МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. ЧАСТЬ 2. СЕМИНАРЫ

ГОРИЦКИЙ
АНДРЕЙ ЮРЬЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ТАГИРОВУ ДЖАННЕТ ДЖАБРАИЛОВНУ

Содержание

1. Семинар 1 **5**

Повторение метода Фурье 5

Задача на собственные значения оператора Лапласа с условием Дирихле на границе 6

Смешанные краевые задачи 6

Решение задачи на собственные значения в прямоугольнике 9

2. Семинар 2 **11**

Задача на собственные значения оператора Лапласа с условием Дирихле на границе 11

Формулы Грина 11

Задача про прямоугольник с предыдущего семинара 12

Задача на собственные значения 13

Задача про прямоугольник 14

3. Семинар 3 **16**

Задача о свободных колебаниях прямоугольной мембраны 16

Задача о температуре в тонкой квадратной пластине 17

Задача на собственные значения в круге 18

4. Семинар 4 **21**

Функции Бесселя 21

Задача о свободных колебаниях круглой мембраны 22

5. Семинар 5 **25**

Обобщенные функции 25

Пробные (основные) функции 25

Пространство обобщенных функций 28

Регулярные обобщенные функции 28

Сингулярные обобщенные функции 28

6. Семинар 6 **30**

Сходимость обобщенных функций 30

Задачи на обобщенные функции и сходимость 31

Действия над обобщенными функциями 32

7. Семинар 7 **34**

Растянутая дельта-функция 34
Производная дельта-функции 34
Задача на проверку функции Лейбница 35
Пример решения задачи с использованием дельта-функции 35
Задача на дифференцирование разрывных функций 36

8. Семинар 8 **39**

Задача на обобщенные функции 39
Фундаментальные решения дифференциальных операторов 39
Задача на фундаментальные решения дифференциальных операторов . . . 40
Задача на нахождение единственного фундаментального решения 41

9. Семинар 9 **43**

Оператор Лапласа. Фундаментальные решения 43
Функция Грина 43
Построение функции Грина методом отражений 44
Задача на нахождение функции Грина 45
Задача на построение функции Грина шара 47

10. Семинар 10 **48**

Функция Грина полушара 48
Функция Грина полупространства 48
Построение функции Грина методом двумерных областей 50
Пример задачи на функцию Грина 52

11. Семинар 11 **53**

Потенциалы 53
Ньютонов (объемный) потенциал 53
Потенциал простого слоя 54
Потенциал двойного слоя 55
Преобразование интеграла для потенциала двойного слоя 55
Задача на нахождение логарифмического потенциала двойного слоя 56
Задача на нахождение потенциала равномерно заряженной сферы 57

12. Семинар 12 **60**

Задача на нахождение потенциала двойного слоя окружности 60

Задача на нахождение ньютонова потенциала шара 61
Решение задачи Дирихле с помощью потенциалов 62
Решение задачи Неймана с помощью потенциалов 64

13. Семинар 13 66
Пространства Соболева 66
Примеры нахождения обобщенной функции 68
Дельта-функции 69

14. Семинар 14 71
Задача (пространство Соболева) 71
Доказательство соотношения для обобщенной производной 72
Пространство $H_0^1(\Omega)$ 73
Задача (пространство $H_0^1(\Omega)$) 74

15. Семинар 15 75
Разбор домашней задачи (пространство $H^1(\Omega)$) 75
$H^1(\Omega)$ от шара радиуса π 76
Принадлежность к пространству $H^1(\Omega)$ 77
Обобщенное решение задачи Дирихле 78

16. Семинар 16 79
Обобщенное решение задачи Дирихле 79
Вариационная задача 79
Задача (нахождение инфимума) 80

1. Семинар 1

Повторение метода Фурье

Метод Фурье - метод разделения переменных для решения различных задач. Как правило, у нас была функция двух переменных, например, $u(t, x)$, где t - время, $x \in (0, l)$ - одномерная величина; или $u(x, y)$ - функция в прямоугольнике; $u(r, \varphi)$ - функция в полярных координатах.

Общая идеология метода Фурье заключается в том, чтобы найти решение для $u(t, x)$ в виде произведения двух функций $T(x) \cdot X(x)$, $X(x) \not\equiv 0$ затем разделить переменные и получить два различных уравнения на x и t с краевыми условиями, например, $x(a) = x(b) = 0$.

Задача Штурма-Лиувилля (частный случай)

Пусть уравнение $X(x)$ имеет вид $x'' = -\lambda x$ с краевыми условиями $x(0) = x(l) = 0$, где $x \in (0, l)$. Решение этого уравнения зависит от знака λ.

Если $\lambda < 0$, то решение представляется в виде экспоненты, но линейная комбинация двух экспонент не может обратиться в 0 в двух точках.
Если $\lambda = 0$, то это линейные функции. Они обращаются в ноль, если $X(x) \equiv 0$, но это решение нам не подходит.
Если $\lambda > 0$, то решение представляется в виде тригонометрических функций

$X_k(x) = \sin \dfrac{\pi k x}{l}$, а $\lambda_k = \left(\dfrac{\pi k}{l}\right)^2$.

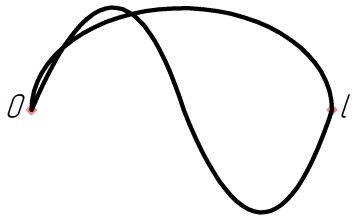


Рис. 1. Решение для $\lambda > 0$

В этой задаче есть некоторые общие свойства: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 ... \to +\infty$;
$\{X_k(x)\}$ образуют полную ортогональную систему в $L_2(0, l)$.

Задача на собственные значения оператора Лапласа с условием Дирихле на границе

Задана ограниченная область Ω. Необходимо найти такую функцию $v(x)$ ($v(x) \not\equiv 0$):
$$\begin{cases} \Delta v_k(x) = -\lambda_k v_k(x) \\ v_k|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Теорема 1.1. *(Свойства задачи)*

1) $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant\leqslant \ ... \ \to +\infty$

2) $\{v_k(x)\}$ *- полная ортонормированная система в* $L_2(\Omega)$

где $\|f\|^2 = \int\limits_{\Omega} f^2(x)dx < +\infty$ *- норма в пространстве* L_2*, и* L_2 *- Гильбертово пространство, то есть* $(f, g) = \int f(x)g(x)dx$, $\|f\|^2 = (f, f)$

Смешанные краевые задачи

1. Волновое уравнение: $u_{tt} = a^2\Delta u$, где $u = u(t, x)$, $t > 0$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.
Пусть уравнение описывает колебания мембраны. Тогда Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^2$. Мембрана закреплена по краям: $u|_{\partial\Omega} = 0$, и имеются начальные условия $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $u_t|_{t=0} = \psi(x)$. Задача такого типа называется смешанной краевой задачей.

2. Уравнение теплопроводности: $u_t = a^2\Delta u$, где $x \in \Omega$ - нагретая область. На границе области поддерживается нулевая температура $u|_{\partial u} = 0$, и задана начальная температура $u|_{t=0} = \varphi(x)$.

3. Уравнение Лапласа (в цилиндре): $\Delta u = 0$. Тогда $u = u(x, z)$, где $x \in \Omega$, $z \in (0, H)$. В этом цилиндре изучается задача Дирихле. Для этого необходимо задать значение

u на границе. Пусть $u|_{x\in\partial\Omega} = 0$, $u|_{z=0} = \varphi(x)$, $u|_{z=H} = \psi(x)$.

Эти три задачи решаются методом Фурье и приводят к задаче на собственные значения.

Решение смешанных краевых задач методом Фурье

Разделяем переменные методом Фурье. Временно забываем про начальные условия. Во всех трех задачах остаются однородные уравнения и условия нуля на границе.

Необходимо найти решение каждой задачи в следующем виде: $u(t,x) = T(t)\cdot v(x)$.

Тогда решение исходной задачи будет иметь вид: $u = \sum\limits_k T_k(t)v_k(x)$.

Решение

Подставляем функции $T(t)$ и $v(x)$ в исходное уравнение: $T''v = a^2T\Delta v$.

Разделяем переменные: $\dfrac{T''(t)}{a^2T(t)} = \dfrac{\Delta v(x)}{v(x)}$.
Получили равенство двух функций. Они равны между собой тогда и только тогда, когда они равны константе. Обозначим ее за $-\lambda$.

В итоге: $\begin{cases} \Delta v_k = -\lambda_k v_k \\ T_k'' = -\lambda_k a^2 T \end{cases} \qquad (1)$

Остались граничные условия: $u|_{x\in\partial\Omega} = T(t)\cdot v|_{x\in\partial\Omega} = 0$.

Либо $T(t) = 0$ либо $v|_{x\in\partial\Omega} = 0$. Если в какой-то точке границы $v \neq 0$, то $T(t) \equiv 0$. В итоге получится нулевое решение, которое мы не рассматриваем. Тогда рассмотрим $v|_{x\in\partial\Omega} = 0$. Поэтому, в систему (1) добавляется условие $v_k|_{x\in\partial\Omega} = 0$.

Мы получили задачу на собственные значения $\Delta v_k = -\lambda_k v_k$, $v_k|_{x\in\partial\Omega} = 0$. Из решения этой задачи мы получим все λ, и далее решим уравнение $T_k'' = -\lambda_k a^2 T$ относительно найденных λ_k.

Решения имеют следующий вид: $T_k = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t$.

Во второй задаче действия аналогичные, только уравнение будет относительно T'.

Это уравнение на экспоненту: $T_k = A_k e^{-\lambda_k a^2 t}$

В третьей задаче, при подстановке, необходимо учитывать, что

$$\Delta = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}}_{=\Delta_x} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Необходимо разделить переменные. $u(x,z) = v(x)Z(z)$. Тогда $\Delta u = \Delta_x v \cdot z + v \cdot Z'' = 0$. Разделяем переменные:

$$\frac{\Delta_x v(x)}{v(x)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda.$$

Граничные условия: $u|_{x\in\partial\Omega} = v|_{x\in\partial\Omega} \cdot Z(z) = 0$

Это снова задача на собственные значения

$$\begin{cases} \Delta_x v_k(x) = -\lambda v_k, \ v_k|_{x\in\partial\Omega} = 0 \\ Z'' = \lambda Z \end{cases}$$

Решениями являются экспоненты вида $e^{\sqrt{\lambda}Z}, e^{-\sqrt{\lambda}Z}$. Тогда решение задачи на собственные значения имеет вид $\sum Z_k(z) v_k(x)$.

Если записать решения уравнения на Z в виде гиперболических функций $\cosh(\sqrt{\lambda_k}Z)$, $\sinh(\sqrt{\lambda_k}Z)$, то получим:

$$Z_k = A_k \cosh(\sqrt{\lambda_k}Z) + B_k \sinh(\sqrt{\lambda_k}Z).$$

В итоге: все три задачи свелись к задаче на собственные значения. Для каждой задачи есть общие формулы:

1. Для первой задачи решение необходимо искать в виде

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) v_k(x) = \sum \left(A_k \cos a\sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k} t \right) \cdot v_k(x).$$

Коэффициенты A_k и B_k можно найти из начальных условий $u|_{t=0} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k v_k(x) = \varphi(x)$. Чтобы найти A_k при данном k, необходимо эту сумму скалярно умножить на $v_k(x)$ и проинтегрировать.

Получится $A_k = \dfrac{1}{\|v_k\|^2}\int\limits_\Omega \varphi(x)v_k(x)dx$, так как $\int\limits_\Omega v_k v_l dx = (v_k, v_l) = 0$ при $k \neq l$, и $(v_k, v_l) = \int v_k^2 = \|v_k\|^2$ при $k = l$.

Коэффициенты B_k находятся аналогично. $u|_{t=0} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a\sqrt{\lambda_k}B_k v_k(x) = \psi(x)$. Тогда

$B_k = \dfrac{1}{a\sqrt{\lambda_k}\|v_k\|^2}\int\limits_\Omega \psi(x)v_k(x)$

2. Во второй задачи меняется только T_k. $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda_k a^2 t}v_k(x)$.

3. В третьей задаче формула имеет вид

$$u = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cosh(\sqrt{\lambda_k}Z) + B_k\sinh(\sqrt{\lambda_k}Z)\right)v_k(x)$$
$$u|_{Z=0} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(x) = \varphi(x).$$
$$u|_{Z=H} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cosh(\sqrt{\lambda_k}H) + B_k\sinh(\sqrt{\lambda_k}H)\right)v_k(x) = \psi(x).$$

Тогда, при уже найденном A_k, можно найти B_k.

Решение задачи на собственные значения в прямоугольнике

Пусть $\Omega = (0, a) \times (0, b) = \Pi$. Тогда $\begin{cases} \Delta v = -\lambda v \\ v|_{x=0} = v|_{x=a} = v|_{y=0} = v|_{y=b} = 0 \end{cases}$

Используя метод Фурье, ищем нетривиальные решения данной задачи, которые можно представить в виде $v(x, y) = X(x)Y(y)$.

Подставляем функции $X(x)$ и $Y(y)$ в исходное уравнение:
$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = -\lambda X(x)Y(y)$.

Далее необходимо разделить переменные: $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda - \dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = -\mu$.

Тогда $\begin{cases} X'' = -\mu X \\ Y'' = (\mu - \lambda)Y = -\nu Y \end{cases}$

Исследуем начальные условия: $v|_{x=0} = X(0)Y(y) = 0$. Условие $Y(y) \equiv 0$ не подходит. Поэтому $X(0) = 0$. Аналогично для остальных краевых условий.

В итоге получим систему

$$\begin{cases} X'' = -\mu X,\ X(0) = X(a) = 0 \\ Y'' = -\nu Y,\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases}$$

Это задача Штурма-Лиувилля на отрезке. Решение первого уравнения изображено на рисунке 1.

$X_l = \sin\dfrac{\pi l x}{a}$, $\mu_l = \left(\dfrac{\pi l}{a}\right)^2$, где $l \in \mathbb{N}$. $Y_m = \sin\dfrac{\pi m y}{b}$, $\nu_m = \left(\dfrac{\pi m}{b}\right)^2$, где $m \in \mathbb{N}$.

Так как мы искали решение в виде $v(x,y) = X(x)Y(y)$, то $v_{lm}(x,y) = \sin\dfrac{\pi l x}{a}\sin\dfrac{\pi m y}{b}$, а $\lambda_{lm} = \mu_l + \nu_m = \left(\dfrac{\pi l}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi m}{b}\right)^2$.

Мы получили не все решения, но получили все, необходимые нам, так как $v_{lm}(x,y)$ образуют полную ортогональную систему.

2. Семинар 2

Задача на собственные значения оператора Лапласа с условием Дирихле на границе

Вернемся к Теореме 1.1. Свойства задачи можно получить из утверждения, что оператор Лапласа с условием Дирихле на границе Δ_D является самосопряженным, отрицательным, и обратный к нему оператор Δ_D^{-1} компактен.

Самосопряженный: $A^T = A$, где A - матрица оператора. Это симметрическая матрица, поэтому с ней связана квадратичная форма (Ax, x).

Из линейной алгебры мы знаем, что у симметрической матрицы все собственные значения действительные.

В нашем случае условие самосопряженности (симметричности) означает, что $(\Delta u, v) = (u, \Delta v)$ или $\int\limits_\Omega \Delta u \cdot v dx = \int\limits_\Omega u \cdot \Delta v dx$

Формулы Грина

Первая формула Грина:

$$\int\limits_\Omega \Delta u \cdot v = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v dS - \int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla v) dx$$

где ν - внешняя нормаль к границе. Эта формула следует из формулы Гаусса-Остроградского $\int\limits_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_k} dx = \int\limits_{\partial\Omega} w \nu_k dS$, где ν_k - компонента вектора внешней нормали (направляющий косинус), если подставить $w = \frac{\partial u}{\partial x_k} v$

Вторая формула Грина:

$$\int\limits_\Omega (v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v) dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS$$

Вернемся к нашей задаче. Если рассматривать такие функции, что $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0$. Тогда интегралы по границам в первой и второй формулах Грина равны нулю. Поэтому $\int\limits_{\Omega}(v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v)dx = 0$, следовательно условие самосопряженности выполняется.

Для определения отрицательности необходимо посмотреть на равенство

$$(\Delta u, u) = -\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx < 0 \ \forall u \neq 0$$

Докажем первое свойства из теоремы. Пусть $\Delta u = \lambda u$ и $\Delta v = \mu v$.

Проверим действительность λ. Изначально предполагаем, что функции комплексные. Тогда

$$\lambda\|u\|^2 = (\lambda u, u) = (\Delta u, u) = (u, \Delta u) = (u, \lambda u) = \overline{\lambda}(u, u) = \overline{\lambda}\|u\|^2$$

Получили, что $\lambda = \overline{\lambda}$.

Проверим положительность. Так как $\lambda\|u\|^2 = (\Delta u, u) < 0$, то $\lambda < 0$, но в условиях задачи этот знак уже учитывается.

Докажем ортогональность системы $\{v_k(x)\}$. Рассмотрим $\lambda(u, v) = (\Delta u, v) = (u, \Delta v) = \mu(u, v)$. Для ортогональности системы собственные вектора, соответствующие различным собственным значениям, должны быть ортогональны. $\lambda \neq \mu$, поэтому $(u, v) = 0$ или $u \perp v$.

Задача про прямоугольник с предыдущего семинара

По условию $\Omega = \Pi = (0, a) \times (0, b)$, и $v_{lm} = \sin\dfrac{\pi l x}{a}\sin\dfrac{\pi m y}{b}$ - собственные функции, а собственные значения $\lambda_{lm} = \left(\dfrac{\pi l}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi m}{b}\right)^2$.

Синусы обращаются в 0 на границе области, а так как эту задачу можно рассматривать, как две задачи Штурма-Лиувилля на отрезке, решения которых ($X_l(x) = \sin\dfrac{\pi l x}{a}$ и $Y_m(y) = \sin\dfrac{\pi m y}{b}$) ортогональны друг другу и полны, то из этого следует

полнота и ортогональность $v_{lm}(x,y)$. Проверим это.
Ортогональность означает, что $(v_{lm}, v_{l'm'}) = 0$ при $l \neq l'$, $m \neq m'$, так как

$$(v_{lm}, v_{l'm'}) = \iint\limits_{\Pi} v_{lm} v_{l'm'} dxdy = \int\limits_0^a \int\limits_0^b v_{lm} v_{l'm'} dxdy = \int\limits_0^a X_l(x) X_{l'}(x) dx \int\limits_0^b Y_m(y) Y_{m'}(y) dy$$

$\int\limits_0^a X_l(x) X_{l'}(x) dx = 0$ при $l \neq l'$ и $\int\limits_0^b Y_m(y) Y_{m'}(y) dy = 0$ при $m \neq m'$.

Полнота означает, что произвольную функцию $f(x,y)$ можно разложить в ряд Фурье по функциям v_{lm}. При фиксированном y $f(x,y) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} C_l(y) X_l(x)$, где $C_l(y)$ - некоторые функции, которые можно разложить в ряд Фурье по функциям $Y_m(y)$ с коэффициентами α_{lm}. В итоге

$$f(x,y) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{lm} X_l(x) Y_m(y)$$

Задача на собственные значения

Пусть $u_{tt} = \Delta u$ в квадрате $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$. На границе $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0$. Начальные условия: $u|_{t=0} = 3 \sin x \sin 2y$ и $u_t|_{t=0} = 5 \sin 3x \sin 4y$.

Решение

Для задачи на собственные значения в квадрате собственные функции имеют вид $v_{lm}(x,y) = \sin(lx) \sin(my)$, и собственные значения $\lambda_{lm} = l^2 + m^2$.

Решение задачи методом Фурье имеет вид $u = \sum\limits_{l=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} T_{lm}(t) v_{lm}(x,y)$. Подставим этот ряд в исходное уравнение, учитывая, что $\Delta v_{lm} = -\lambda_{lm} v_{lm}$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T''_{lm} v_{lm} = -\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{lm}(t)(l^2 + m^2) v_{lm}$$

Мы получили разложение по одним и тем же функциям v_{lm}.
Приравняем коэффициенты $T''_{lm} = -(l^2 + m^2) T_{lm}$. Это уравнение гармонических колебаний, где $T_{lm} = A_{lm} \cos \sqrt{l^2 + m^2} t + B_{lm} \sin \sqrt{l^2 + m^2} t$

Теперь подставим ряд $u = \sum\limits_{l=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} T_{lm}(t) v_{lm}(x,y)$ в начальные и граничные условия:

$u|_{t=0} = \sum\limits_{l=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} A_{lm}\sin lx \sin my = 3\sin x \sin 2y.$

Тогда $A_{1,2} = 3$, остальные $A_{lm} = 0$.

$u_t|_{t=0} = \sum\limits_{l=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} B_{lm}\sqrt{l^2+m^2}\sin lx \sin my = 5\sin 3x \sin 4y.$

Тогда $B_{3,4}\cdot 5 = 5$, поэтому $B_{3,4} = 1$, остальные $B_{lm} = 0$.

Ответ к данной задаче имеет вид

$u = 3\cos\sqrt{5}t \sin x \sin 2y + \sin 5t \sin 3x \sin 4y$

Задача про прямоугольник

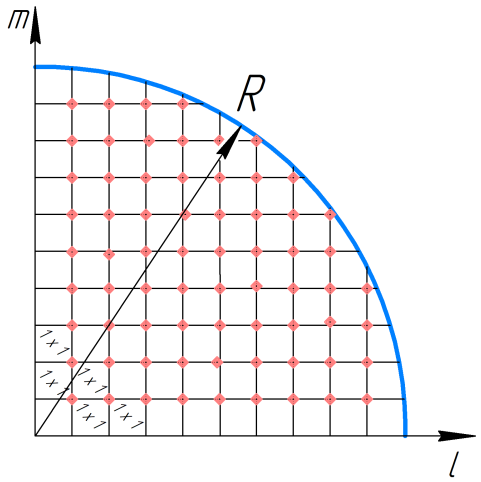
Рассмотрим последовательность собственных значений $\lambda_{lm} = l^2 + m^2$. При различных l и m могут возникнуть одинаковые (кратные) собственные значения, например, в случае симметрии $l = 1$, $m = 2$ и $l = 2$, $m = 1$. Но кратные значения встречаются не только для симметрии: $5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2 = 1^2 + 7^2 = 50$.

Рассмотрим функции $\sin x \sin 2y$ и $\sin 2x \sin y$. При применении к ним оператора Лапласа получается эта же функция, но с коэффициентом -5. Их линейная комбинация $\alpha \sin x \sin 2y + \beta \sin 2x \sin y$ образует собственное подпространство, соответствующее собственному числу $\lambda = 5$, с базисом $\sin x \sin 2y$ и $\sin 2x \sin y$. Это еще раз доказывает, что в задаче на собственные значения в прямоугольнике, мы нашли не все решения.

Рассмотрим то, насколько быстро растет последовательность собственных значений. Возьмем квадрат со стороной $(0, a)$. Возникли бы собственные значения $\left(\frac{\pi}{a}\right)^2(l^2+m^2)$. Если доказать, что последовательность $l^2 + m^2$ растет с линейной скоростью, то и $\left(\frac{\pi}{a}\right)^2(l^2+m^2)$ будет расти линейно (быстрее или медленнее в зависимости от значения a).

Рассмотрим область $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Тогда $\forall k$ выполняется свойство $\lambda_k^1 > \lambda_k^2$ (меньшей области соответствует большее собственное значение). Если рассмотреть область Ω, такую, что $\Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2$, где Ω_1, Ω_2 - квадратные области с разными сторонами, то собственные значения Ω лежат между собственными значениями Ω_1 и Ω_2. Доказав линейность изменения последовательности собственных значений для квадрата, мы получили, что $\forall \Omega \subset \mathbb{R}^2$ $\lambda_k \sim c \cdot k$ при $k \to +\infty$.

Посчитаем теперь количество элементов (мощность) во множестве $\{\lambda_k < R^2\}$, где R - произвольное число.



Для этого нарисуем график, на котором каждой точкой пересечения обозначены собственные значения. Нарисуем окружность радиуса R. Количество целочисленных элементов решетки, то есть $l^2 + m^2 < R^2$, можно оценить через площадь этого графика. Каждой точке соответствует квадрат размера 1×1. Поэтому мощность $\{\lambda_k < R^2\} \approx \dfrac{\pi}{4}R^2$. Это означает, что λ с номером, примерно равным $\dfrac{\pi}{4}R^2$, примерно равно R^2. Тогда $\lambda_k \approx \dfrac{4}{\pi}k$. Следовательно λ_k растут линейно.

3. Семинар 3

Задача о свободных колебаниях прямоугольной мембраны

Решить задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембраны $\Pi = (0,p) \times (0,q)$, если $u|_{t=0} = Axy(p-x)(q-y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$ и $u|_{\partial\Pi} = 0$.

Уравнение колебаний мембраны - волновое уравнение

$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy})$, где $u = u(x,y,t)$

Решение

Собственные функции вдоль оси Ox:

$v_{km} = \sin\dfrac{\pi kx}{p}\sin\dfrac{\pi my}{q}$ и $\Delta v_{km} = -\lambda_{km}v_{km}$.

Тогда $\lambda_{km} = \left(\dfrac{\pi k}{p}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi m}{q}\right)^2$.

Решение задачи ищется в виде разложения по этим собственным функциям

$u(t,x,y) = \sum\limits_{k,m} v_{km}T_{k,m}(t)(x,y)$

и T_{km} удовлетворяет уравнению $T''_{km} = -a^2\lambda_{km}T_{km}$. Тогда

$T_{km} = A_{km}\sin\omega_{km}t + B_{km}\cos\omega_{km}t$ - гармонические колебания с частотами $\omega_{km} = a\sqrt{\lambda_{km}}$.
Подставляя начальные условия $u|_{t=0} = \sum T_{km}(o)v_{km}$ и $u_t|_{t=0} = \sum T'_{km}(0)v_{km}$. Тогда $T_{km} = B_{km}$ и $T'_{km} = \omega_{km}A_{km}$.

Запишем ответ. В нем будут участвовать коэффициенты разложения начального условия $u|_{t=0} = Axy(p-x)(q-y)$ по синусам. Воспользуемся тем, что разложение функции выглядит следующим образом:

$$x(l-x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{8l^2}{\pi^3(2j+1)^3}\sin\frac{\pi(2j+1)x}{l}.$$

Тогда

$$u(t,x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{64Ap^2q^2}{\pi^6(2i+1)^3(2j+1)^3}\cos\left[a\sqrt{\left(\frac{\pi(2i+1)}{p}\right)^2+\left(\frac{\pi(2j+1)}{q}\right)^2}t\right]\sin\frac{\pi(2i+1)x}{p}\sin\frac{\pi(2j+1)y}{q}$$

Задача о температуре в тонкой квадратной пластине

Дана тонкая квадратная пластина П со сторонами $(0,l)$, для которой известно начальное распределение температуры $u|_{t=0}=u_0(x,y)$ и $u|_{\partial\Pi}=0$. Необходимо найти температуру в любой точке пластины в момент $t>0$.

Решение

Запишем уравнение теплопроводности $u_t=a^2\Delta u$.

Это задача на собственные значения с функциями $v_{km}=\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi my}{l}$. Собственные значения $\lambda_{km}=\left(\frac{\pi k}{p}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{q}\right)^2$.

Мы ищем решение в виде суммы $u=\sum\limits_{km}T_{km}(t)v_{km}$.

Чтобы найти $T_{km}(t)$ необходимо подставить ряд в уравнение теплопроводности:

$$T'_{km}=-a^2\lambda_{km}T_{km}.$$

Тогда

$$T_{km}=C_{km}e^{-a^2\lambda_{km}t},$$

где коэффициенты C_{km} находятся из начальных условий. $T_{km}(0)=C_{km}$, поэтому $u_0(x,y)=\sum C_{km}v_{km}$.

В итоге, ответ имеет вид

$$u(t,x,y) = \sum_{km=1}^{\infty} C_{km} e^{-a^2 \frac{\pi^2}{l^2}(k^2+m^2)t} \sin\frac{\pi k x}{l} \sin\frac{\pi m y}{l}$$

где C_{km} - коэффициенты разложения функции $u_0(x,y)$. Чтобы их найти, необходимо скалярно домножить (то есть домножить и проинтегрировать) $u_0(x,y) = \sum C_{km} v_{km}$ на v_{km}. Тогда

$$C_{km} = \frac{1}{\|v_{km}\|^2} \int\limits_0^l \int\limits_0^l u_0(x,y) \sin\frac{\pi k x}{l} \sin\frac{\pi m y}{l} dx dy,$$

причем

$$\|v_{km}\|^2 = \int\limits_0^l \int\limits_0^l v_{km}^2 dx dy = \int\limits_0^l \sin^2\frac{\pi k x}{l} dx \int\limits_0^l \sin^2\frac{\pi m y}{l} dy = \frac{l^2}{4}.$$

Задача на собственные значения в круге

В круге функция $v = v(r,\varphi)$. Возьмем оператор Лапласа этой функции и посмотрим, когда оператор переводит функцию v почти в нее саму, то есть $\Delta v = -\lambda v$ при $r < \rho$, где ρ - радиус круга. На границе круга $v|_{r=\rho} = 0$.

Решение

Собственные функции находятся из метода Фурье. Оператор Лапласа в полярных координатах имеет вид $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$.
Собственные функции раскладываются как $v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Тогда, подставляя разложение в уравнение $\Delta v = -\lambda v$, получим

$$R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = -\lambda R\Phi$$

Попробуем разделить переменные, домножив уравнение на $\frac{r^2}{R\Phi}$. Тогда получим выражение

$$\frac{r^2R'' + rR' + \lambda r^2 R}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

Слева и справа получили выражения, зависящие от разных переменных. Они равны в любой точке, когда они равны константе. Обозначим ее за ν.

Рассмотрим правую часть $\Phi'' + \nu\Phi = 0$. Здесь краевым условием является периодичность $\Phi(2\pi + \varphi) = \Phi(\varphi)$. Следовательно Φ_n - синусы и косинусы с целыми частотами $n\varphi$. Тогда $\nu = n^2$, либо $\nu = 0$, когда $\Phi'' = 0$ ($\Phi_0 \equiv 1$).
Тогда

$$\frac{r^2R'' + rR' + \lambda r^2 R}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = n^2, \text{ где } n = 0, 1, 2, ...$$

Рассмотрим теперь левую часть. $r^2R'' + rR' + (\lambda r^2 - n^2)R = 0$. Это линейное уравнение с переменными коэффициентами. В нем два параметра: λ и r.

Сделаем замену $x = \sqrt{\lambda}r$ и переобозначим $R(r) = y(x)$. Тогда

$$r\frac{d}{dr} = x\frac{d}{dx} \text{ и } r^2\frac{d^2}{dr^2} = x^2\frac{d^2}{dx^2}$$

и, следовательно, уравнение примет вид

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

Когда $x \to 0$, то, оставляя x при y, получается уравнение Эйлера $x^2y''+xy'-n^2y = 0$ с решениями x^n и x^{-n}. Эти решения неограниченны при $x \to 0$. В пространстве решений этого уравнения возникают ограниченные, неограниченные и нулевые решения. Тогда, так как пространство двумерное, все ограниченные решения образуют одномерное пространство, а все остальные будут неограниченные. В одномерном пространстве выбираем функцию $J_n(x)$ - ограниченное при $x \to 0$ решение нашего уравнения. Эта функция единственна с точностью до умножения на константу.

Возвращаясь к переменной r получим:

$$R(r) = J_n(\sqrt{\lambda}r) \text{ и } R(\rho) = 0.$$

Тогда $J_n(\sqrt{\lambda}\rho) = 0$. Это функция Бесселя, нули которой мы будем обозначать как

$\mu_k^{(n)}$ - k-ый положительный ноль функции Бесселя $J_n(x)$.

В итоге $\sqrt{\lambda}\rho = \mu_k^{(n)}$ и $\lambda = \left(\dfrac{\mu_k^{(n)}}{\rho}\right)^2$, а собственные функции $v_{nk} = J_n\left(\dfrac{\mu_k^{(n)} r}{\rho}\right) \begin{matrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{matrix}$

4. Семинар 4

Функции Бесселя

Вернемся к задаче на собственные значения в круге. Мы получили функции Бесселя $v_{nk} = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{\rho}\right) \begin{matrix}\cos n\varphi \\ \sin n\varphi\end{matrix}$ с нулями $\mu_k^{(n)}$. И функции $v_{0k} = J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{\rho}\right)$.

В задаче мы получили уравнение $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$, которое называется уравнением Бесселя.

Решением этого уравнения являются функции $J_n(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(j+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j+n}$ - определение функции Бесселя.

В уравнении Бесселя при $x \to 0$ получается решение $C_1x^n + C_2x^{-n}$. x^{-n} неограниченно в нуле, поэтому мы его не рассматриваем. Поэтому ищем решение, близкое к x^n. Если подставить $y = x^n$ в качестве решения, то в уравнении останется слагаемое x^{n+2}. Чтобы оно сократилось, необходимо изменить решение $y = x^n + ax^{n+2}$. Подставив измененное решение в уравнение Бесселя мы получим, что $a = -\frac{1}{4n+4}$. Тогда решение можно записать в виде $y = x^n - \frac{1}{n+1}x^n\left(\frac{x}{2}\right)^2$. Это первые два слагаемых в разложении функции Бесселя с точностью до умножения на константу $\frac{1}{n!2^n}$.

При $x \to 0$ функция Бесселя $J_n(x) \sim cx^n$. Посмотрим, что будет при $x \to \infty$. Сделаем замену, после которой уравнение Бесселя приведется к виду $z'' + ...z = 0$, например, $y = a(x)z(x)$. Тогда $x^2az'' + (2x^2a' + ax)z' + ...z = 0$. Необходимо, чтобы $2x^2a' + a$ было равно нулю, или $\frac{da}{dx} = -\frac{a}{2x}$.

Сделаем замену $y(x) = \frac{z(x)}{\sqrt{x}} = z(x)x^{-\frac{1}{2}}$.

Тогда:

$y' = z'x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}zx^{-\frac{3}{2}}$ и $y'' = z''x^{-\frac{1}{2}} - z'x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}zx^{-\frac{5}{2}}$.

Подставляя это в уравнение Бесселя, получим:

$$z''x^{\frac{3}{2}} - z'x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}zx^{-\frac{1}{2}} + z'x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}zx^{-\frac{1}{2}} + zx^{\frac{3}{2}} - n^2zx^{-\frac{1}{2}} = 0$$

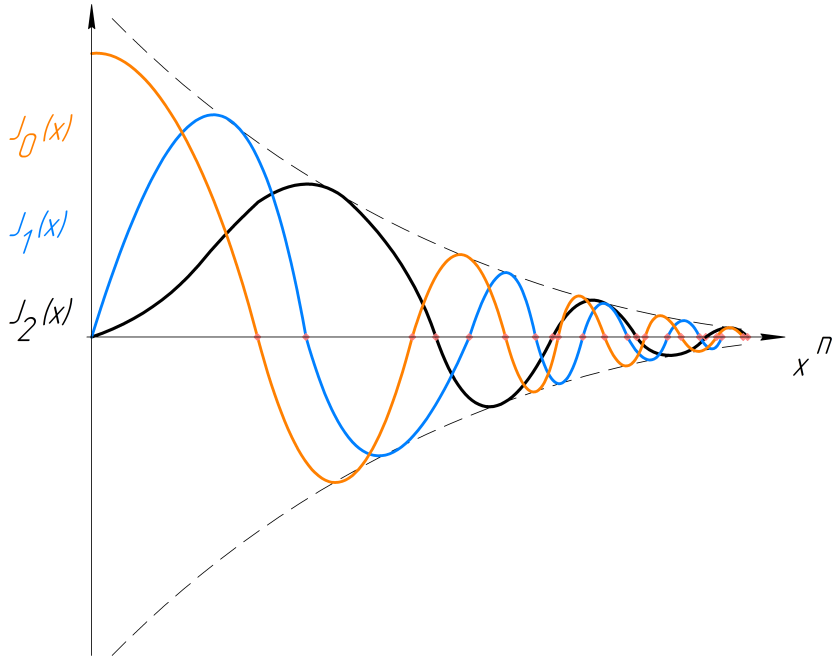
Выполнив преобразования, получим $z'' + (1 + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{x^2})z = 0$. При $x \to \infty$ множитель $(1 + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{x^2}) \to 1$, поэтому решения уравнения $z'' + z = 0$ синусы и косинусы.

Вспомним теорему Штурма. Если есть две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, которые удовлетворяют уравнениям $y_1'' + Q_1(x)y_1 = 0$ и $y_2'' + Q_2(x)y_2 = 0$, и нам известно, что $Q_1(x) > Q_2(x)$, то между нулями функции $y_1(x)$ содержится хотя-бы один ноль функции $y_2(x)$. Тогда, так как на бесконечности множитель $(1+\frac{\frac{1}{4} - n^2}{x^2})$ содержится между $1-\varepsilon$ и $1+\varepsilon$, $\forall\varepsilon$, то нули уравнения $z''+(1+\frac{\frac{1}{4} - n^2}{x^2})z = 0$ должны встречаться реже чем нули уравнения $z'' + (1 + \varepsilon)z = 0$ и чаще чем нули $z'' + (1 - \varepsilon)z = 0$. Они встречаются соответственно через $\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}}$ и $\frac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}}$. Это значит, что при больших x расстояние между корнями стремится к π.

Попробуем нарисовать функцию Бесселя. Функция $z(x)$ на бесконечности напоминает синусы или косинусы с частотой, сколь угодно близкой к единице. Рассмотрим $J_2(x)$. В нуле она ведет себя как x^2. При $x \to +\infty$ функция ведет себя как $C\frac{\sin(x-\varphi)}{\sqrt{x}}$. При увеличении x функция начинает колебаться между значениями синусов и уменьшать расстояние между нулями.

Задача о свободных колебаниях круглой мембраны

Решить задачу о свободных колебаниях однородной круглой мембраны радиуса R, закрепленной по краю (то есть $u|_{r=R} = 0$), если начальное отклонение определяется равенством $u|_{t=0}A_0J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}r}{R}\right)$, а начальная скорость $u_t|_{t=0} = 0$, где $\mu_k^{(0)}$ - положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0$.



Решение

Это задача на волновое уравнение $u_{tt} = a^2\Delta u$, где $u = u(t, r, \varphi)$. Решение нашей задачи необходимо раскладывать в ряд Фурье с функциями $T_{nk}(t)$ по собственным функциям v_{nk}. Подставив $u = \sum T_{nk}v_{nk}$ в волновое уравнение, получим $T''_{nk} = -a^2\lambda_{nk}T_{nk}$. Решением этого уравнения являются синусы или косинусы с некоторыми коэффициентами.

Запишем тогда разложение функции u:

$$u = A_0 \cos\left(a\frac{\mu_k^{(0)}}{R}t\right) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}r}{R}\right).$$

Рассмотрим теперь задачу с другими начальными условиями.

В этой задаче $u|_{t=0} = F(r)$ и $u_t|_{t=0} = f(r)$. Решение также имеет вид $u = \sum T_{nk}v_{nk}$, где T_{nk} - линейные комбинации синуса и косинуса с некоторыми коэффициентами. Разложим в ряд начальные условия: $u|_{t=0} = F(r) = \sum \alpha_{nk}v_{nk}$ и $u_t|_{t=0} = f(r) = \sum \beta_{nk}v_{nk}$. Обратим внимание на то, что функции F и f зависят только от радиуса. Выпишем коэффициенты разложения:

$$\alpha_{nk} = \frac{\iint\limits_{r<R} F(r) v_{nk} d\vec{x}}{\iint\limits_{r<R} v_{nk}^2 d\vec{x}}.$$

Так v_{nk} - функции, которые являются произведением функции радиуса на функцию от угла, а $F(r)$ зависит только от радиуса. Тогда, перейдя к полярным координатам, можно расписать интеграл по кругу $r < R$ на интегралы по радиусу и по углу.

$$\iint\limits_{r<R} F(r) v_{nk} d\vec{x} = \iint\limits_{r<R} F(r) v_{nk} r dr d\varphi = \int\limits_0^R ... dr \int\limits_0^{2\pi} \begin{matrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{matrix} \, d\varphi = 0.$$

Значит, что все $\alpha_{nk} = 0$, когда $n \neq 0$. Тогда, при $n = 0$, все индексы nk превращаются в $0k$ и интеграл по углу превращается в интеграл от 1 и будет равен 2π.

Тогда $\alpha_{0k} = \dfrac{\int\limits_0^R F(r) J_0\left(\dfrac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) r dr}{\int\limits_0^R J_0^2\left(\dfrac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) r dr}.$

Рассмотрим случай, когда $u_t|_{t=0} = 0$. Тогда решением задачи будет функция

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{0k} \cos \frac{a\mu_k^{(0)} t}{R} J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right)$$

5. Семинар 5

Обобщенные функции

Мы в основном будем говорить о дельта-функциях Дирака $\delta(x)$ и о том, что такое фундаментальное решение оператора Лапласа, то есть такая функция $E(x)$, что $\Delta E(x) = \delta(x)$.

У дельта-функции есть физическое определение: функция, которая везде, кроме нуля, равна нулю, а в нуле равна $+\infty$, то есть $\delta(x) = \begin{cases} 0, \ x \neq 0 \\ +\infty, \ x = 0 \end{cases}$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$.

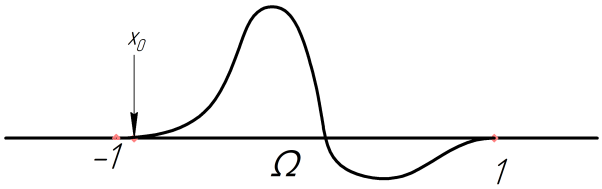
Пробные (основные) функции

Начнем с пространства пробных функций. Будем его обозначать $D(\Omega) = D(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\Omega)$. C_0^∞ означает, что функции бесконечно-дифференцируемые и финитные, то есть их носитель $supp\ \varphi = \overline{\{x|\ \varphi(x) \neq 0\}}$ компактен в области Ω.

Например, когда $\Omega = \mathbb{R}^n$, то функция $\varphi(x) = 0$ при $|x| > R$, то есть функция равна нулю вне шара радиуса R. Тогда $supp\ \varphi$ лежит внутри шара, и шар является его компактным носителем.

Если Ω произвольна, то говорят, что $\exists$ такое компактное множество $K \subset \Omega$, что $\varphi(x) = 0$ при $x \in \Omega \setminus K$.

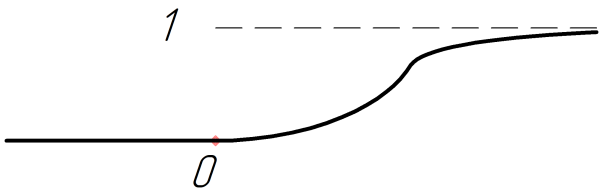
Попробуем понять, что из себя представляет функция $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$.
Возьмем одномерное пространство и представим область Ω как интервал $(-1, 1)$. Необходимо придумать функцию, которая равна нулю в окрестности границы интервала. Функции класса C_0^∞ можно продлить нулем до функций во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, поэтому $C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ или, если $\Omega_1 \subset \Omega_2$, то $C_0^\infty(\Omega_1) \subset C_0^\infty(\Omega_2)$.
Возьмем точку на интервале, которую можно описать как супремум точек, до которых функция является тождественным нулем. В этой точке для функции можно записать формулу Тейлора, но нельзя разложить эту функцию в ряд Тейлора.



Формулу Тейлора можно писать для любой бесконечно дифференцируемой точки $\varphi(x) = o(|x - x_0|^n)$ при $x \to x_0$ и $\forall n$, так как все производные в сумме равны нулю.

То есть нам необходимо придумать функцию, для которой с одной стороны верна формула Тейлора, но ее нельзя разложить в ряд Тейлора. С другой стороны, эти функции класса C^∞, но не вещественно-аналитические.

Попробуем записать функцию, которая равна нулю на интервале до нуля, а затем принимает какое-то положительное значение, причем ноль функции бесконечного порядка. Эта функция равна $\eta(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, \ x > 0 \\ 0, \ x \leqslant 0 \end{cases}$ Попробуем нарисовать её график.

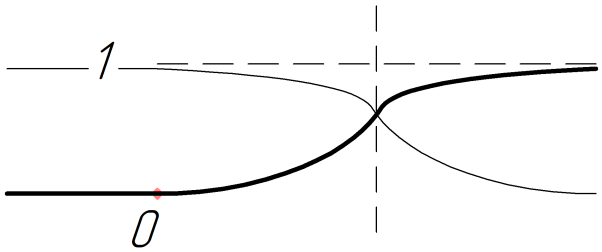


При $x \to +0$ $-\dfrac{1}{x} \to -\infty$, а $e^{-\frac{1}{x}} \to 0$. Значит эта функция непрерывная. Проверим, является ли она бесконечно-дифференцируемой. $\eta'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \dfrac{1}{x^2}$ при $x > 0$. При $x \to +0$ получается неопределенность. Экспонента стремится к нулю быстрее, чем $\dfrac{1}{x^2}$ стремится к бесконечности, поэтому $\eta'(x) = 0$ при $x \to +0$.

Рассмотрим общий случай. При дифференцировании $\eta(x)$ получается выражение с экспонентами, умноженными на некоторые многочлены $P(\dfrac{1}{x})$ степени $2k$. Поэтому, при $x \to +0$, все производные равны нулю.

Рассмотрим теперь пример функции на интервале $(-1, 1)$. Возьмем нашу функцию $\eta(x)$ и передвинем точку ноль в точку $-1 + \varepsilon$, так как она должна обращаться

в ноль в окрестности границы. Тогда получится функция $\eta(x+1-\varepsilon)$. Возьмем симметричную относительно вертикальной оси функцию $\eta(-x+1-\varepsilon)$ и перемножим полученные две функции.



Аргументы этих функций положительны, когда $x > -1+\varepsilon$ и $x < 1-\varepsilon$.

Рассмотрим пример многомерной функции $x \in \mathbb{R}^n$ в шаре единичного радиуса:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-|x|^2}}, \ |x| < 1 \\ 0, \ |x| > 1 \end{cases}$$

Так как $|x|^2 = x_1^2 + ... + x_n^2$, то функция бесконечно-дифференцируема.

Необходимо проверить, что происходит с функцией при $|x| = 1$. При $|x| \to 1-0$ $1-|x|^2 \to +0$ и тогда $\dfrac{-1}{1-|x|^2} \to -\infty$

Мы можем брать не только функции $\varphi(x)$, но и функции вида $\Phi(x)\varphi(x)$, где $\Phi(x)$ - произвольная бесконечно-дифференцируемая функция.

Когда мы говорим о пространстве $D(\Omega)$, то необходимо рассматривать сходимость. Последовательность $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$ при $n \to +\infty$, когда:

1) $\forall \varphi_n(x)$ $\exists$ компактное множество $K \subset \Omega$, такое что $\varphi_n(x) = 0$ при $x \notin K$ и $\forall n$.

2) $D^\alpha \varphi_n \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ (любая производная φ_n равномерно сходится к соответствующей производной функции φ) в Ω (в $\mathbb{R}^n$).

Пространство обобщенных функций

Пространство обобщенных функций обозначается D' - сопряженное пространство к D. Функции $f \in D'$ - линейные непрерывные функционалы над D. Значит, что $\forall \varphi \in D$ определено действие f на φ: (f, φ) - число.

1) Линейный: $(f, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1(f, \varphi_1) + \lambda_2(f, \varphi_2)$

2) Непрерывный: $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$, то $(f, \varphi_n) \to (f, \varphi)$ при $n \to +\infty$

Регулярные обобщенные функции

Рассмотрим примеры обобщенных функций, а точнее класс регулярных обобщенных функций. По обычной функции $f(x)$ можно построить обобщенную. Для этого необходимо определить действие: $(f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$.

Функция $f(x)$ должна быть непрерывна, тогда такой интеграл $\exists$.

Можно также взять в качестве $f(x)$ класс интегрируемых по Лебегу функций $L_1(\mathbb{R}^n)$. Они могут быть разрывными или неограниченными.

Учитывая свойства пробных функций, достаточно того, чтобы $f(x) \in L_{1loc}(\mathbb{R}^n)$. Это пространство функций, интегрируемых по Лебегу, в окрестности любой точки (на любом компакте).

Сингулярные обобщенные функции

В этом разделе мы будем говорить о дельта-функции Дирака. Это линейный непрерывный функционал.
Определим его действие на пробную функцию $(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0)$.

Определим теперь условие сходимости в D', то есть $f_n \overset{D'}{\rightrightarrows} f$ при $n \to +\infty$.
Это называется $*$-слабая сходимость в сопряженном пространстве. Это означает, что $\forall \varphi \in D\ (f_n, \varphi) \to (f, \varphi)$.

Рассмотрим плоскость. Слабая сходимость означает, что если какая-то последовательность точек сходится к одной, то и проекции этих точек на оси сходятся.

Различие между слабой и $*$-слабой сходимостью состоит в том, что если мы рассмотрим пространство E и два сопряженных E' и E'', то в пространстве E' сходимость слабая, когда $\varphi \in E''$, а $*$-слабая сходимость, когда $\varphi \in E$. Так как $E \subset E''$, то слабая сходимость сильнее чем $*$-слабая.

6. Семинар 6

Сходимость обобщенных функций

Возьмем последовательность $f_n = \sin nx$. В обычном смысле нельзя найти значение, к которому она сходится при $n \to +\infty$, но в смысле обобщенных функций $\sin nx \xrightarrow{D'} 0$ при $n \to +\infty$.

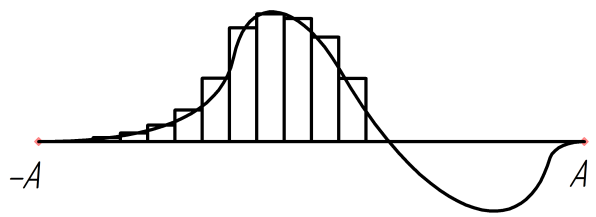
Чтобы доказать это, необходимо показать, что $\forall$ фиксированного $\varphi \in D(\mathbb{R})$ $(f_n, \varphi) \to (0, \varphi)$, то есть $\int\limits_{\mathbb{R}} \sin nx\varphi(x) \to 0$ при $n \to +\infty$.

Интеграл мы рассматриваем не по $\mathbb{R}$, а по ограниченному множеству, то есть $\int\limits_{-A}^{A}$, так как функция $\varphi(x)$ финитна.

Возьмем в качестве $\varphi(x) = \begin{cases} M, \ x \in [\alpha, \beta] \\ 0, \ x \notin [\alpha, \beta] \end{cases}$

Тогда $M \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sin nx dx = \dfrac{M}{n}(\cos \alpha n - \cos \beta n) \to 0$ при $n \to +\infty$, так как $|(\cos \alpha n - \cos \beta n)| \leqslant 2$.

Мы выяснили, что происходит, если $\varphi(x)$ - "ступенька" высоты M. Тогда заменим нашу исходную функцию на ступенчатую $\varphi_N(x)$, где N - количество ступенек, и $|\varphi_N(x) - \varphi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2A}$ $\forall x$.



Посмотрим, насколько сильно различаются $\int\limits_{-A}^{A} \sin nx\varphi(x)dx$ и $\int\limits_{-A}^{A} \sin nx\varphi_N(x)dx$. В итоге

$$\left| \int\limits_{-A}^{A} \sin nx\varphi(x)dx - \int\limits_{-A}^{A} \sin nx\varphi_N(x)dx \right| \leqslant \int\limits_{-A}^{A} 1|\varphi(x) -_N (x)| \leqslant \varepsilon dx \qquad (*)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Следовательно они отличаются малой величиной.

Так как $\varphi_N(x)$ - ступенчатая функция, то ее можно разбить на сумму ступенек. Тогда $\int\limits_{-A}^{A} \sin nx\varphi_N(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{N} M_k \int\limits_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} \sin nxdx$, где M_k - высота k-ой ступеньки, а $\alpha_k - 1$ и α_k соответственно левая и правая граница k-ой ступеньки. Но все слагаемые в этой сумме стремятся к нулю, так как $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \sin nxdx \to 0$, следовательно при достаточно больших n

$M_k \int\limits_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} \sin nxdx < \dfrac{\varepsilon}{N}$ и $\sum\limits_{k=1}^{N} M_k \int\limits_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} \sin nxdx < \varepsilon$.

Тогда, вернувшись к формуле $(*)$, можно увидеть, что $\int\limits_{-A}^{A} \sin nx\varphi(x)dx < 2\varepsilon$. Это и есть определение сходимости.

Задачи на обобщенные функции и сходимость

1. Заданы функции $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x| \leqslant \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$, где $\varepsilon \to +0$.

Площадь графика функции $f_\varepsilon(x)$ равна 1, так как это прямоугольник со сторонами 2ε и $\dfrac{1}{2\varepsilon}$. Тогда можем предположить, что при $\varepsilon \to +0$ $f_\varepsilon(x) \to \delta(x)$.

Необходимо доказать, что $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ $(f_\varepsilon, \varphi) \to (\delta(x), (x)) = \varphi(0)$ при $\varepsilon \to +0$.

Мы знаем, что $(f_\varepsilon, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_\varepsilon \varphi dx = \dfrac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x)dx =$ среднему значению φ на $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Если φ - непрерывная функция, то среднее значение $\varphi(x) \to \varphi(0)$ при $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим функцию $\dfrac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}$. Разделим числитель и знаменатель на ε^2 и рассмотрим другую функцию $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{dx}{\pi(1+x^2)} = \pi$. Тогда площадь под графиком функции $f(x)$ равна 1, и можно представить $\dfrac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}$

как $\frac{1}{\varepsilon}f_\varepsilon(\frac{x}{\varepsilon})$. Это дельта-образная последовательность, так как $nf_n(x) \to \delta(x)$ при $n \to +\infty$.

2. Имеются функции $\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$. Возьмем $\varepsilon = 1$, тогда $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}$. Интеграл по функции $f(x)$ равен 1.

Представим $\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$ в виде $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}f(\frac{x}{\varepsilon})$. Далее задача решается аналогично первому пункту.

3. Теперь посмотрим к чему сходится $\frac{1}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}f(\frac{x}{\varepsilon})$, где $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Так как $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}dx = \pi$, то этот интеграл не является абсолютно-сходящимся.

Посмотрим, как действует $(\frac{1}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon}, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon}\varphi(x)dx = \left[\begin{array}{c} \frac{x}{\varepsilon} = y \\ \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \end{array}\right] = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin y}{y}\varphi(\varepsilon y)dy.$

При $\varepsilon \to 0$ $\varphi(\varepsilon y) \to \varphi(0)$. Тогда $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin y}{y}\varphi(\varepsilon y)dy \to \pi\varphi(0)$.

Соответственно $\frac{1}{\varepsilon}f(\frac{x}{\varepsilon}) \to \pi\delta(x)$.

Действия над обобщенными функциями

1. Взятие линейной комбинации. f_1 и f_2 - обобщенные функции.
Тогда, чтобы определить их линейную комбинацию, необходимо определить действие $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \varphi) = \lambda_1(f_1, \varphi) + \lambda_2(f_2, \varphi)$.

2. Умножение на бесконечно-дифференцируемые функции $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. $f(x)$ - обобщенная функция.
Тогда $a(x)f(x)$ определяется действием $(a(x)f(x), \varphi(x)) = (f(x), a(x)\varphi(x))$.

3. Линейная замена переменных. Хотим вместо $f(x)$ определить $f(Ax + b)$, где A -

невырожденная $n \times n$ матрица, а b - вектор из $\mathbb{R}^n$. Определить такую обобщенную функцию - значит определить действие
$(f(Ax+b)\varphi(x)) = \dfrac{1}{|det\ A|}(f(x), \varphi(A^{-1}(x-b)))$.
Выделим 2 частных случая линейной замены:

1) Сдвиг: $A = E$, $b = -x_0$. Получается функция $f(x - x_0)$. Она действует таким образом: $(f(x-x_0)\varphi(x)) = (f(x), \varphi(x+x_0))$

2) Растяжение: $A = k$ - скалярная матрица, $b = 0$. Она действует таким образом: $(f(kx), \varphi(x)) = \dfrac{1}{|k|^n}(f(x), \varphi(\frac{x}{k}))$.

4. Дифференцирование. $f(x)$ - обобщенная функция. Определить частную производную $f(x)$ по x_k - значит определить действие $(\dfrac{\partial}{\partial x_k} f(x), \varphi(x)) = -(f(x), \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k})$.

В общем случае, когда $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} .... \partial x_n^{\alpha_n}}$
$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \varphi)$, где $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Рассмотрим $f \in C^1$. Ее можно рассматривать как регулярную обобщенную функцию. Тогда производную этой функции $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ можно посчитать по формуле интегрирования по частям:
$\int\limits_\Omega \dfrac{\partial f}{\partial x_k}\varphi dx = \int\limits_{\partial\Omega} f\varphi\mu_k - \int\limits_\Omega f\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k}dx$, где $f, \varphi \in C^1(\overline{\Omega})$, $\mu_k = \cos(\mu, \hat{x}_k)$ - направляющий косинус.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

7. Семинар 7

Растянутая дельта-функция

Дельта-функция - функционал, который определяется как действие на пробную функцию $(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0)$.

Рассмотрим $\delta(2x)$.

Эта функция определяется как $(\delta(kx), \varphi(x)) = \dfrac{1}{|k|^n}(\delta(x), \varphi(\frac{x}{k})) = \dfrac{1}{|k|^n}\varphi(0)$. Выражение $\dfrac{1}{|k|^n}\varphi(0)$ можно записать как $\dfrac{1}{|k|^n}(\delta(x), \varphi(x))$.

Тогда $\delta(kx) = \dfrac{1}{|k|^n}\delta(x)$.

Из последнего выражения можно понять некоторые свойства дельта-функции. Например, в пространстве размерности $n = 1$ $\delta(x)$ - четная функция.

Дельта-функция - однородная функция степени однородности $-n$, то есть $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\delta(\lambda x) = \lambda^{-n}\delta(x)$.

При дифференцировании однородной функции степень однородности понижается на единицу.

Сдвинутая дельта-функция

Сдвинутая дельта-функция $\delta(x - x_0)$ действует так:
$(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x + x_0)) = \varphi(x_0)$.

Производная дельта-функции

По определению производной обобщенной функции $(\delta'(x), \varphi(x)) = -(\delta(x), \varphi'(x)) = -\varphi'(0)$.
Вторая производная дельта-функции дает значение $\varphi''(0)$. В общем случае $(\delta^{(k)}, \varphi(x)) = (-1)^k\varphi^{(k)}(0)$.

Если размерность пространства $n \neq 1$, то возникают частные производные, которые обозначаются оператором D^α.
Тогда $(D^\alpha \delta(x), \varphi(x)) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(0)$.

Рассмотрим произведение $x\delta(x)$. В этом случае x одномерный, и $(x\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(x), x\varphi(x)) = 0 \cdot \varphi(0) = 0$.
Тогда получаем свойство $x\delta(x) = 0$.
Если $\delta(x)$ умножить на произвольную бесконечно-дифференцируемую функцию $a(x)$, то $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$, так как $(a(x)\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(x, a(x)\varphi(x))) = a(0)\varphi(0)$.

Если размерность пространства $n \neq 1$, то $x_1\delta(x) = 0$, где x_1 - одна из координат.

Определим $x\delta'(x)$. Подействуем на пробную функцию и получим $(x\delta'(x), \varphi(x)) = (\delta'(x), x\varphi(x)) = -(\delta(x), (x\varphi(x))') = -(\delta(x), \varphi(x) + x\varphi'(x)) = -\varphi(0) + 0 \cdot \varphi'(0) = -\varphi(0) = (-\delta(x), \varphi(x))$.
Значит $x\delta'(x) = -\delta(x)$.

Задача на проверку функции Лейбница

Пусть $f \in D'$, $a(x)^\infty$. Проверим, верно ли, что $(af)' = a'f + af' \in D'$.

Посмотрим действие на пробную функцию.
В левой части: $((af)', \varphi) = -(af, \varphi') = -(f, a\varphi')$.
В правой части: $(a'f, \varphi) = (f, a'\varphi)$ и $(af', \varphi) = (f', a\varphi) = -(f, a'\varphi + a\varphi')$.
Тогда, если сложить $(f, a'\varphi)$ и $-(f, a'\varphi + a\varphi')$, то получим $-(f, a\varphi')$.

Пример решения задачи с использованием дельта-функции

Пусть размерность пространства $n = 1$. Посмотрим, как действует $\delta'(2x)$.

Если писать по определению, то $(\delta'(2x), \varphi(x)) = -(\delta(2x), \varphi'(x)) = -\dfrac{1}{2}\varphi'(0)$. Проверим, верно ли это.

$\delta(x)$ - однородная функция степени однородности -1, и при дифференцировании степень понижается на единицу. Тогда $\delta'(x)$ - степени однородности -2. Следовательно $\delta'(2x) = \dfrac{1}{4}\delta'(x)$, поэтому можем переписать $(\delta'(2x), \varphi(x))$ как $\dfrac{1}{4}(\delta'(x)\varphi(x)) = -\dfrac{1}{4}\varphi'(0)$.

Мы получили два разных значения при одном и том же действии. Правильным будет ответ $(\delta'(2x), \varphi(x)) = -\dfrac{1}{4}\varphi'(0)$.

Посмотрим, почему ответ $-\dfrac{1}{2}\varphi'(0)$ является неверным.
Посмотрим, как получается функция $\delta'(2x)$. К функции $\delta(x)$ применяются два действия: взятие производной и растяжение. Последовательность действий такая, что сначала берется производная, потом растяжение.

Последовательность действий имеет значение. Рассмотрим функцию $\sin x$. Если сначала взять производную, а потом растяжение $x \to 2x$, то получится функция $\cos 2x$, а если выполнить действия в другом порядке, то получится функция $2\cos 2x$.

В нашем случае, необходимо выполнять действия в такой последовательности:
$(\delta'(2x), \varphi(x)) = \dfrac{1}{2}(\delta'(x), \varphi(\frac{x}{2})) = -\dfrac{1}{2}(\delta(x), \varphi'(\frac{x}{2})) = -\dfrac{1}{4}\varphi'(0)$.

Из этой задачи можем получить общую формулу:
если $\delta(\lambda x) = \dfrac{1}{|\lambda|^n}\delta(x)$, то $\dfrac{\partial}{\partial x_1}\delta(\lambda x) = \dfrac{1}{|\lambda|^{n+1}}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\delta(x)$.

Задача на дифференцирование разрывных функций

Пусть $f \in C^1(x \leqslant x_0) \bigcap C^1(x \geqslant x_0)$, но в точке x_0 - разрыв. Скачок функции в точке x_0: $[f]_{x_0} = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$.

Доказать, что $f' = \{f'\} + [f]_{x_0}\delta(x - x_0)$, где $\{f'\}$ - регулярная составляющая производной, то есть производная функции f там, где она существует (везде, кроме $x = x_0$)

Решение

Функцию f можно рассматривать, как функцию из L_{1loc} (интегрируема по Лебегу в окрестности любой точки), то есть как на регулярную обобщенную функцию.

Посмотрим, как f' действует на пробную функцию:
$(f', \varphi) = -(f, \varphi') = \int\limits_{\mathbb{R}} f\varphi' dx$. Попытаемся проинтегрировать по частям. Для этого необходимо, чтобы интеграл считался по отрезку, и $f, \varphi \in C^1$.

Для выполнения данных условий разобьем интеграл на сумму двух и воспользуемся финитностью функции φ (вне отрезка $\varphi = 0$). Тогда возьмем отрезок $[-A, A]$ и получим выражение

$$-\int\limits_{-A}^{x_0} f\varphi' dx - \int\limits_{x_0}^{A} f\varphi' dx = -f\varphi\Big|_{-A}^{x_0} - f\varphi\Big|_{x_0}^{A} + \int\limits_{-A}^{x_0} f'\varphi dx + \int\limits_{x_0}^{A} f'\varphi dx$$

В точках A и $-A$ функция φ равна нулю. В точке x_0 значение $f(x_0)$ не определено. Тогда переобозначим отрезки $[-A, x_0 - 0]$ и $[x_0 + 0, A]$ и получим:
$-f\varphi\Big|_{-A}^{x_0-0} - f\varphi\Big|_{x_0+0}^{A} = \varphi(x_0)(f(x_0 + 0)f(x_0 - 0)) = \varphi(x_0)[f]_{x_0} = [f]_{x_0}(\delta(x - x_0), \varphi(x))$.

Теперь разберемся с интегралами:
$\int\limits_{-A}^{x_0} f'\varphi dx + \int\limits_{x_0}^{A} f'\varphi dx = \int\limits_{-A}^{A} f'\varphi dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'\varphi dx = \{f'\}$. Мы можем заменить отрезок на всю прямую, так как значение функции φ определено только на отрезке и ничего не изменится.

Дифференцирование разрывных функций

1. Рассмотрим функцию Хевисайда: $\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

Тогда $\Theta'(x) = 0 + 1 \cdot \delta(x)$.

2. Рассмотрим функцию $|x|$.

Тогда $|x|' = sign\ x = 2\Theta(x) - 1 = \Theta(x) - \Theta(-x)$, где $sign\ x = \begin{cases} 1, \ x > 0 \\ 0, \ x = 0 \\ -1, \ x < 0 \end{cases}$

Скачок функции $|x|$ в точке $x = 0$ равен нулю.

Тогда $|x|'' = 2\delta(x)$, так как $|x|' = 2\Theta(x) - 1$.

8. Семинар 8

Задача на обобщенные функции

Докажем верность выражения $|\sin x|'' + |\sin x| = 2\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\pi)$

Решение

Рассмотрим сумму в правой части как обобщенную функцию.
Тогда $(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\pi), \varphi(x)) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k\pi)$. Этот ряд можно рассматривать как конечную сумму, так как $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, следовательно φ определена только на отрезке, и этот отрезок - конечная сумма точек вида $k\pi$.

Продифференцируем функцию $|\sin x|$. Так как она непрерывна в точках $k\pi$, то у первой производной сингулярная составляющая отсутствует. У второй производной сингулярная составляющая равна $2\sum \delta(x - k\pi)$, так как у первой производной в каждой точке типа $k\pi$ скачок величины 2.
Регулярные составляющие $|\sin x|$ и $|\sin x|''$ сокращаются.

В итоге: $|\sin x|'' + |\sin x| = 2\sum \delta(x - k\pi)$.

Фундаментальные решения дифференциальных операторов

Вспомним, что такое фундаментальное решение оператора Лапласа:
$\Delta E(x) = \delta(x)$, где $E(x)$ и есть фундаментальное решение.
Эту функцию можно написать явно:

$E(x) = \dfrac{1}{2\pi} \ln|x|$ при $n = 2$.

$E(x) = -\dfrac{1}{4\pi|x|}$ при $n = 3$.

$E(x) = \dfrac{-1}{(n-2)\sigma_n |x|^{n-2}}$ при $n \geqslant 3$, где σ_n - площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

С точки зрения обобщенных функций ΔE действует на любую обобщенную функцию так же, как и δ.
$(\Delta E, \varphi) = (E, \Delta\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} E(x)\Delta\varphi(x)dx = \varphi(0)$.

Фундаментальное решение $E(x)$ - однородная функция степени однородности $2-n$

Поговорим теперь о фундаментальных решениях дифференциальных операторов.

$L = \dfrac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}\dfrac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + ... + a_1\dfrac{d}{dx} + a_0$ - обыкновенный дифференциальный оператор порядка m, где $a_k(x) \in C^\infty$ - функции.
Подействовав оператором L на функцию, мы получим
$Ly = y^{(m)} + a_{m-1}(x)y^{(m-1)} + ... + a_1(x)y^{(1)} + a_0(x)y$

Фундаментальное решение оператора L - функция $\xi(x)$, такая что $L\xi(x) = \delta(x)$. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Решение этого уравнения неоднозначно, так как при добавлении решения однородного уравнения получаются другие фундаментальные решения, например, если $\Delta E = \delta(x)$ и $\Delta u = 0$, то $\Delta(E+u) = \delta(x)$ и $E+u$ - тоже фундаментальное решение.

Задача на фундаментальные решения дифференциальных операторов

Проверим, что фундаментальное решение уравнения $L\xi = \delta(x)$ может быть представлено в виде $\xi(x) = \Theta(x)Y(x)$, где $Y(x)$ - решение уравнения $LY = 0$, и заданы начальные условия: $Y(0) = Y'(0) = ... = Y^{(m-2)}(0) = 0$, а $Y^{(m-1)}(0) = 1$.

Решение

Вспомним, как дифференцировать произведение обобщенной функции и любой бесконечно-дифференцируемой: $(af)' = a'f + af'$, и то, что $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$.

Функция $\Theta(x)$ - обобщенная. Тогда $\xi'(x) = Y'(x)\Theta(x) + Y(x)\Theta'(x)$. На прошлом семинаре мы выяснили, что $\Theta'(x) = \delta(x)$, поэтому $Y(x)\Theta'(x) = Y(x)\delta(x) = Y(0)\delta(x) = 0$. Тогда $\xi'(x) = Y'(x)\Theta(x)$

При дальнейшем дифференцировании все слагаемые, где будет участвовать $\Theta'(x)$, будут сокращаться, но до $m-1$ производной.

$\xi^{(m-1)} = Y^{(m-1)}\Theta(x)$, а дальше:
$\xi^{(m)} = Y^{(m)}\Theta(x) + Y^{(m-1)}\Theta'(x) = Y^{(m)}\Theta(x) + Y^{(m-1)}(0)\delta(x) = Y^{(m)}\Theta(x) + \delta(x)$

В итоге, подставляя ξ в оператор L, мы получим:

$$L\xi = \Theta(x)(a_0Y(x) + a_1Y'(x) + ... + a_{m-1}Y^{(m-1)}(x) + Y^{(m)}) + \delta(x) = \Theta(x)LY + \delta(x)$$

Так как по условию $LY = 0$, то мы получаем нужное равенство.

Задача на нахождение единственного фундаментального решения

Найти единственное в $D'_+(\mathbb{R})$ решение фундаментального оператора $L = \dfrac{d^2}{dx^2} + 1$.

Решение

Сначала найдем фундаментальное решение оператора L. Запишем линейное однородное уравнение $LY = Y'' + Y = 0$ и начальные условия: $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 1$.

Решением уравнения является функция $Y(x) = \sin x$.

Тогда фундаментальным решением для оператора L будет функция $\xi(x) = \Theta(x)\sin x$. Построим графики функций $\xi(x)$, $\xi'(x)$ и $\xi''(x)$.

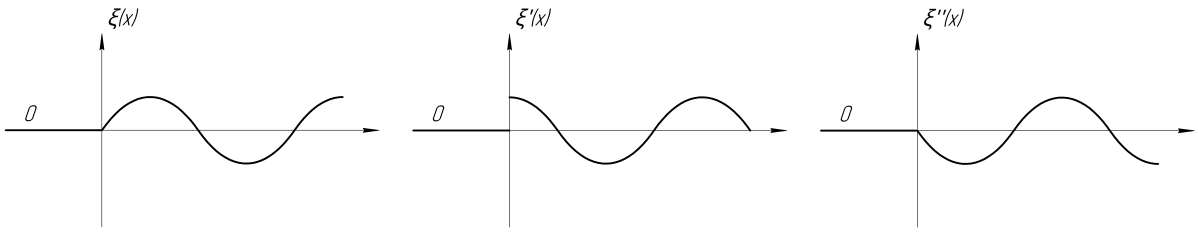


График функции $\xi(x)$ - $\sin x$ при $x > 0$ и 0 при $x \leqslant 0$. Функция не дифференцируема

в нуле, так как есть скачок производной. У $\xi'(x)$ сингулярная составляющая отсутствует, так как функция непрерывна. Вторая производная имеет вид $\xi''(x) = \delta(x) +$ регулярная составляющая.

В итоге, регулярные составляющие $\xi(x)$ и $\xi''(x)$ сокращаются, и получается $\xi''(x) + \xi(x) = \delta(x)$.

Решений уравнения $L\xi = \delta(x)$ много, так как $\xi(x)$ представляется в виде частного решения неоднородного: $\Theta(x)\sin x$, и общего решения однородного $C_1 \sin x + C_2 \cos x$, то есть $\xi(x) = \begin{cases} (C_1 + 1)\sin x + C_2 \cos x, \ x > 0 \\ C_1 \sin x + C_2 \cos x, \ x < 0 \end{cases}$

Но в условиях задачи указано пространство $D'_+(\mathbb{R})$. Функции этого пространства сосредоточены только на положительной полуоси, то есть $f(x) = 0$ при $x \leqslant 0$ ($supp\ f \subset \mathbb{R}_+$). Если f - обобщенная функция, то это значит, что если $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $supp\ \varphi \subset (-\infty, 0)$, то $(f, \varphi) = 0$.

В итоге, нам подходят только те фундаментальные решения, которые равны нулю на отрицательной полуоси.

9. Семинар 9

Оператор Лапласа. Фундаментальные решения

Напоминание.
Оператор Лапласа имеет вид $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. Функция $E(x)$ - фундаментальное решение оператора Лапласа, то есть $\Delta E(x) = \delta(x)$.

$E(x) = \dfrac{1}{2\pi} \ln|x|$ при $n = 2$.

$E(x) = -\dfrac{1}{4\pi|x|}$ при $n = 3$.

$E(x) = \dfrac{-1}{(n-2)\sigma_n |x|^{n-2}}$ при $n \geqslant 3$, где σ_n - площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Вывод из уравнения $\Delta E(x) = \delta(x)$: $\forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} E(x)\Delta\varphi(x)dx = \varphi(0)$

Основное уравнение электростатики

Это уравнение $\Delta u = \rho$, где u - потенциал электростатического поля, а ρ - плотность заряда.

Если $\Delta E(x) = \delta(x)$, то $\delta(x)$ - плотность единичного точечного заряда в начале координат.

Функция Грина

Первое определение:
Пусть Ω - ограниченная область. Тогда функция Грина области Ω - $G(x, y)$, такая что $\forall y \in \Omega$ функция $G(x, y)$ удовлетворяет задаче Дирихле $\begin{cases} \Delta_x G(x, y) = \delta(x - y) \\ G(x, y)|_{x \in \partial\Omega} = 0 \end{cases}$,
где $x, y \in \Omega$.

Функция Грина симметрична, то есть $G(x,y) = G(y,x)$.

Второе определение:
Функция Грина - сдвинутое фундаментальное решение $G(x,y) = E(x-y) + g(x,y)$, где $\forall y \in \Omega$ $\begin{cases} \Delta_x g(x,y) = 0 \\ g|_{x\in\partial\Omega} = -E(x-y) \end{cases}$

По функции Грина в любой области можно решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа. Решение задачи $\begin{cases} \Delta u = f(x) \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \end{cases}$ может быть записано в виде

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G(x,y)f(y)dy + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y}\varphi(y)dS_y$$

Первый интеграл в сумме является решением задачи $\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$.
Так как $G(x,y) = 0$, при $x \in \partial\Omega$, то выполняется условие $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Условие $\Delta u = f$ выполняется, так как $\Delta u = \int\limits_{\Omega} \underbrace{\Delta_x G(x,y)}_{=\delta(x-y)} f(y)dy = f(x)$

Рассмотрим второй интеграл в сумме. Он является решением задачи Дирихле при $f(x) = 0$. dS_y - элемент площади на границе области (индекс y показывает, что интеграл берется по переменной y). ν_y - внешняя единичная нормаль в точке y.

Построение функции Грина методом отражений

Задана симметричная область Ω, где Ω_0 - половина этой области. В точку y области Ω_0 поместили точечный заряд $+1$ и заземлили границу области Ω. Функция Грина области Ω позволяет узнать, какое поле создает единичный точечный заряд, помещенный в точку y.
Если рассмотреть теперь область Ω_0, то ее граница состоит из границы области Ω и куска оси или плоскости симметрии. Необходимо, чтобы на оси (плоскости) симметрии был также нулевой потенциал. Для этого в симметричную для y точку y^* поместить заряд -1.

Тогда функция Грина области Ω_0 - $G_0(x,y) = G(x,y) - G(x,y^*)$

Если $x \in \partial\Omega$, то $G_0(x,y) = 0$.

Рассмотрим ситуацию, когда x приближается к оси (плоскости) симметрии, которую мы обозначим за Π. Так как функция Грина симметрична, то можем устремить y к Π. Тогда y и y^* начинают стремиться к одной точке на Π, и $G_0(x,y) = 0$.

Задача на нахождение функции Грина

1. а) Найти функцию Грина полуплоскости $x_2 > 0$.

б) Решить задачу Дирихле $\begin{cases} \Delta u = 0, \ x_2 > 0 \\ u|_{x_2=0} = \varphi(x_1) \end{cases}$

в) Досчитать при $\varphi(x_1) = \cos x_1$

Решение

а) Возьмем точку $y = (y_1, y_2)$ и поместим в нее заряд $+1$. Тогда, чтобы на оси x_1 потенциал равнялся нулю, необходимо в точку $y^* = (y_1, -y_2)$ поместить заряд -1.

Тогда функция Грина этой полуплоскости

$G(x,y) = E(x-y) - E(x-y^*) = \dfrac{1}{2\pi}\ln|x-y| - \dfrac{1}{2\pi}\ln|x-y^*|.$

Функция Грина зависит от четырех переменных $G(x,y) = G(x_1,x_2,y_1,y_2)$, поэтому $|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$ и $|x-y^*| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2+y_2)^2}$

б) Для нашей задачи решение может быть найдено в виде $u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \dfrac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y}\varphi(y)dS_y$, так как $\Delta u = f(x) = 0$.

Точка $y = (y_1, 0)$ расположена на границе, то есть на оси x_1, поэтому $\partial\Omega = \{y_2 = 0\}$. Тогда $dS_y = dy_1$ - элемент длины на прямой x_1.

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y} = \frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_{y_2=0}$$

Распишем функцию Грина:

$$G(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{4\pi}\left[\ln\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right) - \ln\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right)\right]$$

Тогда

$$\frac{\partial G}{\partial y_2} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2(x_2-y_2)\cdot(-1)}{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} - \frac{2(x_2+y_2)}{(x_1-y_1)^2+(x_2+y_2)^2}\right]$$

Подставив $y_2 = 0$ мы получим

$$-\frac{\partial G}{\partial y_2}\Big|_{y_2=0} = \frac{1}{\pi}\frac{x_2}{(x_1-y_1)^2+x_2^2}$$

В итоге решение задачи записывается в виде

$$u(x) = \frac{x_2}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(y_1)}{(x_1-y_1)^2+x_2^2}dy_1$$

в) Подставим в интеграл $\varphi(y_1) = \cos y$

$$u(x_1, x_2) = \frac{x_2}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\cos y}{(x_1-y)^2+x_2^2}dy \ \boxed{=}$$

Вспомним, что $\cos y = Re\ e^{iy}$. Пусть $y \to z \in \mathbb{C}^1$, тогда

$$\boxed{=}\ \frac{x_2}{\pi}Re\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{iz}dz}{(x_1-z)^2+x_2^2}$$

Рассмотрим подынтегральную функция $f(z) = \dfrac{e^{iz}dz}{(x_1-z)^2+x_2^2}$. Интеграл от функции $f(z)$ считается через вычеты

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(z)dz = 2\pi i res_{x_1+ix_2} f(z) = 2\pi i\frac{e^{i(x_1+ix_2)}}{x_1+ix_2-(x_1-ix_2)} = \frac{\pi e^{-x_2}(\cos x_1 + i\sin x_1)}{x_2}$$

Тогда

$$\boxed{=}\frac{x_2}{\pi}\frac{\pi}{x_2}Re(e^{-x_2}(\cos x_1 + i\sin x_1)) = e^{-x_2}\cos x_1$$

Задача на построение функции Грина шара

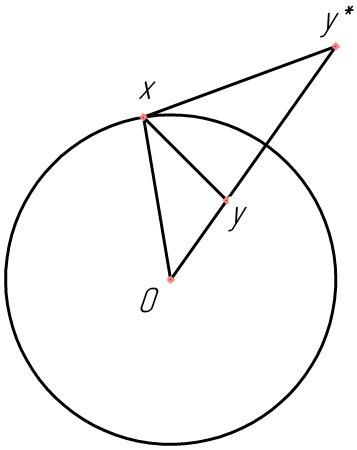
Дан шар с центром в начале координат радиуса R. Берем точку y внутри шара и помещаем в нее заряд $+1$. Возьмем инверсионно-симметричную точку y^* и поместим в нее заряд $-c(y)$. Эта точка лежит на прямой, проходящей через начало координат и точку y, и $|y||y^*| = R^2$.

Запишем функцию Грина $G(x,y) = E(x-y) - (y)E(x-y^*) = -\dfrac{1}{4\pi|x-y|} + \dfrac{c(y)}{4\pi|x-y^*|}$.

Мы знаем, что $\Delta_x G(x,y) = \delta(x)$. Проверим, что $G(x,y)|_{|x|=R} = 0$.

$G(x,y)|_{|x|=R} = \left(-\dfrac{1}{4\pi|x-y|} + \dfrac{c(y)}{4\pi|x-y^*|}\right)\Bigg|_{|x|=R}$

Это выражение равно нулю при $c(y) = \dfrac{|x-y^*|}{|x-y|}\Bigg|_{|x|=R}$



Рассмотрим треугольники ΔOxy и ΔOxy^*. Они подобны по общему углу и двум прилежащим к нему сторонам, так как соотношение $|y||y^*| = R^2$ можно переписать в виде $\dfrac{|y|}{R} = \dfrac{R}{|y^*|}$. Отсюда можем найти соотношение на третьи стороны в треугольниках $\dfrac{|x-y|}{|x-y^*|}$.

Поэтому $c(y) = \dfrac{R}{|y|}$ и функция Грина шара имеет вид $G(x,y) = E(x-y)\dfrac{R}{|y|}E(x-y^*)$.

10. Семинар 10

Функция Грина полушара

Дан полушар $|x| < R$, $x_3 > 0$. Построить функцию Грина.

Полушар получается из шара отрезанием половины. Необходимо взять симметричную точку $\overline{y}$ относительно основания полушара, и точку $\overline{y}^*$, которая является инверсионно-симметричной для точки $\overline{y}$.

Тогда $\begin{cases} y = (y_1, y_2, y_3) \\ \overline{y} = (y_1, y_2, -y_3) \\ \mathrm{y}^* = \dfrac{R^2}{|y|^2} y \\ \overline{y}^* = \dfrac{R^2}{|y|^2} \overline{y} \end{cases}$

Функция Грина полушара $G(x, y) = E(x-y) - \dfrac{R}{|y|} E(x - y^*) - E(x - \overline{y}) + \dfrac{R}{|y|} E(x - \overline{y}^*)$.

Функция Грина полупространства

Дано полупространство $x_3 > 0$.

Чтобы найти функцию Грина этого полупространства, необходимо взять две симметричные точки $y = (y_1, y_2, y_3)$ и $y^* = (y_1, y_2, -y_3)$, и поместить в них заряды $+1$ и -1 соответственно.

Тогда $G(x, y) = E(x - y) - E(x - y^*) = \dfrac{1}{4\pi|x - y|} - \dfrac{1}{4\pi|x - y^*|} =$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{-1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}} + \frac{-1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 + y_3)^2}}\right].$$

Решим задачу Дирихле в полупространстве $\begin{cases} \Delta u = 0, \ x_1 > 0 \\ u|_{x_3=0} = \cos x_1 \cos x_2 \end{cases}$

Общая формула для решения имеет вид

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y} \varphi(y) dS_y$$

В нашей задаче: $\partial\Omega$ - плоскость $\{y_3 = 0\}$.
$dS_y = dy_1 dy_2$ - элемент площади.
$\dfrac{\partial}{\partial \nu_y} = -\dfrac{\partial}{\partial y_3}\Big|_{y_3=0}$ - производная по внешней нормали.

Посчитаем наш интеграл. Нужно продифференцировать фундаментальные решения.

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_3} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2(y_3 - x_3)}{2((x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2(y_3 + x_3)}{2((x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3+y_3)^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

При $y_3 = 0$ мы можем записать $(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + x_3^2 = |x-y|^2$, поэтому

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_3}\Big|_{y_3=0} = \frac{-x_3}{2\pi|x-y|^3}$$

Тогда решение будет иметь вид

$$u(x) = \frac{x_3}{2\pi} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\cos y_1 \cos y_2 dy_1 dy_2}{|x-y|^3}$$

Так как в знаменателе стоит модуль в третьей степени, то провести контурное интегрирование, как в задаче на нахождение функции Грина полуплоскости, будет сложно.

Рассуждения.
Вспомним задачу на нахождение функции Грина на полуплоскости. Посчитав интеграл, мы получили решение вида $u = e^{-x_2}\cos x_1$. Его можно получить и другим способом. Попробуем найти такую функцию $g(x_2)$, которая удовлетворяет условиям задачи Дирихле $\begin{cases} \Delta u = 0, \ x_2 > 0 \\ u|_{x_2=0} = \cos x_1 \end{cases}$ при $u = g(x_2)\cos x_1$.
Подставив u в оператор Лапласа, получим, что $-g\cos x_1 + g''\cos x_1 = 0$, то есть $g'' - g = 0$. Решений этого уравнения, которые удовлетворяют условию задачи Дирихле, много, так как $g = C_1 e^{x_2} + C_2 e^{-x_2}$ и $g(0) = 1$, то есть $C_1 + C_2 = 1$. Решение может иметь вид $e^{x_2}\cos x_1$ или $\cosh x_2 \cos x_1$.

Но вспомним определение функции Грина $G(x,y) = E(x-y) + g(x,y)$, где $g(x,y)$ - решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\begin{cases} \Delta_x g(x,y) = 0 \\ g|_{x\in\partial\Omega} = -E(x-y) \end{cases}$
В наших задачах область Ω неограниченная, поэтому нужны условия поведения функции $g(x,y)$ на бесконечности. Эти условия зависят от размерности пространства и от широты ухода на бесконечности области Ω, то есть в каких направлениях область уходит на бесконечность (например, если область ограничена углом, то она уходит на бесконечность только внутри угла). Чем уже область уходит на бесконечность, тем слабее могут быть условия. Потребуем, например, ограниченность на бесконечности нашей функции. Поэтому в решении остается экспонента с отрицательной степенью.

Вернемся к нашей задаче. Подумаем, на что можно умножить $u|_{x_3=0} = \cos x_1 \cos x_2$, чтобы $\Delta u = 0$. Возьмем, например, функцию $g(x_3) = e^{-x_3}$. Но она нам не подходит, так как при подстановке в оператор Лапласа $u_{x_1x_1} = -u$, $u_{x_2x_2} = -u$, а $u_{x_3x_3} = u$, и их сумма не равна нулю. Тогда необходимо, чтобы $u_{x_3x_3}$ была равна $2u$, поэтому $u = \cos x_1 \cos x_2 e^{-\sqrt{2}x_3}$ - решение.

Построение функции Грина методом двумерных областей

Дана произвольная область Ω в двумерном пространстве x_1x_2. Возьмем произвольную точку в Ω и обозначим ее как $z = x_1 + ix_2$.

Комплексную область можно конформно (непрерывное отображение $\Phi(x)$, сохраняющее углы между кривыми) отобразить на единичный круг, но с условием, что произвольную фиксированную точку y из Ω мы отображаем в центр круга. Обозначим это отображение как $\Phi_y(x)$.

Теорема.
Если можно построить отображение $\Phi_y(x)$, то функция Грина области Ω имеет вид $G(x,y) = \dfrac{1}{2\pi}\ln|\Phi_y(x)|$.

Докажем эту теорему. Для этого необходимо проверить:

1) Если $x \in \partial\Omega$, то $G(x, y) = 0$.

2) Если $x \neq y$, то $\Delta_x G(x, y) = 0$.

3) Что происходит с функцией Грина при $x \to y$.

1. Если $x \in \partial\Omega$, то $\Phi_y(x)$ принадлежит границе круга, следовательно $|\Phi_y(x)| = 1$. Тогда $G(x, y) = \dfrac{1}{2\pi} \ln 1 = 0$.

2. Рассмотрим отображение $\Phi_y(x)$. Это голоморфная функция x. От нее можно взять комплексный логарифм Ln. Для этого необходимо, чтобы $\Phi_y(x) \neq 0$, но $\Phi_y(x) = 0$ только при $x = y$. Тогда при $x \neq y$ $Ln\Phi_y(x)$ - тоже голоморфная (комплексно-аналитическая) функция. Существует связь между комплексно-аналитическими и гармоническими функциями, а именно: если $u(z)$ - комплексно-аналитическая, то ее действительная и мнимая части - гармонические (следствие условий Коши-Римана). Функции $Ln\ z = \ln|z| + iArg\ z$, где $|\ln z|$ - гармоническая функция, и оператор Лапласа от этой функции равен нулю.

3. Разложим отображение $\Phi_y(x) = \Phi_y(y) + A(x - y) + o(|x - y|)$ при $x \to y$, где A - производная отображения. Мы знаем, что $\Phi_y(y) = 0$. $A \neq 0$, так как Φ_y - конформное отображение, и его производные не обращаются нигде в ноль.
Если раскладывать модуль отображения, то $|\Phi_y(x)| = |A||x - y|(1 + o(1))$.
Тогда $G(x, y) = \dfrac{1}{2\pi} \ln|\Phi_y(x)| = \dfrac{1}{2\pi} \ln|x - y| + \dfrac{1}{2\pi} \ln|A|(1 + o(1))$.
Первое слагаемое $\dfrac{1}{2\pi} \ln|x - y|$ - это фундаментальное решение $E(x-y)$ в двумерном случае. Второе слагаемое - ограниченная функция при $x \to y$, так как она стремится к $\dfrac{1}{2\pi} \ln|A| \neq 0$.
Функция $G(x, y)$ - гармоническая при $x \neq y$ и $\dfrac{1}{2\pi} \ln|x - y|$ - гармоническая при $x \neq y$, поэтому их разность - тоже гармоническая, а так как она еще и ограниченная, то можно воспользоваться теоремой об устранимой особенности.

Теорема об устранимой особенности

Дана область Ω и точка x_0 внутри этой области. Если есть функция, которая является гармонической в области Ω, кроме одной точки, то есть $\Delta u = 0$ в $\Omega \setminus \{x_0\}$, и $u(x) = o(E(x - x_0))$ (ограничена) при $x \to x_0$, то тогда особенность устранимая. Это значит, что $\exists \lim\limits_{x \to x_o} u(x) =: u(x_0)$ и $\Delta u = 0$ во всей области Ω.

Тогда $\dfrac{1}{2\pi} \ln |A|(1 + o(1))$ можно взять за функцию $g(x, y)$ из определения функции Грина.

Пример задачи на функцию Грина

Попробуем построить функцию Грина четверти плоскости. Для этого необходимо применить ряд отображений. Сначала применим отображение z^2, которое отображает четверть плоскости в полуплоскость, а затем дробно-линейным преобразованием можно отобразить полуплоскость в круг.

Чтобы построить отображение $\Phi_y(x)$, необходимо проследить за точкой y. При отображении z^2 точка y переходит в y^2. Теперь, на шаге дробно-линейного отображения, отобразим y^2 в ноль. Для этого, относительно плоскости $u = z^2$, необходимо взять отображение $\dfrac{u - y^2}{u - \overline{y}^2}$.

Тогда $\Phi_y(x) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 - \overline{y}^2}$.

Функция Грина четверти плоскости $G(x, y) = \dfrac{1}{2\pi} \ln \left| \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 - \overline{y}^2} \right|$, где $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$.

11. Семинар 11

Потенциалы

Будем исходить из того, что основное уравнение электростатики $\Delta u = \rho$, где u - потенциал электростатического поля, а ρ - плотность заряда. Ранее мы использовали такую физическую интерпретацию.

Также вспомним главные функции нашего курса - фундаментальные решения оператора Лапласа:

$E(x) = \dfrac{1}{2\pi}\ln|x|$, при $n = 2$
$E(x) = \dfrac{-1}{4\pi|x|}$, при $n = 3$
$E(x) = \dfrac{-1}{(n-2)\sigma_n|x|^{n-2}}$, при $n \geq 3$

Это в точности означает, что $\Delta E(x) = \delta(x)$, где $\delta(x)$ - плотность единичного точечного заряда, помещенного в начало координат.

Запишем также следующую формулу: $\nabla E(x) = \dfrac{-1}{\sigma_n|x|^{n-1}}\nabla|x|$, где $\nabla|x| = \dfrac{x}{|x|}$.

Таким образом, получаем: $\nabla E(x) = \dfrac{-1}{\sigma_n|x|^{n-1}}\dfrac{x}{|x|}$. Это верно для всех $n \geq 2$.

Ньютонов (объемный) потенциал

Представим, что у нас есть некое заряженное тело Ω, то есть имеется некая функция $\rho(x) : \Omega \to \mathbb{R}$. Вопрос состоит в том, как посчитать потенциал поля, создаваемого этим зарядом.

Для выполнения этой задачи мы разбиваем наше тело Ω на много частей, в каждой из которых заменяем заряд этой части на точечный заряд, помещенный в точку y

этой части. Тогда этот заряд создает потенциал $\int\limits_{\Omega} E(x-y)\rho(x)dx$.

Таким образом, запишем формулу, определяющую потенциал Ньютона:

$u(x) = \int\limits_{\Omega} E(x-y)\rho(y)dy$

Эту формулу можно переписать в виде свертки следующим образом:

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} E(x-y)\rho(y)dy = E * \rho$$

Потенциал простого слоя

Представим теперь, что у нас есть некая поверхность S, по которой распределен заряд. Также есть функция плотности заряда $\mu : S \to \mathbb{R}$.

Итак, нам необходимо понять, какое поле создаст эта поверхность. Действовать будем по аналогии с предыдущим случаем. Тогда мы получим следующую формулу:

$v(x) = \int\limits_{S} E(x-y)\mu(y)dS_y$, где точка y бегает по нашей поверхности, а точка x зафиксирована. Нашу формулу можно переписать следующим образом:

$$v(x) = \int\limits_{S} E(x-y)\mu(y)dS_y = E * (\mu\delta_S)$$

Определим нашу обобщенную функцию $(\mu\delta_S)$, то есть определим, как она действует на любую функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$: $(\mu\delta_S, \varphi) = \int\limits_{S} \mu(x)\varphi(x)dS$

Потенциал двойного слоя

Рассмотрим теперь слой из диполей, то есть двух больших зарядов q и $-q$, одинаковых по модулю, но разных по знаку, размещенных на очень маленьком расстоянии l друг от друга. Будем считать, что $ql = \nu = const$, где ν - дипольный момент - характеристика диполя.

Вернемся к вопросу о потенциале двойного слоя. У нас есть поверхность размерности $n-1$, на которой сосредоточены диполи, ориентированные по какой-то нормали к поверхности. Величина $\nu = \nu(x)$ есть плотность дипольного момента.

Поле, создаваемое таким слоем диполей, определяется следующим образом:

$$w(x) = -\int\limits_S \frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y}\nu(y)dS_y = E * \frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)$ - производная по нормали от δ-функции, сосредоточенной на поверхности с плотностью ν. Определим эту функцию:

$$(\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S), \varphi) = -\int\limits_S \nu(y)\frac{\partial\varphi(y)}{\partial n}dS$$

Преобразование интеграла для потенциала двойного слоя

Мы можем преобразовать формулу, полученную выше.

$\frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} = (\nabla_y E(x-y), n_y)$, где $\nabla_y = (\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, ..., \frac{\partial}{\partial y_n})$.

Тогда: $\nabla_y E(y) = \frac{1}{\sigma_n|y|^{n-1}}\frac{y}{|y|}$ и $\nabla_y E(x-y) = \nabla_y E(y-x) = \frac{1}{\sigma_n|y-x|^{n-1}}\frac{y-x}{|y-x|}$

Возвращаясь и подставляя последнее полученное соотношение, имеем:

$$\frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} = (\nabla_y E(x-y), n_y) = \frac{\cos(n_y, y-x)}{\sigma_n|y-x|^{n-1}}$$

Так как $(n_y, \dfrac{y-x}{|y-x|}) = \cos(n_y, y-x)$

Задача на нахождение логарифмического потенциала двойного слоя

Найти потенциал двойного слоя для отрезка $-a \leqslant x_1 \leqslant a$, $x_2 = 0$ с плотностью дипольного момента $\nu = \nu_0 = const$.

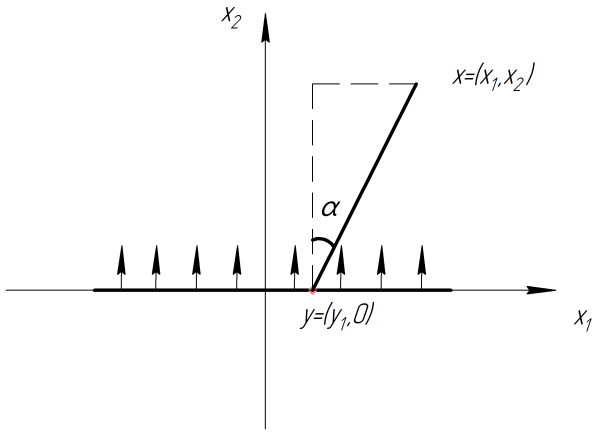
Решение

Из условий задачи следует, что размерность пространства $n = 2$.
Возьмем точку x, в которой мы хотим посчитать потенциал, который создается диполями, распределенными по отрезку и ориентированными в сторону возрастания x_2. Это направление - направление нормали n_y.

В нашей задаче отрезок можно параметризовать первой координатой на этом отрезке, то есть S - такие точки, что $y_2 = 0$, $-a \leqslant y_1 \leqslant a$. Тогда

$$w(x) = -\int\limits_{-a}^{a} \frac{\cos(n_y, y-x)}{2\pi|x-y|}\nu_0 dy_1 \boxed{=}$$

Где $y = (y_1, 0)$. Обозначим за α угол, смежный с углом между векторами.



Тогда $-\cos(n_y, y-x) = \cos\alpha$ и $\cos\alpha = \dfrac{x_2}{|x-y|}$, поэтому

$$\boxed{=} \frac{x_2}{2\pi}\int\limits_{-a}^{a} \frac{\nu_0 dy_1}{(y_1-x_1)^2+x_2^2} = \frac{x_2}{2\pi}\frac{1}{x_2}\int\limits_{-a}^{a} \frac{\nu_0}{1+\left(\dfrac{y_1-x_1}{x_2}\right)^2} d\frac{y_1-x_1}{x_2} = \frac{\nu_0}{2\pi}\arctan\frac{y_1-x_1}{x_2}\Bigg|_{y_1=-a}^{y_1=a}$$

Потенциал $w(x_1,x_2) = \dfrac{\nu_0}{2\pi}\left(\arctan\dfrac{a-x_1}{x_2} + \arctan\dfrac{a+x_1}{x_2}\right)$.

Разберемся с точками $x_2 = 0$.

Пусть $x_1 > a$, тогда $\arctan\dfrac{a-x_1}{x_2} = -\dfrac{\pi}{2}$, а $\arctan\dfrac{a+x_1}{x_2} = \dfrac{\pi}{2}$, следовательно $w(x') = 0$ при $x' = (x_1 > a, x_2 = 0)$.

Если $x_1 < -a$, то потенциал тоже равен нулю.

Пусть $x_1 \in (-a,a)$ и $x_2 \to +0$. Тогда $\dfrac{a-x_1}{x_2} \to +\infty$ и $\dfrac{a+x_1}{x_2} \to +\infty$, поэтому $w(x_1,x_2) = \dfrac{\nu_0}{2\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\nu_0}{2}$.

Теперь пусть $x_1 \in (-a,a)$, но $x_2 \to -0$. Получаются арктангенсы от минус бесконечности и $w = -\dfrac{\nu_0}{2}$.

Задача на нахождение потенциала равномерно заряженной сферы

Найти потенциал равномерно заряженной сферы радиуса R с полным зарядом Q в $\mathbb{R}^3$.

Решение

В нашей задаче мы ищем потенциал простого слоя с плотностью $\mu = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$.

Так как пространство $\mathbb{R}^3$, то $E(x) = \dfrac{-1}{4\pi|x|}$. Тогда $v(x) = \int\limits_{|y|=R} \dfrac{-\mu}{4\pi|x|} dS_y$

Попробуем решить задачу не считая интеграл. Введем некоторые свойства потенциалов:

1) Потенциалы простого и двойного слоя удовлетворяют уравнению $\Delta v = \Delta w = 0$ вне S. Ньютонов потенциал удовлетворяет удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ вне Ω.

2) Теорема о скачках потенциалов:

   а) Если $\rho \in C(\overline{\Omega})$ (плотность испытывает скачок первого рода), то $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

   б) Потенциал простого слоя - непрерывная функция, то есть $(v_+ - v_-)|_S = 0$, где v_+ - предел при подходе к краю S снаружи, v_- - изнутри. Нормальная производная испытывает скачок $(\dfrac{\partial v(x)_+}{\partial n} - \dfrac{\partial v(x)_-}{\partial n})|_S = \mu(x)$, где n - фиксированная нормаль.

   в) Потенциал двойного слоя испытывает скачок $(w_+ - w_-)|_S = \nu(x)$.

3) Симметрия.

4) Поведение интеграла на бесконечности.

5) Подсчет потенциала в отдельных точках.

Посчитаем потенциал в отдельных точках, например, в начале координат
$v(0) = -\dfrac{1}{4\pi R} \int\limits_{|y|=R} \mu(y) dS_y = \dfrac{-Q}{4\pi R}$.

Посмотрим, к чему стремится $v(x)$, когда $|x| \to +\infty$. $v(x) \to 0$, так как $|x-y| \to +\infty$. Попробуем посчитать поведение на бесконечности более аккуратно. Домножим и поделим наш интеграл на $|x|$. Тогда

$$v(x) = \frac{-1}{4\pi|x|} \int\limits_{|y|=R} \mu(y) \frac{|x|}{|x-y|} dS_y$$

При больших x: $\dfrac{|x|}{|x-y|} = 1 + o(1)$, и потенциал равен $\dfrac{-Q}{4\pi|x|}(1 + o(1))$.

Воспользуемся 1-ым и 3-им свойствами потенциалов - сфера при повороте переходит в себя, поэтому $v = v(|x|) = v(r)$ и $\Delta v = 0$. Оператор Лапласа в сферических координатах имеет вид $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}$(производные по углам).

Так как v зависит только от r, то $v'' + \dfrac{2}{r}v' = 0$, когда $r \neq R$.

Решения имеют вид $v = \dfrac{A}{r} + B$. Тогда $v(r) = \begin{cases} \dfrac{A_1}{r} + B_1, \ r < R \\ \dfrac{A_2}{r} + B_2, \ r > R \end{cases}$

Запишем итоговый ответ. Решение должно быть определено в начале координат, поэтому слагаемое $\dfrac{A_1}{r}$ пропадает, и $v(0) = B_1 = \dfrac{-Q}{4\pi R}$. На бесконечности $\dfrac{A_2}{r} = \dfrac{-Q}{4\pi r}$.

Тогда $v(x) = \begin{cases} \dfrac{-Q}{4\pi R}, \ r < R \\ \dfrac{-Q}{4\pi r}, \ r > R \end{cases}$

12. Семинар 12

Задача на нахождение потенциала двойного слоя окружности

Посчитать потенциал двойного слоя окружности в $\mathbb{R}^2$ с постоянной плотностью дипольного момента $\nu = \nu_0 = \text{const}$, радиуса R

Решение

У нас размерность $n = 2$, нам нужно посчитать функцию:

$$w(x) = -\int\limits_{|y|=R} \frac{\cos(y, y-x)}{2\pi|x-y|}\nu_0 dS_y$$

Задача симметрична относительно поворотов, значит функция зависит только от радиуса: $w(x) = w(r)$ и $\Delta w = w'' + \frac{1}{r}w' = 0$ везде, где $r \neq R$.

Решения будут иметь вид $w = A\ln r + B$. Тогда:

$$w(r) = \begin{cases} A_1 \ln r + B_1, \ r < R \\ A_2 \ln r + B_2, \ r > R \end{cases}$$

Если x будет стремиться к бесконечности, то интеграл будет стремиться к нулю, так как числитель интеграла ограничен единицей, а знаменатель стремиться к ∞. Поэтому, получаем:

$$w(r) = \begin{cases} A_1 \ln r + B_1, \ r < R \\ 0, \ r > R \end{cases}$$

Но также потенциал должен быть определен в начале координат, поэтому

$$w(r) = \begin{cases} 0 + B_1, \ r < R \\ 0, \ r > R \end{cases}$$

Посчитав потенциал в нуле: $w(0) = -\int\limits_{|y|=R} \frac{\nu_0}{2\pi R} dS_y = -\nu_0$, получим

$$w(r) = \begin{cases} -\nu_0, \ r < R \\ 0, \ r > R \end{cases}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Задача на нахождение ньютонова потенциала шара

Найдем ньютонов потенциал равномерно заряженного шара радиуса R с полным зарядом Q в $\mathbb{R}^3$.

Решение

Запишем формулу для потенциала:

$$u(x) = \int\limits_{|y|=R} \frac{-\rho}{4\pi|x-y|}dy$$

Воспользуемся свойствами потенциала: $u = u(r)$ и $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > R \\ \Delta u = \rho, \ r < R \end{cases}$, где $\rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ - плотность заряда.

Функция u зависит только от r, поэтому $u'' + \dfrac{2}{r}u' = 0$, и его решения $u = \dfrac{A_2}{r} + B_2$, при $r > R$.

При $r < R$ мы получаем линейное неоднородное уравнение $u'' + \dfrac{2}{r}' = \rho$. его решения - сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Частное решение можно взять в виде αr^2, так как тогда $u'' = const$ и $\dfrac{2}{r}u' = const$. Подставляя частное решение в уравнение получим, что $\alpha = \dfrac{\rho}{6}$, и тогда $u = \dfrac{\rho}{6}r^2\dfrac{A_1}{r} + B_1$, при $r > R$. Рассмотрим поведение функции: $u = \dfrac{A_2}{r} + B_2$ на бесконечности. Для любой произвольно заряженной области, асимптотика будет выглядеть так: $-\dfrac{Q}{4\pi|x|}(1 + o(1))$. Но в силу симметрии, получается:

$$u = \begin{cases} \dfrac{\rho}{6}|x|^2 - \dfrac{\rho R^2}{2}, \ |x| < R \\ -\dfrac{Q}{4\pi|x|}, \ |x| > R \end{cases}$$

Построим график функции $u(r)$.

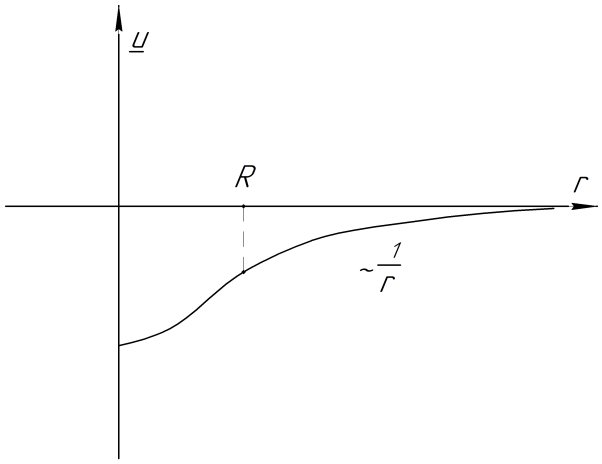
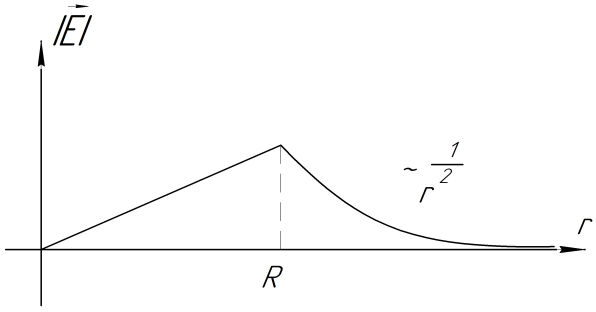


График вектора напряженности:



Решение задачи Дирихле с помощью потенциалов

$$u = \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega \\ u\mid_{\partial\Omega} = \varphi(x) \end{cases}$$

$$u = u(x) = -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\cos(n_y, y-x)}{\sigma_n |x-y|^{n-1}} \nu(y) dS_y$$

Если $x \in \partial\Omega$ $\dfrac{1}{|x|^{n-1}}$ на поверхности размерности $n-1$?

$$\int\limits_{|x|<1} \frac{dx}{|x|^k} < +\infty, \quad k < n \qquad \int\limits_{|x|>1} \frac{dx}{|x|^k} < +\infty, \quad k > n$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Интеграл по сфере: $\int\limits_0^1 \frac{\sigma_n r^{n-1}}{r^k} dr$

Сходимость двух интегралов выше сводится к тому, что нужно понять, сходится или расходится одномерный интеграл:

$$\int \frac{dr}{r^{k-n+1}} dr, \quad k-n+1>1 \text{ и } k-n+1<1$$

Если степень меньше, чем размерность пространства, то интеграл сходится, если равен или больше, то расходится.

А у нас расходится, но чуть-чуть. Для того, чтобы эти интегралы сходились, вводят такое понятие, как поверхность Ляпунова.

$$\widehat{n_x, n_y} = O(|x-y|^{\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0, \quad y \to x$$

Тогда мы получаем, что $\forall x \in \partial\Omega$ $w_+(x)$, $w_-(x)$, $w(x)$ связаны так:

$$(w_+ - w_-)\,|_{\partial\Omega} = \nu$$

$$w = \frac{w_+ + w_-}{2}$$

Потенциал любого слоя - гармоническая функция. Что такое u на границе? Это $w_- = \varphi$. Напишем w_- в явном виде. Все это для точек на границе:

$$\varphi(x) = w_-(x) = w(x) - \frac{\nu(x)}{2} = -\frac{\nu(x)}{2} - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\cos(n_y, y-x)}{\sigma_n |x-y|^{n-1}} \nu(y) dS_y$$

Попробуем решить задачу Дирихле в круге радиуса R, $n=2$:

$$\varphi(x) = -\frac{\nu(x)}{2} - \int\limits_{|y|=R} \frac{\cos(y, y-x)}{2\pi|x-y|} \nu(y) dS_y =$$

$$-2\varphi(x) = \nu(x) + \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{|y|=R} \nu(y) dS_y$$

Чтобы решить это уравнение, необходимо найти ν. Так как мы взяли какую-то функцию, проинтегрировали по окружности, и поделили на $2\pi R$ - длину окружности - это среднее значение. Возьмем средние значения от обеих частей: $-2\varphi(x) = \nu(x) + \text{ср.знач. } \nu$, получаем:

$$-2\text{ср.знач. } \varphi(x) = 2\text{ср.знач.}\nu$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Отсюда ν:

$$\nu(x) = -2\varphi(x) + \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{|y|=R} \varphi(y) dS_y$$

Ответ:

$$u = w(x) = -\int\limits_{|y|=R} \frac{\cos(y, y-x)}{2\pi|x-y|} \nu(y) dS_y, \quad \text{где } \nu \text{ определяется формулой выше}$$

Решение задачи Неймана с помощью потенциалов

Область Ω - круг радиуса R, размерность пространства $n = 2$, решаем уравнение

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} |_{\partial\Omega} = \psi \end{cases}$$

$$u = v(x) = \int\limits_{\partial\Omega} E(x-y)\mu(y) dS_y, \quad \mu \text{ - плотность заряда на границе}$$

Найдем, что такое $\dfrac{\partial v}{\partial n}$

$$\left(\frac{\partial v_+}{\partial n} - \frac{\partial v_-}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega} = \mu$$

а дальше мы считаем производную по нормали:

$$\frac{\partial E(x-y)}{\partial n_x} = (\nabla_x E(x-y), n_x) = \frac{1}{2\pi|x-y|}\left(\frac{x-y}{|x-y|}, n_x\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\cos(x-y, n_x)}{2\pi|x-y|} \mu(y) dS_y$$

И в пространстве любой размерности:

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\cos(x-y, n_x)}{\sigma_n |x-y|^{n-1}} \mu(y) dS_y$$

Рассмотрим поверхность Ляпунова, $\widehat{n_x, n_y} = O(|x-y|^\varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \quad y \to x$ и степень ε позволяет этому интегралу сойтись, и тогда при x, принадлежащему границе,

получается предел изнутри, предел снаружи, и к теореме о скачках добавляется соотношение:

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_+}{\partial n} + \frac{\partial v_-}{\partial n})$$

При $x \in \partial\Omega$

$$\psi(x) = \frac{\partial v_-}{\partial n}(x) = \frac{\partial v}{\partial n}(x) - \frac{\mu(x)}{2} = -\frac{\mu(x)}{2} + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\cos(x-y, n_x)}{2\pi|x-y|}\mu(y)dS_y$$

$$-2\psi(x) = \mu(x) - \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{|y|=R} \mu(y)dS_y$$

$$-2\psi(x) = \mu(x) - \text{ср.знач. } \mu$$

Возьмем среднее значение от обеих частей:

$$-2 \text{ ср.знач. } \psi = 0 \ ?$$

Это условие разрешимости задачи Неймана.

$$\int\limits_{\partial\omega} \psi dS_y = 0$$

И просто напишем ответ:

$$\mu(x) = -2\psi(x) + C, \quad \text{ср.знач. } \mu = C$$

По сути в решении поменялся один знак, а эффект совершенно другой.

13. Семинар 13

Пространства Соболева

$u \in H'(\Omega)$, если

1) $u \in L_2(\Omega)$

2) $\dfrac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2(\Omega) \quad (k = 1, \ldots, n)$

Элемент пространства L_2 - это класс функций, отличающийся на множество меры 0. Здесь идет разговор не о классических производных, поэтому мы не можем говорить о значении функции в точке. Мы идем в сторону обобщенных постановок задач.
$u \in L_{1loc}(\Omega) \to$ регулярная обобщенная функция. $(u, \varphi) = \int\limits_\Omega u\varphi dx$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$
L_2 это более узкое пространство, поэтому:

$$L_2 < L_{2loc} < L_{1loc}$$

Если у нас функция из L_2, на нее можно смотреть на регулярную обобщенную, у таких функций существуют производные, то есть $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$. Теперь нам нужно определить, что такое $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$. Дают такое определение:

$$v = \frac{\partial u}{\partial x_k} \text{ в обл. } \Omega, \text{ если } \int\limits_\Omega v\varphi dx = -\int\limits_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

(обобщенная производная в смысле Соболева)

Точно так же можно определять и производные более высоких порядков:

$$v = D^\alpha u \text{ в обл. } \Omega, \text{если } \int\limits_\Omega v\varphi dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_\Omega uD^\alpha\varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$u, v \in L_{1loc}(\Omega)$$

Мы даем определение из интегрального тождества.

Отметим некоторые факты:

$$\Omega_1 \in \Omega \quad \exists v = \frac{\partial u}{\partial x_k} \text{ в } \Omega \Rightarrow v = \frac{\partial u}{\partial x_k} \text{ в } \Omega_1$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

И если рассмотреть два пространства:

$$C_0^\infty(\Omega_1)\Omega \subset C_0^\infty(\Omega)$$

Нам нужно Ω_1 доопределить до 0 вне Ω

Также верна такая вещь:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} \text{ - классическая производная } \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_k} \text{ - обобщенная производная}$$

Это следует из:

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k}\varphi dx = \int\limits_{\partial\Omega} u\varphi\nu_k dS_{\to 0} - \int\limits_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}dx$$

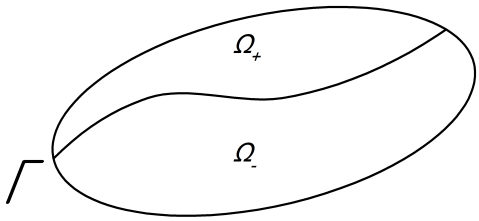
Можно придумать такую функцию u, что

$$u(x_1, x_2) \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \text{ - не существует}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \text{ - существует}$$

Потому что вторая производная определяется независимо.

Также: $D^\alpha u$ - не зависит от порядка дифференцирования

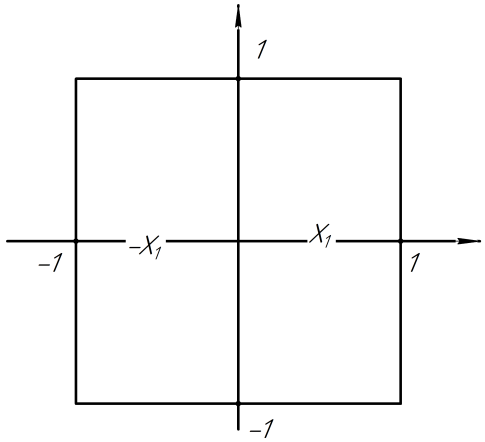


Если наша область разделилась на Ω_- и Ω_+,

$\Omega = \Omega_- \cap \Omega_+ \cap \Gamma$,

$u \in C'(\Omega_+) \cap C'(\Omega_-) \cap C(\Omega)$, это означает, что пределы при подходе с одной и с другой стороны одни и те же, но может быть излом (то есть производные не равны).

Примеры нахождения обобщенной функции



$$u(x_1, x_2) \quad \Omega = (-1;1) \times (-1;1)$$

$$u = |x_1|$$

И тогда оказывается, что $\exists$ обобщенная произв. $\dfrac{\partial u}{\partial x_k} = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_k} \text{ в } \Omega_- \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_k} \text{ в } \Omega_+ \end{cases}$

$$\frac{\partial |x_1|}{\partial x_1} = sign x_1 = \begin{cases} -1, \ x_1 < 0 \\ 1, \ x_1 > 0 \end{cases} = \Theta(x_1) - \Theta(-x_1)$$

$$\frac{\partial |x_1|}{\partial x_2} = 0 \quad \Theta(x) = \begin{cases} 1, \ x > 0 \\ 0, \ x \leq 0 \end{cases}$$

Давайте попробуем продифференцировать что-то разрывное, например $\Theta(x)$: Рассмотрим функцию $u = \Theta(x_1)$

$$\frac{\partial \Theta(x_1)}{\partial x_1} \text{не существует} \quad \frac{\partial \Theta(x_1)}{\partial x_2} = 0$$

Проверим эти пункты. Для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ должно быть выполнено тождество

$$\iint\limits_{\Omega} \Theta(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0 \quad \int\limits_1^0 (\int\limits_1^0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2) dx_1 = \int\limits_1^0 (\varphi(x_1, 1) - \varphi(x_1, -1)) dx_1 = 0$$

Докажем второй пункт. Пусть $\dfrac{\partial\Theta(x_1)}{\partial x_1}$ существует в $\Omega \Rightarrow$ в Ω_- и в Ω_+.

$$\frac{\partial\Theta(x_1)}{\partial x_1} = \begin{cases} 0, \ x_1 > 0 \\ 0, \ x_< 0 \end{cases}$$

Но это тогда означает, что

$$0 \stackrel{?}{=} \iint\limits_{\Omega} \Theta(x_1)\frac{\varphi}{\partial x_1}dx = \int_{-1}^{1}(\int_{0}^{1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1)dx_2 = \int_{-1}^{1}(\varphi(1,x_2)-\varphi(0,x_2))dx_2 = -\int\limits_{-1}^{1}\varphi(0,x_2)dx_2 \neq 0$$

Поэтому производная не существует.

Дельта-функции

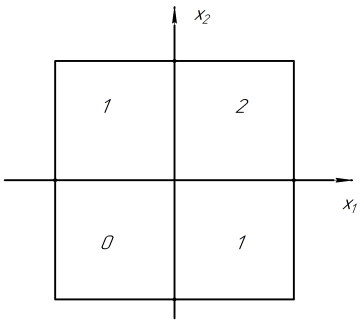
$$(\delta(x), \varphi(x)) = 0$$

$$x = (x_1, x_2) \quad \delta(x_1) \quad \mu(x)\delta_s(x) \quad S = x_1 = 0, \quad \mathbb{R}^2, \quad \mu \equiv 1$$

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \int\limits_{x_1=0} \varphi(x_1, x_2)dx_2 = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(0; x_2)dx_2 = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(0; x_2)dx_2$$

Это сингулярная обобщенная функция.

Вернемся к задаче о несуществующей первой обобщенной производной и о существующей второй. Область Ω все тот же квадрат. Рассмотрим функцию $u(x) = \Theta(x_1) + \Theta(x_2)$ $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$; $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ – не существует: пусть $\exists\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$; $\dfrac{\partial\Theta(x_2)}{\partial(x_1)} \Rightarrow \dfrac{\partial(u-\Theta(x_2))}{\partial x_1}$



Теперб почему существует вторая производная. Снова доказательство без всяких интегралов:

$$\frac{\partial\Theta(x_2)}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\Theta(x_2)}{\partial x_2\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial \Theta(x_1)}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \Theta(x_1)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

Поэтому $u(x)$ оказывается дифференцируема.

Убедимся в этом "в лоб". Посчитаем интеграл:

$$0 = \int 0\varphi dx = \iint\limits_{\Omega} u(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx =$$

$$= 0 + \int\limits_{-1}^{0} dx_1 \int\limits_{0}^{1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 + \int\limits_{-1}^{0} dx_2 \int\limits_{0}^{1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 + 2 \int\limits_{-1}^{0} dx_1 \int\limits_{0}^{1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2$$

I. $\int\limits_{-1}^{0} (\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, 1) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, 0)) dx_1 = (\varphi(0;1) - \varphi(-1;1)) - (\varphi(0;0) - \varphi(-1;0)) = -\varphi(0;0)$

II. $= -\varphi(0;0)$

III. $\int\limits_{0}^{1} (\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, 1) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, 0)) dx_1 = -\varphi(1;0) + \varphi(0;0)$

Подставив в выражение выше, получим ноль. Что и требовалось доказать.

Задача. При каких α $|x|^\alpha \in H^1(B_1)$

1) $|x|^\alpha \in L_2(\Omega)$

2) $\frac{\partial |x|^\alpha}{\partial x_k} = \alpha |x|^{\alpha-2} x_k$, а будет ли это обобщенная производная в смысле Соболева?

3) $|\nabla u|^2 \in L_2(\Omega)$

Об этой задаче поговорим в следующий раз.

14. Семинар 14

Задача (пространство Соболева)

Вернемся к задаче, сформулированной в прошлом семинаре.

$$\text{При каких } \alpha\text{: } |x|^\alpha \in H^1(B_1) \quad B_1 = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n \text{ ?}$$

Норма в пространстве Соболева:

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^n \|\frac{\partial u}{\partial x_k}\|^2_{L_2(\Omega)} \boxed{=}$$

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} = \|u\|^2_0 = \int\limits_\Omega u^2 dx$$

$$\boxed{=} \|u\|^2_0 + \sum_{k=1}^n \|\frac{\partial u}{\partial x_k}\|^2_0 = \|u\|^2_0 + \||\nabla u|\|^2_0 = \int\limits_\Omega (u^2 + |\nabla u|^2) dx = \int\limits_\Omega (u^2 + \sum_{k=1}^n (\frac{\partial u}{\partial x_k})^2) dx$$

Вернемся к задаче.

1) $|x|^\alpha \in L_2(\Omega) \iff \int\limits_{|x|<1} |x|^{2\alpha} dx < +\infty$

   Мы знаем из прошлых семинаров: $\int\limits_{|x|<1} \frac{dx}{|x|^k} < +\infty$, когда $k < n$. Тогда переформулируем под нашу задачу вот так: $2\alpha > -n$; $\alpha > -\frac{n}{2}$ и есть ответ.

2) $\frac{\partial |x|^2}{\partial x_k} = \alpha |x|^{\alpha-2} x_k$. Пока оставим вопрос о том, правда ли, что это обобщенная производная. Разберемся с третьим вопросом.

3) $|\nabla |x|^\alpha| \in L_2(\Omega)$

   $$\nabla |x|^\alpha = \alpha |x|^{\alpha-1} \frac{x}{|x|} \quad |\nabla |x|^\alpha| = \alpha |x|^{\alpha-1}$$

   Ответом на этот пункт будет сходимость интеграла:

   $$\alpha^2 \int\limits_{|x|<1} |x|^{2\alpha-2} dx < +\infty \iff 2\alpha - 2 > n \quad \alpha > 1 - \frac{n}{2}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Ответ: $\alpha > 1 - \dfrac{n}{2}$ или $\alpha = 0$
Или по размерностям:
$n = 1$ $\alpha > \dfrac{1}{n}$ или $\alpha = 0$
$n = 2$ $\alpha \geqslant 0$
$n \geqslant 3$ $\alpha > 1 - \dfrac{n}{2}$

Доказательство соотношения для обобщенной производной

Как же все-таки доказать соотношение из второго пункта? Итак, у нас есть:

$$u = |x|^\alpha \quad \frac{\partial u}{\partial x_k} = v = \alpha |x|^{\alpha-2} x_k$$

При каких α функция v есть обобщенная производная в смысле Соболева? Конечно, нас интересует $\alpha < 0$, т.е. когда это функция в нуле уходит в бесконечность. Мы имеем право говорить об обобщенных производных, когда: $u \in L_{1loc}(B_1), v \in L_{1loc}(B_1)$. Но нас интересует именно локальная интегрируемость в нуле, соответственно, можно записать: $u \in L_1(B_1), v \in L_1(B_1)$. Ответом на вопрос об интегрируемости в нуле будет сходимость интеграла: $\int\limits_{|x|<1} |x|^\alpha dx < +\infty \iff \alpha > -n$. И для v: $|v| \leqslant \alpha |x|^{\alpha-1}$, здесь тоже все сводится к сходимости интеграла $\int\limits_{|x|<1} |x|^{\alpha-1} dx < +\infty \iff \alpha > 1 - n$.
Итак, получается, что при $\alpha > 1 - n$ обе функции $(u,\, v)$ принадлежат L_1.
Следующий вопрос:

$$\int\limits_{|x|<1} v\varphi dx \overset{?}{=} -\int\limits_{|x|<1} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx$$

Обоснуем это равенство. Рассмотрим функцию

$$u_\varepsilon = \begin{cases} |x|^2, \ \varepsilon < |x| < 1 \\ \varepsilon^\alpha, \|x| < \varepsilon \end{cases}$$

Она непрерывная и является дифференцируемой везде, кроме сферы радиуса ε. Про такие функции мы говорили: если у нас есть кусочно-гладкая функция, в области Ω_-, Ω_+ и непрерывная на границе, то тогда можно посчитать классическую производную этой функции:

$$v_\varepsilon = \begin{cases} v, \ \varepsilon < |x| < 1 \\ 0, \ |x| < \varepsilon \end{cases}$$

в обобщенном смысле мы можем сказать, что одна производная равна второй, значит выполнено равенство:

$$\int\limits_{|x|<1} v_\varepsilon \varphi dx = -\int\limits_{|x|<1} u_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx$$

При $\varepsilon \to$ верно ли что $\int\limits_{|x|<1} v\varphi dx = -\int\limits_{|x|<1} u\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx$?

Вычтем один интеграл из другого

$$\int\limits_{|x|<1} v\varphi dx - \int\limits_{|x|<1} v_\varepsilon \varphi dx = \int\limits_{|x|<\varepsilon} v\varphi dx \to 0, \quad v\varphi \in L_1(B_1)$$

Исходя из абсолютной непрерывности интеграла Лебега, т.е. когда есть интегрируемая функция и мы интегрируем ее по какому-то маленькому множеству (мера множество достаточно мала), то интеграл достаточно мал, при $\varepsilon \to 0$ это множество стягивается в точку, следовательно, интеграл достаточно мал.

Для второго интеграла:

При $u \geqslant u - u_\varepsilon > 0$

$$|\int\limits_{|x|<1} u\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx - \int\limits_{|x|<1} u_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx| \leqslant \int\limits_{|x|>\varepsilon} (u - u_\varepsilon)|\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}|dx \leqslant \int\limits_{|x|<\varepsilon} |u\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}|dx \to 0$$

(по абсолютной непрерывности Лебега)

Таким образом, пункт 2 из задачи доказан

Пространство $H_0^1(\Omega)$

$H^1(\Omega)$ — полное.

Определение: $H_0^1(\Omega)$ — замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в $H_1(\Omega)$.

У нас было пространство $C_0^\infty(\Omega) \subset \underbrace{\overline{C_0^\infty(\Omega)}}_{H_0^1(\Omega)} \subset H_1(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$, значит

$\exists u_m \in C_0^\infty(\Omega) : u_m \xrightarrow{H^1(\Omega)} u \in H^1(\Omega)$

Заметим, что: $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = L_2(\Omega)$, то есть $C_0^\infty(\Omega)$ всюду плотно в $L_2(\Omega)$ (любой элемент из L_2 можно приблизить сколь угодно близко элементами из C_0^∞).

Покажем, что для пространств $H_0^1(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$ это не выполняется, и $H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$.

Задача (пространство $H_0^1(\Omega)$)

Возьмем $\Omega = (0;1)$ и хорошую функцию, которая не обращается в ноль на границе: $u \equiv 1$. Скажем, что $u \equiv 1 \in H_0^1(\Omega)$ и будем приближать ее какими-то функциями $u_\varepsilon \in C_0^\infty((0;1))$. Для начала приблизим функцию u в L_2. Посмотрим, сильно ли у нас отличаются эти функции в пространстве L_2: $\left\|u_\varepsilon - u\right\|_0^2 = \int\limits_0^1 (u_\varepsilon - u)^2 dx \leqslant 1^2 4\varepsilon = 4\varepsilon \to 0$. Вот и доказательство того, что u_ε приближает u в L_2.

А приближает ли эта последовательность в H_1? Тогда нужно приблизить саму функцию в L_2 и приблизить производные в L_2, то есть $\left\|u'_\varepsilon - u'\right\|_0^2 = \int\limits_0^1 (u'_\varepsilon)^2 dx =$

$$= \int\limits_\varepsilon^{2\varepsilon} (u'_\varepsilon)^2 dx + \int\limits_{1-2\varepsilon}^{1-\varepsilon} (u'_\varepsilon)^2 dx \leqslant 2\frac{1}{\varepsilon^2}\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon} \to +\infty$$

Неравенство Фридрихса

$\forall \Omega$ - ограниченной области $\exists C(\Omega)$: $\int\limits_\Omega u^2 dx \leqslant C(\Omega) \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx$ для $\forall u \in H_0^1(\Omega)$. Это неравенство показывает, что $1 \notin H_0^1(\Omega)$, как и любая другая константа $const \neq 0$, потому что $\nabla u = \vec{0}$, следовательно $1 \notin H_0^1(\Omega)$

15. Семинар 15

Разбор домашней задачи (пространство $H^1(\Omega)$)

Напоминание.

Функция $u \in H^1(\Omega)$, когда $u, \dfrac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2(\Omega)$.

Норма в этом пространстве: $\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_0 + \|u\|^2_1$, где
$\|u\|^2_0 = \|u\|^2_{K_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega u^2 dx$

$\|u\|^2_1 = \|\nabla u\|^2_{(L_2(\Omega))^n} = \left\| |\nabla u| \right\|^2_0 = \int\limits_\Omega \sum\limits_{k=1}^n \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx$

Пространство $H^1_0(\Omega) = \overline{C^\infty_0}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.

Решим задачу с функцией $u = (\sin|x|)^\alpha \in H^1(B_1)$.

Решение

При $\alpha < 0$ и $x = 0$ - возникает особенность. При $x \to 0$ $(\sin|x|)^\alpha \sim |x|^\alpha$. Тогда $\int\limits_{|x|<1} u^2 dx < +\infty \Leftrightarrow \int\limits_{|x|<1} |x|^{2\alpha} dx < +\infty$ при норме $L_2(\Omega)$.

Но необходимо посмотреть на квадрат нормы градиента:

$$\int\limits_{|x|<1} |\nabla u|^2 dx$$

Мы знаем, что $\int |\nabla |x|^\alpha|^2 dx < +\infty$. Проверим, можно ли поставить знак равносильности между этими двумя интегралами. Для этого необходимо проверить, что $|\nabla u| \sim |\nabla |x|^\alpha|$, при $x \to 0$.

Посчитаем: $\nabla(\sin|x|)^\alpha = \alpha(\sin|x|)^{\alpha-1}\cos|x|\nabla|x|$, где $\nabla|x| = \dfrac{x}{|x|}$.
Тогда $|\nabla(\sin|x|)^\alpha| = |\alpha|(\sin|x|)^{\alpha-1}\cos|x| \cdot 1$, но мы знаем, что $(\sin|x|)^{\alpha-1} \sim |x|^{\alpha-1}$ и $\cos|x| \to 1$, при $x \to 0$.
Тогда:

$$|\nabla u| = |\nabla(\sin|x|)^\alpha| \sim |\alpha||x|^{\alpha-1} \sim |\nabla|x|^\alpha|$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

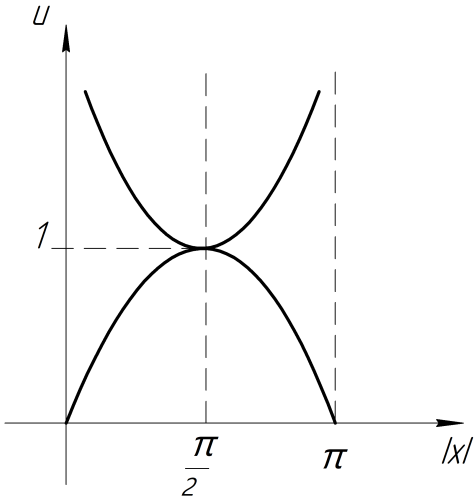
$H^1(\Omega)$ от шара радиуса π

Дана функция $u = (\sin|x|)^\alpha \in H^1(B_\pi)$, то есть $\sin|x| = 0$, при $|x| = 0$, $|x| = \pi$.

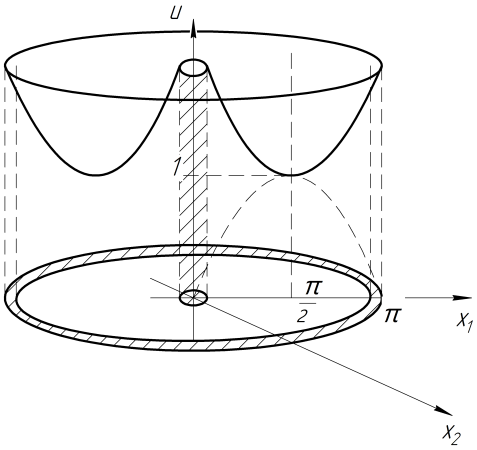
Решение

Теперь возникают две особенности. Функция симметрична относительно $\dfrac{\pi}{2}$.

При $\alpha < 0$ график функции имеет вид:



Если рассмотреть многомерный случай, то наша функция определена на шаре радиуса π, и это фигура вращения.



МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Объемы сосредоточены в окрестности нуля и в окрестности от $\pi - \varepsilon$ до π. Это разные особенности.

Посмотрим, когда объем в окрестности π будет конечным. Он умножается на площадь границы сферы $\sigma_n \pi^{n-1}$. Чтобы узнать, площадь, сосредоточенную в окрестности π, то необходимо проинтегрировать нашу функцию по множеству $B_\pi \setminus B_{\pi-\varepsilon}$. Наша функция зависит только от $|x|$, поэтому интегрировать необходимо в сферических координатах. Интегралы по всем углам дадут величину $\sigma_n \pi^{n-1}$, которую необходимо умножить на сходящийся интеграл.

В итоге, ответ получается такой же, как при $n = 1$: $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

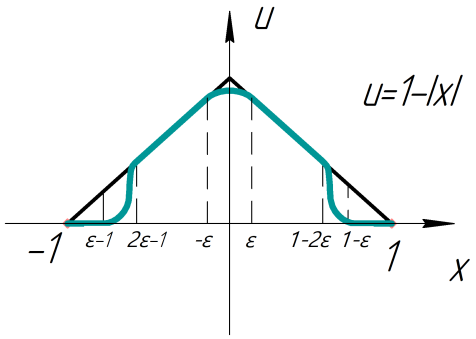
Принадлежность к пространству $H^1(\Omega)$

Пусть $\Omega = (-1, 1)$. Посмотрим какие функции, обращающиеся в ноль на этом интервале, принадлежат $H_0^1(\Omega)$.

Решение

Рассмотрим функцию: $u = 1 - |x|$.

Выполним приближение по определению:



Тогда $|u'_\varepsilon| \leqslant 4$.

$$\int\limits_{-1}^{1} (u - u_\varepsilon)^2 d \leqslant 1^2 \cdot 6\varepsilon \to 0$$

$$\int\limits_{-1}^{1} (u' - u'_\varepsilon)^2 d \leqslant 5^2 \cdot 6\varepsilon \to 0$$

Обобщенное решение задачи Дирихле

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона $\begin{cases} \Delta u = f \text{ в } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$

Введем понятие обобщенного решения этой задачи.

Функция $u \in H_0^1(\Omega)$ - обобщенное решение, если $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\underbrace{\int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} dx}_{[u,v]} + \underbrace{\int\limits_{\Omega} u f dx}_{(u,f)} = 0$$

Тогда $\|u\|_0 = \sqrt{(u,u)}$, $\|u\|_1 = \sqrt{[u,u]}$.

16. Семинар 16

Обобщенное решение задачи Дирихле

На прошлом семинаре мы дали определение обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

В пространстве $H_0^1(\Omega)$ норма такая же, как и в $H^1(\Omega)$, но в $H_0^1(\Omega)$ есть неравенство Фридрихса, которое говорит о том, что $\forall$ ограниченной области Ω $\exists C(\Omega)$: $\int u^2 dx \leqslant C(\Omega) \int |\nabla u|^2 dx$ $\forall u \in H_0^1(\Omega)$.

В терминах $\|u\|_0^2$ и $\|u\|_1^2$ неравенство Фридрихса записывается в виде: $\|u\|_0^2 \leqslant C(\Omega)\|u\|_1^2$. Это означает, что в $H_0^1(\Omega)$ две эквивалентные нормы: $\|u\|_0^2 + \|u\|_1^2 \sim \|u\|_1^2$.

Скалярное произведение $[u, v]$ строится по норме $\|u\|_1^2$, так как $\|u\|_1^2 = \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx$, а

$$[u, v] = \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k} dx = \int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla v) dx$$

Теорема существования и единственности обобщенного решения доказывается ссылкой на теорему Рисса об общем виде линейных функционалов в гильбертовом пространстве. Мы рассматриваем функционал $l(v) = -(f, v)$, где $f \in L_2(\Omega)$ - фиксирована. Этот функционал линейный по функциям $v \in H_0^1(\Omega)$ и непрерывный, так как $|l(v)| = |(f, v)| \leqslant \|f\|_0 \|v\|_0 \leqslant \|f\|_0 \sqrt{C(\Omega)} \|v\|_1$.

Теорема Рисса гласит, что любой непрерывный линейный функционал в гильбертовом пространстве устроен так: $\exists!$ $u \in H_0^1(\Omega)$: $l(v) = [u, v]$ - доказательство теорема существования и единственности.

Вариационная задача

Рассмотрим функционал $\Phi(u) = \dfrac{1}{2}[u, u] + (f, u)$ при $u \in H_0^1(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$. Попробуем найти минимум этого функционала, то есть такую $u' \in H_0^1(\Omega)$, что $\Phi(u') \to min$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Решение

Чтобы найти минимум функционала, посчитаем вариационную производную $\dfrac{\delta\Phi}{\delta u}$.

Посчитаем действие оператора на вектор. Функция (f, u) - линейная, а дифференциал линейной функции совпадает с самой функцией.
Тогда $\dfrac{\delta\Phi}{\delta u}v = [u, v] + (f, v)$. В точке минимума $\dfrac{\delta\Phi}{\delta u} = 0$, то есть $\dfrac{\delta\Phi}{\delta u}v = 0$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$.
Мы получили условия из определения обобщенного решения, поэтому поиск обобщенного решения и поиск решения вариационной задачи (найти минимум функционала) - одна и та же задача.

Задача (нахождение инфимума)

Найти

$$\inf_{u \in H_0^1(Q)} \int\limits_Q \left[|\nabla u|^2 + 2\sin x_1 \sin x_2 u \right] dx_1 dx_2$$

где $Q = [0, \pi] \times [0, \pi]$

Решение

Вынесем множитель 2 из под интеграла, тогда мы получим вариационную задачу $\dfrac{1}{2}|\nabla u|^2 + \underbrace{\sin x_1 \sin x_2}_{=f} u$. Минимум этого функционала достигается в точке решения задачи Дирихле $\begin{cases} \Delta u = \sin x_1 \sin x_2, \text{ в } Q \\ u|_{\partial Q} = 0 \end{cases}$

Классическое решение этой задачи будет являться и обобщенным решением и точкой минимума функционала.

Мы уже решали такие задачи (задача Штурма-Лиувилля). Запишем сразу решение: $u = -\dfrac{1}{2}\sin x_1 \sin x_2$.

Подставим теперь полученное решение в интеграл. $\nabla u = (-\dfrac{1}{2}\cos x_1 \sin x_2, -\dfrac{1}{2}\sin x_1 \cos x_2)$

и $|\nabla u|^2 = \dfrac{1}{4}(\cos {x_1}^2 \sin {x_2}^2 + \sin {x_1}^2 \cos {x_2}^2)$. Тогда

$$\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \left[\frac{1}{4}(\cos {x_1}^2 \sin {x_2}^2 + \sin {x_1}^2 \cos {x_2}^2) - \sin^2 x_1 \sin^2 x_2\right] dx_1 dx_2 = (\frac{\pi}{2})^2(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1) = -\frac{\pi^2}{8}$$

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ