МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. ЧАСТЬ 2

ГОРИЦКИЙ
АНДРЕЙ ЮРЬЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

Содержание

Лекция 1

Волновое уравнение

Волновое уравнение на функцию $u(t, \vec{x})$, где $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ – пространственная переменная, а t – время, имеет следующий вид:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u. \tag{1.1}$$

Записанное в таком виде волновое уравнение называется однородным, а при добавлении в правую часть некоторой функции $f(t, \vec{x})$ – неоднородным:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(t, \vec{x}). \tag{1.2}$$

Всюду считаем, что $a > 0$.

Волновое уравнение описывает колебательные процессы. В одномерном случае это могут быть, например, колебания струны или продольные колебания стержня, в двумерном – колебания мембраны и т.д. В таких задачах $u(t, \vec{x})$ рассматривается как смещение относительно положения равновесия, а $f(t, \vec{x})$ – как внешнее воздействие.

Характеристики волнового уравнения

Напомним, что главная часть уравнения второго порядка представляется в виде

$$\sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i x_j},$$

с которой связана некоторая квадратичная форма

$$\sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j = (A\xi, \xi).$$

Определение 1.1. Ненулевой вектор $\vec{\nu}$ такой, что

$$(A\vec{\nu}, \vec{\nu}) = 0,$$

называется **характеристическим**.

Определение 1.2. Характеристика уравнения – это поверхность, в каждой точке которой вектор нормали имеет характеристическое направление.

Так, например, для уравнения Лапласа матрица A совпадает с единичной, и уравнение на характеристическое направление примет вид

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \ldots + \nu_n^2 = 0,$$

для которого не существует ненулевого решения (как и для любого уравнения эллиптического типа), а следовательно построить характерстику нельзя.

В случае уравнения теплопроводности матрица A увеличивает размерность на 1 за счёт переменной t. Она также является диагональной, но в отличие от случая

эллиптических уравнений содержит 0 на диагонали, а потому уравнение на характеристическое направление записывается как

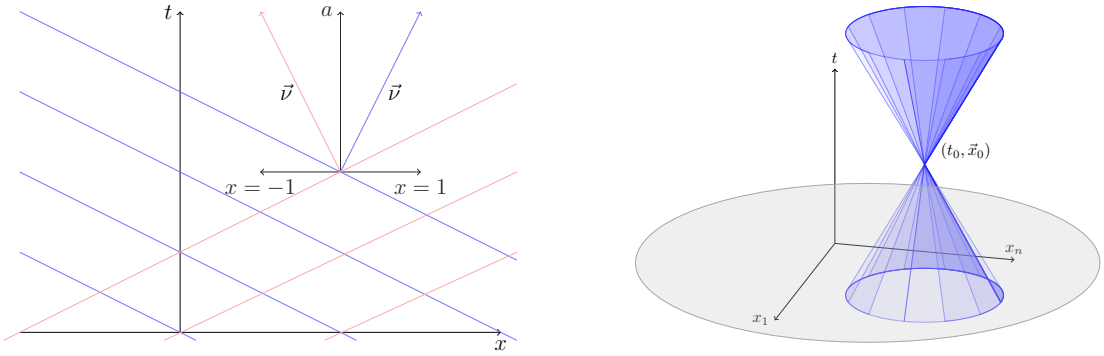
$$0 \cdot \nu_t^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 + \ldots + \nu_n^2 = 0.$$

Откуда видно, что характеристические вектора имеют единственную ненулевую компоненту, отвечающую переменной t, и значит, характеристиками уравнения теплопроводности являются плоскости $t = \text{const}$.

Наконец, обсудим характеристики волнового уравнения. Характеристическое направление задаётся вектором $(\nu_t, \nu_1, \ldots, \nu_n) \equiv (\nu_t, \vec{\nu}_x)$, где $\nu_t \in \mathbb{R}$, $\vec{\nu}_x \in \mathbb{R}^n$, который удовлетворяет уравнению

$$\nu_t^2 = a^2(\nu_1^2 + \ldots + \nu_n^2) = a^2|\vec{\nu}_x|^2. \tag{1.3}$$

В частности, мы можем выбрать направление так, что $\nu_t = a$ и $|\vec{\nu}_x| = 1$. И таких направлений много. Если рассматривать случай только с одной пространственной переменной, то направлений всего два. И они порождают нам два семейства характеристик в плоскости (t, x), подчиняющихся уравнениям $x \pm at = \text{const}$ (Рис 1.1, (а)). Аналогичным образом можно рассуждать и в многомерном случае: фиксируя определённое характеристическое направление, можно строить семейства характеристик с постоянным $\vec{\nu}$. Эти характеристики суть плоскости, подчиняющиеся уравнениям $\nu_t \cdot t + (\vec{\nu}_x, \vec{x}) = \text{const}$. Но нас будет интересовать случай, когда на характеристике при переходе от одной точки к другой характеристический вектор будет непрерывно менять направление.



а) б)

Рис. 1.1. Характеристики волнового уравнения в (а) $(1+1)$-мерном и (б) $(n+1)$-мерном случаях.

Рассмотрим одну из таких поверхностей – характеристический конус (Рис 1.1, (б)). В точке $(t_0, \vec{x}_0)$ он задаётся уравнением

$$|\vec{x} - \vec{x}_0|^2 = a^2(t - t_0)^2. \tag{1.4}$$

Проверим, что такой конус действительно характеристический. Запишем уравнение поверхности в виде

$$\Phi(t, \vec{x}) = \frac{a^2}{2}(t - t_0)^2 - \frac{1}{2}\left((x_1 - x_{10})^2 + \ldots + (x_n - x_{n0})^2\right) = 0, \tag{1.5}$$

Тогда вектор нормали к этой поверхности равен

$$\nabla\Phi = \big(a^2(t-t_0),\ -(x_1-x_{10}),\dots,-(x_n-x_{n0})\big) = \big(a^2(t-t_0),\ -(\vec{x}-\vec{x}_0)\big). \qquad (1.6)$$

Нужно проверить, что он удовлетворяет уравнению для характеристического вектора (1.3):

$$\big(a^2(t-t_0)\big)^2 = a^2|\vec{x}-\vec{x}_0|^2$$

или

$$a^2(t-t_0)^2 = |\vec{x}-\vec{x}_0|^2,$$

что в точности совпадает с уранением (1.4) для характеристического конуса. Повторим, конус не является единственной гладкой характеристической поверхностью волнового уравнения.

Будем считать, что волновое уравнение (1.1) выполнаяется в области K, которая представляет собой внутренность конуса (Рис. 1.2):

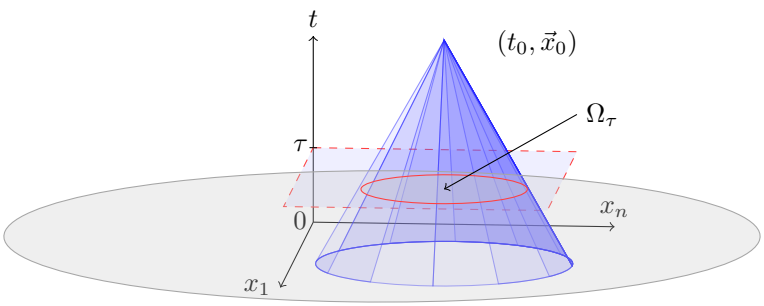


Рис. 1.2. Область K – внутренность конуса.

$$K = \Big\{(t,\vec{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ \Big|\ |\vec{x}-\vec{x}_0| \le a(t_0-t);\ 0<t<t_0\Big\}. \qquad (1.7)$$

Первая теорема об энергии волнового процесса

Введём функционал энергии волнового процесса в момент времени $\tau \in (0,t_0)$ как

$$E(\tau) = \int\limits_{\Omega_\tau} d\vec{x}\ \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{a^2}{2}|\nabla u|^2\right), \qquad (1.8)$$

где область интегрирования Ω_τ – это сечение области K плоскостью $t=\tau$, и значения производных функции u берутся в момент времени τ. Первое слагаемое подынтегрального выражения можно интерпретировать как кинетическую энергию, а второе – как потенциальную.

Замечание 1.1. Необязательно, чтобы K была внутренностью конуса. Она может быть внутренностью любой поверхности, нормаль к которой удовлетворяет условию

$$\nu_t \ge a|\vec{\nu}_x|.$$

Равенство достигатется в случае, когда эта поверхность всё-таки конус.

Теперь можно говорить о том, что K – область в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\Omega_\tau = K \cap \{t = \tau\}$. Также введём область

$$K_\tau = K \cap \{0 < t < \tau\}$$

с боковой поверхностью

$$S_\tau = \partial K \cap \{0 < t < \tau\}.$$

Тогда можно написать, что граница области K_τ есть

$$\partial K_\tau = \Omega_0 \cup \Omega_\tau \cup S_\tau.$$

Теорема 1.1. Пусть $u \in C^2(\overline{K})$ и удовлетворяет (1.1), тогда

$$E(\tau) \leq E(0). \tag{1.9}$$

Замечание 1.2. Это утверждение равносильно тому, что функция $E(t)$ не возрастает.

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\int\limits_{K_\tau} dt d\vec{x}\, (u_{tt} - a^2 \Delta u) u_t.$$

Поскольку функция u решает исходное волновое уравнение, то написанный выше интеграл будет равен нулю. С другой стороны мы воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} d\vec{x} = \int\limits_{\partial\Omega} u \cos(\nu, x_k) dS_x,$$

где ν – вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Далее мы преобразум подынтегральное выражение. Заметим, что

$$u_{tt} u_t = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_t^2}{2}\right); \quad u_{x_k x_k} u_t = \frac{\partial}{\partial x_k}(u_{x_k} u_t) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_{x_k}^2}{2}\right),$$

тогда, применяя формулу Остроградского-Гаусса, имеем

$$0 = \int\limits_{K_\tau} dt d\vec{x} (u_{tt} - a^2 \Delta u) u_t = \int\limits_{K_\tau} dt d\vec{x} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{a^2}{2}|\nabla u|^2\right) - a^2 \int\limits_{K_\tau} dt d\vec{x} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}(u_{x_k} u_t) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\tau} d\vec{x} \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{a^2}{2}|\nabla u|^2\right) - \int\limits_{\Omega_0} d\vec{x} \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{a^2}{2}|\nabla u|^2\right) +$$

$$+ \int\limits_{S_\tau} dS \left[\left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{a^2}{2}|\nabla u|^2\right) \cdot \nu_t - a^2 \sum_{k=1}^n u_{x_k} u_t \cdot \nu_k\right] =$$

$$= E(\tau) - E(0) + \int\limits_{S_\tau} dS \left[\left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{a^2}{2}|\nabla u|^2\right) \cdot \nu_t - a^2 \sum_{k=1}^n u_{x_k} u_t \cdot \nu_k\right].$$

Выполним ряд оценок

$$\left| a^2 u_t \sum_{k=1}^{n} u_{x_k} \nu_k \right| \leq |u_t| \cdot a|\nabla u| \cdot a|\vec{\nu}_x| \leq \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{a^2|\nabla u|^2}{2} \right) \cdot \nu_t.$$

здесь мы воспользовались тем, что $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ и условием (1.9). Из сделанных оценок следует, что

$$E(\tau) - E(0) = -\int\limits_{S_\tau} dS \left[\left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{a^2}{2}|\nabla u|^2 \right) \cdot \nu_t - a^2 \sum_{k=1}^{n} u_{x_k} u_t \cdot \nu_k \right] \leq 0.$$

□

Лекция 2

Вторая теорема об энергии волнового процесса

Для начала введём новую область (Рис. 2.1)

$$Q = (0; T) \times \Omega,$$

где Ω – область в $\mathbb{R}^n$.

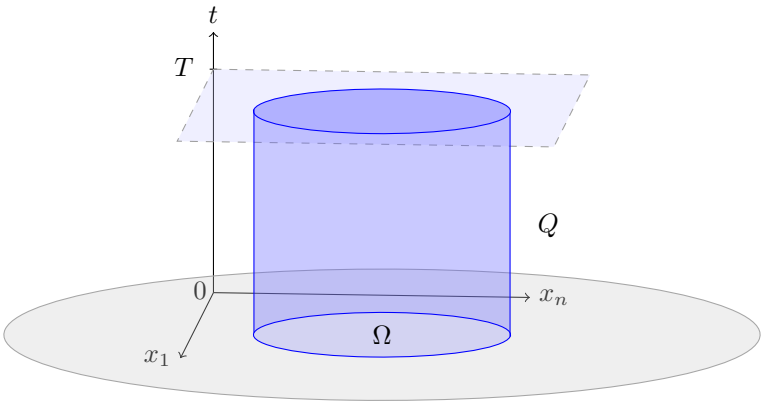


Рис. 2.1. Область Q.

Теорема 2.1. Пусть $u \in C^2(\overline{Q})$ и удовлетворяет (1.1). Если u удовлетворяет условию Дирихле

$$u\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = 0$$

или условию Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = 0,$$

тогда

$$E(T) = E(0), \tag{2.1}$$

где энергия E определена также, как в (1.8), но интегрирование происходит по области Ω.

Если функция u удовлетворяет третьему краевому условию

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} + k(\vec{x})u\right)\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = 0,$$

тогда

$$\widetilde{E}(T) = \widetilde{E}(0). \tag{2.2}$$

Замечание 2.1. Утверждение теоремы равносильно утверждению, что энергия $E(t) = \text{const}$ ($\widetilde{E}(t) = \text{const}$). Функция $\widetilde{E}(t)$ будет определена ниже.

Замечание 2.2. Третье краевое условие является физически правильным, если $k(\vec{x}) \geq 0$.

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$0 = \int\limits_Q (u_{tt} - a^2\Delta u)u_t \, dtd\vec{x} = \int\limits_Q \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{a^2}{2}|\nabla u|^2\right) dtd\vec{x} - a^2 \int\limits_Q \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}(u_{x_k}u_t)\, dtd\vec{x}.$$

Здесь мы использовали те же выкладки, что и при доказательстве теоремы 1.1. Используя формулу Остроградского-Гаусса, получаем

$$0 = \int\limits_Q (u_{tt} - a^2\Delta u)u_t \, dtd\vec{x} = E(T) - E(0) - a^2 \int\limits_0^T \left(\int\limits_{\partial\Omega} u_t(\nabla u, \vec{\nu})\, dS_x\right) dt =$$

$$= E(T) - E(0) - a^2 \int\limits_0^T \left(\int\limits_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\, dS_x\right) dt \equiv E(T) - E(0) - a^2 J.$$

Если на границе выполнено условие Неймана, то автоматически $J = 0$, поскольку в подынтегральном выражении уже есть производная по нормали, взятая в точках $\partial\Omega$.

Если на границе выполнено условие Дирихле, то из него следует, что и $u_t\Big|_{x\in\partial\Omega} = 0$ (это следствие того, что Q – цилиндр). Тогда вновь $J = 0$.

Если на границе выполнено третье краевое условие, тогда

$$J = \int\limits_0^T \left(\int\limits_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\, dS_x\right) dt = -\int\limits_0^T \left(\int\limits_{\partial\Omega} k(\vec{x}) \cdot u_t u\, dS_x\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^T \left(\int\limits_{\partial\Omega} k(\vec{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(u^2)\, dS_x\right) dt = -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{k(\vec{x})}{2}\left[u^2(T,\vec{x}) - u^2(0,\vec{x})\right] dS_x,$$

откуда

$$0 = E(T) - E(0) + a^2 \int\limits_{\partial\Omega} \frac{k(\vec{x})}{2}\left[u^2(T,\vec{x}) - u^2(0,\vec{x})\right] dS_x = \widetilde{E}(T) - \widetilde{E}(0),$$

где

$$\widetilde{E}(t) = E(t) + a^2 \int\limits_{\partial\Omega} k(\vec{x})\frac{u^2}{2} dS_x. \tag{2.3}$$

□

Единственность решений задачи Коши

Сформулируем задачу Коши для волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u + f(t,\vec{x}), \quad (t,\vec{x}) \in K, \quad u \in C^2(\overline{K}), \quad f \in C^0(K), \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(\vec{x}), \quad \varphi \in C^2(\Omega_0), \\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(\vec{x}), \quad \psi \in C^1(\Omega_0). \end{cases} \tag{2.4}$$

Теорема 2.2. Решение задачи (2.4) единственно.

Доказательство. Предположим, что у задачи (2.4) существуют два решения u^I и u^{II}. Рассмотрим их разность $u = u^I - u^{II}$, которая удовлетворяет

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, \quad (t,\vec{x}) \in K, \quad u \in C^2(\overline{K}), \\ u\Big|_{t=0} = u_t\Big|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

По теореме 1.1 $\forall t < T$ энергия $E(t) \leq E(0)$. В силу начальных условий из (2.5) получаем, что

$$E(0) = \int\limits_{\Omega_0} \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{a^2}{2}|\nabla u|^2 \right)\Big|_{t=0} d\vec{x} = 0.$$

Поскольку энергия по построению является величиной неотрицательной, то $\forall t < T$ получаем $E(t) = 0$. Тогда из определения энергии следует, что $u \equiv \text{const}$, а в силу начальных условий из (2.5) $u \equiv 0$, то есть $u^I \equiv u^{II}$. Заключаем, что решение задачи Коши для волнового уравнения (2.4) единственно. □

Переформулируем задачу Коши следующим образом

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u + f(t,\vec{x}), \quad t > 0,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ u \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n}),\ f \in C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n), \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(\vec{x}), \quad \varphi \in C^2(\mathbb{R}^n), \\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(\vec{x}), \quad \psi \in C^1(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{2.6}$$

Единственность решения такой задачи можно получить из единственности решения задачи (2.4) следующим образом. Предположим, нас интересует решение в некоторой точке $(t,\vec{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$. Эту точку можно поместить в конус типа K, для которого единственность решения доказана.

Единственность решений смешанной краевой задачи

Сформулируем смешанную краевую задачу для волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u + f(t,\vec{x}), \quad 0 < t < T,\ \vec{x} \in \Omega, \quad u \in C^2(\overline{Q}), \quad f \in C^0(Q), \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(\vec{x}), \quad \varphi \in C^2(\overline{\Omega}), \\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(\vec{x}), \quad \psi \in C^1(\overline{\Omega}), \\ u\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = \alpha(t,\vec{x}),\ \text{или}\ \dfrac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = \beta(t,\vec{x}),\ \text{или}\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial\vec{\nu}} + k(\vec{x})u\right)\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = \gamma(t,\vec{x}), \\ \alpha \in C^2(S_T),\ \beta,\gamma \in C^1(S_T), \quad S_T = (0;T)\times\partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

Теорема 2.3. Решение задачи (2.7) единственно.

Доказательство. Предположим, что у задачи (2.7) существуют два решения u^I и u^{II}. Рассмотрим их разность $u = u^I - u^{II}$, которая удовлетворяет

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, \quad 0 < t < T,\ \vec{x} \in \Omega, \quad u \in C^2(\overline{Q}), \\ u\Big|_{t=0} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \\ + \text{условие Дирихле, Неймана или третье краевое условие на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.8}$$

По теореме 2.1 $\forall t < T$ энергия $E(t) = E(0)$ (или для третьего краевого условия $\widetilde{E}(t) = \widetilde{E}(0)$). В силу начальных условий из (2.8) получаем, что

$$E(0) = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{a^2}{2}|\nabla u|^2\right)\Big|_{t=0} d\vec{x} = 0 \quad \text{и} \quad \widetilde{E}(0) = E(0) + a^2\int\limits_{\partial\Omega} k(\vec{x})\frac{u^2(0,\vec{x})}{2}\,dS_x = 0.$$

Откуда поучаем, что $\forall t < T$ $E(t) = 0$ ($\widetilde{E}(t) = 0$). Но тогда из определения E ($\widetilde{E}$) следует, что $u \equiv \text{const}$, а в силу начальных условий из (2.8) $u \equiv 0$, то есть $u^I \equiv u^{II}$. Заключаем, что решение смешанной краевой задачи для волнового уравнения (2.7) единственно. □

Схема решения смешанной краевой задачи

Рассмотрим алгоритм решения задачи на примере:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, \quad 0 < t < T,\ \vec{x} \in \Omega, \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(\vec{x}), \\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(\vec{x}), \\ u\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

При решении используется так называемый метод Фурье. Представим искомую функцию в виде

$$u(t,\vec{x}) = T(t)V(\vec{x}),$$

тогда из волнового уравнения получим

$$T''(t)V(\vec{x}) = a^2T(t)\Delta V(\vec{x})$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{\Delta V(\vec{x})}{V(\vec{x})} \equiv -\lambda.$$

Откуда имеем задачу на собственные значения оператора Лапласа с условием Дирихле на границе для функции V:

$$\begin{cases} \Delta V = -\lambda V, \quad \vec{x} \in \Omega, \\ V\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Лекция 3

Решение задачи Коши для волнового уравнения

Будем решать задачу Коши для случая, когда $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Пусть задана некоторая функция $g(\vec{x})$. Сопоставим ей функцию, которая представляет собой произведение времени t на среднее значение функции g по сфере с центром в точке $\vec{x}$ и радиусом at (Рис. 3.1):

$$g(x) \rightsquigarrow M_g(t, \vec{x}) = \frac{t}{4\pi(at)^2} \int\limits_{|\vec{\xi}-\vec{x}|=at} g(\vec{\xi}) dS_\xi.$$

Выполним замену переменных, которая отображает исходную сферу в единичную

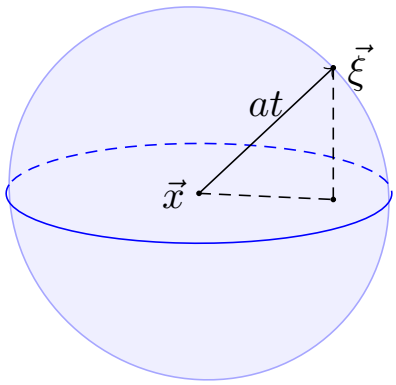


Рис. 3.1. Сфера с центром в точке $\vec{x}$ и радиусом at.

с центром в нуле:

$$\vec{\xi} = \vec{x} + at\vec{\eta}, \quad dS_\xi = (at)^2 dS_\eta.$$

Тогда

$$M_g(t, \vec{x}) = \frac{t}{4\pi(at)^2} \int\limits_{|\vec{\xi}-\vec{x}|=at} g(\vec{\xi}) dS_\xi = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\vec{\eta}|=1} g(\vec{x} + at\vec{\eta}) dS_\eta \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. Пусть $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Тогда функция $M_g(t, \vec{x})$ удовлетворяет следующей задаче:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 M_g}{\partial t^2} = a^2 \Delta M_g, \\ M_g\Big|_{t=0} = 0, \\ \dfrac{\partial M_g}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(\vec{x}). \end{cases} \tag{3.2}$$

Доказательство. Заметим, что так как $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$, то из выражения для функции M_g (3.1) следует, что $M_g \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$. Легко видеть, что M_g при $t = 0$ равна

нулю:

$$M_g\Big|_{t=0} = \frac{0}{4\pi}\int\limits_{|\vec{\eta}|=1} g(\vec{x})dS_\eta = 0. \tag{3.3}$$

Теперь отметим, что поскольку зависимость от $\vec{x}$ функции M_g находится в подынтегральном выражении, то

$$\Delta M_g(t,\vec{x}) = \frac{t}{4\pi}\int\limits_{|\vec{\eta}|=1} \Delta g(\vec{x}+at\vec{\eta})dS_\eta.$$

Дифференцируем функцию M_g по t:

$$\frac{\partial M_g}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\vec{\eta}|=1} g(\vec{x}+at\vec{\eta})dS_\eta + \frac{at}{4\pi}\int\limits_{|\vec{\eta}|=1} \left(\nabla g(\vec{x}+at\vec{\eta}),\vec{\eta}\right)dS_\eta$$

и считаем значение производной при $t=0$:

$$\frac{\partial M_g}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\vec{\eta}|=1} g(\vec{x})dS_\eta + \frac{a\cdot 0}{4\pi}\int\limits_{|\vec{\eta}|=1} \left(\nabla g(\vec{x}),\vec{\eta}\right)dS_\eta = \frac{g(\vec{x})}{4\pi}\int\limits_{|\vec{\eta}|=1} dS_\eta + 0 = g(\vec{x}). \tag{3.4}$$

Преобразуем выражение для первой производной функции M_g по времени. Для этого заметим, что первое слагаемое отличается от M_g отсутствием множителя t. Во втором слагаемом сделаем обратную замену переменных, оставляя в качестве обозначения $\vec{\eta} = (\vec{\xi}-\vec{x})/at$:

$$\frac{\partial M_g}{\partial t} = \frac{1}{t}M_g + \frac{1}{4\pi at}\int\limits_{|\vec{\xi}-\vec{x}|=at} \left(\nabla g(\vec{\xi}),\vec{\eta}\right)dS_\xi \tag{3.5}$$

Вектор $\vec{\eta}$ совпадает с вектором внешней нормали к сфере $|\vec{\xi}-\vec{x}| = at$ в точке $\vec{\xi}$, а значит второе слагаемое с точностью до множителя представляет собой поток векторного поля ∇g через сферу $|\vec{\xi}-\vec{x}| = at$. По формуле Остроградского-Гаусса второе слагаемое можно преобразовать к виду:

$$\frac{\partial M_g}{\partial t} = \frac{1}{t}M_g + \frac{1}{4\pi at}\int\limits_{|\vec{\xi}-\vec{x}|\le at} \Delta g d\vec{\xi}$$

Теперь сосчитаем вторую производную по t:

$$\frac{\partial^2 M_g}{\partial t^2} = -\frac{1}{t^2}M_g + \frac{1}{t}\frac{\partial M_g}{\partial t} - \frac{1}{4\pi at^2}\int\limits_{|\vec{\xi}-\vec{x}|\le at} \Delta g d\vec{\xi} + \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{|\vec{\xi}-\vec{x}|\le at} \Delta g d\vec{\xi}\right).$$

Подставляя выражение для первой производной (3.5) имеем:

$$\frac{\partial^2 M_g}{\partial t^2} = -\frac{1}{t^2}M_g + \frac{1}{t}\left[\frac{1}{t}M_g + \frac{1}{4\pi at}\int\limits_{|\vec{\xi}-\vec{x}|\le at}\Delta g d\vec{\xi}\right] - \frac{1}{4\pi at^2}\int\limits_{|\vec{\xi}-\vec{x}|\le at}\Delta g d\vec{\xi} +$$

$$+\frac{1}{4\pi at}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{|\vec{\xi}-\vec{x}|\le at}\Delta g d\vec{\xi}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{|\vec{\xi}-\vec{x}|\le at}\Delta g d\vec{\xi}\right) = \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_0^{at}\left(\int\limits_{|\vec{\eta}|=1}\Delta g dS_\eta\right)r^2 dr\right) =$$

$$= \frac{(at)^2}{4\pi t}\left(\int\limits_{|\vec{\eta}|=1}\Delta g(\vec{x}+at\vec{\eta})dS_\eta\right).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 M_g}{\partial t^2} = a^2\Delta M_g. \tag{3.6}$$

Выражения (3.3), (3.4) и (3.6) составляют условие теоремы. □

Формула Кирхгофа

Теорема 3.2. Пусть $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, тогда решение задачи Коши для волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, \quad t>0,\ \vec{x}\in\mathbb{R}^3 \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(\vec{x}) \\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(\vec{x}) \end{cases} \tag{3.7}$$

существует, единственно и задаётся формулой Кирхгофа

$$u(t,\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial t}M_\varphi + M_\psi \tag{3.8}$$

Доказательство. Если решение существует, то оно будет единственным в силу теоремы 2.2. Осталось понять, почему формула Кирхгофа решает, написанную задачу.

Начнём с того, что разобьём нашу задачу на две:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, \quad t>0,\ \vec{x}\in\mathbb{R}^3 \\ u\Big|_{t=0} = 0 \\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(\vec{x}) \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{tt} = a^2\Delta v, \quad t>0,\ \vec{x}\in\mathbb{R}^3 \\ v\Big|_{t=0} = \varphi(\vec{x}) \\ v_t\Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

Сумма решений $u+v$ этих двух задач есть искомое решение.

Как было доказано в теореме 3.1, первую задачу будет решать функция M_ψ. Для того, чтобы понять, как выглядит решение второй задачи, рассмотрим ещё одну вспомогательную:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, \quad t>0,\ \vec{x}\in\mathbb{R}^3 \\ u\Big|_{t=0} = 0 \\ u_t\Big|_{t=0} = \varphi(\vec{x}) \end{cases}$$

Поскольку функция $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$, то согласно всё той же теореме 3.1, решением вспомогательной задачи является функция $u = M_\varphi \in C^3(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)$. Введём функцию $v = u_t \in C^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)$. Тогда, во-первых,

$$v_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}(u_{tt}) = a^2\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u) = a^2\Delta u_t = a^2\Delta v.$$

Во-вторых,

$$v\Big|_{t=0} = u_t\Big|_{t=0} = \varphi(\vec{x}).$$

Наконец,

$$v_t\Big|_{t=0} = u_{tt}\Big|_{t=0} = a^2\left(\Delta u\right)\Big|_{t=0} = a^2\Delta\left(u\Big|_{t=0}\right) = 0.$$

Последний переход допустим, поскольку мы знаем, что $u=0$ во всём $\mathbb{R}^3$ при $t=0$, и оператор Лапласа не содержит производных по t.

Последние три выражения образуют вторую задачу из (3.9). И её решение есть функция

$$v = \frac{\partial M_\varphi}{\partial t},$$

а сумма решений первой и второй задач дают нам формулу Кирхгофа (3.8). □

Формула Пуассона

Рассмотрим случай, когда $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$.

Теорема 3.3. Пусть $\varphi\in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi\in C^2(\mathbb{R}^2)$, тогда решение задачи Коши для волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, \quad t>0,\ \vec{x}\in\mathbb{R}^2 \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x_1,x_2) \\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(x_1,x_2) \end{cases} \tag{3.10}$$

существует, единственно и задаётся формулой Пуассона

$$u(t,\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial t}M_\varphi + M_\psi, \tag{3.11}$$

где

$$M_g(t,\vec{x}) = \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{|\vec{\xi}-\vec{x}|\le at} \frac{g(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{(at)^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2}} \tag{3.12}$$

Доказательство. Единственность решения гарантируется теоремой 2.2. Построим доказательство на основе метода спуска. Пусть $u = u(t, x_1, x_2, x_3)$. Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения с тремя пространственными координатами:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2) \\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(x_1, x_2) \end{cases} \tag{3.13}$$

Её решение даётся формулой Кирхгофа.

Теперь выполним в этой задаче сдвиг $x_3 + h = \widetilde{x}_3$. С одной стороны, решая задачу, мы получаем функцию $u(t, x_1, x_2, x_3 + h)$ в качестве решения, с другой, сдвиг не меняет условия задачи, а значит, в силу единственности решения $u(t, x_1, x_2, x_3) = u(t, x_1, x_2, x_3 + h)$, причём для любого h. Это значит, что функция u не зависит от x_3, и $u_{x_3x_3} = 0$. Таким образом, задача (3.13) сводится к задаче из условия теоремы.

Осталось преобразовать интегралы. Нам нужно проинтегрировать функцию g, заданную на плоскости $x_3 = 0$. Продолжим её как константу вдоль оси x_3 и будем интегрировать её по сфере в трёхмерном пространстве (Рис. 3.2). Этот интеграл по сфере сводится к интегралу по кругу, лежащему в плоскости $x_3 = 0$. Задача – превратить элемент площади сферы в элемент площади круга. Элемент площади круга на плоскости есть $d\xi_1 d\xi_2$. Поскольку круг представляет собой проекцию сферы на плоскость, то можно написать следующее соотношение

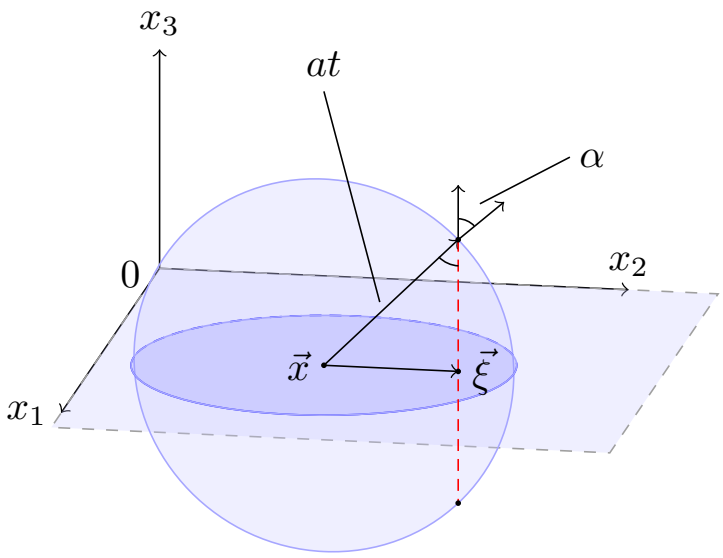


Рис. 3.2. Сведение интеграла по сфере к интегралу по кругу в плоскости x_1x_2.

$$2d\xi_1 d\xi_2 = dS_\xi \cdot \cos(\alpha),$$

где множитель 2 в левой части появляется от того, что значение функции g в точке $\vec{\xi}$ на круге совпадает со значениями этой функции на верхней и нижней частях сферы

(значения функции g в точках пересечения круга и сферы красной пунктирной линией на Рис. 3.2 равны); а угол α – угол между плоскостью $x_3 = 0$ и касательной плоскостью к сфере. Косинус этого угла из прямоугольного треугольника равен

$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{a^2t^2 - |\vec{\xi} - \vec{x}|^2}}{at}$$

На основе этого можем написать, что

$$M_g(t, x_1, x_2) = \frac{t}{4\pi(at)^2} \int\limits_{|\vec{\xi}-\vec{x}|\le at} \frac{2at \cdot g(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{a^2t^2 - |\vec{\xi} - \vec{x}|^2}},$$

что даёт нам формулу (3.12). □

Формула Даламбера

Пользуясь методом спуска, мы можем получить известную формулу Даламбера. Нужно рассмотреть задачу с функцией $u = u(t, x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x_1) \\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(x_1) \end{cases}$$

Сдвигая условия задачи вдоль осей x_2 и x_3 и пользуясь единственностью решения задачи Коши для волнового уравнения, мы приходим к выводу, что u зависит только от t и x_1.

Далее необходимо превратить интеграл по сфере в интеграл по отрезку (Рис. 3.3).

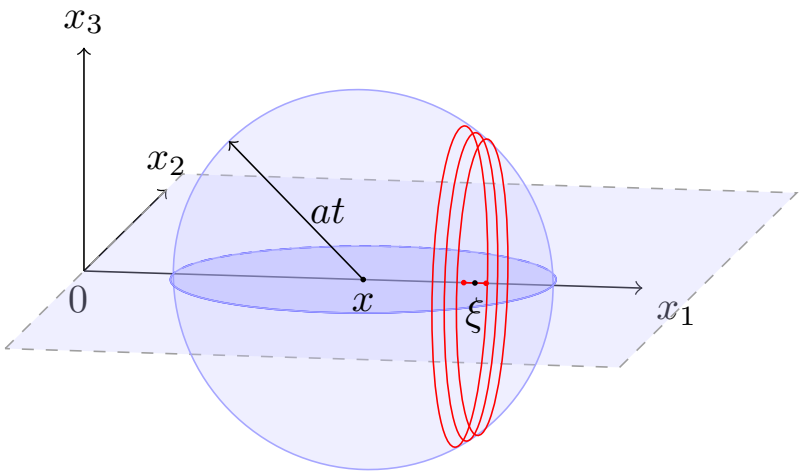


Рис. 3.3. Сведение интеграла по сфере к интегралу по отрезку.

Элемент площади сферы можно переписать в виде

$$dS_\xi = 2\pi \cdot at \cdot d\xi,$$

Тогда

$$M_g(t,x) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} g(\xi)d\xi.$$

Производная по t имеет вид

$$\frac{\partial M_g}{\partial t} = \frac{1}{2}\Big[g(x+at) + g(x-at)\Big].$$

С учётом написанного воспроизводится формула Даламбера:

$$u(t,x) = \frac{\partial M_\varphi}{\partial t} + M_\psi = \frac{1}{2}\Big[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\Big] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi. \tag{3.14}$$

Лекция 4

Уравнение теплопроводности

Уравнение теплопроводности на функцию $u(t, \vec{x})$, где $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{R}$, имеет вид

$$u_t = a^2 \Delta u. \tag{4.1}$$

Это уравнение относится к уравнениям параболического типа. Напомним, что характеристиками этого уравнения являются плоскости $t = \text{const}$. В задачах для уравнения теплопроводности функция u имеет смысл температуры.

Остановимся подробнее на выводе этого уравнения. Он основан на использовании двух физических законов: формулы для количества теплоты, которое необходимо сообщить телу массы m, чтобы его температура увеличилась на Δu

$$\Delta Q = cm\Delta u,$$

где коэффициент c называется удельной теплоёмкостью вещества, и закона Фурье

$$\Delta Q = -k\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\Delta S \Delta t,$$

который показывает, какое количество теплоты пройдёт через площадь ΔS в направлении внешней нормали $\vec{\nu}$ за время Δt. Коэффициент k – коэффициент теплопроводности вещества.

Посмотрим, как изменилось количество теплоты в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ за промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$

$$\Delta Q = Q(t + \Delta t) - Q(t) = \int\limits_{\Omega} c\big(u(t + \Delta t, \vec{x}) - u(t, \vec{x})\big)\rho d\vec{x}$$

или можно написать

$$Q(t) = \int\limits_{\Omega} cu(t, \vec{x})\rho d\vec{x}.$$

Скорость изменения количества теплоты даётся производной по времени

$$\frac{dQ}{dt} = \int\limits_{\Omega} cu_t \rho d\vec{x}.$$

С другой стороны, из закона Фурье следует, что

$$\Delta Q = \int\limits_{\partial\Omega} k\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} dS \cdot \Delta t.$$

Поскольку мы считаем поток входящего тепла в область Ω, то надо брать внутреннюю нормаль вместо внешней, поэтому знак “минус” пропадает. Разделив на Δt и устремив его к нулю, получаем

$$\frac{dQ}{dt} = \int\limits_{\partial\Omega} k\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} dS = \int\limits_{\partial\Omega} (k\nabla u, \vec{\nu}) dS = \int\limits_{\Omega} k\Delta u \, d\vec{x}.$$

В последнем переходе мы использовали формулу Остроградского-Гаусса. Теперь можем приравнять выведенные выражения

$$\int\limits_{\Omega} cu_t\rho \, d\vec{x} = \int\limits_{\Omega} k\Delta u \, d\vec{x}$$

Поскольку область Ω выбирается произвольным образом, то подынтегральные функции должны быть равны:

$$cu_t\rho = k\Delta u.$$

Или, вводя $a^2 = k/(c\rho)$, получаем уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2\Delta u.$$

Первая краевая задача для уравнения теплопроводности

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u, \quad (t,\vec{x}) \in Q = (0;T] \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}, \\ u\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = \alpha(t,\vec{x}), \\ u\Big|_{t=0} = u_0(\vec{x}). \end{cases} \tag{4.2}$$

Решения задачи будем искать в классе $u \in C^{1,2}_{t,x}(Q) \cap C(\overline{Q})$. Где $C^{1,2}_{t,x}(Q)$ – пространство функций, один раз дифференцируемых по t и два раза дифференцируемых по $\vec{x}$ в области Q.

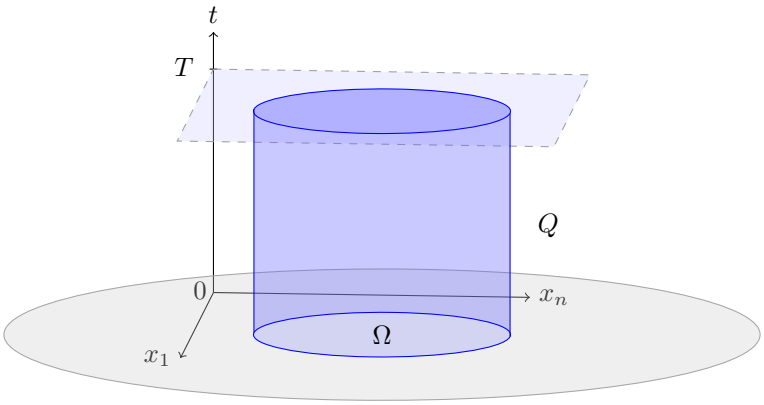


Рис. 4.1. Область Q.

Замечание 4.1. Условие

$$u\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = \alpha(t,\vec{x})$$

называется первым краевым условием. Также существуют второе

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = \alpha(t,\vec{x})$$

и третье

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} + k(t,\vec{x})u\right)\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = \alpha(t,\vec{x})$$

краевые условия.

Физический смысл первого краевого условия – температура на границе области, второго – поток тепла, проходящего через границу области. Третье краевое условие – это связь между потоком тепла и температурой на границе.

Замечание 4.2. Краевые задачи для уравнения теплопроводности решаются методом Фурье.

Объединим первое краевое и начальное условия. Для этого введём поверхность

$$S = \big(\{t=0\}\times\Omega\big) \cup \big((0;T]\times\partial\Omega\big),$$

которая содержит боковую поверхность и основание области Q. Тогда первая краевая задача переписывается в виде

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u, \quad (t,\vec{x}) \in Q = (0;T]\times\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}, \\ u\Big|_{(t,\vec{x})\in S} = \varphi(t,\vec{x}), \quad \varphi \in C(S) \end{cases} \tag{4.3}$$

или

$$\begin{cases} Lu = 0, \quad (t,\vec{x}) \in Q = (0;T]\times\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}, \\ u\Big|_{(t,\vec{x})\in S} = \varphi(t,\vec{x}), \quad \varphi \in C(S), \end{cases} \tag{4.4}$$

где введён оператор

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta.$$

Теорема 4.1. (Принцип максимума)
Пусть $u \in C^{1,2}_{t,x}(Q)\cap C(\overline{Q})$, и $Lu = 0$ выполнено в Q. Тогда для любой точки $(t,\vec{x}) \in Q$ верно соотношение

$$\inf_S u \le u(t,\vec{x}) \le \sup_S u \tag{4.5}$$

Замечание 4.3. Область Q не обязана быть цилиндром. Она может содержать полости, т.е. не быть односвязной, а боковая граница может принимать довольно сложную форму.

Лемма 4.1. Пусть $u \in C^{1,2}_{t,x}(Q)\cap C(\overline{Q})$ достигает $\min\limits_{\overline{Q}} u = u(t_0,\vec{x}_0)$, $(t_0,\vec{x}_0) \in S$. Тогда

$$Lu(t_0,\vec{x}_0) \le 0. \tag{4.6}$$

Доказательство. Рассмотрим выражения, входящие в Lu. Первая производная по времени в точке минимума, такой что $t_0 < T$, естественно, равна нулю, а в точках верхнего основания цилиндра она является неположительной:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t_0, \vec{x}_0) = 0, & t_0 < T, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t_0, \vec{x}_0) \le 0, & t_0 = T. \end{cases}$$

Вторые производные по пространственным переменным в точках минимума должны быть неотрицательными:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(t_0, \vec{x}_0) \ge 0,$$

а значит

$$\Delta u(t_0, \vec{x}_0) \ge 0.$$

Из сделанных оценок следует утверждение леммы. □

Лемма 4.2. Пусть для $u \in C^{1,2}_{t,x}(Q) \cap C(\overline{Q})$ верно

$$\begin{cases} Lu \ge 0, & (t, \vec{x}) \in Q, \\ u\Big|_{(t,\vec{x}) \in S} \ge 0. \end{cases}$$

Тогда

$$u \ge 0, \quad (t, \vec{x}) \in Q. \tag{4.7}$$

Доказательство. Представим функцию u в виде

$$u = ve^t,$$

тогда

$$Lu = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right) ve^t = \frac{\partial v}{\partial t}e^t + ve^t - a^2(\Delta v)e^t = Lv \cdot e^t + ve^t = \big(Lv + v\big)e^t.$$

Построим доказательство от противного. Пусть $u < 0$ в Q, тогда $v < 0$ в Q. Пусть минимум v достигается в точке $(t_0, \vec{x}_0)$, т.е.

$$\min_{\overline{Q}} v = v(t_0, \vec{x}_0) < 0,$$

причём $(t_0, \vec{x}_0) \notin S$, что следует из условия неотрицательности u в точках поверхности S. По лемме 4.1 имеем

$$Lv(t_0, \vec{x}_0) \le 0.$$

Из этого следует, что

$$Lu(t_0, \vec{x}_0) = \big(Lv + v\big)e^t\Big|_{(t_0,\vec{x}_0) \in Q} < 0,$$

что противоречит условию леммы. Следовательно, $u \ge 0$ в Q. □

Лемма 4.3. Пусть для $u \in C^{1,2}_{t,x}(Q) \cap C(\overline{Q})$ верно

$$\begin{cases} Lu \le 0, \quad (t, \vec{x}) \in Q, \\ u\Big|_{(t,\vec{x})\in S} \le 0. \end{cases}$$

Тогда

$$u \le 0, \quad (t, \vec{x}) \in Q. \tag{4.8}$$

Доказательство. Сделаем замену функции $u = -v$, тогда

$$\begin{cases} Lv \ge 0, \quad (t, \vec{x}) \in Q, \\ v\Big|_{(t,\vec{x})\in S} \ge 0. \end{cases}$$

По лемме 4.2 функция $v \ge 0$ в Q. Следовательно, функция $u \le 0$ в Q. □

Наконец, докажем теорему 4.1.

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} m = \inf\limits_S u, \\ M = \sup\limits_S u. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $v_1 = u - m$. Для неё $Lv_1 = 0$ и $v_1\Big|_{(t,\vec{x})\in S} \ge 0$. Тогда, согласно лемме 4.2, $v_1 \ge 0$ в Q. Следовательно, $u(t, \vec{x}) \ge m = \inf\limits_S u$ для любой точки $(t, \vec{x}) \in Q$.

Теперь введём функцию $v_2 = M - u$. Тогда $Lv_2 = 0$ и $v_2\Big|_{(t,\vec{x})\in S} \ge 0$. По лемме 4.2 получаем, что $v_2 \ge 0$ в Q. Тогда $u(t, \vec{x}) \le M = \sup\limits_S u$ для любой точки $(t, \vec{x}) \in Q$. □

Следствие 4.1. (Теорема о единственности решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности)
Решение задачи (4.4) единственно.

Доказательство. Пусть у задачи (4.4) существует два решения u_1 и u_2. Построим функцию $u = u_1 - u_2$. Она удовлетворяет следующей задаче:

$$\begin{cases} Lu = 0, \quad (t, \vec{x}) \in Q = (0; T] \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}, \\ u\Big|_{(t,\vec{x})\in S} = 0. \end{cases}$$

поскольку функция u на поверхности S обращается в нуль, то

$$\begin{cases} \inf\limits_S u = 0, \\ \sup\limits_S u = 0. \end{cases}$$

Из принципа максимума следует, что в области Q $u \equiv 0$. Следовательно, $u_1 \equiv u_2$. □

Следствие 4.2. (Непрерывная зависимость решений от начальных условий)
Пусть u_1 и u_2 – два решения задачи (4.4), отвечающие соответственно двум граничным условиям с функциями φ_1 и φ_2. Тогда

$$||u_1 - u_2||_{C(\overline{Q})} \leq ||\varphi_1 - \varphi_2||_{C(S)}. \tag{4.9}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $u = u_1 - u_2$. Она удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} Lu = 0, \quad (t, \vec{x}) \in Q = (0; T] \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}, \\ u\Big|_{(t,\vec{x})\in S} = \varphi_1 - \varphi_2. \end{cases}$$

Согласно теореме 4.1, имеем

$$u(t, \vec{x}) \leq \sup_S(\varphi_1 - \varphi_2) \leq \sup_S |\varphi_1 - \varphi_2| = ||\varphi_1 - \varphi_2||_{C(S)}.$$

С другой стороны, согласно той же теореме, верно, что

$$-u(t, \vec{x}) \leq \sup_S(\varphi_2 - \varphi_1) \leq \sup_S |\varphi_1 - \varphi_2| = ||\varphi_1 - \varphi_2||_{C(S)}.$$

Таким образом, для любой точки $(t, \vec{x}) \in \overline{Q}$ выполняется

$$|u(t, \vec{x})| \leq ||\varphi_1 - \varphi_2||_{C(S)},$$

а следовательно

$$\sup_{\overline{Q}} |u(t, \vec{x})| = ||u_1 - u_2||_{C(\overline{Q})} \leq ||\varphi_1 - \varphi_2||_{C(S)}.$$

□

Следствие 4.3. (Принцип сравнения)
Пусть заданы функции u и v, такие, что верно

$$\begin{cases} Lu = 0, \quad (t, \vec{x}) \in Q, \\ Lv = 0, \quad (t, \vec{x}) \in Q, \\ u \geq v, \quad (t, \vec{x}) \in S, \end{cases}$$

тогда

$$u \geq v, \quad (t, \vec{x}) \in Q. \tag{4.10}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $w = u - v$. Для неё выполняется

$$\begin{cases} Lw = 0, \quad (t, \vec{x}) \in Q, \\ w\Big|_{(t,\vec{x})\in S} \geq 0. \end{cases}$$

По лемме 4.2 получаем, что $w \geq 0$ в Q, откуда $u \geq v$ в Q. □

Следствие 4.4. Пусть функции u и v удовлетворяют

$$\begin{cases} Lu = 0, & (t, \vec{x}) \in Q, \\ Lv = 0, & (t, \vec{x}) \in Q, \\ |u| \leq v, & (t, \vec{x}) \in S, \end{cases}$$

тогда

$$|u| \leq v, \quad (t, \vec{x}) \in Q. \tag{4.11}$$

Доказательство. Условие $|u| \leq v$ в S равносильно тому, что $-v \leq u \leq v$ в S. Тогда для каждой из частей неравества выполняется принцип сравнения (следствие 4.3), из которого следует, что $-v \leq u \leq v$ в Q. Следовательно, $|u| \leq v$ в Q. $\square$

Лекция 5

Задача Коши для уравнения теплопроводности

Задача Коши для уравнения теплопроводности на функцию $u(t,\vec{x})$ имеет следующий вид

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u, \quad t>0,\ \vec{x}\in\mathbb{R}^n, \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(\vec{x}). \end{cases} \tag{5.1}$$

Замечание 5.1. Задача Коши для уравнения теплопроводности не попадает под действие теоремы Коши-Ковалевской, поскольку начальное условие задаётся на характеристике уравнения.

Будем искать решение задачи в в классе функций $u\in C^{1,2}_{t,x}(\Pi_T)\cap C_b(\overline{\Pi}_T)$, где Π_T – слой вида

$$\Pi_T = (0;T]\times\mathbb{R}^n,$$

а $C_b(\overline{\Pi}_T)$ – пространство непрерывных ограниченных на $\overline{\Pi}_T$ функций, т.е. для любой точки $(t,\vec{x})\in\overline{\Pi}_T$

$$|u(t,\vec{x})|\le M.$$

При этом от начального условия мы требуем, чтобы $\varphi\in C_b(\mathbb{R}^n)$.

Теорема единственности

Теорема 5.1. (Теорема единственности)
Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности (5.1) единственно в классе функций, ограниченных в слое Π_T.

Замечание 5.2. Снятие условия ограниченности решений имеет интересные следствия. Существует пример А. Н. Тихонова, который говорит о том, что у задачи Коши для уравнения теплопроводности с нулевыми начальными условиями существует ненулевое решение, которое при $|\vec{x}|\to+\infty$ растёт быстрее, чем $e^{|\vec{x}|^2}$.

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 – два ограниченных решения задачи (5.1). Их разность $v=u_1-u_2$ также является решением задачи Коши, но с нулевыми начальными условиями

$$\begin{cases} v_t = a^2\Delta v, \\ v\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Введём также функцию

$$w = \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2a^2nt.$$

Её производные имеют вид

$$w_t = 2a^2n, \qquad w_{x_kx_k} = 2, \qquad \Delta w = 2n.$$

Откуда видно, что

$$\begin{cases} w_t = a^2 \Delta w, \\ w\Big|_{t=0} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2. \end{cases}$$

Введём цилиндр радиуса R

$$Q_R = (0;T] \times \left\{ \vec{x} \;\Big|\; |\vec{x}| < R \right\}.$$

Сравним v и w на границе Q_R. На основании цилиндра имеем

$$|v|\Big|_{t=0} = 0 \le \varepsilon w\Big|_{t=0}, \ \forall \varepsilon > 0.$$

На боковой поверхности цилиндра

$$|v|\Big|_{|\vec{x}|=0} = |u_1 - u_2|\Big|_{|\vec{x}|=0} \le M + M = 2M.$$

Выберем радиус цилиндра таким образом, что для любого $\varepsilon > 0$ было верно

$$2M \le \varepsilon R^2.$$

Но тогда имеем

$$|v|\Big|_{|\vec{x}|=0} \le 2M \le \varepsilon R^2 \le \varepsilon(R^2 + 2a^2 nt) = \varepsilon w\Big|_{|\vec{x}|=R}.$$

Таким образом, на границе цилиндра Q_R выполняется условие следствия 4.4, которое говорит о том, что при достаточно большом R

$$|v(t,\vec{x})| \le \varepsilon R \quad \forall (t,\vec{x}) \in Q_R \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Теперь мы фиксируем точку $(t,\vec{x})$ и устремляем $\varepsilon \to 0$, тогда $|v| \le 0$, откуда следует, что $v \equiv 0$, или $u_1 \equiv u_2$. □

Теорема существования

Формулировка

Теорема 5.2. (Теорема существования)
Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, \quad t > 0, \ \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(\vec{x}) \in C_b(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

в классе функций $u \in C^{1,2}_{t,x}(\Pi_T) \cap C_b(\overline{\Pi}_T)$ существует и задаётся интегралом Пуассона

$$u(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\vec{x}-\vec{\xi}|^2}{4a^2 t}} \varphi(\vec{\xi}) d\vec{\xi}. \tag{5.2}$$

Замечание 5.3. Интеграл Пуассона представляет собой свёртку фундаментального решения уравнения теплопроводности $\Gamma_n(t,\vec{x})$, где $t>0$, с начальным условием φ. Фундаментальное решение имеет вид

$$\Gamma_n(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4a^2 t}}.$$

То есть

$$u(t,\vec{x}) = \big(\Gamma_n(t,\cdot) * \varphi\big)(t,\vec{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_n(t,\vec{x}-\vec{\xi})\varphi(\vec{\xi})d\vec{\xi}.$$

Существование свёртки обусловлено тем, что функция φ ограничена во всём пространстве, а фундаментальное решение – ограничено и убывает на бесконечности.

Свойства фундаментального решения

Перед доказательством теоремы обсудим основные свойства фундаментального решения.

Начнём с простого случая, когда $n=1, a=1$. Тогда оператор теплопроводности имеет вид

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

а фундаментальное решение задаётся выражением

$$\Gamma_1(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Основные свойства фундаментального решения:

1) $\Gamma_1 \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$.

2) $L\Gamma_1 = 0$.
   Действительно, производные Γ_1 равны

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma_1}{\partial t} &= -\frac{1}{2t}\Gamma_1 + \frac{x^2}{4t^2}\Gamma_1,\\
\frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} &= -\frac{x}{2t}\Gamma_1,\\
\frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2t}\Gamma_1 + \frac{x^2}{4t^2}\Gamma_1.
\end{aligned}$$

   Отсюда видно, что $L\Gamma_1 = 0$.

3) Интеграл от Γ_1 по пространственной координате равен единице:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \Gamma_1(t,x)dx = 1.$$

   Чтобы проверить это, сделаем в интеграле замену переменных $y = x/(2\sqrt{t})$, тогда

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = 1.$$

4) Предел Γ_1 при $t \to +0$

$$\lim_{t\to+0} \Gamma_1(t,x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases} = \delta(x),$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция, строгого определения которой в данном курсе не предусматривается.

5) Для любого $\varepsilon > 0$ верно

$$\lim_{t\to+0} \int\limits_{|x|<\varepsilon} \Gamma_1(t,x)dx = 1.$$

Для проверки этого свойства рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\varepsilon/(2\sqrt{t})}^{\varepsilon/(2\sqrt{t})} e^{-y^2} dy \xrightarrow[t\to+0]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = 1.$$

6) Функцию Γ_1 можно доопределить при $t \leq 0$ как $\Gamma_1(t,x) = 0$. Откуда следует, что $\Gamma_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus (0;0))$.

7) $\Gamma_1(t,x)$ – плотность нормального распределения с нулевым мат. ожиданием и дисперсией $\sigma^2 = 2t$.

8) Функция Γ_1 решает задачу

$$\begin{cases} L\Gamma_1 = 0, \\ \Gamma_1(0,x) = \delta(x). \end{cases}$$

Перейдём к рассмотрению многомерного случая, но с $a = 1$. Оператор теплопроводности имеет вид

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta,$$

а фундаментальное решение задаётся следующей формулой

$$\Gamma_n(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4t}}.$$

Заметим, что

$$\Gamma_n(t,\vec{x}) = \Gamma_1(t,x_1) \cdot \Gamma_1(t,x_2) \cdot \ldots \cdot \Gamma_1(t,x_n).$$

Обсудим свойства многомерного фундаментального решения:

1) $\Gamma_n \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$.

2) $L\Gamma_n = 0$.
Вычислим производные Γ_n:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma_n}{\partial t} &= \left(\frac{\partial \Gamma_1(t,x_1)}{\partial t}\right)\cdot \Gamma_1(t,x_2)\cdot \ldots \cdot \Gamma_1(t,x_n) + \\
&+ \Gamma_1(t,x_1)\cdot \left(\frac{\partial \Gamma_1(t,x_2)}{\partial t}\right)\cdot \ldots \cdot \Gamma_1(t,x_n) + \\
&+ \ldots + \Gamma_1(t,x_1)\cdot \Gamma_1(t,x_2)\cdot \ldots \cdot \left(\frac{\partial \Gamma_1(t,x_n)}{\partial t}\right), \\
\Delta\Gamma_n &= \left(\frac{\partial^2 \Gamma_1(t,x_1)}{\partial x_1^2}\right)\cdot \Gamma_1(t,x_2)\cdot \ldots \cdot \Gamma_1(t,x_n) + \\
&+ \Gamma_1(t,x_1)\cdot \left(\frac{\partial^2 \Gamma_1(t,x_2)}{\partial x_2^2}\right)\cdot \ldots \cdot \Gamma_1(t,x_n) + \\
&+ \ldots + \Gamma_1(t,x_1)\cdot \Gamma_1(t,x_2)\cdot \ldots \cdot \left(\frac{\partial^2 \Gamma_1(t,x_n)}{\partial x_n^2}\right),
\end{aligned}$$

Вычтем одно из другого, тогда получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma_n}{\partial t} - \Delta\Gamma_n = L\Gamma_n = \\
&= \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)\Gamma_1(t,x_1)\right]\cdot \Gamma_1(t,x_2)\cdot \ldots \cdot \Gamma_1(t,x_n) + \\
&+ \Gamma_1(t,x_1)\cdot \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\Gamma_1(t,x_2)\right]\cdot \ldots \cdot \Gamma_1(t,x_n) + \\
&+ \ldots + \Gamma_1(t,x_1)\cdot \Gamma_1(t,x_2)\cdot \ldots \cdot \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)\Gamma_1(t,x_n)\right] = 0.
\end{aligned}$$

3) Интеграл от Γ_n по пространственным переменным равен единице:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_n(t,\vec{x})d\vec{x} = 1.$$

Это следует из разбиения данного интеграла на n одномерных, каждый из которых равен 1.

4) Предел Γ_n при $t \to +0$

$$\lim_{t\to+0} \Gamma_n(t,\vec{x}) = \begin{cases} 0, & \vec{x} \neq 0 \\ +\infty, & \vec{x} = 0 \end{cases} = \delta(\vec{x}),$$

где $\delta(\vec{x})$ – многомерная дельта-функция.

5) Для любого $\varepsilon > 0$ верно

$$\lim_{t\to+0} \int\limits_{|\vec{x}|<\varepsilon} \Gamma_n(t,\vec{x})d\vec{x} = 1.$$

6) Функцию Γ_n можно доопределить при $t \leq 0$ как $\Gamma_n(t, \vec{x}) = 0$. Откуда следует, что $\Gamma_n \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus (0;0))$.

Наконец, полагаем $a \neq 1$. В уравнении теплопроводности мы делаем замену переменной $\tau = a^2 t$, тогда

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta = a^2\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \Delta\right).$$

Фундаментальное решение задаётся формулой

$$\frac{1}{(2\sqrt{\pi\tau})^n} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4\tau}} = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4a^2 t}} = \Gamma_n(t, \vec{x}).$$

Основные свойства наследуются из предыдущего случая:

1) $\Gamma_n \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$.

2) $L\Gamma_n = 0$.

3) Интеграл от Γ_n по пространственным переменным равен единице:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_n(t, \vec{x}) d\vec{x} = 1.$$

4) Для любого $\varepsilon > 0$ верно

$$\lim_{t \to +0} \int\limits_{|\vec{x}| < \varepsilon} \Gamma_n(t, \vec{x}) d\vec{x} = 1, \qquad \lim_{t \to +0} \int\limits_{|\vec{x}| > \varepsilon} \Gamma_n(t, \vec{x}) d\vec{x} = 0.$$

5) Функция $\Gamma_n(t, \vec{x})$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Gamma_n}{\partial t} = a^2 \Delta \Gamma_n, \\ \Gamma_n(0, \vec{x}) = \delta(\vec{x}). \end{cases}$$

6) $\Gamma_n(t, \vec{x})$ – плотность нормального распределения с нулевым мат. ожиданием и скалярной матрицей ковариации $\sigma^2 E$, где $\sigma^2 = 2a^2 t$.

Доказательство теоремы существования

Итак, докажем теорему 5.2.

Доказательство. Во-первых, так как $\Gamma_n \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, то и $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. Во-вторых, из того, что $L\Gamma_n = 0$, следует

$$Lu = L \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_n(t, \vec{x} - \vec{\xi}) \varphi(\vec{\xi}) d\vec{\xi} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(L\Gamma_n(t, \vec{x} - \vec{\xi})\right) \varphi(\vec{\xi}) d\vec{\xi} = 0.$$

Теперь оценим $|u|$:

$$|u(t,\vec{x})| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_n(t,\vec{x}-\vec{\xi})|\varphi(\vec{\xi})|d\vec{\xi} \leq \sup|\varphi(\vec{\xi})| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_n(t,\vec{x}-\vec{\xi})d\vec{\xi} = \sup|\varphi(\vec{\xi})| \cdot 1,$$

откуда следует, что $u \in C_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$.

Замечание 5.4. На самом деле здесь был доказан принцип максимума: если функция $u \in C_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, то

$$\inf\varphi(\vec{x}) \leq u(t,\vec{x}) \leq \sup\varphi(\vec{x}).$$

Осталось проверить выполнение начального условия. Рассмотрим разность

$$u(t,\vec{x}) - \varphi(\vec{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_n(t,\vec{x}-\vec{\xi})\varphi(\vec{\xi})d\vec{\xi} - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_n(t,\vec{x}-\vec{\xi})\varphi(\vec{x})d\vec{\xi} =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_n(t,\vec{x}-\vec{\xi})\left(\varphi(\vec{\xi}) - \varphi(\vec{x})\right)d\vec{\xi},$$

$$|u(t,\vec{x}) - \varphi(\vec{x})| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma_n(t,\vec{x}-\vec{\xi})\left|\varphi(\vec{\xi}) - \varphi(\vec{x})\right|d\vec{\xi} = J_1 + J_2.$$

Рассмотрим по очереди каждое из слагаемых

$$J_1 = \int\limits_{|\vec{\xi}-\vec{x}|<\delta} \Gamma_n(t,\vec{x}-\vec{\xi})\left|\varphi(\vec{\xi}) - \varphi(\vec{x})\right|d\vec{\xi},$$
$$J_2 = \int\limits_{|\vec{\xi}-\vec{x}|>\delta} \Gamma_n(t,\vec{x}-\vec{\xi})\left|\varphi(\vec{\xi}) - \varphi(\vec{x})\right|d\vec{\xi}.$$

Выберем δ таким, чтобы при $|\vec{\xi}-\vec{x}| < \delta$ было верно $\left|\varphi(\vec{\xi}) - \varphi(\vec{x})\right| \leq \varepsilon$, что возможно в силу непрерывности функции φ. Тогда для первого интеграла получим, что

$$J_1 \leq \varepsilon \int\limits_{|\vec{\xi}-\vec{x}|<\delta} \Gamma_n(t,\vec{x}-\vec{\xi})d\vec{\xi} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to+0} J_1 \leq \varepsilon \lim_{t\to+0} \int\limits_{|\vec{\xi}-\vec{x}|<\delta} \Gamma_n(t,\vec{x}-\vec{\xi})d\vec{\xi} = \varepsilon.$$

Во втором интеграле можно оценить модуль разности значений функции φ суммой модулей этих значений, каждый из которых в силу ограниченности φ не превосходит некоторой константы M. Поэтому

$$J_2 \leq 2M \int\limits_{|\vec{\xi}-\vec{x}|>\delta} \Gamma_n(t,\vec{x}-\vec{\xi})d\vec{\xi} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to+0} J_2 \leq 2M \lim_{t\to+0} \int\limits_{|\vec{\xi}-\vec{x}|>\delta} \Gamma_n(t,\vec{x}-\vec{\xi})d\vec{\xi} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to+0} |u(t,\vec{x}) - \varphi(\vec{x})| \leq \varepsilon.$$

Устремив $\varepsilon \to 0$, можем завершить доказательство теоремы. □

Анализ интеграла Пуассона

Замечание 5.5. В интеграле Пуассона функция $\varphi(\vec{x})$ не обязана быть непрерывной, но при этом решение задачи Коши $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$.

Замечание 5.6. В интеграле Пуассона функция $\varphi(\vec{x})$ не обязана быть ограниченной, достаточно оценки $|\varphi(\vec{x})| \leq Ae^{B|\vec{x}|^2}$. Решение существует при $0 < t < (4a^2B)^{-1}$.

Замечание 5.7. Скорость распространения тепла оказывается бесконечной. Рассмотрим пример: пусть $\varphi = 0$ при $\vec{x} \notin \Omega$ и $\varphi > 0$ при $x \in \Omega$. Тогда $\forall t > 0$, $\forall \vec{x} \in \Omega$ верно, что

$$u(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\vec{x}-\vec{\xi}|^2}{4a^2t}} \varphi(\vec{\xi}) d\vec{\xi} = u(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{\Omega} e^{-\frac{|\vec{x}-\vec{\xi}|^2}{4a^2t}} \varphi(\vec{\xi}) d\vec{\xi} > 0.$$

Замечание 5.8. Температура стабилизируется, т.е. существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t,\vec{x})$, при тех или иных начальных данных.
Аккуратные формулировки и доказательства теорем о стабилизации, а также решения задач на поиск предела $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t,\vec{x})$ можно найти по ссылке
http://new.math.msu.su/diffur/ZADACH.PDF

Лекция 6

Уравнения Лапласа и Пуассона

Уравнение

$$\Delta u = 0 \tag{6.1}$$

называется уравнением Лапласа. Его решением является гармоническая функция. Уравнение

$$\Delta u = f(\vec{x}) \tag{6.2}$$

называется уравнением Пуассона. В декартовых координатах оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \ldots + u_{x_nx_n}. \tag{6.3}$$

К уравнениям Лапласа и Пуассона могут привести следующие задачи:

- поиск формы мембраны во время колебательного процесса

  $$u_{tt} = a^2\Delta u + f(t, \vec{x}).$$

  Чтобы существовало стационарное решение, необходимо, чтобы $f = f(\vec{x})$.

- поиск стационарной температуры

  $$u_t = a^2\Delta u + f(t, \vec{x}).$$

- задачи электростатики

  $$\Delta u = \rho.$$

  Здесь под $u(\vec{x})$ понимают потенциал электростатического поля, а под $\rho(\vec{x})$ – плотность заряда. Помимо этого в физике вводится напряжённость поля

  $$\vec{E} = -\nabla u.$$

Краевые задачи

Перечислим краевые задачи, связанные с уравнениями Лапласа и Пуассона в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Задача Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u = f(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega, & u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}), \\ u\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = \varphi(\vec{x}), & f \in C(\Omega),\ \varphi \in C(\partial\Omega). \end{cases} \tag{6.4}$$

Задача Неймана:

$$\begin{cases} \Delta u = f(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega, & u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = \psi(\vec{x}), & f \in C(\Omega),\ \psi \in C(\partial\Omega). \end{cases} \tag{6.5}$$

Третья краевая задача:

$$\begin{cases} \Delta u = f(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega, & u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} + k(\vec{x})u\right)\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = \varphi(\vec{x}), & f \in C(\Omega),\ \varphi \in C(\partial\Omega). \end{cases} \tag{6.6}$$

Помимо этих задач выделяют внешние задачи: когда Ω является внешностью ограниченной области. Также существует деление на классическую и обобщённую постановку задач. Описанные выше задачи относятся к классическим.

Пример Адамара

Для уравнения Лапласа можно также сформулировать задачу Коши, но такая задача будет некорректной. Под корректной задачей понимается такая, решение которой существует, оно единственное и непрерывно зависит от данных задачи (начальных и/или краевых условий, неоднородности уравнения).

Рассмотрим пример (пример Адамара). Поставим задачу о поиске функции $u = u(t, x)$, удовлетворяющей задаче:

$$\begin{cases} u_{tt} = -u_{xx}, \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \\ u_t\Big|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{6.7}$$

Условие данной задачи попадает под действие теоремы Ковалевской, следовательно, решение такой задачи существует и единственно. Однако это решение не является непрерывно зависящим от начальных данных. Введём последовательность начальных функций

$$\varphi_k(x) = c_k \sin(kx),$$

тогда решение, отвечающее k-ому члену последовательности имеет вид

$$u_k(t, x) = c_k \cosh(kt) \sin(kx).$$

Пусть при этом последовательность коэффициентов задаётся выражением

$$c_k = e^{-\sqrt{k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

тогда

$$\varphi_k = e^{-\sqrt{k}} \sin(kx) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

причём в пространстве функций, бесконечно дифференцируемых на вещественной оси. Но функции $u_k = e^{-\sqrt{k}} \cosh(kt) \sin(kx)$ не стремятся к нулю. Рассмотрим норму u_k в пространстве непрерывных функций

$$||u_k(t, \cdot)||_C = e^{-\sqrt{k}} \cosh(kt) \sim e^{-\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{2} e^{k|t|} = \frac{1}{2} e^{k|t| - \sqrt{k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty.$$

Гармонические функции. Условия Коши-Римана

Определение 6.1. Функция $u(\vec{x}) \in C^2(\Omega)$ называется **гармонической** в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если $\Delta u = 0$ в Ω.

Приведём несколько примеров гармонических функций:

- линейные функции $u(\vec{x}) = a_0 + \sum a_n x_n$;
- гармонические многочлены, например, xy, $x^2 - y^2$, xyz,...;
- функции, возникающие в методе Фурье, например, $e^{\omega x}\sin(\omega y)$, $\cosh(\omega x)\sin(\omega y)$, $\sin(3x)\sin(4y)\sinh(5z)$ в декартовой системе координат и $r^\omega\cos(\omega\varphi)$, $r^2\cos(2\varphi) = x^2 - y^2$, $r^{-1}\cos(\varphi) = x/(x^2+y^2)$ в полярной;
- потенциал точечного заряда (фундаментальное решение): для трехмерного пространства – $r^{-1} = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$, для случая $n \geq 3$ – r^{2-n}, при $n = 2$ – $\ln r$;
- голоморфные функции, например, ($n = 2$ и $z = x + iy$) $\Re z^2$, $\Im z^2$, $\Re z^3$, $\Re z^{-1}$, $\Re e^z$;
- "одномерные" гармонические функции $\Leftrightarrow$ линейные.

Рассмотрим подробнее голоморфные функции. Пусть задана функция f комплексного аргумента z

$$f(z) = u(u,y) + iv(x,y).$$

Если эта функция является аналитической, то функции u и v будут гармоническими. Вспомним, что комплексное число можно представить в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha E + \beta J,$$

где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J^2 = -E.$$

Если рассматривать функцию f не как отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, а как отображение из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, тогда возникающая матрица Якоби имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, производная f должна быть комплексным числом, поэтому

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \tag{6.8}$$

Продифференцировав первое уравнение по y, а второе по x, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad \Rightarrow \qquad v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Аналогичное соотношение получается и для функции u

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \Rightarrow \qquad u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Встаёт вопрос: можно ли восстановить функцию u, зная функцию v? Иными словами, можно ли по вещественной (или мнимой) части аналитической функции восстановить всю функцию целиком? Зная функцию v, можно написать уравнение на u

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy = 0. \tag{6.9}$$

Из того, что функция v является гармонической, следует, что данное уравнение – уравнение в полных дифференциалах. Следовательно, функцию u можно восстановить с точностью до константы.

Формулы Грина

Теорема 6.1. (Первая формула Грина)
Пусть $u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ и $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, тогда

$$\int\limits_{\Omega} u \Delta v d\vec{x} = -\int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) d\vec{x} + \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \vec{\nu}} dS. \tag{6.10}$$

Доказательство. Вспомним, как выглядела формула Остроградского-Гаусса

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_k} d\vec{x} = \int\limits_{\partial\Omega} w \cdot \nu_k dS, \tag{6.11}$$

где ν_k – k-ая компонента вектора внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$, и функция $w \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Пусть функция w имеет вид

$$w = u\frac{\partial v}{\partial x_k},$$

тогда

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(u\frac{\partial v}{\partial x_k}\right) d\vec{x} = \int\limits_{\Omega} u\frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} d\vec{x} + \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k} d\vec{x} = \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x_k} \cdot \nu_k dS.$$

Просуммируем последнее выражение по k

$$\int\limits_{\Omega} u \Delta v d\vec{x} + \int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) d\vec{x} = \int\limits_{\partial\Omega} u(\nabla v, \nu) dS.$$

Перебрасывая второе слагаемое в левой части направо, получаем искомое выражение. □

Теорема 6.2. (Вторая формула Грина)
Пусть $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, тогда

$$\int\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) d\vec{x} = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{\nu}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \right) dS. \tag{6.12}$$

Доказательство. В формуле (6.10) поменяем u и v местами. Имеем

$$\int\limits_{\Omega} u\Delta v d\vec{x} = -\int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) d\vec{x} + \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \vec{\nu}} dS,$$
$$\int\limits_{\Omega} v\Delta u d\vec{x} = -\int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) d\vec{x} + \int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} dS.$$

Вычитая второе уравнение из первого, получаем вторую формулу Грина. □

Теорема 6.3. (Теорема о потоке)
Пусть $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ и $\Delta u = 0$ в Ω, тогда

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} dS = 0. \tag{6.13}$$

Доказательство. Рассмотрим первую формулу Грина

$$\int\limits_{\Omega} v\Delta u d\vec{x} = -\int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) d\vec{x} + \int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} dS$$

с $v \equiv 1$. Тогда первое слагаемое в правой части равно нулю, а левая часть обнуляется, поскольку u – гармоническая. □

Следствие 6.1. Пусть $\Omega_2 \subset \Omega_1$ и $\Delta u = 0$ в $\Omega_1 \setminus \Omega_2$, тогда

$$\int\limits_{\partial\Omega_1} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} dS = \int\limits_{\partial\Omega_2} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} dS \tag{6.14}$$

Доказательство. $\Delta u = 0$ в $\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_2$, тогда

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} dS = 0.$$

Так как $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \Omega_2$, причём внешняя нормаль к $\partial\Omega$ – внешняя для $\partial\Omega_1$ и внутренняя для $\partial\Omega_2$, то

$$\int\limits_{\partial\Omega_1} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} dS - \int\limits_{\partial\Omega_2} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} dS = 0.$$

□

Фундаментальное решение оператора Лапласа

Определение 6.2. Фундаментальное решение оператора Лапласа $E(\vec{x})$ – это функция, удовлетворяющая следующим требованиям:

1) $E(\vec{x}) = \mathcal{E}(|\vec{x}|)$;

2) $\Delta E(\vec{x}) = 0$ при $\vec{x} \neq 0$;

3) нормировка:

$$\int\limits_{|\vec{x}|=1} \frac{\partial E}{\partial \vec{\nu}} dS = 1. \tag{6.15}$$

С точки зрения физики, $E(\vec{x})$ – это потенциал единичного точечного заряда.

Из того, что фундаментальное решение нормировано условием (6.15), по следствию 6.1 имеем

$$\int\limits_{|\vec{x}|=\rho} \frac{\partial E}{\partial \vec{\nu}} dS = 1$$

для произвольного ρ. Более того, если $0 \in \Omega$, то

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial E}{\partial \vec{\nu}} dS = 1.$$

Полученный результат в физике называется **теоремой Гаусса**: поток вектора напряжённости электростатического поля через замкнутую поверхность равен величине заряда, ограниченного этой поверхностью.

Найдём явный вид фундаментального решения. Пусть $r = |\vec{x}|$. Можем посчитать, чему равна производная фундаментального решения по r на границе единичной сферы:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r}\Big|_{r=1} = \frac{\partial E}{\partial \vec{\nu}}\Big|_{|\vec{x}|=1}.$$

Тогда

$$\int\limits_{|\vec{x}|=1} \frac{\partial E}{\partial \vec{\nu}} dS = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r}\Big|_{r=1} \cdot \int\limits_{|\vec{x}|=1} dS = 1,$$

откуда

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r}\Big|_{r=1} = \frac{1}{\sigma_n},$$

где σ_n – площадь единичной n-мерной сферы. Проводя такие же вычисления для сферы радиуса ρ, получаем, что

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r}\Big|_{r=\rho} = \frac{1}{\sigma_n \rho^{n-1}}.$$

Посмотрим, как посчитать Δf, где $f = f(r) = f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2})$. Для начала вычислим градиент

$$\nabla f(|\vec{x}|) = f'(|\vec{x}|) \cdot \nabla|\vec{x}| = f'(|\vec{x}|) \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}.$$

Затем возьмём вторые производные:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f(|\vec{x}|) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(f'(|\vec{x}|)\cdot\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right) = f''(|\vec{x}|)\frac{x_k^2}{|\vec{x}|^2} + f'(|\vec{x}|)\frac{|\vec{x}|^2 - x_k^2}{|\vec{x}|^3}.$$

Наконец

$$\Delta f(|\vec{x}|) = f''(|\vec{x}|)\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{|\vec{x}|^2} + f'(|\vec{x}|)\sum_{k=1}^{n}\frac{|\vec{x}|^2 - x_k^2}{|\vec{x}|^3} = f''(|\vec{x}|) + \frac{n-1}{|\vec{x}|}f'(|\vec{x}|).$$

Таким образом, мы знаем, что фундаментальное решение $E(\vec{x}) = \mathcal{E}(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{E}'' + \frac{n-1}{r}\mathcal{E} = 0.$$

Умножив его на r^2, получаем уравнение Эйлера

$$r^2\mathcal{E}'' + (n-1)r\mathcal{E}' = 0,$$

для которого решение ищется в виде $\mathcal{E}(r) = r^\lambda$. Тогда

$$\lambda(\lambda-1)\cdot r^{\lambda-2} + (n-1)\lambda r^{\lambda-2} = 0,$$

Откуда $\lambda = 0,\ 2-n$, следовательно

$$\mathcal{E} = \frac{C_1}{r^{n-2}} + C_2,\ n \geq 3, \qquad \mathcal{E} = C_1 \ln r + C_2,\ n = 2.$$

Поскольку фундаментальное решение единственно с точностью до константы, то C_2 нас не интересует. Вычислим C_1. При $n \geq 3$ имеем

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r} = \frac{(2-n)C_1}{r^{n-1}} = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n},\ n \geq 3.$$

В случае $n = 2$:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r} = \frac{C_1}{r} = \frac{1}{2\pi r} \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = \frac{1}{2\pi},\ n = 2.$$

Итого,

$$E(\vec{x}) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)\sigma_n|\vec{x}|^{n-2}}, & n \geq 3, \\ \dfrac{1}{2\pi}\ln|\vec{x}|, & n = 2. \end{cases} \tag{6.16}$$

Для случая $n = 3$

$$E(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi|\vec{x}|}. \tag{6.17}$$

Дополонительно скажем, что $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ и $E \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Факт локальной интегрируемости фундаментального решения позволяет представить это решение как регулярную обобщённую функцию.

Лекция 7

Третья формула Грина

Теорема 7.1. (Третья формула Грина)
Пусть $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, тогда

$$u(\vec{x}_0) = \int\limits_{\Omega} \Delta u \cdot E(\vec{x} - \vec{x}_0) d\vec{x} + \int\limits_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial E(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\partial \vec{\nu}} - E(\vec{x} - \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \right) dS, \tag{7.1}$$

где E – фундаментальное решение оператора Лапласа.

Перед тем как доказывать теорему, сформулируем несколько следствий из неё.

Следствие 7.1. Гармоническая функция бесконечно дифференцируема.

Доказательство. Пусть u – гармоническая функция. Запишем для неё третью формулу Грина

$$u(\vec{x}_0) = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial E(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\partial \vec{\nu}} - E(\vec{x} - \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \right) dS.$$

Фундаментальное решение бесконечно дифференцируемо всюду кроме точки $\vec{x} = \vec{x}_0$. Поскольку $\vec{x}_0 \in \Omega$, а $\vec{x} \in \partial\Omega$, то аргумент фундаментального решения не обращается в нуль. Следовательно, функция u является бесконечно дифференцируемой в Ω. □

Следствие 7.2. Для функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ – бесконечно дифференцируемой финитной функции – выполнено соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} E(\vec{x}) \Delta\varphi d\vec{x} = \varphi(0). \tag{7.2}$$

Доказательство. Запишем третью формулу Грина для функции φ в нуле:

$$\varphi(0) = \int\limits_{\Omega} \Delta\varphi \cdot E(\vec{x}) d\vec{x} + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\varphi \frac{\partial E(\vec{x})}{\partial \vec{\nu}} - E(\vec{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{\nu}} \right) dS,$$

где $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Увеличивая область Ω, мы в какой-то момент добьёмся того, чтобы носитель функции φ полностью находился в пределах Ω. В этом случае интеграл по $\partial\Omega$ становится равным нулю, поэтому

$$\varphi(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta\varphi \cdot E(\vec{x}) d\vec{x}.$$

□

Теперь введём определения трёх потенциалов

Определение 7.1. Выражение вида

$$u(\vec{x}_0) = \int\limits_{\Omega} E(\vec{x} - \vec{x}_0)\rho(\vec{x})d\vec{x} \tag{7.3}$$

называется **потенциалом Ньютона с плотностью** ρ.

Определение 7.2. Выражение вида

$$v(\vec{x}_0) = \int\limits_{S} E(\vec{x} - \vec{x}_0)\sigma(\vec{x})dS_x \tag{7.4}$$

называется **потенциалом простого слоя с плотностью** σ **на** S.

Определение 7.3. Выражение вида

$$w(\vec{x}_0) = -\int\limits_{S} \frac{\partial E(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\partial \vec{\nu}_x}\mu(\vec{x})dS_x \tag{7.5}$$

называется **потенциалом двойного слоя с плотностью** μ **на** S.

Замечание 7.1. Третья формула Грина представляет собой выражение для функции u в виде суммы трёх потенциалов

$$u(\vec{x}_0) = \int\limits_{\Omega} \rho \cdot E(\vec{x} - \vec{x}_0)d\vec{x} - \int\limits_{\partial\Omega} \left(\mu\frac{\partial E(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\partial \vec{\nu}} - E(\vec{x} - \vec{x}_0)\sigma\right) dS,$$

где

$$\rho = \Delta u, \qquad \sigma = -\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}, \qquad \mu = -u.$$

Перейдём к доказательству третьей формулы Грина (7.1).

Доказательство. Рассмотрим область

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon^{x_0}, \quad B_\varepsilon^{x_0} = \{\vec{x} \mid |\vec{x} - \vec{x}_0| < \varepsilon\}, \quad S_\varepsilon^{x_0} = \{\vec{x} \mid |\vec{x} - \vec{x}_0| = \varepsilon\}.$$

При это $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup S_\varepsilon^{x_0}$.

Запишем вторую формулу Грина (6.12) для области Ω_ε:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u)d\vec{x} = \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{\nu}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\right) dS =$$
$$= \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{\nu}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\right) dS - \int\limits_{S_\varepsilon} \left(u\frac{\partial v}{\partial r} - v\frac{\partial u}{\partial r}\right) dS.$$

В качестве функции v возьмём фундаментальное решение оператора Лапласа:

$$v(\vec{x}) = E(\vec{x} - \vec{x}_0).$$

Тогда $\Delta v = 0$ в области Ω_ε.

Так как фундаментальное решение оператора Лапласа принадлежит к классу локально интегрируемых функций, то

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} E(\vec{x}-\vec{x}_0)\Delta u d\vec{x} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int\limits_{\Omega} E(\vec{x}-\vec{x}_0)\Delta u d\vec{x}.$$

Теперь разберёмся с поверхностными интегралами. Рассмотрим первое слагаемое в интеграле по сфере:

$$\int\limits_{S_\varepsilon^{x_0}} u\frac{\partial E(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\partial r}dS = \frac{1}{\sigma_n \varepsilon^{n-1}}\int\limits_{S_\varepsilon^{x_0}} u dS \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} u(\vec{x}_0).$$

Второое слагаемое оценим по модулю:

$$\left|\int\limits_{S_\varepsilon^{x_0}} E(\vec{x}-\vec{x}_0)\frac{\partial u}{\partial r}dS\right| \le \frac{1}{\sigma_n(n-2)\varepsilon^{n-2}}\cdot M\cdot\sigma_n\varepsilon^{n-1} = \frac{M\varepsilon}{n-2}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \quad n\ge 3$$

$$\le \frac{1}{2\pi}|\ln\varepsilon|\cdot M\cdot 2\pi\varepsilon = M\varepsilon|\ln\varepsilon| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \quad n=2.$$

С учётом сделанных выкладок имеем

$$u(\vec{x}_0) = \int\limits_{\Omega} E(\vec{x}-\vec{x}_0)\Delta u d\vec{x} + \int\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial E(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\partial\vec{\nu}} - E(\vec{x}-\vec{x}_0)\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}\right)dS.$$

□

Теоремы о среднем

Будем пользоваться следующими обозначениями

$$B_\rho^{x_0} = \{\vec{x}\ \big|\ |\vec{x}-\vec{x}_0|<\rho\}, \quad \partial B_\rho^{x_0} = S_\rho^{x_0} = \{\vec{x}\ \big|\ |\vec{x}-\vec{x}_0|=\rho\}.$$

Теорема 7.2. (Теорема о среднем по сфере)
Пусть $u\in C^2(\Omega)$ и $\Delta u = 0$ в Ω и $B_\rho^{x_0}\subset\Omega$. Тогда

$$u(\vec{x}_0) = \frac{1}{|S_\rho^{x_0}|}\int\limits_{S_\rho^{x_0}} u(\vec{x})dS = \frac{1}{\sigma_n\rho^{n-1}}\int\limits_{S_\rho^{x_0}} u(\vec{x})dS. \tag{7.6}$$

Доказательство. Запишем третью формулу Грина с $\Omega = B_\rho^{x_0}$:

$$u(\vec{x}_0) = \int\limits_{B_\rho^{x_0}} E(\vec{x}-\vec{x}_0)\Delta u d\vec{x} + \int\limits_{S_\rho^{x_0}}\left(u\frac{\partial E(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\partial\vec{\nu}} - E(\vec{x}-\vec{x}_0)\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}\right)dS.$$

Так как функция u – гармоническая, то первое слагаемое будет равно нулю. Кроме того, учтём, что

$$E(\vec{x}-\vec{x}_0)\Big|_{\vec{x}\in S_\rho^{x_0}} = \mathcal{E}(r)\Big|_{r=\rho} = \mathcal{E}(\rho), \qquad \frac{\partial E(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\partial \vec{\nu}}\Big|_{\vec{x}\in S_\rho^{x_0}} = \frac{\partial \mathcal{E}(r)}{\partial r}\Big|_{r=\rho}.$$

Тогда

$$u(\vec{x}_0) = \frac{\partial \mathcal{E}(r)}{\partial r}\Big|_{r=\rho} \cdot \int\limits_{S_\rho^{x_0}} u dS - \mathcal{E}(\rho) \int\limits_{S_\rho^{x_0}} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} dS.$$

В силу теоремы 6.3 второе слагаемое равно нулю. Вспоминая, что

$$\frac{\partial \mathcal{E}(r)}{\partial r}\Big|_{r=\rho} = \frac{1}{\sigma_n \rho^{n-1}},$$

получаем утверждение теоремы. □

Теорема 7.3. (Теорема о среднем по шару)
Пусть $u \in C^2(\Omega)$ и $\Delta u = 0$ в Ω и $B_\rho^{x_0} \subset \Omega$. Тогда

$$u(\vec{x}_0) = \frac{1}{|B_\rho^{x_0}|} \int\limits_{B_\rho^{x_0}} u(\vec{x}) d\vec{x} = \frac{1}{\varkappa_n \rho^n} \int\limits_{B_\rho^{x_0}} u(\vec{x}) d\vec{x}, \tag{7.7}$$

где $\varkappa_n$ – объём единичного n-мерного шара.

Доказательство. Рассмотрим интеграл от функции u по шару

$$\int\limits_{B_\rho^{x_0}} u(\vec{x}) d\vec{x} = \int\limits_0^\rho dr \int\limits_{S_\rho^{x_0}} u(\vec{x}) dS = \int\limits_0^\rho u(\vec{x}_0) \cdot |S_\rho^{x_0}| dr = u(\vec{x}_0) \int\limits_0^\rho dr \int\limits_{S_\rho^{x_0}} 1\, dS = u(\vec{x}_0) \cdot |B_\rho^{x_0}|.$$

Здесь мы воспользовались результатом предыдущей теоремы, сказав, что

$$\int\limits_{S_\rho^{x_0}} u(\vec{x}) dS = u(\vec{x}_0) \cdot |S_\rho^{x_0}|.$$

□

Принцип максимума для гармонических функций

Теорема 7.4. (Принцип максимума)
Пусть Ω – ограниченная область, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ и $\Delta u = 0$ в Ω. Тогда для любого $\vec{x} \in \Omega$

$$\inf_{\partial\Omega} u \le u(\vec{x}) \le \sup_{\partial\Omega} u. \tag{7.8}$$

Доказательство. В точке максимума $\vec{x}_0$ некотрой функции u первые производные обращаются в нуль, вторые – неположительны:

$$u_{x_k} = 0, \quad u_{x_k x_k} \leq 0, \quad \Delta u(\vec{x}_0) \leq 0.$$

Введём функцию $v(\vec{x}) = u(\vec{x}) + \varepsilon x_1^2$, где $\varepsilon > 0$. Полагая далее, что функция u – это функция из условия теоремы, то в силу того, что она является гармонической, имеем

$$\Delta v = \Delta u + 2\varepsilon = 2\varepsilon > 0.$$

Это означает, что внутри данной области функция v своего максимума не достигает. Следовательно, для любого $\vec{x} \in \Omega$

$$v(\vec{x}) < \sup_{\partial\Omega} v.$$

Тогда для любого $\vec{x} \in \Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| < M\}$ можно сделать оценку:

$$u(\vec{x}) \leq u(\vec{x}) + \varepsilon x_1^2 = v(\vec{x}) < \sup_{\partial\Omega} v \leq \sup_{\partial\Omega} u + \varepsilon M^2.$$

Фиксируем $\vec{x} \in \Omega$ и устремляем $\varepsilon \to +0$, тогда

$$u(\vec{x}) \leq \sup_{\partial\Omega} u.$$

С помощью замены $u \to -u$ аналогично получается оставшаяся часть двойного неравенства из условия теоремы. □

Теорема 7.5. (Строгий принцип максимума)
Пусть Ω – ограниченная область, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ и $\Delta u = 0$ в Ω. Если существует точка $\vec{x}_0 \in \Omega$, такая, что для любого $\vec{x} \in \Omega$ верно $u(\vec{x}_0) \geq u(\vec{x})$, то

$$u(\vec{x}) \equiv \text{const} = u(\vec{x}_0). \tag{7.9}$$

Теорема 7.6. (Строгий принцип максимума. Эквивалентная формулировка)
Пусть Ω – ограниченная область, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $\Delta u = 0$ в Ω и $u \not\equiv \text{const}$. Тогда для любого $\vec{x} \in \Omega$

$$\inf_{\partial\Omega} u < u(\vec{x}) < \sup_{\partial\Omega} u. \tag{7.10}$$

Замечание 7.2. Приведём пример, когда обычный принцип максимума есть, а строгого – нет. Рассмотрим уравнение теплопроводности с одной пространственной переменной $u_t = u_{xx}$ в квадрате $\Pi = (-1;1) \times (-1;1) \ni (t,x)$. Для этого уравненя принцип максимума выполнен. А вот строгого здесь не будет. Доказательством является фундаментальное решение оператора теплопроводности

$$u(t,x) = \Gamma_1(t, x-2), \qquad \Gamma_1(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Эта функция неотрицательна в $\overline{\Pi}$ и тождественно равна нулю при $t \leq 0$.

Для доказательства теоремы 7.5 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 7.1. Пусть $\vec{x}_0 \in \Omega$ – точка максимума гармонической в Ω функции $u(\vec{x})$. Тогда в шаре $B_\rho^{x_0} \subset \Omega$ функция $u \equiv u(\vec{x}_0)$.

Доказательство. Построим доказательство от противного. Пусть существует точка $\vec{x}_1 \in B_\rho^{x_0}$, такая, что $u(\vec{x}_1) < u(\vec{x}_0)$. Тогда $u(\vec{x}) \leq u(\vec{x}_0) - \varepsilon$ при $\vec{x} \in B_\delta^{x_1} \subset B_\rho^{x_0}$. Тогда

$$\int\limits_{B_\rho^{x_0}} u d\vec{x} = \int\limits_{B_\rho^{x_0} \setminus B_\delta^{x_1}} u d\vec{x} + \int\limits_{B_\delta^{x_1}} u d\vec{x} \leq u(\vec{x}_0) \cdot (|B_\rho^{x_0}| - |B_\delta^{x_1}|) + (u(\vec{x}_0) - \varepsilon) \cdot |B_\delta^{x_1}| =$$
$$= u(\vec{x}_0) \cdot |B_\rho^{x_0}| - \varepsilon |B_\delta^{x_1}| < u(\vec{x}_0) \cdot |B_\rho^{x_0}|.$$

Получили противоречие с теоремой 7.3. □

Теперь докажем строгий принцип максимума.

Доказательство. Пусть $\hat{\vec{x}} \in \Omega$ произвольная точка. Построим путь $\gamma \subset \Omega$ из точки максимума $\vec{x}_0$ точку $\hat{\vec{x}}$. Покроем этот путь набором шаров $\gamma \subset \bigcup\limits_{k=0}^{N} B_\delta^{x_k}$. При этом потребуем, чтобы $\vec{x}_k \in B_\delta^{x_{k-1}}$ и $B_\delta^{x_k} \subset \Omega$. Для того, чтобы удовлетворить этим требованиям, надо выбрать радиус шаров $\delta < \operatorname{dist}(\gamma, \partial\Omega)$, а их центры расположить так, что $\vec{x}_k \in \gamma$ и $|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}| < \delta$. Тогда из доказанной леммы следует, что $u(\vec{x}) = u(\vec{x}_0)$ в шаре $B_\delta^{x_0}$, но в этом шаре находится точка $\vec{x}_1$ – центр шара $B_\delta^{x_1}$, а значит и в нём $u(\vec{x}) = u(\vec{x}_0)$. Этот шар содержит точку $\vec{x}_2$, которая является центром шара $B_\delta^{x_2}$. Проходя таким образом весь путь γ, получаем, что $u(\hat{\vec{x}}) = u(\vec{x}_0)$. □

Лекция 8

Краевые задачи для оператора Лапласа в ограниченной области

Задача Дирихле

Напомним, что задача Дирихле для оператора Лапласа в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\begin{cases} \Delta u = f(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega, & u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}), \\ u\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = \varphi(\vec{x}), & f \in C(\Omega),\ \varphi \in C(\partial\Omega). \end{cases} \tag{8.1}$$

Теорема 8.1. (Теорема единственности)
Решение задачи (8.1) единственно.

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 – два решения задачи (8.1). Рассмотрим их разность $u = u_1 - u_2$, которая удовлетворяет следующей задаче

$$\begin{cases} \Delta u = 0,\ \vec{x} \in \Omega, \\ u\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Функция u является гармонической в области Ω и принимает нулевые значения на границе этой области. Тогда из принципа максимума (теорема 7.4) следует,что $0 \le u \le 0$ в Ω, или $u \equiv 0$. Откуда $u_1 \equiv u_2$. □

Теорема 8.2. (Принцип сравнения)
Пусть функции u и v удовлетворяют следующим условиям

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta v = 0, & \vec{x} \in \Omega, \\ u \le v, & \vec{x} \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Тогда $u \le v$ для любого $\vec{x} \in \Omega$.

Доказательство. Рассмотрим разность функций u и v. Она также является гармонической функцией в Ω, а на границе не превосходит нуля:

$$\begin{cases} \Delta(u - v) = 0, & \vec{x} \in \Omega, \\ (u - v)\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} \le 0. \end{cases}$$

Из теоремы 7.4 следует, что $u - v \le 0$ в Ω. □

Теорема 8.3. (Усиленный принцип сравнения)
Пусть функции u и v удовлетворяют следующим условиям

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta v = 0, & \vec{x} \in \Omega, \\ u \le v,\ u \not\equiv v, & \vec{x} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

Тогда $u < v$ для любого $\vec{x} \in \Omega$.

Доказательство. Рассмотрим разность функций u и v. Она также является гармонической функцией в Ω, а на границе не превосходит нуля:

$$\begin{cases} \Delta(u-v) = 0, \quad \vec{x} \in \Omega, \\ (u-v)\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} \leq 0. \end{cases}$$

Но при этом также $u - v \not\equiv 0$ на $\partial\Omega$. Из теоремы 7.5 следует, что $u - v < 0$ в Ω. □

Теорема 8.4. (Принцип сравнения. Эквивалентная формулировка)
Пусть функции u и v удовлетворяют следующим условиям

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta v = 0, \quad \vec{x} \in \Omega, \\ u \leq |v|, \quad \vec{x} \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Тогда $u \leq |v|$ для любого $\vec{x} \in \Omega$.

Доказательство. Выражение $u \leq |v|$ эквивалентно $-v \leq u \leq v$. Проводя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 8.2, получаем искомую оценку $u \leq |v|$ в области Ω. □

Теорема 8.5. (Непрерывная зависимость в случае уравнения Лапласа)
Пусть функции $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ – решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа, отвечающие разным начальным условиям $\varphi_1, \varphi_2 \in C(\partial\Omega)$:

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, \ \vec{x} \in \Omega, \\ u_1\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = \varphi_1(\vec{x}). \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u_2 = 0, \ \vec{x} \in \Omega, \\ u_2\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = \varphi_2(\vec{x}). \end{cases} \tag{8.2}$$

Тогда

$$||u_1 - u_2||_{C(\overline{\Omega})} \leq ||\varphi_1 - \varphi_2||_{C(\partial\Omega)}. \tag{8.3}$$

Доказательство. Пусть $u = u_1 - u_2$ и $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, тогда u – решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ \vec{x} \in \Omega, \\ u\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = \varphi(\vec{x}). \end{cases}$$

Согласно теореме 7.4, для любого $\vec{x} \in \Omega$

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(\vec{x}) \leq \sup_{\partial\Omega} u.$$

Следовательно, для любого $\vec{x} \in \overline{\Omega}$

$$\inf_{\partial\Omega} \varphi \leq u(\vec{x}) \leq \sup_{\partial\Omega} \varphi.$$

Тогда можем написать, что

$$|u| \leq \sup_{\partial\Omega} |\varphi| = ||\varphi||_{C(\partial\Omega)}.$$

И, наконец,

$$||u||_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{\partial\Omega} u \leq ||\varphi||_{C(\partial\Omega)},$$

откуда следует утверждение теоремы. □

Теорема 8.6. (Непрерывная зависимость в случае уравнения Пуассона)
Пусть функции $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ – решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона, отвечающие разным правым частям $f_1, f_2 \in C(\Omega)$:

$$\begin{cases} \Delta u_1 = f_1(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega, \\ u_1\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u_2 = f_2(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega, \\ u_2\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{8.4}$$

Тогда

$$||u_1 - u_2||_{C(\overline{\Omega})} \leq C \cdot ||f_1 - f_2||_{C(\overline{\Omega})}. \tag{8.5}$$

Доказательство. Пусть $u = u_1 - u_2$ и $f = f_1 - f_2$, тогда u решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = f(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega, \\ u\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Пусть $\rho = \sup\limits_{\overline{\Omega}} |\vec{x}|$ и $||f||_{C(\overline{\Omega})} = \sup\limits_{\overline{\Omega}} |f(\vec{x})| < M$. Введём функцию

$$v(\vec{x}) = u(\vec{x}) - \frac{M}{2n} \cdot |\vec{x}|^2, \quad \Rightarrow \quad \Delta v = \Delta u - M = f(\vec{x}) - M < 0.$$

Так как $\Delta v < 0$, то минимум этой функции не может достигаться внутри области Ω, поскольку там он должен быть неотрицателен. Следовательно, $v(\vec{x}) \geq \inf\limits_{\partial\Omega} v$ для любого $\vec{x} \in \overline{\Omega}$. Выполним оценку:

$$u(\vec{x}) \geq u(\vec{x}) - \frac{M}{2n} \cdot |\vec{x}|^2 \geq \inf_{\partial\Omega} \left(u(\vec{x}) - \frac{M}{2n} \cdot |\vec{x}|^2 \right) = -\frac{M\rho^2}{2n}.$$

С другой стороны, введём функцию

$$w(\vec{x}) = u(\vec{x}) + \frac{M}{2n} \cdot |\vec{x}|^2, \quad \Rightarrow \quad \Delta w = \Delta u + M = f(\vec{x}) + M > 0.$$

Поскольку $\Delta w > 0$, то $w \leq \sup\limits_{\partial\Omega} w$ для любого $\vec{x} \in \overline{\Omega}$. Тогда

$$u(\vec{x}) \leq u(\vec{x}) + \frac{M}{2n} \cdot |\vec{x}|^2 \leq \sup_{\partial\Omega} \left(u(\vec{x}) + \frac{M}{2n} \cdot |\vec{x}|^2 \right) = \frac{M\rho^2}{2n}.$$

Итого, для любого $\vec{x} \in \overline{\Omega}$ имеем двойное неравенство:

$$-\frac{M\rho^2}{2n} \leq u(\vec{x}) \leq \frac{M\rho^2}{2n}.$$

По непрерывности это неравенство выполняется и в случае $M = ||f||_{C(\overline{\Omega})}$, откуда следует, что

$$||u||_{C(\overline{\Omega})} \leq C \cdot ||f||_{C(\overline{\Omega})}, \quad C = \frac{\rho^2}{2n}.$$

□

Наконец, сформулируем общую теорему о непрерывности.

Теорема 8.7. (Непрерывная зависимость)
Пусть функции $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ – решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа, отвечающие разным начальным условиям $\varphi_1, \varphi_2 \in C(\partial\Omega)$ и разным правым частям $f_1, f_2 \in C(\Omega)$:

$$\begin{cases} \Delta u_1 = f_1(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega, \\ u_1\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = \varphi_1(\vec{x}). \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u_2 = f_2(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega, \\ u_2\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = \varphi_2(\vec{x}). \end{cases}$$

Тогда

$$||u_1 - u_2||_{C(\overline{\Omega})} \leq ||\varphi_1 - \varphi_2||_{C(\partial\Omega)} + C \cdot ||f_1 - f_2||_{C(\overline{\Omega})}. \tag{8.6}$$

Доказательство. Пусть $u = u_1 - u_2$, $f = f_1 - f_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Тогда u есть решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u = f(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega, \\ u\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = \varphi(\vec{x}). \end{cases}$$

Разобъём её на две задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = f(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega, \\ u\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u = 0,\ \vec{x} \in \Omega, \\ u\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = \varphi(\vec{x}). \end{cases}$$

Имея оценки для обеих задач, заключаем, что

$$\begin{cases} ||u||_{C(\overline{\Omega})} \leq ||\varphi||_{C(\partial\Omega)} \\ ||u||_{C(\overline{\Omega})} \leq C \cdot ||f||_{C(\overline{\Omega})} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad ||u||_{C(\overline{\Omega})} \leq ||\varphi||_{C(\partial\Omega)} + C \cdot ||f||_{C(\overline{\Omega})}.$$

□

Задача Неймана

Задача Неймана для оператора Лапласа в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\begin{cases} \Delta u = f(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega, \qquad u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = \psi(\vec{x}), \qquad f \in C(\Omega),\ \psi \in C(\partial\Omega). \end{cases} \tag{8.7}$$

Лемма 8.1. (Лемма о нормальной производной/Лемма Хопфа-Олейник)
Пусть функция $u \not\equiv \text{const}$ и $\Delta u = 0$ в Ω. Пусть также максимум этой функции $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = u(\vec{x}_0)$ достигается в точке $\vec{x}_0 \in \partial\Omega$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = \lim_{s\to+0} \frac{u(\vec{x}_0) - u(\vec{x}_0 - s\cdot\vec{\nu})}{s} > 0. \tag{8.8}$$

Доказательство этой леммы будет приведено позднее.

Теорема 8.8. (Теорема "единственности" решения задачи Неймана)
Решение задачи (8.7) единственно с точностью до константы.

Доказательство. Пусть u_1, u_2 – два решения задачи Неймана (8.7). Введём функцию $u = u_1 - u_2$, которая удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ \vec{x} \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Функция u – гармоническая в области Ω. Согласно теореме 7.4, она достигает своего максимума на границе области Ω. Предополагая, что $u \not\equiv \text{const}$, приходим к противоречию между леммой 8.1 и тем фактом, что нормальная производная функции u на границе – тождественный нуль. Следовательно, $u_1 - u_2 \equiv \text{const}$. □

Поскольку существует произвол решения задачи Неймана, встаёт вопрос об её разрешимости.

Теорема 8.9. (Условие разрешимости задачи Неймана)
Задача Неймана разрешима, если

$$\int\limits_{\Omega} f(\vec{x})d\vec{x} = \int\limits_{\partial\Omega} \psi(\vec{x})dS. \tag{8.9}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся первой формулой Грина (6.10) с $v \equiv 1$ и u – решением задачи (8.7):

$$\int\limits_{\Omega} v\Delta u d\vec{x} = -\int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla v)d\vec{x} + \int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}dS.$$

$$\int\limits_{\Omega} \Delta u d\vec{x} = 0 + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}dS \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{\Omega} f(\vec{x})d\vec{x} = \int\limits_{\partial\Omega} \psi(\vec{x})dS.$$

□

Третья краевая задача

Третья краевая задача для оператора Лапласа в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\begin{cases} \Delta u = f(\vec{x}), \ \vec{x} \in \Omega, & u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} + k(\vec{x})u\right)\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = \varphi(\vec{x}), & f \in C(\Omega), \ \varphi \in C(\partial\Omega). \end{cases} \tag{8.10}$$

Теорема 8.10. (Теорема единственности)
Пусть $k(\vec{x}) \geq 0$ и $k(\vec{x}) \not\equiv 0$. Тогда решение третьей краевой задачи (8.10) единственно.

Доказательство. Пусть u_1, u_2 – два решения задачи (8.10). Рассмотрим их разность $u = u_1 - u_2$, которая удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ \vec{x} \in \Omega, \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} + k(\vec{x})u\right)\Big|_{\vec{x}\in\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Предположим, что $u \not\equiv \text{const}$, тогда существует точка $\vec{x}_0 \in \partial\Omega$, являющаяся точкой максимума. Дополнительно предположим, что этот максимум – положительный. Тогда из леммы 8.1, условия теоремы и сделанного предположения о положительности следует, что в точке $\vec{x}_0 \in \partial\Omega$ оказывается

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} + k(\vec{x})u\right)\Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} > 0.$$

Пришли к противоречию с условием для функции u на границе. Рассуждая аналогично для $\min u$, можно показать, что минимум функции u не может быть отрицательным. Из этого делаем вывод, что $0 \le \min u \le u \le \max u \le 0$ в Ω. Следовательно, $u \equiv 0$, и $u_1 \equiv u_2$. □

Замечание 8.1. Если на одной части границы области задано условие Дирихле, а на другой – условие Неймана, то в этом случае решение также единственно. Действительно, если рассмотреть разность двух решений, то это будет гармоническая функция, максимум которой может достигаться только на той части границы, где выполнено условие Дирихле (в силу леммы 8.1). Этот максимум равен нулю.

Замечание 8.2. Требование физически правильного условия $k(\vec{x}) \ge 0$ необходимо для единственности решения.

Теперь докажем лемму о нормальной производной.

Замечание 8.3. Лемма формулируется в предположении, что предел существует, и что существует шар $B_\rho^{x'} \subset \Omega$, такой, что $\partial B_\rho^{x'} \cap \partial\Omega = \{\vec{x}_0\}$.

Замечание 8.4. Утверждение леммы справедливо для любого направления $\vec{l}$, составляющего острый угол с вектором внешней нормали $\vec{\nu}$.

В связи с замечанием 8.3 встаёт вопрос о гладкости границы. В формуле Остроградского - Гаусса нам нужна была кусочная гладкость: границу можно разбить на участки, каждый из которых оказывался гладким. Под гладкой границей $\Gamma = \{\vec{x} \ \big| \Phi(\vec{x}) = 0\}$ понимается такая, что $\Phi \in C^1$ и $\nabla\Phi \neq 0$ на Γ. Но этого недостаточно для леммы. Во-первых, необходимо исключить границы, содержащие углы. Во-вторых, гладкость границы должна быть класса C^2.

Доказательство. (Лемма о нормальной производной/Лемма Хопфа-Олейник)
Пусть точка $u(\vec{x}_0) = \max u$, где $\vec{x}_0 \in \partial\Omega$. Мы всегда можем рассмотреть функцию $u \to u - \max u$, поэтому удобно положить $u(\vec{x}_0) = 0$. Тогда для любого $\vec{x} \in \Omega$ верно $u(\vec{x}) < 0$. Согласно замечанию 8.3, $\vec{x}_0 \in \partial B_\rho^{x'} = S_\rho^{x'}$. Введём область

$$K = B_\rho^{x'} \setminus B_{\rho/2}^{x'} = \{\vec{x} \ \big| \ \rho/2 < |\vec{x} - \vec{x}'| < \rho\} \subset \Omega,$$

и в этой области рассмотрим функцию u и функцию $w(\vec{x}) = -|\vec{x} - \vec{x}'|^{2-n} + \rho^{2-n}$. Для случая $n = 2$ последняя задаётся как $w(\vec{x}) = \ln|\vec{x} - \vec{x}'| - \ln\rho$.

Для $\vec{x} \in K$ имеем $\Delta u = \Delta w = 0$. Рассмотрим поведение этих функций на границе.

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{x}'| = \rho \quad &\Rightarrow \qquad u(\vec{x}) \le 0 = \varepsilon w(\vec{x}). \\ |\vec{x} - \vec{x}'| = \rho/2 \quad &\Rightarrow \qquad u(\vec{x}) \le \varepsilon w(\vec{x}),\ \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим вторую оценку подробнее:

$$\begin{aligned} &\sup_{|\vec{x}-\vec{x}'|=\rho/2} u = -s < 0, \\ &w\Big|_{|\vec{x}-\vec{x}'|=\rho/2} = -C < 0, \\ &-C = -(\rho/2)^{2-n} + \rho^{2-n} = (1 - 2^{n-2})\rho^{2-n} < 0,\ n \ge 3 \\ &-C = \ln(\rho/2) - \ln\rho = -\ln 2 < 0,\ n = 2 \end{aligned}$$

Тогда на внутренней границе K надо выбрать $\varepsilon = s/C$. Таким образом, $u \le \varepsilon w$ при $\vec{x} \in \partial K$. Следовательно, $u < \varepsilon w$ при $\vec{x} \in K$. При этом $u(\vec{x}_0) = \varepsilon w(\vec{x}_0) = 0$. Рассмотрим значения этих функций в точке $\vec{x}_0 - s \cdot \vec{\nu}$:

$$u(\vec{x}_0 - s \cdot \vec{\nu}) < \varepsilon w(\vec{x}_0 - s \cdot \vec{\nu}),\ s > 0.$$

Теперь умножим это неравенство на (-1), добавим в левую и правую часть нуль в виде $u(\vec{x}_0)$ и $\varepsilon w(\vec{x}_0)$ и поделим на s:

$$\frac{u(\vec{x}_0) - u(\vec{x}_0 - s \cdot \vec{\nu})}{s} > \varepsilon \cdot \frac{w(\vec{x}_0) - w(\vec{x}_0 - s \cdot \vec{\nu})}{s}.$$

Устремим $s \to +0$, тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \ge \varepsilon \cdot \frac{\partial w}{\partial \vec{\nu}}\Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} > 0.$$

Чтобы доказать последнюю оценку, надо посчитать производную:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \vec{\nu}}\Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} &= \frac{d}{dr}(-r^{2-n})\Big|_{r\rho} = (n-2)\rho^{1-n} > 0, \quad && n \ge 3 \\ \frac{\partial w}{\partial \vec{\nu}}\Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} &= \frac{d}{dr}\ln r\Big|_{r\rho} = \rho^{-1} > 0, && n = 2 \end{aligned}$$

□

Лекция 9

Функция Грина

Определение 9.1. Пусть Ω – ограниченная область. **Функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется функция $G(\vec{x}, \vec{y})$, такая, что для любого $\vec{y} \in \Omega$ верно

$$\begin{cases} \Delta_x G(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}), \ \vec{x} \in \Omega, \\ G(\vec{x}, \vec{y})\Big|_{\vec{x} \in \partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{9.1}$$

Замечание 9.1. С точки зрения электростатики, функция Грина – это потенциал одиночного точечного источника, заземлённый на границе области.

У нас было введено фундаментальное решение $E(\vec{x})$, такое, что $\Delta E(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$. Следовательно, для любого $\vec{y}$ верно $\Delta_x E(\vec{x} - \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y})$. Напомним, что

$$E(\vec{x}) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)\sigma_n |\vec{x}|^{n-2}}, & n \geq 3, \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln |\vec{x}|, & n = 2. \end{cases} \tag{9.2}$$

Введём равносильное определение, которое не содержит дельта-функцию.

Определение 9.2. Пусть Ω – ограниченная область. **Функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется функция $G(\vec{x}, \vec{y}) = E(\vec{x} - \vec{y}) + g(\vec{x}, \vec{y})$, где для любого $\vec{y} \in \Omega$ верно

$$\begin{cases} \Delta_x g(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \ \vec{x} \in \Omega, \\ g(\vec{x}, \vec{y})\Big|_{\vec{x} \in \partial\Omega} = -E(\vec{x} - \vec{y}). \end{cases} \tag{9.3}$$

Рассмотрим вторую формулу Грина

$$\int\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) d\vec{x} = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{\nu}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \right) dS \tag{9.4}$$

и положим $v = g(\vec{x}, \vec{x}_0)$. Тогда, учитывая, что $\Delta_x g = 0$, получим

$$0 = \int\limits_{\Omega} g(\vec{x}, \vec{x}_0) \Delta u \, d\vec{x} + \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial g(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial \vec{\nu}_x} - g(\vec{x}, \vec{x}_0)\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}_x} \right) dS_x.$$

Помимо этого, у нас была третья формула Грина

$$u(\vec{x}_0) = \int\limits_{\Omega} \Delta u \cdot E(\vec{x} - \vec{x}_0) d\vec{x} + \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial E(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\partial \vec{\nu}_x} - E(\vec{x} - \vec{x}_0)\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}_x} \right) dS_x. \tag{9.5}$$

Сложим последние две формулы, тогда получим, что

$$u(\vec{x}_0) = \int\limits_{\Omega} \Delta u \cdot G(\vec{x}, \vec{x}_0) d\vec{x} + \int\limits_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial \vec{\nu}_x} - G(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}_x} \right) dS_x.$$

Вспоминая, что функция Грина обнуляется на границе области, имеем

$$u(\vec{x}_0) = \int\limits_{\Omega} \Delta u \cdot G(\vec{x}, \vec{x}_0) d\vec{x} + \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial \vec{\nu}_x} dS_x. \tag{9.6}$$

Теперь перейдём к решению задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = f(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega, & u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}), \\ u\Big|_{\vec{x} \in \partial\Omega} = \varphi(\vec{x}), & f \in C(\Omega),\ \varphi \in C(\partial\Omega). \end{cases} \tag{9.7}$$

Её решение будет задаваться выражением

$$u(\vec{x}_0) = \int\limits_{\Omega} f(\vec{x}) \cdot G(\vec{x}, \vec{x}_0)\ d\vec{x} + \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(\vec{x}) \cdot \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial \vec{\nu}_x} dS_x. \tag{9.8}$$

Таким образом, мы можем сформулировать теорему, которую почти доказали.

Теорема 9.1. Если решение $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ существует, то оно задаётся формулой

$$u(\vec{x}) = \int\limits_{\Omega} G(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y})\ d\vec{y} + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial \vec{\nu}_y} \varphi(\vec{y}) dS_y. \tag{9.9}$$

Замечание 9.2. Заметим, что класс решения отличается от того, который требуется в условии задачи Дирихле. Дело в том, что при выводе выражения (9.8) мы использовали формулы Грина, для которых $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Докажем симметрию функции Грина относительно перестановки аргументов.

Теорема 9.2. Для любых $\vec{x}, \vec{y} \in \Omega$ верно

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = G(\vec{y}, \vec{x}). \tag{9.10}$$

Доказательство. Рассмотрим в области $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus (B_\varepsilon^{y_1} \cup B_\varepsilon^{y_2})$ с границей $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup S_\varepsilon^{y_1} \cup S_\varepsilon^{y_2}$ вторую формулу Грина с $u = G(\vec{x}, \vec{y}_1)$ и $v = G(\vec{x}, \vec{y}_2)$. Учитывая, что точки $\vec{x} = \vec{y}_1$ и $\vec{x} = \vec{y}_2$ не попадают в область Ω_ε (а значит в этой области обе функции Грина являются гармоническими) получаем

$$\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(G(\vec{x}, \vec{y}_1) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y}_2)}{\partial \vec{\nu}} - G(\vec{x}, \vec{y}_2) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y}_1)}{\partial \vec{\nu}} \right) dS = 0.$$

Отметим, что и интеграл по $\partial\Omega$ будет равен нулю, поскольку обе функции Грина на ней обнуляются. Остались интегралы по сферам $S_\varepsilon^{y_1}$ и $S_\varepsilon^{y_2}$:

$$0 = \int\limits_{S_\varepsilon^{y_1}} \left(G(\vec{x},\vec{y}_1)\frac{\partial G(\vec{x},\vec{y}_2)}{\partial r} - G(\vec{x},\vec{y}_2)\frac{\partial G(\vec{x},\vec{y}_1)}{\partial r} \right) dS +$$
$$+ \int\limits_{S_\varepsilon^{y_2}} \left(G(\vec{x},\vec{y}_1)\frac{\partial G(\vec{x},\vec{y}_2)}{\partial r} - G(\vec{x},\vec{y}_2)\frac{\partial G(\vec{x},\vec{y}_1)}{\partial r} \right) dS.$$

Покажем, что

$$\int\limits_{S_\varepsilon^{y_1}} \left(G(\vec{x},\vec{y}_1)\frac{\partial G(\vec{x},\vec{y}_2)}{\partial r} - G(\vec{x},\vec{y}_2)\frac{\partial G(\vec{x},\vec{y}_1)}{\partial r} \right) dS \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -G(\vec{y}_1,\vec{y}_2).$$

Подставим $G(\vec{x},\vec{y}_1) = E(\vec{x}-\vec{y}_1) + g(\vec{x},\vec{y}_1)$:

$$\int\limits_{S_\varepsilon^{y_1}} \left((E(\vec{x}-\vec{y}_1) + g(\vec{x},\vec{y}_1))\frac{\partial G(\vec{x},\vec{y}_2)}{\partial r} - G(\vec{x},\vec{y}_2)\frac{\partial (E(\vec{x}-\vec{y}_1) + g(\vec{x},\vec{y}_1))}{\partial r} \right) dS$$

Отметим, что слагаемые, которые не содержат фундаментального решения, ограничены на сфере, поэтому при стремлении её радиуса к нулю интегралы от соответствующих слагаемых также стремятся к нулю. Кроме того,

$$\int\limits_{S_\varepsilon^{y_1}} G(\vec{x},\vec{y}_2)\frac{\partial E(\vec{x}-\vec{y}_1)}{\partial r} dS = \frac{1}{\sigma_n \varepsilon^{n-1}} \int\limits_{S_\varepsilon^{y_1}} G(\vec{x},\vec{y}_2) dS \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} G(\vec{y}_1,\vec{y}_2)$$

$$\left| \int\limits_{S_\varepsilon^{y_1}} E(\vec{x}-\vec{y}_1)\frac{\partial G(\vec{x},\vec{y}_2)}{\partial r} dS \right| \le \frac{1}{\sigma_n (n-2)\cdot M \cdot \sigma_n \varepsilon^{n-1}} = \frac{M\varepsilon}{n-2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \quad n \ge 3$$
$$\le \frac{1}{2\pi} |\ln\varepsilon| \cdot M \cdot 2\pi\varepsilon = M\varepsilon|\ln\varepsilon| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \qquad n = 2$$

Откуда видим, что из интеграла по сфере $S_\varepsilon^{y_1}$ при $\varepsilon \to 0$ получается $-G(\vec{y}_1,\vec{y}_2)$. Абсолютно аналогично интеграл по второй сфере становится равным $G(\vec{y}_2,\vec{y}_1)$. Так как их сумма была равна нулю, то в пределе $\varepsilon \to 0$ она остаётся равной нулю. Откуда

$$G(\vec{y}_1,\vec{y}_2) = G(\vec{y}_2,\vec{y}_1).$$

Из доказанного следует также доказательство теоремы 9.1. □

Функция Грина шара

Теорема 9.3. Функция Грина шара $B_R^0 = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| < R\} \subset \mathbb{R}^n$ задаётся как

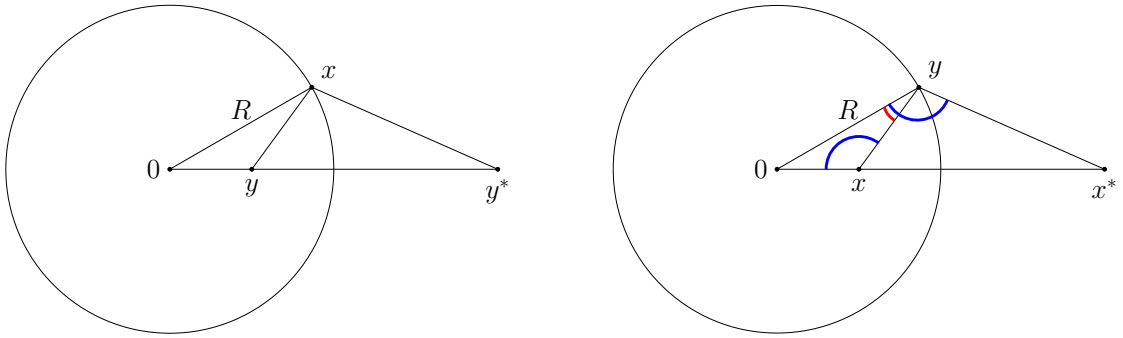
$$G(\vec{x},\vec{y}) = E(\vec{x}-\vec{y}) - E\left(\frac{|\vec{y}|}{R}(\vec{x}-\vec{y^*})\right), \quad \vec{y^*} = \frac{R^2}{|\vec{y}|^2}\vec{y}. \tag{9.11}$$

Замечание 9.3. Преобразование $\vec{y} \to \vec{y^*}$ – инверсия относительно сферы, такая, что $|\vec{y}| \cdot |\vec{y^*}| = R^2$.

Доказательство. Надо показать, что добавка к фундаментальному решению является гармонической функцией в шаре и что на границе этого шара значения фундаментального решения и добавки к нему совпадают.

Действительно, зависимость добавки от переменной $\vec{x}$ отличается от зависимости $E(\vec{x}-\vec{y})$ только скалярным множителем. Поскольку $\vec{y^*} \notin B_R^0$, то для любого $\vec{x} \in B_R^0$ $\vec{x} \neq \vec{y^*}$. А значит во всём шаре добавка является гармонической функцией.

Чтобы показать, что $G(\vec{x}, \vec{y})\Big|_{|\vec{x}|=R} = 0$, надо вспомнить, что фундаментальное решение зависит от модуля своего аргумента, и увидеть, что $|\vec{x} - \vec{y}| = \frac{|\vec{y}|}{R}|\vec{x} - \vec{y^*}|$ при $|\vec{x}| = R$. Для иллюстрации обратимся к Рис. 9.1, (а). Треугольники $0xy$ и $0y^*x$ подобны по одной паре равных углов с вершиной в 0 и двум парам пропорциональных сторон, примыкающих к нему: $R/|y^*| = |y|/R$. А следовательно пропорциональна и третья пара сторон $|x - y|/|x - y^*| = |y|/R$.



а) б)

Рис. 9.1. Инверсия относительно сферы.

□

Замечание 9.4. Для $\vec{y} = 0$ надо подобрать добавку так, чтобы на границе шара функция Грина была равна нулю. Поскольку фундаментальное решение зависит от модуля,то

$$G(\vec{x}, 0) = E(\vec{x}) - \text{const} = \mathcal{E}(|\vec{x}|) - \mathcal{E}(R). \tag{9.12}$$

Рассмотрим

$$\lim_{y\to 0}\left|\frac{|\vec{y}|}{R}(\vec{x} - \vec{y^*})\right| = \lim_{y^*\to\infty}\frac{|\vec{x} - \vec{y^*}|}{|\vec{y^*}|} \cdot \frac{|\vec{y}| \cdot |\vec{y^*}|}{R} = \frac{|\vec{y}| \cdot |\vec{y^*}|}{R} = R.$$

То есть добавка из теоремы 9.3 при $\vec{y} = 0$ ведёт себя нужным образом.

Решение задачи Дирихле в шаре

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad |\vec{x}| < R, \\ u\Big|_{|\vec{x}|=R} = \varphi(\vec{x}) \in C(S). \end{cases} \tag{9.13}$$

Её решение выражается формулой

$$u(\vec{x}) = \int\limits_{|\vec{y}|=R} \frac{\partial G(\vec{x},\vec{y})}{\partial \vec{\nu}_y} \varphi(\vec{y}) dS_y. \tag{9.14}$$

Для вычисления производной по нормали воспользуемся симметричностью функции Грина:

$$G(\vec{x},\vec{y}) = E(\vec{x}-\vec{y}) - E\left(\frac{|\vec{y}|}{R}(\vec{x}-\vec{y^*})\right) = E(\vec{y}-\vec{x}) - E\left(\frac{|\vec{x}|}{R}(\vec{y}-\vec{x^*})\right)$$

и выражением для производной фундаментального решения

$$E(\vec{x}) = \mathcal{E}(r), \qquad \mathcal{E}'(r) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}}.$$

Сосчитаем градиент фундаментального решения:

$$\nabla E(\vec{x}) = \nabla \mathcal{E}(|\vec{x}|) = \frac{1}{\sigma_n |\vec{x}|^{n-1}} \cdot \nabla |\vec{x}| = \frac{1}{\sigma_n |\vec{x}|^{n-1}} \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}.$$

Тогда

$$\frac{\partial E(\vec{y}-\vec{x})}{\partial \vec{\nu}_y} = (\nabla_y E(\vec{x}-\vec{y}), \vec{\nu}_y) = \frac{1}{\sigma_n |\vec{y}-\vec{x}|^{n-1}} \cdot \left(\frac{\vec{y}-\vec{x}}{|\vec{y}-\vec{x}|}, \vec{\nu}_y\right) = \frac{\cos(\vec{y}-\vec{x}, \vec{\nu}_y)}{\sigma_n |\vec{y}-\vec{x}|^{n-1}},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E\left(\frac{|\vec{x}|}{R}(\vec{y}-\vec{x^*})\right)}{\partial \vec{\nu}_y} &= \frac{1}{\sigma_n \left(\frac{|\vec{x}|}{R}|\vec{y}-\vec{x^*}|\right)^{n-1}} \cdot \frac{|\vec{x}|}{R} \cdot \left(\frac{\vec{y}-\vec{x^*}}{|\vec{y}-\vec{x^*}|}, \vec{\nu}_y\right) = \\ &= \left(\frac{R}{|\vec{x}||\vec{y}-\vec{x^*}|}\right)^{n-1} \frac{|\vec{x}|}{\sigma_n R} \cdot \cos(\vec{y}-\vec{x^*}, \vec{\nu}_y) = \frac{|\vec{x}|}{R} \frac{\cos(\vec{y}-\vec{x^*}, \vec{\nu}_y)}{\sigma_n |\vec{y}-\vec{x}|^{n-1}}.\end{aligned}$$

В последнем равенстве мы воспользовались подобием треугольников $0yx$ и $0x^*y$ (см. Рис 9.1, (б)). Теперь подставим полученные выражения в производную функции Грина

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(\vec{x},\vec{y})}{\partial \vec{\nu}_y} &= \frac{1}{\sigma_n |\vec{y}-\vec{x}|^{n-1}} \cdot \left(\cos(\vec{y}-\vec{x}, \vec{\nu}_y) - \frac{|\vec{x}|}{R}\cos(\vec{y}-\vec{x^*}, \vec{\nu}_y)\right) = \\ &= \frac{R|\vec{x}-\vec{y}|\cos(\vec{x}-\vec{y}, -\vec{y}) - |\vec{x}||\vec{x}-\vec{y}|\cos(\vec{x^*}-\vec{y}, -\vec{y})}{\sigma_n R |\vec{y}-\vec{x}|^n}.\end{aligned}$$

В последнем переходе мы воспользовались тем, что $\vec{\nu}_y = \vec{y}/|\vec{y}|$, подобием треугольников $0yx$ и $0x^*y$ (см. Рис 9.1, (б)) и равенством вертикальных углов $\angle(\vec{y}-\vec{x}, \vec{y}) = \angle(\vec{x}-\vec{y}, -\vec{y})$ и $\angle(\vec{y}-\vec{x^*}, \vec{y}) = \angle(\vec{x^*}-\vec{y}, -\vec{y})$. В треугольнике $0yx$ воспользуемся дважды теоремой косинусов:

$$\begin{aligned}|\vec{x}|^2 &= |\vec{x}-\vec{y}|^2 + R^2 - 2R|\vec{x}-\vec{y}|\cos(\vec{x}-\vec{y}, -\vec{y}), \\ R^2 &= |\vec{x}-\vec{y}|^2 + |\vec{x}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{x}-\vec{y}|\cos(\vec{x^*}-\vec{y}, -\vec{y}).\end{aligned}$$

Вычитая одно из другого, получим, что

$$\frac{\partial G(\vec{x},\vec{y})}{\partial \vec{\nu}_y} = \frac{R|\vec{x}-\vec{y}|\cos(\vec{x}-\vec{y}, -\vec{y}) - |\vec{x}||\vec{x}-\vec{y}|\cos(\vec{x^*}-\vec{y}, -\vec{y})}{\sigma_n R |\vec{y}-\vec{x}|^n} = \frac{R^2 - |\vec{x}|^2}{\sigma_n R |\vec{y}-\vec{x}|^n}.$$

Теорема 9.4. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре задаётся формулой Пуассона

$$u(\vec{x}) = \frac{R^2 - |\vec{x}|^2}{\sigma_n R} \int\limits_{|\vec{y}|=R} \frac{\varphi(\vec{y})}{|\vec{y} - \vec{x}|^n} dS_y. \tag{9.15}$$

Доказательство. Формула имеет следующую структуру

$$u(\vec{x}) = \int\limits_{|\vec{y}|=R} P(\vec{x}, \vec{y})\varphi(\vec{y}) dS_y,$$

где

$$P(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{R^2 - |\vec{x}|^2}{\sigma_n R|\vec{y} - \vec{x}|^n} \tag{9.16}$$

называется ядром Пуассона. Отметим, что $P \in C^\infty$, так как вектор $\vec{y}$ пробегает значения по границе шара, а $\vec{x}$ – по его внутренности. Следовательно ядро можно дифференцировать под знаком интеграла, и наше решение $u \in C^\infty(B_R)$.

Разобьём ядро на множители и продифференцируем.

$$\sigma_n R \cdot P(\vec{x}, \vec{y}) = (R^2 - |\vec{x}|^2) \cdot |\vec{y} - \vec{x}|^{-n} = f \cdot g.$$

Для функции f имеем

$$f = R^2 - |\vec{x}|^2, \quad \nabla f = -2\vec{x}, \quad \Delta f = -2n.$$

Для функции g:

$$\nabla|\vec{x}|^{-n} = \frac{-n}{|\vec{x}|^{n+1}} \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \qquad \Delta|\vec{x}|^{-n} = (|\vec{x}|^{-n})'' + \frac{n-1}{|\vec{x}|}(|\vec{x}|^{-n})' = \frac{2n}{|\vec{x}|^{n+2}}.$$

$$g = |\vec{x} - \vec{y}|^{-n}, \qquad \nabla g = \frac{-n}{|\vec{x} - \vec{y}|^{n+1}} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \qquad \Delta g = \frac{2n}{|\vec{x} - \vec{y}|^{n+2}}.$$

Подставим это в формулу Лейбница:

$$\begin{aligned}
\Delta(fg) &= \Delta f \cdot g + 2(\nabla f, \nabla g) + f \cdot \Delta g = \\
&= \frac{-2n}{|\vec{x} - \vec{y}|^n} + \frac{4n}{|\vec{x} - \vec{y}|^{n+2}} \cdot (\vec{x}, \vec{x} - \vec{y}) + \frac{2n(R^2 - |\vec{x}|^2)}{|\vec{x} - \vec{y}|^{n+2}} = \\
&= \frac{2n}{|\vec{x} - \vec{y}|^{n+2}} \left(-|\vec{x} - \vec{y}|^2 + 2(\vec{x}, \vec{x} - \vec{y}) + R^2 - |\vec{x}|^2\right) = \\
&= \frac{2n}{|\vec{x} - \vec{y}|^{n+2}} \left(-|\vec{x}|^2 - R^2 + 2(\vec{x}, \vec{y}) + 2|\vec{x}|^2 - 2(\vec{x}, \vec{y}) + R^2 - |\vec{x}|^2\right) = 0.
\end{aligned}$$

В последнем переходе использовали то, что $|\vec{y}| = R$. Таким образом, ядро Пуассона является гармонической функцией по переменной $\vec{x}$.

Проверим, что u удовлетворяет условию на границе. Покажем, что если $\vec{x} \to \vec{x}_0 \in S = \{|\vec{y}| = R\}$, то $u(\vec{x}) \to \varphi(\vec{x}_0)$. Мы можем положить $\varphi \equiv 1$, тогда для

неё существует решение $u \equiv 1$. Обе функции удовлетворяют необходимым требованиям гладкости. Тогда для этой пары функций мы можем написать следующее тождество, используя формулу Пуассона:

$$1 = \frac{R^2 - |\vec{x}|^2}{\sigma_n R} \int\limits_{|\vec{y}|=R} \frac{dS_y}{|\vec{y} - \vec{x}|^n}, \quad \forall \vec{x} \in B_R.$$

Рассмотрим разность

$$u(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}_0) = \frac{R^2 - |\vec{x}|^2}{\sigma_n R} \int\limits_{|\vec{y}|=R} \frac{(\varphi(\vec{y}) - \varphi(\vec{x}_0))dS_y}{|\vec{x} - \vec{y}|^n},$$

$$|u(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}_0)| = \frac{R^2 - |\vec{x}|^2}{\sigma_n R} \int\limits_{|\vec{y}|=R} \frac{|\varphi(\vec{y}) - \varphi(\vec{x}_0)|dS_y}{|\vec{x} - \vec{y}|^n}.$$

Пусть $U_\delta = \{\vec{y} \mid |\vec{y} - \vec{x}_0| < \delta\}$. Зафиксируем размер окрестности δ так, что если $|\vec{y} - \vec{x}_0| < \delta$, то $|\varphi(\vec{y}) - \varphi(\vec{x}_0)| < \varepsilon$. Затем разобьём интеграл по сфере на интеграл по U_δ и тому, что осталось. Оценим эти интегралы:

$$\frac{R^2 - |\vec{x}|^2}{\sigma_n R} \int\limits_{U_\delta} \frac{|\varphi(\vec{y}) - \varphi(\vec{x}_0)|dS_y}{|\vec{x} - \vec{y}|^n} < \varepsilon \cdot \frac{R^2 - |\vec{x}|^2}{\sigma_n R} \int\limits_{U_\delta} \frac{dS_y}{|\vec{x} - \vec{y}|^n} = \varepsilon.$$

Пусть $|\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta/2$, тогда поскольку $\vec{y} \in S \setminus U_\delta$, то $|\vec{x} - \vec{y}| > \delta/2$. Тогда

$$\frac{R^2 - |\vec{x}|^2}{\sigma_n R} \int\limits_{S \setminus U_\delta} \frac{|\varphi(\vec{y}) - \varphi(\vec{x}_0)|dS_y}{|\vec{x} - \vec{y}|^n} \leq (R - |\vec{x}|)\frac{2R}{\sigma_n R} \cdot 2M \cdot \left(\frac{2}{\delta}\right)^n \cdot \sigma_n R^{n-1} \xrightarrow[|\vec{x}| \to R]{} 0.$$

□

Лекция 10

Свойства гармонических функций

Оценки производных гармонических функций

Утверждение 10.1. Пусть $\Delta u = 0$ в шаре $B_R^{x_0}$. Тогда для её производной верна оценка

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}(\vec{x}_0)\right| \leq \frac{n}{R}\sup_{B_R^{x_0}}|u(\vec{x})|. \tag{10.1}$$

Доказательство. Поскольку функция u является гармонической, то она бесконечно дифференцируема, и любая её производная также является гармонической функцией. Действительно,

$$\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}(\Delta u) = 0.$$

Применим теорему 7.3 для первой производной u:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(\vec{x}_0) = \frac{1}{|B_R^{x_0}|}\int\limits_{B_R^{x_0}}\frac{\partial u}{\partial x_k}d\vec{x} = \frac{1}{\varkappa_n R^n}\int\limits_{S_R^{x_0}} u\cdot\nu_k dS.$$

В последнем равенстве была использована формула Остроградского-Гаусса.

Теперь выполним оценку для производной

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}(\vec{x}_0)\right| \leq \frac{1}{\varkappa_n R^n}\cdot\max_{S_R^{x_0}}|u|\cdot\sigma_n R^{n-1} = \frac{n}{R}\sup_{B_R^{x_0}}|u(\vec{x})|.$$

Мы использовали здесь следующее соотношение

$$\varkappa_n = \int\limits_{|\vec{x}|<1} d\vec{x} = \int\limits_0^1 |S_r^0|dr = \int\limits_0^1 \sigma_n r^{n-1}dr = \frac{\sigma_n}{n}r^n\Big|_0^1 = \frac{\sigma_n}{n}. \tag{10.2}$$

□

Утверждение 10.2. Пусть $\Delta u = 0$ в шаре $B_R^{x_0}$. Тогда для её производной верна оценка

$$|\mathcal{D}^\alpha u(\vec{x}_0)| \leq \left(\frac{n|\alpha|}{R}\right)^{|\alpha|}\sup_{B_R^{x_0}}|u(\vec{x})|. \tag{10.3}$$

Здесь использованы обозначения

$$\mathcal{D}^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}; \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$
$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \quad \alpha_k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Доказательство. Пусть $\rho = R/|\alpha|$. Тогда на каждом этапе дифференцирования мы будем рассматривать шар с новым радиусом. В результате получим последовательность вложенных друг в друга шаров:

$$B_\rho^{x_0} \subset B_{2\rho}^{x_0} \subset \ldots \subset B_R^{x_0}.$$

Проведём цепочку оценок:

$$|\mathcal{D}^\alpha u(\vec{x}_0)| \le \left(\frac{n}{\rho}\right) \sup_{B_\rho^{x_0}} \left|\mathcal{D}^{\alpha'} u(\vec{x})\right| \le \left(\frac{n}{\rho}\right)^2 \sup_{B_{2\rho}^{x_0}} \left|\mathcal{D}^{\alpha''} u(\vec{x})\right| \le \left(\frac{n}{\rho}\right)^3 \sup_{B_{3\rho}^{x_0}} \left|\mathcal{D}^{\alpha'''} u(\vec{x})\right| \le \ldots$$
$$\ldots \le \left(\frac{n}{\rho}\right)^{|\alpha|} \sup_{B_R^{x_0}} |u(\vec{x})| = \left(\frac{n|\alpha|}{R}\right)^{|\alpha|} \sup_{B_R^{x_0}} |u(\vec{x})|.$$

□

Утверждение 10.3. Пусть $\Omega_1 \subset \Omega$, $\Delta u = 0$ в Ω и $d = \operatorname{dist}(\partial\Omega_1, \partial\Omega)$. Тогда

$$\sup_{\Omega_1} |\mathcal{D}^\alpha u(\vec{x})| \le \left(\frac{n|\alpha|}{d}\right)^{|\alpha|} \sup_{\Omega} |u(\vec{x})|. \tag{10.4}$$

Доказательство. Заметим, что любой шар с центром, находящимся в области Ω_1, и радиусом d не выходит за пределы области Ω. Значит, для любого такого шара выполнено утверждение 10.2. Тогда мы можем каждую точку области Ω_1 взять за центр такого шара, написать для него оценку для модуля производной $|\mathcal{D}^\alpha u(\vec{x})|$, из которой следует сделанное утверждение. □

Теорема Лиувилля

Теорема 10.1. Пусть $\Delta u = 0$ в $\mathbb{R}^n$ и $|u(\vec{x})| \le C(1 + |\vec{x}|^m)$. Тогда функция u – (гармонический) многочлен степени не выше m.

Доказательство. Оценим производную $\mathcal{D}^\alpha u$, где $|\alpha| = m + 1$. Согласно утверждению 10.2, имеем

$$|\mathcal{D}^\alpha u(\vec{x}_0)| \le \left(\frac{n(m+1)}{\rho}\right)^{m+1} \sup_{B_\rho^{x_0}} |u(\vec{x})| \le \left(\frac{n(m+1)}{\rho}\right)^{m+1} \cdot C(1 + (|\vec{x}_0| + \rho)^m) =$$
$$= C(n(m+1))^{m+1} \frac{1 + (|\vec{x}_0| + \rho)^m}{\rho^{m+1}} \xrightarrow[\rho \to +\infty]{} 0.$$

Таким образом, $|\mathcal{D}^\alpha u(\vec{x}_0)| = 0$ для любого $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ и любого $\alpha : \ |\alpha| = m + 1$. Следовательно, функция $u(\vec{x})$ – многочлен. □

Эта теорема верна и в другой формулировке:

Теорема 10.2. Пусть $\Delta u = 0$ в $\mathbb{R}^n$ и $u(\vec{x}) \ge -C(1 + |\vec{x}|^m)$. Тогда функция u – (гармонический) многочлен степени не выше m.

Аналитичность гармонических функций

Поскольку гармоническая функция является бесконечно дифференцируемой, то для неё можно написать формулу Тейлора:

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) &= \sum_{|\alpha|<m} \frac{\mathcal{D}^\alpha u(\vec{x}_0)}{\alpha!}(\vec{x}-\vec{x}_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m} \frac{\mathcal{D}^\alpha u(\vec{\tilde{x}})}{\alpha!}(\vec{x}-\vec{x}_0)^\alpha = \\ &= \sum_{|\alpha|<m} \frac{\mathcal{D}^\alpha u(\vec{x}_0)}{\alpha!}(\vec{x}-\vec{x}_0)^\alpha + \gamma_m(\vec{x},\vec{x}_0,\vec{\tilde{x}}), \qquad \vec{\tilde{x}} \in [\vec{x}_0,\vec{x}]. \end{aligned} \tag{10.5}$$

Здесь $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!$ и $\vec{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$.

Теорема 10.3. Гармоническая функция – (вещественно) аналитическая.

Доказательство. Надо показать, что

$$\gamma_m(\vec{x},\vec{x}_0,\vec{\tilde{x}}) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Рассмотрим шар с центром в точке $\vec{x}_0$ и радиусом ρ. В любой его точке $|\vec{x}-\vec{x}_0| < \rho$. Поскольку $\vec{\tilde{x}} \in [\vec{x}_0,\vec{x}]$, то $|\vec{\tilde{x}}-\vec{x}_0| < \rho$. Радиус шара ρ – это не радиус сходимости ряда, а его оценка. Другими словами, $|\vec{x}-\vec{x}_0| < \varepsilon < \rho$, где ε – радиус сходимости. Пусть также

$$\sup_{|\vec{x}-\vec{x}_0|<2\rho} |u(\vec{x})| = M.$$

Теперь выполним ряд оценок:

$$|(\vec{x}-\vec{x}_0)^\alpha| = |x_1-x_{01}|^{\alpha_1}|x_2-x_{02}|^{\alpha_2}\ldots|x_n-x_{0n}|^{\alpha_n} \le \varepsilon^{|\alpha|} = \varepsilon^m,$$

$$|\mathcal{D}^\alpha u(\vec{\tilde{x}})| \le \left(\frac{n|\alpha|}{\rho}\right)^{|\alpha|} \sup_{|\vec{x}-\vec{\tilde{x}}|<\rho} |u(\vec{x})| \le \left(\frac{nm}{\rho}\right)^m \sup_{|\vec{x}-\vec{x}_0|<2\rho} |u(\vec{x})| = \left(\frac{nm}{\rho}\right)^m \cdot M.$$

Таким образом,

$$|\gamma_m(\vec{x},\vec{x}_0,\vec{\tilde{x}})| = \left|\sum_{|\alpha|=m} \frac{\mathcal{D}^\alpha u(\vec{\tilde{x}})}{\alpha!}(\vec{x}-\vec{x}_0)^\alpha\right| \le \left(\frac{nm}{\rho}\right)^m \cdot M \cdot \varepsilon^m \cdot \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!}.$$

Для дальнейших выкладок нам потребуется лемма

Лемма 10.1.

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} = n^m. \tag{10.6}$$

Доказательство. **1 способ.** Разложим m различных предметов по n различным коробкам. Это можно сделать n^m разными способами (для каждого из m предметов есть n доступных мест размещения). С другой стороны, мы можем сперва зафиксировать распределение предметов по коробкам: в каждой из n коробок лежит α_k предметов, $\alpha_k \in \{0,1,\ldots,m\}$. Тогда при подсчёте у нас возникает сумма по

всем способам распределения. В каждом из таких распределений может быть $m!$ перестановок всех предметов. При этом нас не интересует, на каком месте находится каждый предмет внутри выбранной коробки. Поэтому в знаменателе каждого из слагаемых мы записываем произведение чисел перестановок предметов внутри каждой коробки.

$$\underbrace{\boxed{\alpha_1}\ \boxed{\alpha_2}\ \boxed{\alpha_3}\ \ldots\ \boxed{\alpha_n}}_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=|\alpha|=m}$$

Приравниваем два способа подсчёта:

$$n^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!}.$$

2 способ. Введём функцию $f(\vec{x}) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^m$. Тогда

$$\mathcal{D}^\alpha f(0) = \begin{cases} m!, & |\alpha| = m, \\ 0, & |\alpha| \neq m. \end{cases}$$

Следовательно разложение этой функции в окрестности нуля по формуле Тейлора имеет вид

$$f(\vec{x}) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\mathcal{D}^\alpha f(0)}{\alpha!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Подставляя в это разложение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, получаем искомое выражение.

□

Из доказанной леммы следует, что

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} = \frac{n^m}{m!},$$

тогда

$$|\gamma_m(\vec{x}, \vec{x}_0, \vec{\tilde{x}})| \leq M \left(\frac{nm\varepsilon}{\rho}\right)^m \cdot \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} = M \left(\frac{nm\varepsilon}{\rho}\right)^m \cdot \frac{n^m}{m!} = M \left(\frac{n^2\varepsilon}{\rho}\right)^m \cdot \frac{m^m}{m!} \leq$$

$$\leq M \left(\frac{n^2\varepsilon}{\rho}\right)^m \cdot e^m = M \left(\frac{n^2 e\varepsilon}{\rho}\right)^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0, \quad \text{если } \frac{n^2 e\varepsilon}{\rho} < 1.$$

В последней выкладке мы использовали следствие формулы Стирлинга:

$$m! = \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}(1 + \overline{o}(1)), \qquad m \to +\infty$$

откуда $m^m/m! \leq e^m$.

Замечание 10.1. С другой стороны, этот результат следует из прямой оценки

$$\ln m! = \sum_{k=1}^{m} \ln k > \int_0^m \ln x dx = x(\ln x - 1)\Big|_0^m = m \cdot (\ln m - 1) = m \cdot \ln(me^- 1) =$$

$$= \ln(m^m e^{-m}) \quad \Rightarrow \quad m! > m^m e^{-m} \quad \Rightarrow \quad \frac{m^m}{m!} < e^m.$$

□

Неравенство Харнака. Теорема Лиувилля (вторая формулировка)

Теорема 10.4. (Неравенство Харнака)
Пусть $u \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B_R})$, $\Delta u = 0$ в шаре B_R и $u \geq 0$. Тогда выполнено неравенство

$$R^{n-2} \cdot \frac{R - |\vec{x}|}{(R + |\vec{x}|)^{n-1}} \cdot u(0) \leq u(\vec{x}) \leq R^{n-2} \cdot \frac{R + |\vec{x}|}{(R - |\vec{x}|)^{n-1}} \cdot u(0). \tag{10.7}$$

Доказательство. Доказательство строится на использовании формулы Пуассона

$$u(\vec{x}) = \frac{R^2 - |\vec{x}|^2}{\sigma_n R} \int\limits_{|\vec{y}|=R} \frac{u(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^n} dS_y.$$

Выполним простую оценку для $|\vec{y}| = R$ и $|\vec{x}| < R$

$$R - |\vec{x}| \leq |\vec{x} - \vec{y}| \leq R + |\vec{x}| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R + |\vec{x}|} \leq \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \leq \frac{1}{R - |\vec{x}|}.$$

Подставим данные оценки в формулу Пуассона:

$$u(\vec{x}) \leq \frac{R^2 - |\vec{x}|^2}{\sigma_n R (R - |\vec{x}|)^n} \int\limits_{|\vec{y}|=R} u(\vec{y}) dS_y = \frac{R^2 - |\vec{x}|^2}{\sigma_n R (R - |\vec{x}|)^n} \cdot u(0) \cdot \sigma_n R^{n-1} = \frac{(R + |\vec{x}|) R^{n-2}}{(R - |\vec{x}|)^{n-1}},$$

$$u(\vec{x}) \geq \frac{R^2 - |\vec{x}|^2}{\sigma_n R (R + |\vec{x}|)^n} \int\limits_{|\vec{y}|=R} u(\vec{y}) dS_y = \frac{R^2 - |\vec{x}|^2}{\sigma_n R (R + |\vec{x}|)^n} \cdot u(0) \cdot \sigma_n R^{n-1} = \frac{(R - |\vec{x}|) R^{n-2}}{(R + |\vec{x}|)^{n-1}}.$$

□

Рассмотрим пример использования неравенства Харнака. Пусть $n = 2$ и $|\vec{x}| \leq \theta \cdot R$, где $0 < \theta < 1$. Тогда из неравенства следует, что

$$C_\theta^{-1} \leq \frac{u(\vec{x})}{u(0)} \leq C_\theta, \quad C_\theta = \frac{1 + \theta}{1 - \theta}.$$

При различных значениях параметра θ мы получаем разные оценки для значений u в шаре радиуса, меньшего, чем R. Например, при $\theta = 0.5$ константа $C_\theta = 3$. Откуда следует, что значения u в шаре радуса $R/2$ отличаются от значения в центре не больше, чем в 3 раза. Эти значения оказываются отделены как от нуля, так и от бесконечности. Также, к примеру, при θ близком к нулю получим, что значения u в таком маленьком шаре не должны сильно отличаться от значений в его центре.

Теорема 10.5. (Теорема Лиувилля (вторая формулировка))
Пусть $\Delta u = 0$ в $\mathbb{R}^n$ и $u(\vec{x}) \geq -C$. Тогда $u \equiv \text{const}$.

Доказательство. Сделаем замену функции $u \rightsquigarrow u + C \geq 0$. Тогда для такой функции в некотором шаре $B_R = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| < R\}$ выполняется неравенство Харнака:

$$R^{n-2} \cdot \frac{R - |\vec{x}|}{(R + |\vec{x}|)^{n-1}} \cdot u(0) \leq u(\vec{x}) \leq R^{n-2} \cdot \frac{R + |\vec{x}|}{(R - |\vec{x}|)^{n-1}} \cdot u(0).$$

В этом неравенстве в силу того, что функция u является гармонической во всём пространстве, устремим $R \to +\infty$. Тогда получим, что

$$u(0) \leq u(\vec{x}) \leq u(0) \quad \Rightarrow \quad u(\vec{x}) \equiv u(0).$$

□

Теорема об устранимой особенности

Теорема 10.6. Пусть $\Delta u = 0$ в $\Omega \setminus \{\vec{x}_0\}$ и $u(\vec{x}) = \overline{o}(|E(\vec{x} - \vec{x}_0)|)$ при $\vec{x} \to \vec{x}_0$. Тогда особенность в точке $\vec{x}_0$ – устранимая.

Будем писать, что

$$|E(\vec{x} - \vec{x}_0)| = -E(\vec{x} - \vec{x}_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_n |\vec{x} - \vec{x}_0|^{n-2}}, & n \geq 3, \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}, & n = 2. \end{cases}$$

Формулировка теоремы означает, что особенность фундаментального решения – это минимально возможная особенность гармонической функции. Если функция при подходе аргумента к особенности растёт медленнее, чем фундаментальное решение, то особенность устранима.

Также верна теорема в более сильной формулировке, которую мы примем без доказательства.

Теорема 10.7. Пусть $\Delta u = 0$ в $\Omega \setminus \{\vec{x}_0\}$ и $u(\vec{x}) = \underline{O}(|E(\vec{x} - \vec{x}_0)|)$ при $\vec{x} \to \vec{x}_0$. Тогда существует константа C, такая, что $u(\vec{x}) = E(\vec{x} - \vec{x}_0) + v(\vec{x})$, где $\Delta v = 0$.

Приведём пример особенности, бóльшей, чем у фундаментального решения. Рассмотрим функцию

$$n = 2: \quad u = \Re \frac{1}{z^2} = \Re \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{(x^2 - y^2)^2 + 4xy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \sim \frac{1}{|z|^2}, \ z \to 0.$$

$$n \geq 3: \quad \frac{x_1}{|\vec{x}|^n} = \underline{O}\left(\frac{1}{|\vec{x}|^{n-1}}\right), \ \vec{x} \to 0.$$

Перейдём к доказательству теоремы.

Доказательство. Рассмотрим шар $B_R^{x_0} \subset \Omega$ (при $n = 2$ радиус $R < 1$). Поставим в этом шаре задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad \vec{x} \in B_R^{x_0}, \qquad v \in C^2(B_R^{x_0}) \cap C^0(\overline{B_R^{x_0}}), \ |v| \leq M, \\ v\Big|_{|\vec{x} - \vec{x}_0| = R} = u(\vec{x}). \end{cases}$$

Рассмотрим две функции $u(\vec{x}) - v(\vec{x})$ и $-\varepsilon E(\vec{x} - \vec{x}_0) > 0$ в области

$$K_\rho = B_R^{x_0} \setminus B_\rho^{x_0} = \{\vec{x} \mid \rho < |\vec{x} - \vec{x}_0| < R\},$$

где они обе являются гармоническими. Посмотрим на их значения на границе:

$$|\vec{x} - \vec{x}_0| = R: \quad |u(\vec{x}) - v(\vec{x})| = 0 \leq -\varepsilon E(\vec{x} - \vec{x}_0),$$
$$|\vec{x} - \vec{x}_0| = \rho: \quad |u(\vec{x}) - v(\vec{x})| \leq -\varepsilon E(\vec{x} - \vec{x}_0), \text{ при достаточно малом } \rho.$$

Вторая оценка следует из того, что $u(\vec{x}) - v(\vec{x}) = \overline{o}(|E(\vec{x} - \vec{x}_0)|)$ при $\vec{x} \to \vec{x}_0$. Таким образом, по принципу максимума получаем, что $|u(\vec{x}) - v(\vec{x})| \leq -\varepsilon E(\vec{x} - \vec{x}_0)$ в K_ρ. Далее фиксируем $\vec{x} \neq \vec{x}_0$ и устремляем $\varepsilon \to 0$ так, что $\rho = \rho(\varepsilon) \to 0$ и $\rho < |\vec{x} - \vec{x}_0|$. Откуда следует, что $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$ в $B_R^{x_0} \setminus \{\vec{x}_0\}$. $\square$

Лекция 11

Внешние краевые задачи для уравнения Лапласа

Когда речь шла о внутренних краевых задачах для уравнения Лапласа и вставал вопрос о единственности решения, то мы пользовались принципом максимума для задачи Дирихле и леммой о нормальной производной для задачи Неймана. Кроме того, в задаче Неймана возникало условие разрешимости, которое диктовалось теоремой о потоке. Говоря о внешних краевых задачах, мы не можем использовать принцип максимума, а значит у таких задачи исчезает единственность решения.

Приведём пример: пусть $\Omega = \{\vec{x} \mid x_1 > 0\}$. Рассмотрим задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ x_1 > 0, \\ u\Big|_{x_1=0} = 0. \end{cases}$$

Решениями такой задачи могут быть функции x_1, x_1x_2, $x_1x_2x_3$, $x_1^3 - 3x_1x_2^2$ и так далее. В этом случае необходимо наложить дополнительные условия на поведение решения при $|\vec{x}| \to \infty$. В данной задаче "правильное" решение – это $u \equiv 0$. Выбор дополнительного условия зависит от того насколько "широко" область уходит на бесконечность и размерности пространства. В приведённом примере условие, которое выделяет нам решение $u \equiv 0$ при $|\vec{x}| \to \infty$, имеет вид $|u(\vec{x})| = \overline{o}(|\vec{x}|)$. Идея доказательства того, что это нужное нам условие, состоит в том, чтобы продолжить функцию u нечётным образом относительно x_1 на всё пространство и применить теорему Лиувилля. В комплексном анализе подобный подход называется принципом симметрии Римана-Шварца. Можно привести пример, иллюстрирующий зависимость дополнительного условия от "широты" ухода области на бесконечность:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ x_1 > 0, \ x_2 > 0, \\ u\Big|_{x_1=0} = 0, \quad u\Big|_{x_2=0} = 0. \end{cases}$$

Для такой задачи условие имеет вид $|u(\vec{x})| = \overline{o}(|\vec{x}|^2)$, $|\vec{x}| \to \infty$.

Пусть $\Omega_\infty = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, где Ω – ограниченная область и $\partial\Omega_\infty = \partial\Omega$ – ограниченна. Выберем в качестве области Ω_∞ внешность круга и рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ r = |\vec{x}| > R, \\ u\Big|_{|\vec{x}|=R} = A. \end{cases}$$

Заметим, что решение такой задачи должно зависеть только от радиальной переменной $u = u(r)$. Тогда условие задачи записывается в виде

$$u'' + \frac{n-1}{r}u' = 0, \ u(R) = A,$$

а её решение имеет вид

$$u(r) = \begin{cases} \dfrac{C_1}{r^{n-2}} + C_2, & n \geq 3, \\ C_1 \cdot \ln r + C_2, & n = 2. \end{cases}$$

Условие $u(R) = A$ даст нам связь между константами C_1 и C_2. Нужно дополнительное условие на поведение решения на бесконечности. Здесь мы видим, что условие зависит от размерности пространства:

$$\begin{aligned} n \geq 3: &\quad u(\vec{x}) \to 0, \quad |\vec{x}| \to \infty, &\quad \Rightarrow \quad C_2 = 0; \\ n = 2: &\quad \sup |u(\vec{x})| < \infty, &\quad \Rightarrow \quad C_1 = 0. \end{aligned}$$

Внешняя задача Дирихле при $n \geq 3$

Рассмотрим внешнюю задачу Дирихле при $n \geq 3$:

$$(D_{\geq 3}) \quad \begin{cases} \Delta u = 0, \ \vec{x} \in \Omega_\infty, & u \in C^2(\Omega_\infty) \cap C^0(\overline{\Omega_\infty}), \\ u\Big|_{\partial\Omega_\infty} = \varphi(\vec{x}), & \varphi \in C(\partial\Omega_\infty), \\ u(\vec{x}) \to 0, \ |\vec{x}| \to \infty. \end{cases} \tag{11.1}$$

Теорема 11.1. Если решение задачи $(D_{\geq 3})$ существует, то оно единственно.

Доказательство. Пусть u_1, u_2 – два решения задачи $(D_{\geq 3})$. Рассмотрим $u = u_1 - u_2$. Эта функция является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ \vec{x} \in \Omega_\infty, \\ u\Big|_{\partial\Omega_\infty} = 0, \\ u(\vec{x}) \to 0, \ |\vec{x}| \to \infty. \end{cases}$$

Выберем область $\Omega_R = \Omega_\infty \cap B_R$, считая при этом, что $\Omega \subset B_R$. На границе такой области $\partial\Omega_R = \partial\Omega_\infty \cup S_R$ воспользуемся принципом максимума:

$$\begin{aligned} &\partial\Omega_\infty: \quad u = 0, \\ &S_R: \quad |u| < \varepsilon, \text{ если } R \text{ достаточно велико.} \end{aligned}$$

Следовательно, $|u(\vec{x})| < \varepsilon$ в Ω_R. При $R \to \infty$ получим, что эта оценка верна во всём Ω_∞. Откуда заключаем, что $u \equiv 0$, и $u_1 \equiv u_2$. □

Внешняя задача Дирихле при $n = 2$

Рассмотрим внешнюю задачу Дирихле при $n = 2$:

$$(D_2) \quad \begin{cases} \Delta u = 0, \ \vec{x} \in \Omega_\infty, & u \in C^2(\Omega_\infty) \cap C^0(\overline{\Omega_\infty}), \\ u\Big|_{\partial\Omega_\infty} = \varphi(\vec{x}), & \varphi \in C(\partial\Omega_\infty), \\ \sup |u(\vec{x})| < \infty. \end{cases} \tag{11.2}$$

Теорема 11.2. Если решение задачи (D_2) существует, то оно единственно.

Доказательство. Будем предполагать, что $0 \in \Omega$, тогда $B_\rho \subset \Omega$. Следовательно, если $\vec{x} \in \Omega_\infty$, то $|\vec{x}| > \rho$. Рассмотрим $u = u_1 - u_2$. Эта функция является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ \vec{x} \in \Omega_\infty, \\ u\Big|_{\partial\Omega_\infty} = 0, \\ \sup|u(\vec{x})| < \infty. \end{cases}$$

Вместе с ней рассмотрим ещё одну функцию $\varepsilon(\ln|\vec{x}| - \ln\rho)$, где $\varepsilon > 0$. Эта функция, как и u, является гармонической в области Ω_∞ и, кроме того, положительной, так как $|\vec{x}| > \rho$. Выберем область $\Omega_R = \Omega_\infty \cap B_R$ с границей $\partial\Omega_R = \partial\Omega_\infty \cup S_R$. Рассмотрим значения выбранных нами функций на $\partial\Omega_R$:

$$\begin{aligned} &\partial\Omega_\infty: \quad u = 0 < \varepsilon(\ln|\vec{x}| - \ln\rho), \\ &S_R: \quad |u| < \sup|u(\vec{x})| < \varepsilon(\ln R - \ln\rho), \quad \text{если } R \text{ достаточно велико.} \end{aligned}$$

Тогда из принципа максимума следует, что $|u(\vec{x})| < \varepsilon(\ln|\vec{x}| - \ln\rho)$ в области Ω_R. Теперь мы можем фиксировать $\vec{x} \in \Omega_\infty$ и устремить $\varepsilon \to 0$. Тогда получаем, что $u \equiv 0$ и $u_1 \equiv u_2$. □

Внешняя задача Неймана при $n \geq 3$

Рассмотрим внешнюю задачу Неймана при $n \geq 3$:

$$(N_{\geq 3}) \quad \begin{cases} \Delta u = 0, \ \vec{x} \in \Omega_\infty, & u \in C^2(\Omega_\infty) \cap C^1(\overline{\Omega_\infty}), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\Big|_{\partial\Omega_\infty} = \psi(\vec{x}), & \psi \in C(\partial\Omega_\infty), \\ u(\vec{x}) \to 0, \ |\vec{x}| \to \infty. \end{cases} \tag{11.3}$$

Теорема 11.3. Если решение задачи $(N_{\geq 3})$ существует, то оно единственно.

Доказательство. Пусть u_1, u_2 – два решения задачи $(N_{\geq 3})$. Рассмотрим $u = u_1 - u_2$. Эта функция является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ \vec{x} \in \Omega_\infty, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\Big|_{\partial\Omega_\infty} = 0, \\ u(\vec{x}) \to 0, \ |\vec{x}| \to \infty. \end{cases}$$

Выберем область $\Omega_R = \Omega_\infty \cap B_R$ с границей $\partial\Omega_R = \partial\Omega_\infty \cup S_R$. Так как u – гармоническая функция в Ω_R, то её минимум и максимум достигаются на $\partial\Omega_R$. Если минимум или максимум достигаются на $\partial\Omega_\infty$, то предполагая, что функция $u \not\equiv \text{const}$, мы придём к противоречию с леммой о нормальной производной. Следовательно, это предположение неверно, и $u \equiv \text{const}$. Из условия на бесконечности получим, что $u \equiv 0$. Если минимум или максимум достигаются на S_R, то мы можем выбрать R достаточно большим, чтобы $|u(\vec{x})| < \varepsilon$, причём для любого $\varepsilon > 0$. Это возможно в силу условия на бесконечности. В этом случае мы также получаем, что $u \equiv 0$, и, следовательно, $u_1 \equiv u_2$. □

Замечание 11.1. При доказательстве мы использовали лемму 8.1, в условии которой мы требовали, чтобы к любой точке границы можно было подойти шаром, лежащим внутри области. Достаточным для этого условием было требование гладкости границы $\partial\Omega \in C^2$. Для внешней задачи Неймана это слишком сильное условие. Достаточно, например, потребовать, чтобы область Ω была выпуклой и обладала кусочно-гладкой границей.

Замечание 11.2. В задаче $(N_{\geq 3})$ не требуется условие разрешимости

$$\int\limits_{\partial\Omega} \psi \, dS = 0.$$

В качестве примера приведём фундаментальное решение $E(\vec{x}) \sim |\vec{x}|^{2-n}$. Оно является гармонической функцией в области Ω_∞, если $0 \notin \Omega_\infty$. Кроме того, $E(\vec{x}) \to 0$ при $|\vec{x}| \to 0$. Но

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial E}{\partial \vec{\nu}} dS = 1, \quad \text{если } 0 \in \Omega.$$

Внешняя задача Неймана при $n = 2$

Рассмотрим внешнюю задачу Неймана при $n = 2$:

$$(N_2) \quad \begin{cases} \Delta u = 0, \ \vec{x} \in \Omega_\infty, & u \in C^2(\Omega_\infty) \cap C^1(\overline{\Omega_\infty}), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\Big|_{\partial\Omega_\infty} = \psi(\vec{x}), & \psi \in C(\partial\Omega_\infty), \\ \sup |u(\vec{x})| < \infty. \end{cases} \tag{11.4}$$

Теорема 11.4. Если решение задачи (N_2) существует, то оно единственно с точностью до константы.

Замечание 11.3. В отличие от случая большей размерности, условие разрешимости в задаче (N_2) сохраняется.

Лемма 11.1. Пусть $0 \in \Omega$. Совершим преобразование инверсии относительно единичной окружности. То есть перейдём от $u(r, \varphi)$ в Ω_∞ к $v(1/r, \varphi)$ в $\Omega_0 \setminus \{0\}$. Тогда если $\Delta u = 0$ в Ω_∞, то $\Delta v = 0$ в $\Omega_0 \setminus \{0\}$.

Доказательство. Рассмотрим замену $u(r, \varphi) \rightsquigarrow v(r, \varphi) = u(1/r, \varphi) = u(\rho, \varphi)$, где $\rho = 1/r$. Вспомним выражение для оператора Лапласа в полярных координатах

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Так как $\Delta u = 0$, то

$$\Delta u = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} = 0.$$

Найдём производные функции v.

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial u(1/r,\varphi)}{\partial \rho}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{2}{r^3}\frac{\partial u(1/r,\varphi)}{\partial \rho} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 u(1/r,\varphi)}{\partial \rho^2}.$$

Или в терминах переменной ρ:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\rho^2\frac{\partial u(\rho,\varphi)}{\partial \rho} = -\rho^2 u_\rho, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} = 2\rho^3\frac{\partial u(\rho,\varphi)}{\partial \rho} + rho^4\frac{\partial^2 u(\rho,\varphi)}{\partial \rho^2} = 2\rho^3 u_\rho + \rho^4 u_{\rho\rho}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Delta v &= 2\rho^3 u_\rho + \rho^4 u_{\rho\rho} - \rho^3 u_\rho + \rho^2 u_{\varphi\varphi} = \rho^4 u_{\rho\rho} + \rho^3 u_\rho + \rho^2 u_{\varphi\varphi} = \\ &= \rho^4\left(u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi}\right) = 0.\end{aligned}$$

□

Перейдём к доказательству теоремы.

Доказательство. Пусть u_1, u_2 – решения задачи (N_2). Рассмотрим их разность $u = u_1 - u_2$, которая удовлетворяет задаче

$$\begin{cases}\Delta u = 0,\ \vec{x} \in \Omega_\infty, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\right|_{\partial\Omega_\infty} = 0, \\ \sup|u(\vec{x})| < \infty.\end{cases}$$

Сделаем в этой задаче преобразование инверсии относительно единичной окружности (предполагая, что $0 \in \Omega$):

$$\begin{cases}\Delta u = 0,\ \vec{x} \in \Omega_\infty, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\right|_{\partial\Omega_\infty} = 0, \\ \sup|u(\vec{x})| < \infty.\end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases}\Delta v = 0,\ \vec{x} \in \Omega_0 \setminus \{0\}, \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial \vec{\xi}}\right|_{\partial\Omega_0} = 0, \\ \sup|v(\vec{x})| < \infty.\end{cases}$$

При такой инверсии углы сохраняются, поэтому если вектор нормали был перпендикулярен границе, то после преобразования он остался ей перпендикулярен. Теперь мы имеем задачу Неймана в ограниченной области, но без одной точки 0. Заметим, что поскольку $\sup|v| < \infty$, то работает теорема об устранимой особенности, а значит, мы имеем дело с задачей

$$\begin{cases}\Delta v = 0,\ \vec{x} \in \Omega_0, \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial \vec{\xi}}\right|_{\partial\Omega_0} = 0.\end{cases}$$

Про неё мы знаем, что $v \equiv \text{const}$, следовательно, $u \equiv \text{const}$, и $u_1 - u_1 \equiv \text{const}$. □

Преобразование Кельвина

При помощи преобразования инверсии мы свели внешнюю задачу к внутренней в пространстве размерности $n = 2$. В пространстве бóльшей размерности с помощью инверсии этого не достичь, так как рассматриваемая функция перестаёт быть гармонической. Но это можно сделать с помощью преобразования Кельвина:

$$v(r,\omega) = r^{n-2} \cdot u(1/r,\omega) = \rho^{2-n} \cdot u(\rho,\omega), \quad \rho = 1/r. \tag{11.5}$$

Покажем, что при преобразовании Кельвина гармоническая функция переходит в гармоническую. Оператор Лапласа в обобщённых сферических координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_S,$$

где Δ_S – (безразмерный) оператор Бельтрами-Лапласа:

$$n = 2: \qquad \Delta_S = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$
$$n = 3: \qquad \Delta_S = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \operatorname{tg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Если функция u – гармоническая, то

$$\Delta u = u_{\rho\rho} + \frac{n-1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}\Delta_S u = 0.$$

Итак, рассмотрим производные функции v:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = (2-n)r^{1-n} \cdot u + r^{2-n} \cdot \left(-\frac{1}{r^2}u_\rho\right),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = (2-n)(1-n)r^{-n} \cdot u + 2(2-n)r^{1-n} \cdot \left(-\frac{1}{r^2}u_\rho\right) + r^{2-n} \cdot \left(\frac{1}{r^4}u_{\rho\rho} + \frac{2}{r^3}u_\rho\right).$$

Теперь вычислим оператор Лапласа:

$$\begin{aligned}\Delta v &= (2-n)(1-n)\rho^n \cdot u + 2(n-2)\rho^{n+1} \cdot u_\rho + \rho^{n+2}u_{\rho\rho} + 2\rho^{n+1}u_\rho + \\ &+ (n-1)\rho((2-n)\rho^{n-1} \cdot u - \rho^n \cdot u_\rho) + \rho^n\Delta_S u = \\ &= \rho^{n+2}\left(u_{\rho\rho} + \frac{u_\rho}{\rho} \cdot (2(n-2) + 2 - (n-1)) + \frac{1}{\rho^2}\Delta_S u\right) = \\ &= \rho^{n+2}\left(u_{\rho\rho} + \frac{u_\rho}{\rho} \cdot (n-1) + \frac{1}{\rho^2}\Delta_S u\right) = 0.\end{aligned}$$

Посмотрим, что нам даёт преобразование Кельвина. Рассмотрим внешнюю задачу Дирихле в пространстве размерностью $n \geq 3$ и применим к ней преобразование Кельвина:

$$(D_{\geq 3}) \quad \begin{cases} \Delta u = 0, \ \vec{x} \in \Omega_\infty, \\ u\Big|_{\partial\Omega_\infty} = \varphi, \\ u = \overline{o}(1), \ |\vec{x}| \to \infty. \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \Delta v = 0, \ \vec{x} \in \Omega_0 \setminus \{0\}, \\ v\Big|_{\partial\Omega_0} = \hat{\varphi}, \\ u = \overline{o}(r^{2-n}), \ r \to 0. \end{cases}$$

Условие, которое возникает для функции v в нуле, также означает, что

$$v = \overline{o}(r^{2-n}) = \overline{o}(|E(\vec{x})|), \qquad \vec{x} \to 0,$$

что как раз входит в условие теоремы об устранимой особенности. Учитывая это, мы получим задачу Дирихле в ограниченной области

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \ \vec{x} \in \Omega_0, \\ v\Big|_{\partial\Omega_0} = \hat{\varphi}. \end{cases}$$

То же самое можно проделать и с задачей Неймана, но возникает вопрос: почему у внутренней задачи Неймана есть условие разрешимости, а у внешней – его нет? Ответ заключается в том, что преобразование Кельвина переводит внешнюю задачу Неймана во внутреннюю третью краевую задачу:

$$\frac{u(\rho,\omega)}{\partial\vec{\nu}} = \frac{1}{\partial\vec{\nu}}\left(\rho^{2-n}\cdot v(1/\rho,\omega)\right) = \rho^{2-n}\cdot\frac{v(1/\rho,\omega)}{\partial\vec{\nu}} + \frac{\rho^{2-n}}{\partial\vec{\nu}}\cdot v(1/\rho,\omega).$$

Как можно видеть из последнего выражения, появилась линейная комбинация функции v и её нормальной производной. Открытым остаётся вопрос о том, является ли появившееся условие на границе физически правильным. Заметим также, что в пространстве размерности $n = 2$ задача Неймана переходила в задачу Неймана, так как множитель $\rho^{2-n} = \rho^{2-2} = 1$.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ