -\frac{\varphi(0)}{a}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax)\varphi(x)dx = \frac{\varphi(0)}{|a|} \quad a \neq 0$$

Замена переменной в дельта-функции

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(\psi(x))\varphi(x)dx$$

Пусть $\psi(x) \in C^1(R)$ имеет на R простые нули $x_1, \ldots, x_n$.

Необходимо разбить R на участки монотонности $\psi(x)$ и сделать замену:

$$t = \psi(x)$$

Тогда получается следующее:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(\psi(x))\varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{a_k}^{b_k} \delta(\psi(x))\varphi(x)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\psi(a_k)}^{\psi(b_k)} \delta(t)\varphi(\psi^{-1}(t))\frac{dt}{\psi'(\psi^{-1}(t))}$$

Окончательная формула записывается в следующем виде:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(\psi(x))\varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(x_k)}{|\psi'(x_k)|}$$

Дифференцирование дельта-функции

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)\varphi(x)dx = \delta(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi'(x)dx =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi'(x)dx = -\varphi'(0)$$

Аналогично:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x)\varphi(x)dx = (-1)^n\varphi^{(n)}(0)$$

Первообразная дельта-функция

Функция определяется следующим образом:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

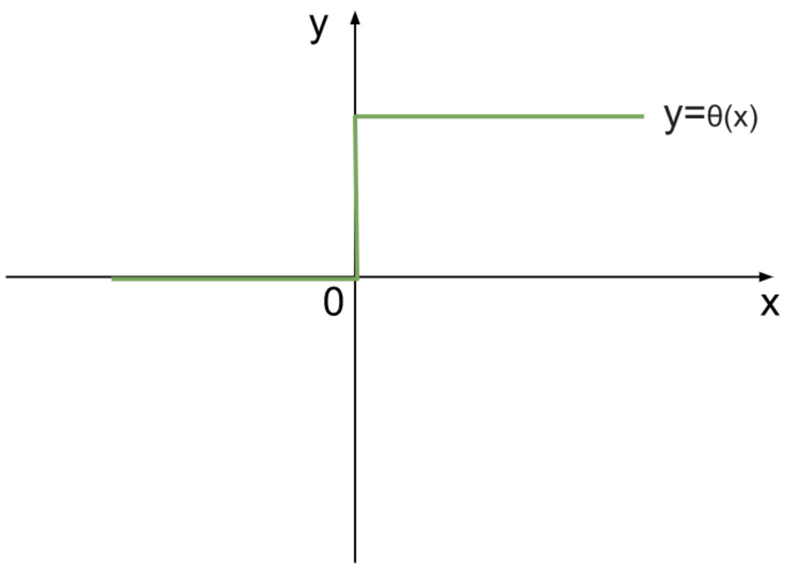

Рис. 27.2. График зависимости

Рассматривается следующий интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta'(x)\varphi(x)dx = \theta(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\varphi'(x)dx =$$

$$-\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx = 0\varphi(x)|_0^{+\infty} = \varphi(0) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx$$

Таким образом, делается следующий вывод:

$$\theta'(x) = \delta(x)$$

Преобразование Фурье дельта-функции

Рассматривается Фурье образ дельта-функции:

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)e^{-i\lambda x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Обратное преобразование Фурье:

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}d\lambda$$

Записывается исходное представление:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}d\lambda$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}d\lambda$$

Многомерная дельта-функция

В двумерном случае:

$$\iint\limits_{R^2} \delta(M, M_0)\varphi(M)dxdy = \varphi(M_0)$$

В трехмерном случае:

$$\iiint\limits_{R^3} \delta(M,M_0)\varphi(M)dxdydz = \varphi(M_0)$$

$$\delta(M,M_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0) \quad M(x,y) \quad M_0(x_0,y_0)$$

$$\delta(M,M_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \quad M(x,y,z) \quad M_0(x_0,y_0,z_0)$$

На плоскости:

$$\varphi(M_0)\iint\limits_{R^2} \delta(M,M_0)\varphi(M)dxdy \overset{(x,y)\to(\xi,\eta)}{=} \iint\limits_{G} \varphi(\xi,\eta)\delta(M,M_0)\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right| d\xi d\eta$$

$$\varphi(M_0) = \iint\limits_{G} \varphi(\xi,\eta)\delta(\xi-\xi_0)\delta(\eta-\eta_0)d\xi d\eta$$

Таким образом, получается выражение дельта-функции в криволинейных координатах:

$$\delta(M,M_0) = \frac{\delta(\xi-\xi_0)\delta(\eta-\eta_0)}{\left|\dfrac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right|}$$

Аналогичную формулу можно получить в трехмерном случае:

$$\delta(M,M_0) = \frac{\delta(\xi-\xi_0)\delta(\eta-\eta_0)\delta(\zeta-\zeta_0)}{\left|\dfrac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}\right|}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ