МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КЛАССИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ШАФАРЕВИЧ
АНДРЕЙ ИГОРЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ОНУФРИЕНКО МАРИЮ ВИКТОРОВНУ

Содержание

Лекция 1

1. Геометрия кривых. Плоские кривые

Способы задания плоской кривой

Рассмотрим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$. Зафикисируем на ней стандартные евклидовы координаты x_1, x_2.

Если задана функция $f(y)$ и $y \in [a, b]$, тогда можно рассмотреть на плоскости множество точек $x_2 = f(x_1)$, и если функция непрерывна, то ее график будет представлять из себя кривую.

Не все кривые представляют собой график — $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Такой способ задания кривых называется *неявным* $F(x_1, x_2) = 0$.

Определение 1. Гладкая регулярная элементарная плоская кривая — это множество точек плоскости $\mathbb{R}^2$, задаваемое параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \end{cases},$$

причем выполнено следующее условие:

1) $t \in [a, b]$,

2) $\gamma(t) \in C^\infty([a, b])$

3) $\dot{\gamma} \neq 0$

4) $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Longrightarrow t_1 = t_2$

Назовем $\dot{\gamma}$ — вектор скорости γ.

Замечание 1. Первое свойство отражено в определением термином «элементарная», т.е. параметризуется отрезком. Второе условие отражено термином «гладкая». Это условие можно заменить на дифференцируемость нужного порядка или на непрерывность. Третье условие означает отсутствие у кривой изломов.

Пример 1. Пример кривой с изломами, задаваемой бесконечно дифференцируемой функцией.

$$\begin{cases} x_1 = t^3, \\ x_2 = t^2, \end{cases}$$

$$t \in [-1; 1].$$

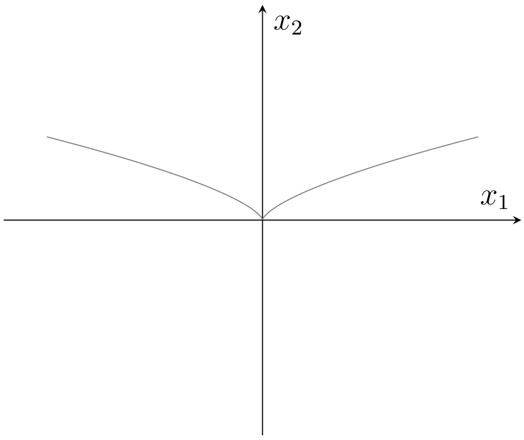
Это плоская кривая (в силу $x_3 = 0$). Из первого уравнения выражаем t и подставляем во второе. Получим

$$x_2 = x_1^{2/3}$$

Вектор скорости

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

обращается в 0 при $t = 0$.



Задача 1. *Пусть γ — прямой угол. Задать γ параметрическим уравнением*

$$x = \gamma(t) \in C^\infty,$$

т.е. есть точка излома в вершине угла. (Нужно оперировать функциями, которые с некоторого момента тождественно равны нулю).

Если γ не регулярна (т.е. не выполнено условие 3), то точки, в которых $\dot{\gamma} = 0$ — особые. Остальные — регулярные.

Определение 2. Длина дуги, заключенной между двумя значениями $t_1 < t_2$ параметра — число l:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\gamma}| dt.$$

Задача 2. *Доказать, что l не зависит от параметризации.*

Зафиксируем на кривой точку t_0 и рассмотрим функцию

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\gamma}| dt.$$

Утверждение 1. *Верно, что $s(t) \in C^\infty([a, b])$ и $\dot{s} > 0$; кроме того $\dot{s} = |\dot{\gamma}|$, $t = t(s)$,*

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}.$$

Следствие 1. *Эта формула определяет корректную замену параметра (существует обратная замена $t = t(s)$).*

Определение 3. Параметр s — натуральный параметр. Его физический смысл — длина дуги, отсчитываемой от фиксированной точки.

Определение 4. Пусть s — натуральный параметр на γ. Тогда $l = |s_2 - s_1|$.

Замечание 2. Вектор скорости в натуральной параметризации равен 1:

$$\left|\frac{d\gamma}{ds}\right| = 1.$$

Внешняя геометрия кривой

Утверждение 2. *Пусть $a(t) \in \mathbb{R}^n$ — гладкая вектор–функция, и пусть $|a(t)| = \mathrm{const}$. Тогда $\dot{a} \perp a$.*

Доказательство. Так как длина — константа, значит, и скалярный квадрат тоже константа: $(a, a) = 0$. Продифференцируем равенство: $2(a, \dot{a}) = 0$ — условие перпендикулярности. □

Следствие 2. *Если γ параметризована натуральным параметром, то $\ddot{\gamma} \perp \dot{\gamma}$.*

Утверждение 3. *Пусть $Q(t)$ и $A(t)$ — гладкие $n \times n$ функции и пусть $\dot{Q} = QA$. Тогда*

1) *если $Q(t)$ ортогональна, то $A(t)$ кососимметрично,*

2) *если A кососимметрично и существует t_0: $Q(t_0)$ ортогональна, то $Q(t)$ ортогональна для любого t*

Доказательство. Продифференцируем произведение

$$(QQ^*)^{\cdot} = \dot{Q}Q^* + Q\dot{Q}^* = QAQ^* + QA^*Q^* = Q(A + A^*)Q^*.$$

□

Касательная. Нормаль. Касание k–ого порядка

Определение 5. Касательная к γ в точке t — прямая, проходящая через $\gamma(t)$ в направлении $\dot{\gamma}(t)$

Замечание 3. Параметрическое уравнение касательной имеет вид

$$x = \gamma(t_0) + \tau\dot{\gamma}(t_0),$$

Замечание 4. Через каждую точку кривой проходит одна прямая перпендикулярно касательной. Она называется нормалью. Уравнение нормали имеет вид

$$(x - \gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0)) = 0.$$

Вообще говоря, касательная — это прямая, которая имеет с нашей кривой касание первого порядка.

Определение 6. Кривые γ_1 и γ_2, параметризованные натуральным параметром, имеют в точке s_0 касание порядка k, если s можно выбрать так, что

$$\gamma_1 - \gamma_2 = o((s-s_0)^k).$$

Утверждение 4. *Кривые γ_1 и γ_2 имеют в точке s_0 касание порядка $k \iff \gamma_1(s_0) = \gamma_2(s_0)$, $\dot\gamma_1(s_0) = \dot\gamma_2(s_0)$, $\ldots$, $\gamma_1^{(k)}(s_0) = \gamma_2^{(k)}(s_0)$.*

Доказательство. Разложим разность по формуле Тейлора

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}(\gamma_1^{(j)}(s_0) - \gamma_2^{(j)}(s_0))(s-s_0)^j + o((s-s_0)^k)$$

$\square$

Теорема о соприкасающейся окружности

Пусть γ — окружность радиуса R.

$$x = x_0 + R\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix} = x_0 + R\begin{pmatrix}\cos s/R \\ \sin s/R\end{pmatrix}$$

$$\dot x = \begin{pmatrix}-\sin s/R \\ \cos s/R\end{pmatrix}$$

$$\ddot x = \frac{1}{R}\begin{pmatrix}-\cos s/R \\ -\sin s/R\end{pmatrix}$$

$$|\ddot x| = \frac{1}{R}.$$

Теорема 1. *Пусть $\ddot\gamma(s) \neq 0$. Тогда существует единственная окружность, имеющая с кривой γ касание второго порядка в точке s_0. Ее центр лежит на нормали кривой в направлении $\ddot\gamma$, а радиус равен $1/|\ddot\gamma|$.*

Доказательство. Рассмотрим кривую, у которой вектор ускорения в точке не равен нулю. Нужно найти окружность, у которой скорость и ускорение будут такие же, как у выбранной кривой. Ускорение кривой в натуральной параметризации перпендикулярно. У окружности ускорение перпендикулярно скорости и направлено в центр. Значит, центр должен лежать на прямой, которая содержит вектор $\ddot\gamma$. Длина вектора ускорения равна $1/R \Longrightarrow r = 1/|\ddot\gamma|$. $\square$

Определение 7. Это окружность — соприкасающаяся окружность к γ. Ее центр — центр кривизны γ в точке s_0, ее радиус — радиус кривизны; $1/R = |\ddot\gamma|$ — кривизна; $k = |\ddot\gamma|$.

Замечание 5. Кривизна в каждой точке своя. Эта функция, вообще говоря, не гладкая, потому что на кривой могут быть точки, в которых вектор ускорения обращается в ноль. Если таких точек нет, то кривизна — гладкая функция.

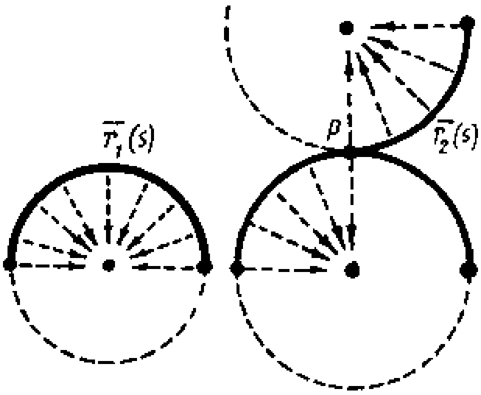


Рис. 1.1

Плоские формулы Френе

Определение 8. Вектор нормали к γ в точке s

$$n(s) = \frac{\ddot{\gamma}}{|\ddot{\gamma}|}, \quad \ddot{\gamma} \neq 0,$$

векторы v, n — репер Френе.

Утверждение 5 (плоские формулы Френе)**.**

$$\begin{cases} \dot{v} = kn \\ \dot{n} = -kv \end{cases}$$

Доказательство.

$$0 = (v, n),$$

$$(\dot{v}, n) + (v, \dot{n}) = 0,$$

Так как вектор n единичный, то производная от него ортогональна самому этому вектору. Следовательно,

$$\dot{n} = \alpha v,$$

$$k(n, n) + \alpha(v, v) = 0.$$

□

Замечание 6. Кривизна определена во всех точках кривой, а репер Френе только в тех, в которых кривизна не обращается в ноль. Модифицируем определение репера Френе, чтобы он был определен во всех точках, а также определение кривизны, приписав ей знак.

Зафиксируем на плоскости ориентацию. Построим вектор n так, что $n \perp v$:

$$\widetilde{n} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1, \end{pmatrix}$$

а кривизну определим следующим образом

$$\widetilde{k} = \begin{cases} 0, & \ddot{\gamma} = 0, \\ k, & n = \widetilde{n}, \\ -k, & n = -\widetilde{n}. \end{cases}$$

Замечание 7. Новый вид формул Френе

$$\begin{cases} \dot{v} = \widetilde{k}\widetilde{n} \\ \dot{\widetilde{n}} = -\widetilde{k}\widetilde{v} \end{cases}$$

$$\widetilde{k} = (\dot{v}, \widetilde{n}).$$

Лекция 2

2. Геометрия кривых. Кривые в пространстве

Теорема о восстановлении плоской кривой по кривизне

Теорема 2. *1) Пусть $f(s)$ — гладкая функция на $[0, L]$. Тогда существует регулярная гладкая кривая γ такая, что $f(s) = \widetilde{k}(s)$.*

2) Пусть γ_1, γ_2 — кривые, такие что $\widehat{k}_1(s) = \widetilde{k}_2(s)$. Тогда существует движение плоскости $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ такие, что $g(\gamma_1) = \gamma_2$.

Доказательство. 1) Напомним, что движение плоскости — это взаимно–однозначное отображение плоскости на себя, которое сохраняет расстояние между точками. Любое движение — это композиция сдвига и ортогонального преобразования (поворота или отражения).

Пусть мы знаем функцию кривизны. Построим по ней кривую. Используем формулы Френе:

$$\begin{cases} \dot{v} = \widehat{k}\widetilde{n} \\ \dot{\widehat{n}} = -\widetilde{k}\widetilde{v}, \end{cases}$$

где скорость равна

$$v = \begin{pmatrix} \cos\alpha(s), \\ \sin\alpha(s). \end{pmatrix}$$

Продифференцируем скорость:

$$\dot{v} = \dot{\alpha}\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \dot{\alpha}\widetilde{n}.$$

Итак, если есть кривая параметризованная натуральным параметром, то функция кривизны этой кривой — это производная от «угловой» функции α (ее иногда называют «угловой функцией кривой»). Из этого, кстати, легко понять, что кривизна показывает, с какой скоростью вращается репер Френе, когда мы движемся вдоль кривой.

Итак, если есть кривая, то ее кривизна — это производная от α, поэтому α легко восстановить, проинтегрировав кривизну. После этого по α можно восстановить вектор v, а после, снова проинтегрировав уже и саму кривую. Давайте это проделаем в явном виде. Зададим функцию $\alpha(s)$:

$$\alpha(s) = \int_0^s f(s_1)ds_1 + \alpha_0,$$

единичный вектор скорости v:

$$v(s) = \begin{pmatrix} \cos\alpha(s), \\ \sin\alpha(s). \end{pmatrix}$$

Рассмотрим векторную функцию $r(s)$ — первообразную от v:

$$r(s) = \int_0^s v(s_1)ds_1 + r_0.$$

Рассмотрим множество, которое задано параметрическими уравнениями γ : $x = r(s)$. Утверждается, что это множество представляет собой гладкую регулярную кривую, и что функция f — функция кривизны это кривой. Итак,

$$\dot{\gamma} = v(s).$$

Кроме того, вектор v единичный, следовательно, s — натуральный параметр.

Осталось доказать, что функция f — функция кривизны это кривой. Продифференцируем скорость:

$$\dot{v} = \dot{\alpha} \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \dot{\alpha}\widetilde{n}.$$

Имеем

$$f = \dot{\alpha} = (\dot{v}, \widetilde{n}) = \widetilde{k}(s).$$

2) Докажем второй пункт. Пусть имеется две кривые γ_1 и γ_2 с одинаковыми кривизнами. Совместим сдвигом g_1 начальные точки этих кривых. Рассмотрим два вектора скорости кривых $g_1(\gamma_1)$ и γ_2 — v_1 и v_2. Эти два вектора единичные. Рассмотрим поворот g_2, который переводит первый вектор во второй — v_2.

Итак, получили две кривые $g(\gamma_1)$ и γ_2, выходящие из одной точки и имеющие одинаковые векторы скорости, где $g = g_2 \circ g_1$. Кроме того, очевидно, что функции кривизны у этих двух кривых совпадают.

Посмотрим на угловые функции этих двух кривых

$$v_1(s) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1(s), \\ \sin\alpha_1(s). \end{pmatrix}$$

$$v_2(s) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2(s), \\ \sin\alpha_2(s). \end{pmatrix}$$

Очевидно, что $\dot{\alpha_1} = \dot{\alpha_2} = \widetilde{k}(s)$. Кроме того, в точке $s = 0$ эти угловые функции совпадают, так как вектор скорости одинаковый. Следовательно, эти две функции совпадают везде

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

Следовательно, векторы скорости этих двух кривых совпадает везде

$$v_1(s) = v_2(s).$$

Так как вектор скорости — это производная от параметрического задания кривой, то получается, что параметрические уравнения этих кривых отличаются на константу

$$\dot{\widetilde{\gamma}}_1 = \dot{\gamma}_2,$$
$$\widetilde{\gamma}_1 = \gamma_2.$$

□

Определение 9. Эволюта (каустика) кривой γ — геометрическое место центров кривизны.

Задача 3. *1) Зная уравнение $x = \gamma(s)$ написать параметрическое уравнения каустики.*

2) Выяснить, в каких точка х каустика гладкая, в каких регулярная.

3) Выписать каустики для эллипса, гиперболы и параболы.

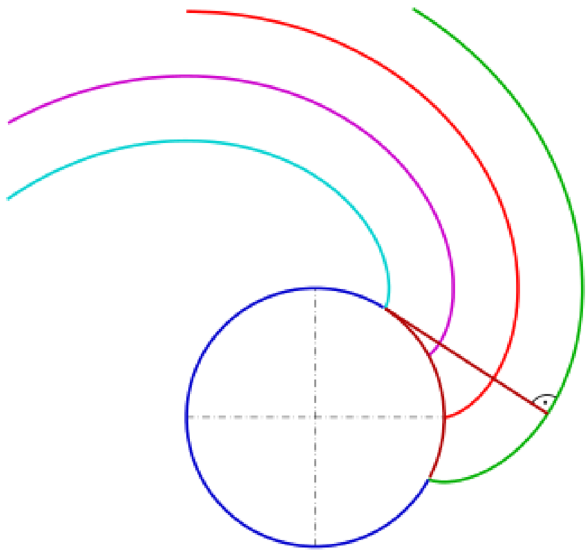


Рис. 2.2

Определение 10. $\widetilde{\gamma}$ — эвольвента кривой γ.

Задача 4. *1) Написать параметрические уравнения эвольвенты.*

2) Выяснить, в каких точках $\widetilde{\gamma}$ гладкая, в каких регулярная.

3) Найти каустику для $\widetilde{\gamma}$.

Пространственные кривые в $\mathbb{R}^n$

Пусть в $\mathbb{R}^n$ фиксированы евклидовы координаты

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Под кривой мы будем понимать траекторию движения точки в евклидовом пространстве.

Определение 11. Элементарная гладкая регулярная кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ — множество, задаваемое параметрическим уравнениями $x = \gamma(t)$

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t), \\ \dots \\ x_n = x_n(t), \end{cases}$$

причем выполнены те же условия, что для плоских кривых.

Определения длины дуги, натурального параметра, касательной такие же, как и в «плоском» случае.

Определение 12. Нормальная плоскость к $\gamma(t)$ в точке t_0 — $(n-1)$–мерная плоскость, проходящая через $\gamma(t_0)$ ортогонально $\dot{\gamma}(t_0)$:

$$(x - \gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0)) = 0$$

Теорема о соприкасающейся окружности справедлива аналогично случаю на плоскости.

Определения центра кривизны, радиуса кривизны и кривизны те же:

$$k = |\ddot{\gamma}|.$$

Напоминание из линейной алгебры

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и набор векторов $a_1, \dots, a_p$ — линейно независимы; теорема Грама–Шмидта утверждает, что существуют векторы $v_1, \dots, v_p$

$$v_s = \sum_{j=1}^{s} c_{sj} a_j.$$

Векторы строятся следующим образом

$$v_1 = \frac{a_1}{|a_1|}$$

$v_1, \ldots, v_{s-1}$ — есть; $\widehat{v}_s$ — ортогональная проекция a_s на $\langle v_1, \ldots, v_s \rangle^{\perp}$:

$$v_s = \frac{\widehat{v}_s}{|\widehat{v}_s|},$$

$$\widehat{v}_s = a_s - \sum_{j=1}^{s-1} (a_s, v_j) v_j,$$

$$v_s = \alpha_s a_s + \ldots,$$

где

$$\alpha_s = \frac{V_{s-1}}{V_s},$$

где V_s — объем параллелепипеда, натянутого на $a_1, \ldots, a_s$.

Репер Френе. Многомерные формулы Френе

Пусть γ — регулярная кривая в $\mathbb{R}^n$; $x = \gamma(t)$, $\dot{\gamma} \neq 0$.

Определение 13. Кривая γ — s–регулярна, если $\dot{\gamma}, \ldots, \gamma^{(s)}$ линейно независимы.

Задача 5. *Доказать, что свойство s–регулярности не зависит от параметризации.*

Пусть γ — $(n-1)$–регулярна. Рассмотрим векторы $\dot{\gamma}, \ldots, \gamma^{(n-1)} \longrightarrow v_1, \ldots, v_{n-1}$ (применили процедуру Грама–Шмидта); дополняем полученные вектора до базиса $v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n$ — ортонормированный, право ориентированный базис.

Определение 14. Набор $v_1, \ldots, v_n$ — репер Френе кривой γ.

Теорема 3 (многомерные формулы Френе)**.** *Верны следующие формулы*

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = k_1 v_2, \\ \dot{v}_2 = k_2 v_3 - k_1 v_1, \\ \dot{v}_3 = k_3 v_4 - k_2 v_2, \\ \dot{v}_{n-1} = k_{n-1} v_n - k_{n-2} v_{n-2}, \\ \dot{v}_n = -k_{n-1} v_{n-1}. \end{cases}$$

$$k_p = \frac{V_{p-1} V_{p+1}}{V_p^2},$$

где V_p — объем p–мерного параллелепипеда, натянутого на векторы $\dot{\gamma}, \ldots, \gamma^{(p)}$.

$$k_1 = \frac{1 \cdot V_2}{V_1^2}, \quad V_0 = 1$$

$$k_{n-1} = \frac{V_{n-2} \mathring{V}_n}{V_{n-1}^2},$$

где $\mathring{V}_n$ — ориентированный n–мерный объем параллелепипеда, натянутого на векторы

$$\dot{\gamma}, \ldots, \gamma^{(n)}.$$

Доказательство. Рассмотрим ортогональную матрицу $Q = (v_1, \ldots, v_n)$, которая состоит из столбцов v_i. Продифференцируем ее:

$$\dot{Q} = QA,$$

где A — кососимметричная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \beta_1 & & \\ -\alpha_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ -\beta_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \beta_{n-2} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1} \\ & & -\beta_{n-2} & -\alpha_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

По процедуре Грама-Шмидта вектор v_p является линейной комбинацией $\dot{\gamma}, \ldots, \gamma^{(p)}$. Кроме того, $\dot{v}_p$ — линейная комбинация $\dot{\gamma}, \ldots, \gamma^{(p)}, \gamma^{(p+1)}$.

Рассмотрим вектор v_j, где $j \leqslant p-2$. Для него $\dot{v}_j$ — линейная комбинация v_i, где $i \leqslant p-1$. Тогда получаем

$$0 = (v_j, v_p).$$

Продифференцируем это равенство:

$$0 = (\dot{v}_j, v_p) + (v_j, \dot{v}_p),$$

$$(\dot{v}_j, v_p) = 0 = (v_j, \dot{v}_p).$$

Тем самым, если мы считаем вектор $\dot{v}_p$ и раскладываем его по базису v, то в разложение векторы с номерами $j \leqslant p-2$ входить не будут, так как вектор $\dot{v}_p$ ортогонален векторам с такими номерами. Это означает, что в матрице A все коэффициенты, кроме коэффициентов α равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & \\ -\alpha_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1} \\ & & -\alpha_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Осталось найти явный вид коэффициентов k_i.

Рассмотрим вектор v_p и рассмотрим его разложение по γ:

$$v_p = \frac{V_{p-1}}{V_p}\gamma^{(p)} + \ldots$$

Продифференцируем это равенство:

$$\dot{v}_p = \frac{V_{p-1}}{V_p}\gamma^{(p+1)} + \ldots.$$

Напомним, что

$$v_{p+1} = \frac{V_p}{V_{p+1}}\gamma^{(p+1)} + \ldots$$

Тогда

$$\gamma^{(p+1)} = \frac{V_{p+1}}{V_p}v_{p+1} + \ldots$$

Следовательно,

$$\dot{v}_p = k_p v_{p+1} + \ldots$$

Доказано все, кроме последней формулы для $p = n - 1$.

Рассмотрим векторы

$$\dot{\gamma}, \ldots, \gamma^{(n-1)}, \gamma^{(n)}.$$

Возможны две ситуации:

1) вектор $\gamma^{(n)}$ линейно независим с остальными векторами — тогда весь набор векторов $v_1, \ldots, v_n$ получается из набора γ посредством процедуры ортогонализации Грама–Шмидта с одной деталью: последний вектор может отличаться знаком, и тогда формула для k_{n-1} остается справедливой с точностью до знака;

2) вектор $\gamma^{(n)}$ — линейная комбинация $\dot{\gamma}, \ldots, \gamma^{(n-1)}$. Тогда рассмотрим вектор

$$v_{n-1} = \alpha_{n-1}\gamma^{(n-1)} + \alpha_{n-2}\gamma^{(n-2)} + \ldots$$

Продифференцируем это равенство:

$$\dot{v}_{n-1} = \alpha_{n-1}\gamma^{(n)} + \ldots = \sigma_{n-1}\gamma^{(n-1)} + \ldots$$

Тогда

$$\dot{v}_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} c_j v_j.$$

В этом случае $k_{n-1} = 0$.

□

Комментарий 1. 1) Числа $k_p > 0$, где $p < n - 1$, k_p — кривизны кривой γ в параметризации t.

2) Пусть t — натуральный параметр. Тогда

$$k_1 = |\ddot{\gamma}| = k,$$

$$k_2 = \frac{V_1 \cdot V_3}{V_2^2} = \frac{V_3}{V_2^2} = \frac{V(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dddot{\gamma})}{k^2}.$$

Лекция 3

3. Поверхности в евклидовом пространстве

Теорема о восстановлении плоской кривой по кривизне

Пусть $\gamma \subset \mathbb{R}^n$, $x = \gamma(s)$. Верны следующие формулы Френе:

$$\begin{cases} \dot v_1 = k_1 v_2, \\ \dot v_2 = k_2 v_3 - k_1 v_1, \\ \dot v_3 = k_3 v_4 - k_2 v_2, \\ \dot v_{n-1} = k_{n-1} v_n - k_{n-2} v_{n-2}, \\ \dot v_n = -k_{n-1} v_{n-1}. \end{cases}$$

Теорема 4. *1) Пусть задан набор $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_{n-1}(s)$ — гладкие функции на $[0; L]$, где $f_1, \ldots, f_{n-2} > 0$. Тогда существует такая $(n-1)$–регулярная кривая γ, что $k_j = f_j$.*

2) Пусть γ_1, γ_2 — $(n-1)$–регулярные кривые, причем $k_j^{(1)} = k_j^{(2)}$. Тогда существует такое движение плоскости $\mathbb{R}^n$ $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, что $g(\gamma_1) = \gamma_2$.

Доказательство. Напомним теорему существования–единственности из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть имеется система ОДУ с задачей Коши

$$\begin{cases} \dot y = F(y,t), \quad y(t) \in \mathbb{R}^m \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Теорема звучит так: если на функцию F наложить условие липшицевости по переменной y, то в некоторой окрестности точки (y_0, t_0) существует и единственная вектор–функция $y(t)$, которая удовлетворяет ОДУ и задаче Коши.

В нашем случае условие Липшица выполнено: мы рассматриваем гладкие функции. Система формул Френе — частый случай системы ОДУ с линейной по v правой частью. Эту систему можно записать следующим образом

$$F(y,t) = W(t)y,$$

где $W(t)$ — гладкая матричная функция на $[t_0; t_0 + T]$. Тогда решение системы ОДУ определено на всем этом отрезке.

Подставим в систему вместо k_j функции f_j:

$$k_j \longrightarrow f_j(s)$$

Рассмотрим матрицу

$$Q = (v_1, v_2)$$

$$\dot Q = QA,$$

где A — кососимметричная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & & \\ -f_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & f_{n-1} \\ & & -f_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{Q} = QA,$$

где $Q(0) = Q_0$ — заданная ортогональная матрица, столбцы которой задают правильно ориентированный базис. Существует такая матрица

$$Q(s) = (v_1(s), \dots, v_n(s)),$$

которая удовлетворяет начальному условию. Эта матрица ортогональна. Все векторы v_i единичны.

Рассмотрим кривую

$$\gamma : \quad x = \gamma(s) = \int_0^s v_1(s_1) ds_1 + r_0$$

Убедимся, что она гладкая и функции f_j — ее кривизны. Посчитаем вектор скорости этой кривой

$$\dot{\gamma} = v_1(s),$$

— первый вектор набора ортогонализации. Далее по индукции. Допустим доказали, что

$$\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(n-1)}$$

— векторы ортогонализации $v_1, \dots, v_q$, где $q < p$.

$$\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(q)} \quad v_{p-1} = \alpha\gamma^{(p-1)} + \dots$$

$$\dot{v}_{p-1} = \alpha\gamma^{(p)} + \dots$$

$$f_{p-1}v_p - f_{p-2}v_{p-2} = \alpha\gamma^{(p)} + \dots$$

$$v_p = \frac{\alpha}{f_{p-1}}\gamma^{(p)} + \dots$$

— p–ый вектор ортогонализации.

$$k_1 = (\dot{v}_1, v_2) = f_1$$

$$k_2 = (\dot{v}_2, v_3) = f_2$$

Докажем второй пункт. Пусть имеется две кривые γ_1 и γ_2 с одинаковыми кривизнами. Совместим сдвигом g_1 начальные точки этих кривых. Рассмотрим два вектора скорости кривых $g_1(\gamma_1)$ и γ_2 — v_1 и v_2. Эти два вектора единичные. Рассмотрим поворот g_2, который переводит первый вектор во второй — v_2.

Итак, получили две кривые $g(\gamma_1)$ и γ_2, выходящие из одной точки и имеющие одинаковые векторы скорости, где $g = g_2 \circ g_1$. Кроме того, реперы Френе кривых совпадают.

$$v_1^{(1)}(s) = v_1^{(2)}(s) \Longrightarrow \gamma_1(s) = \gamma_2(s) + r_0$$

$\square$

Почему в плоском случае можно проинтегрировать?

$$\begin{cases} \dot{v} = k(s)n \\ \dot{n} = -k(s)v \end{cases}, \quad v(0) = 0, \quad n(0) = 0.$$

$$\begin{cases} \frac{1}{k(s)}\frac{dv}{ds} = n \\ \frac{1}{k(s)}\frac{dn}{ds} = -v \end{cases}, \quad \begin{cases} v_\tau = n \\ n_\tau = -v \end{cases}$$

$$s \longrightarrow \tau = \int_0^s k(s_1)ds_1 + \tau_0$$

Поверхности в евклидовом пространстве

Рассмотрим M — n–мерная поверхность в $\mathbb{R}^N$.

Определение 15. n–мерная гладкая элементарная регулярная поверхность M в $\mathbb{R}^N$ — множество $M \subset \mathbb{R}^N$, задаваемое параметрическими уравнениями $x = r(u)$

$$\begin{cases} x_1 = x_1(u) \\ \dots \\ x_N = x_N(u), \end{cases}$$

$u = (u_1, \dots, u_n)$, причем

1) $u \in D \subset \mathbb{R}^n$; D — открыто и связно;
2) $r(u) \in C^\infty(D)$
3) векторы $\frac{\partial r}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial u^n}$ линейно независимы
4) если $r(u) = r(u^*)$, то $u = u^*$.

Пример поверхности, для которой не выполнено третье свойство:

$$\begin{cases} x_1 = u_1^3 \\ x_2 = u_1^2 \\ x_3 = u_2, \end{cases}$$

$$\frac{\partial r}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} 3u_1^2 \\ 2u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial r}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Можно менять параметризацию поверхности: $x = r(u)$, $u = (v)$, $x = \rho(v) = r(u(v))$.

$$\frac{\partial \rho}{\partial v_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial v_j}$$

Определение 16. $u = (u_1, \dots, u_n)$ — координата на M.

Определение 17. Гладкая параметризованная кривая γ на поверхности M — гладкое отображение отрезка $[a; b]$ в поверхность, т.е., если M задано параметрическими уравнениями $x = r(u)$, то γ — набор функций $u_i = u_i(t)$, где $u_i(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция и $t \in [a, b]$.

Определение 18. Касательный вектор к M в точке P — вектор скорости гладкой кривой, лежащей на M и проходящей через точку P.

Теорема 5. *Совокупность касательных векторов к M в точке P — n–мерная плоскость, векторы*

$$\frac{\partial r}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial u_n}$$

— базис в этой плоскости.

Доказательство. Пусть $u^0 = (u_1^0, \dots, u_n^0)$ и

$$\frac{\partial r}{\partial u_j} = r_j.$$

Тогда

$$\gamma : \quad u_i = u_i(t) \quad u_i(t_0) = u_i^0.$$

Посчитаем вектор скорости этой кривой

$$\dot{\gamma} = \frac{d\rho}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial u_j}(u^0) \cdot \dot{u}_j(t_0) = \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t_0) r_j.$$

Пусть

$$a = \sum_{j=1}^{n} a_j r_j(u^0) \quad \gamma : u_j = u_j^0 + t a_j = u_j(t),$$

вектор скорости этой кривой:

$$\dot{\gamma} = \sum_{j=1}^{n} r_j a_j.$$

□

Определение 19. Векторы $r_1, \dots, r_n$ — канонический базис в касательной плоскости, порожденной $(u_1, \dots, u_n)$. Обозначение: $T_P M$ — касательная плоскость к M в точке P.

Замена координат на поверхности: $u = u(v)$, $x = \rho(v) = r(u(v))$,

$$\rho_j = \frac{\partial \rho}{\partial v_j} = \sum_{j=1}^{n} r_i \frac{\partial u_i}{\partial v_j}.$$

Рассмотрим γ_j: $u_i = u_i^0$, $i \neq j$, $u_j = u_j^0 + t$. Координатные линии соответствуют координатам $(u_1, \dots, u_n)$. Посчитаем векторы скоростей: $\dot{\gamma}_j = r_j$ — геометрический смысл канонического базиса.

Первая фундаментальная форма поверхности

Пусть $M^n \subset \mathbb{R}^N$, $P \in M$. Ограничим $(\ ,\ )$ в $\mathbb{R}^N$ на $T_P M$.
Рассмотрим соответствие:
$P \longrightarrow$ симметричная положительно определенная билинейная форма в $T_P M$.

Определение 20. Это соответствие — первая фундаментальная форма поверхности M (индуцированная метрика).

Лекция 4

4. Геометрия поверхности. Геодезические

Первая фундаментальная форма поверхности

Наша цель состоит в том, чтобы изучить внутреннюю геометрию этой поверхности. То есть какие законы геометрии и механики будут действовать.

Чтобы это делать, во–первых, нужно научиться измерять длины и углы. В евклидовом пространстве они измеряются при помощи скалярного произведения. На самой поверхности векторов нет, но они есть в касательном пространстве. Поэтому будем рассматривать скалярное произведение касательных векторов.

Пусть M — n–мерная поверхность в $\mathbb{R}^N$, $x = r(u)$, $u = (u_1, \dots, u_n)$.

$P \in M$ T_PM — n–мерная $r_1, \dots, r_n$

$$r_j = \frac{\partial r}{\partial u_j}.$$

Определение 21. Первая фундаментальная форма M — соотв. сопоставляет точке $P \in M$ симметричную положительно определенную билинейную форму в T_PM — скалярное произведение касательных векторов.

$$g_{ij} = (r_i, r_j)$$

— матрица первой фундаментальной формы.

Если у нас есть параметризация на всей поверхности, то возникает канонический базис (геометрический смысл: через каждую точку проходят координатные линии, и векторы базиса — касательные к этим линиям). С помощью векторов этого базиса считается первая фундаментальная форма. При смене канонического базиса меняется и первая фундаментальная форма.

Как при помощи этой матрицы производить геометрические вычисления, то есть измерять длины и углы. Зная матрицу первой фундаментальной формы, мы можем посчитать в каждой точке скалярное произведение касательных векторов.

Следовательно, мы можем считать их длины и углы между ними.

1) $\xi, \eta \in T_PM$

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i r_i$$

$$(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j g_{ij}.$$

$$|\xi| = \sqrt{\sum_{i,j=1} g_{ij} \xi_i \xi_j}$$

$$\cos\alpha = \frac{(\xi, \eta)}{|\xi| \cdot |\eta|}.$$

2) Длины кривых.

Возможность вычисления длин и углов в касательной поверхности мы можем перенести на саму поверхность для вычисления длин кривых. По определению угол между двумя кривыми — это угол между их касательными векторами.

Пусть γ — гладкая кривая на M.

Определение 22. Гладкая кривая на M — множество точек M, заданное параметрическими уравнениями $u = u(t)$; $u_i = u_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, $u_i(t)$ — гладкие функции на отрезке $t \in [a, b]$.

$\gamma : x = \rho(t) = r(u(t))$.

$$l(\gamma) = \int_a^b |\dot{\rho}| dt$$

$$\dot{\rho} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial u_i}(u(t))\dot{u}_i$$

$$|\dot{\rho}| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(u(t))\dot{u}_i\dot{u}_j}$$

$$l = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(u(t))\dot{u}_i\dot{u}_j dt}$$

3) Угол между кривыми

$$\gamma : \quad u_i = u_i(t)$$

$$\widetilde{\gamma} : \quad u_i = \widetilde{u}_i(\tau)$$

$$u_i(t_0) = \widetilde{u}_i(\tau_0)$$

$$\dot{\gamma} = (\dot{u}_1(t_0), \dots, \dot{u}_n(t_0))$$

$$\dot{\widetilde{\gamma}} = (\dot{\widetilde{u}}_1(\tau_0), \dots, \dot{\widetilde{u}}_n(\tau_0))$$

Дифференциал гладкого отображения поверхностей

Как понять, одинаковые или разные геометрии на двух поверхностях? Геометрии на двух поверхностях одинаковые, если одну поверхность можно наложить (абстрактно) на другую другую без искажений, т.е. без изменения длин и величин углов, т.е. с сохранением фундаментальной формы.

Как по отображению поверхностей построить отображение касательных векторов?

Пусть M — m–мерная поверхность в $\mathbb{R}^{N_1}$ с координатами $u = (u_1, \dots, u_m)$; пусть N — n–мерная поверхность в $\mathbb{R}^{N_2}$ с координатами $v = (v_1, \dots, v_n)$. Рассмотрим отображение $f : M \longrightarrow N$,

$$v_i = f_i(u_1, \dots, u_m), \quad i = 1, \dots, n.$$

Определение 23. Отображение f — гладкое, если $f_i(u)$ — бесконечно дифференцируемы в D_1.

Обозначим $Q = f(P)$. Тогда $u_i = u_i(t)$, $P(u_1^0, \ldots, u_m^0)$, $u_i(t_0) = u_i^0$, $f(\gamma) = f \circ \gamma$

$$v_i = v_i(t) = f_i(u(t))$$

— гладкая кривая на N. Итак,

$$\eta = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} f(\gamma(t)).$$

Утверждение 6. *Вектор η не зависит от γ; более того, соответствие $\xi \longrightarrow \eta$ определяет линейное отображение из T_PM в T_QN.*

Доказательство.

$$\xi \longrightarrow (\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

$$\xi_i = \dot{u}_i(t_0)$$

$$\eta \longrightarrow (\eta_1, \ldots, \eta_n)$$

$$\eta_j = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} f_j(u(t)) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial u_i}(u(t_0))\dot{u}_i(t_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial u_i}(u^0)\xi_i$$

□

Определение 24. Это отображение — дифференциал f в точке P

$$d_Pf : T_PM \longrightarrow T_QN.$$

Изометрия поверхностей

Пусть M, N — n–мерные поверхности. Рассмотрим такое отображение, что одну поверхность можно наложить (абстрактно) на другую другую без искажений, т.е. без изменения длин и величин углов, т.е. с сохранением фундаментальной формы:

$$f : M \longrightarrow N$$

1) f — биекция

2) f и f^{-1} — гладкие,

   т.е. f — диффеоморфизм.

Определение 25. Диффеоморфизм f — изометрия, если $\forall P \in M$ и $\forall \xi, \eta \in T_PM$

$$(\xi, \eta)_M = (d_Pf(\xi), d_Pf(\eta))_N.$$

Замечание 8. а) Изометрия сохраняет длины кривых и углы между кривыми. γ — кривая на M; $f(\gamma)$ — кривая на N

$$l(\gamma) = l(f(\gamma)).$$

б) Если f — изометрия, то f^{-1} — изометрия.

Определение 26. Поверхности M и N — изометричны, если существует изометрия $f : M \to N$.

Пусть M — m–мерная поверхность в $\mathbb{R}^{N_1}$ с координатами $u = (u_1, \dots, u_m)$; пусть N — n–мерная поверхность в $\mathbb{R}^{N_2}$ с координатами $v = (v_1, \dots, v_n)$. Рассмотрим отображение

$$f : M \longrightarrow N,$$

$v_i = f_i(u_1, \dots, u_m)$ $i = 1, \dots, n$.

$$f : \; v_i = v_i(u_1, \dots, u_n)$$

$$(r_i, r_j) = (df(r_i), df(r_j))$$

$$df(r_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial u_i} \rho_k$$

$$(r_i, r_j) = g_{ij}(u) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial u_i} \rho_k, \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial v_m}{\partial u_i} \rho_m \right) = \sum_{k,m=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial u_i} \frac{\partial v_m}{\partial u_j} \widehat{g}_{km}(v(u))$$

$$M \; (u_1, \dots, u_n) \longrightarrow (r_1, \dots, r_n)$$

$du_1, \dots, du_n$ — двойственный базис.

$$du_i(\xi) = \xi_i$$

$$(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \xi_i \eta_j = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} du_i(\xi) du_j(\eta) =$$

$$g_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}).$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} du_i(\xi) du_j(\eta) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} du_i(\xi) du_j(\eta) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \frac{1}{2} (du_i(\xi) du_j(\eta) + du_j(\xi) du_i(\eta))$$

$$(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} du_i du_j(\xi, \eta).$$

Задача 6. *Доказать, что при замене координат $u = u(v)$ на M линейные функции du_i преобразуются как дифференциалы функций $u_i(0)$, т.е.*

$$du_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial v_j} dv_j$$

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(u) du_i du_j$$

$$\widehat{g} = \sum_{k,m=1}^{n} \widehat{g}_{km}(v) dv_k dv_m$$

$$dv_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial u_i} du_i$$

Определение 27. Поверхности M и N локально изометричны, если для всякой точки $P \in M$ существует окрестность U этой точки на M такая, что изометрия f окрестности U на область $f(U)$ на N.

Пример 2. Пусть M — конус, $N = \mathbb{R}^2$.

Задача 7. *Доказать, что M и N локально изометричны. Указание: рассмотреть развертку.*

Пусть Π — ортогональный проектор на $T_P M$.

Определение 28. Кривая γ на M — геодезическая, если

$$\Pi(\ddot{\gamma}) = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0,$$

где $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ — ковариантное ускорение.

Ковариантное дифференцирование на поверхностях

Понятие ковариантной производной позволяет определить дифференцирование тензорных полей по направлению касательного вектора какого–либо многообразия. Подобно производной по направлению, ковариантная производная в качестве аргументов принимает вектор, определённый в некой точке P, и векторное поле, определённое в окрестности P. Результатом является вектор, также определённый в P. Основное отличие от производной по направлению заключается в том, что ковариантная производная не должна зависеть от выбора системы координат.

Пусть M — n–мерная поверхность в $\mathbb{R}^N$.

Определение 29. Гладкое векторное поле на M — соответствие, сопоставление каждой точке $P \in M$ вектор $\xi(P) \in T_P M$, гладко зависящий от P.

Пусть

$$x = r(u) = r_1(u), \ldots, r_n(u).$$

Тогда

$$\xi(u) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(u) r_i(u),$$

где $u = (u_1, \ldots, u_n) \in D$.

Определение 30. Ковариантная производная поля ξ по переменной u_j

$$\nabla_j \xi = \prod \left(\frac{\partial \xi}{\partial u_j} \right).$$

$\gamma(t)$ — кривая на M такая, что

$$\gamma(t_0) = P, \quad \dot{\gamma}(t_0) = \eta,$$

$$\widehat{\xi}(t) = \xi(\gamma(t)).$$

Определение 31. Ковариантная производная ξ вдоль η вычисляется по формуле

$$T_P M \ni \nabla_\eta \xi = \prod \left(\left. \frac{d\widehat{\xi}}{dt} \right|_{t=t_0} \right).$$

Лекция 5

5. Ковариантная производная

Ковариантная производная и ее свойства

Понятие ковариантной производной позволяет определить дифференцирование тензорных полей по направлению касательного вектора какого–либо многообразия. Подобно производной по направлению, ковариантная производная в качестве аргументов принимает вектор, определённый в некой точке P, и векторное поле, определённое в окрестности P. Результатом является вектор, также определённый в P. Основное отличие от производной по направлению заключается в том, что ковариантная производная не должна зависеть от выбора системы координат.

Пусть M — n–мерная поверхность в $\mathbb{R}^N$, ξ — гладкое векторное поле; пусть на M заданы $x = r(u)$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $\xi = \xi(u)$.

Определение 32. Ковариантная производная вектора ξ:

$$\nabla_j \xi = \prod \left(\frac{d\xi}{du_j} \right),$$

где $\eta \in T_P M$; $\dot{\gamma}(t) = \eta$, $\gamma(t)$ — кривая на M.

$$\widehat{\xi}(t) = \xi(\gamma(t)), \quad \nabla_\eta \xi = \prod \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} \widehat{\xi} \right).$$

Утверждение 7. *Вектор $\nabla_\eta \xi$ — касательный вектор к M в точке P, не зависящий от γ. Если u — координаты на M и $P = (u_1^0, \ldots, u_n^0)$, то*

$$\nabla_\eta \xi = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \nabla_j \xi.$$

Доказательство. γ: $u_i = u_i(t)$, $u_i(t_0) = u_i^0$; $M : x = r(u)$.

$$\widehat{\xi}(t) = \xi(u(t)); \quad \frac{d}{dt}\widehat{\xi} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi}{\partial u_j} \dot{u}_j, \quad \dot{u}_j = \eta_j,$$

$$\nabla_\eta \xi = \prod \left(\frac{d}{dt} \widehat{\xi} \right) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \prod \left(\frac{d\xi}{du_j} \right).$$

□

Свойства ковариантной производной

Пусть $P \in M$, $\eta \in T_P M$,

$$\nabla_\eta \longrightarrow T_P M.$$

Утверждение 8. *1)* $\nabla_\eta(c\xi + \widetilde{c}\widetilde{\xi}) = c\nabla_\eta\xi + \widetilde{c}\nabla_\eta\widetilde{\xi}$, *$c, \widetilde{c} \in \mathbb{R}$.*

2) $\nabla_{c\eta+\widetilde{c}\widetilde{\eta}}\xi = c\nabla_\eta\xi + \widetilde{c}\nabla_{\widetilde{\eta}}\xi$.

3) Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция

$$\nabla_\eta(f\xi) = f(P)\nabla_\eta\xi + \partial_\eta f \cdot \xi(P),$$

где

$$\partial_\eta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j}\eta_j$$

— производная f вдоль η.

4) Пусть ξ, $\widetilde{\xi}$ — векторные поля на M.

$$\partial_\eta(\xi, \widetilde{\xi}) = (\nabla_\eta\xi, \widetilde{\xi}) + (\xi, \nabla_\eta\widetilde{\xi}).$$

Доказательство.

$$\nabla_\eta\xi = \sum_{j=1}^{n}\eta_j\nabla_j\xi = \sum_{j=1}^{n}\prod\left(\frac{\partial\xi}{\partial u_j}\right).$$

1) очевидно,

2) очевидно

3) Вычислим в явном виде

$$\nabla_\eta(f\xi) = \sum_{j=1}^{n}\eta_j\prod\left(\frac{\partial}{\partial u_j}(\xi f)\right) = \sum_{j=1}^{n}\eta_j\prod\left(\frac{\partial\xi}{\partial u_j}f + \xi\frac{\partial f}{\partial u_j}\right) =$$

$$= f(P)\nabla_\eta\xi + \sum_{j=1}^{n}\eta_j\frac{\partial f}{\partial u_j}\xi$$

4) Вычислим в явном виде

$$\partial_\eta(\xi, \widetilde{\xi}) = \sum_{j=1}^{n}\eta_j\frac{\partial}{\partial u_j}(\xi, \widetilde{\xi}) = (\sum_{j=1}^{n}\eta_j\frac{\partial\xi}{\partial u_j}, \widetilde{\xi}) + (\xi, \sum_{j=1}^{n}\eta_j\frac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial u_j}) = \star.$$

Так как

$$\frac{\partial\xi}{\partial u_j} = \prod\left(\frac{\partial\xi}{\partial u_j}\right) + w_j, \quad w_j \perp T_PM,$$

то

$$\star = (\sum_{j=1}^{n}\eta_j\prod\left(\frac{\partial\xi}{\partial u_j}\right), \widetilde{\xi}) + (\xi, \sum_{j=1}^{n}\eta_j\prod\left(\frac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial u_j}\right))$$

□

Рассмотрим поверхность M и отображение $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим точку $P \in M$, вектор $\eta \in T_PM$; пусть γ — гладкая кривая на M такая, что $\dot{\gamma}(t_0) = \eta$.

Задача 8. *Доказать, что*

$$\partial_\eta f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t))$$

Вычисление ковариантных производных

Рассмотрим поверхность M с координатами u и параметризацией $x = r(u)$. Тогда вектор ξ будет иметь вид

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j(u) r_j(u); \quad r_j = \frac{\partial r}{\partial u_j}.$$

Найдем ковариантную производную этого вектора:

$$\nabla_j \xi = \prod \left(\frac{\partial \xi}{\partial u_j} \right) = \prod \left(\frac{\partial}{\partial u_j} \sum_{i=1}^{n} \xi_i r_i \right) =$$
$$= \prod \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} r_i + \xi_i \frac{\partial r_i}{\partial u_j} \right) \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} r_j + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \prod \left(\frac{\partial r_i}{\partial u_j} \right).$$

То есть зная производные

$$\frac{\partial r_i}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 r}{\partial u_i \partial u_j} = r_{ij},$$

мы можем находить ковариантные производные. Тогда

$$\Pi(r_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} r_k.$$

Определение 33. Γ_{ij}^k — *символы Кристоффеля* (2–го рода) — коэффициенты связности Леви–Чивиты.

$$(\Pi(r_{ij}), r_m) = (r_{ij}, r_m) = \Gamma_{ij,m}$$

— символы Кристоффеля 1–го рода.

Теорема 6. *Для риманова многообразия верно равенство*

$$\Gamma_{ij,m} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} \right), \quad g_{ij}(u) = (r_i, r_j).$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} \right),$$

где g^{km} — обратная матрица.

Доказательство. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} = (r_{im}, r_j) + (r_i, r_{jm}) = \Gamma_{im,j} + \Gamma_{jm,i},$$

$$\frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} = \Gamma_{ji,m} + \Gamma_{mi,j},$$

$$\frac{\partial g_{mi}}{\partial u_j} = \Gamma_{mj,i} + \Gamma_{ij,m}.$$

Так как $g_{ij} = g_{ji}$, то $\Gamma_{ij,m} = \Gamma_{ji,m}$.

В таком случае имеем

$$\frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} = 2\Gamma_{ij,m}.$$

Вторая формула доказывается аналогично. Либо с помощью первой части доказательства.

Рассмотрим два вектора

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \vdots \\ \Gamma_{ij}^n \end{pmatrix}, \quad Z_{ij} = \begin{pmatrix} \Gamma_{ij,1} \\ \vdots \\ \Gamma_{ij,n} \end{pmatrix}$$

По формуле для символов Кристоффеля имеем

$$\Gamma_{ij,m} = \sum_{k=1}^{n} g_{km}\Gamma_{ij}^k.$$

Тогда

$$z_{ij} = Gw_{ij}, \quad w_{ij} = G^{-1}z_{ij},$$

где

$$G = (g_{km}).$$

□

Еще раз запишем формулы ковариантной производной:

$$\nabla_j \xi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} r_i + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Pi(r_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} r_i + \\ + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k r_k = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} + \Gamma_{jk}^i \xi_k \right) r_i.$$

Формула ковариантного дифференцирования вдоль вектора:

$$\nabla_\eta \xi = \sum_{i=1}^{n} \eta_j \nabla_j \xi = \sum_{i,j=1}^{n} \eta_j \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} + \Gamma_{jk}^i \xi_k \right) r_i.$$

Если задано векторное поле $\xi_1(u), \ldots, \xi_n(u)$, то имеет место формула

$$(\nabla_j \xi)_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} + \Gamma_{jk}^i \xi_k.$$

Параллельный перенос касательных векторов

Пусть γ — гладкая кривая на M. Пусть имеется набр координат $u : u_j = u_j(t)$.

Определение 34. Гладкое семейство касательных векторов к M вдоль кривой γ — соответствие, сопоставление каждой точке t касательный вектор $\xi(t) \in T_{\gamma(t)}M$, гладко зависит от t.

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) r_i(u(t))$$

Определение 35. Ковариантная производная гладкого семейства $\xi(t)$ вдоль γ есть

$$\nabla_{\dot\gamma}\xi = \Pi(\dot\xi).$$

Замечание 9. Верно следующее

$$\nabla_{\eta}\xi = \Pi\left(\frac{d}{dt}\xi(\gamma(t))\right),$$

где $\xi(t)$ — семейство вдоль γ, $\widetilde{\xi}$ — векторное поле на M такое, что $\widetilde{\xi}(\gamma(t)) = \xi$ и

$$\nabla_{\dot\gamma}\xi = \nabla_{\dot\gamma}\widetilde{\xi}.$$

Определение 36. Семейство $\xi(t)$ параллельно вдоль γ, если

$$\nabla_{\dot\gamma}\xi(t) = 0.$$

Теорема 7. *Пусть γ — гладкая кривая, $\gamma(0) = P$; $\gamma(T) = Q$ и пусть $\xi^0 \in T_P M$. Тогда существует единственное гладкое семейство $\xi(t)$ вдоль γ такое, что*

1) $\xi(t)$ параллельно вдоль γ;

2) $\xi(0) = \xi^0$.

Теорема 8. *Пусть заданы координаты $u = (u_1, \dots, u_n)$ и кривая γ, параметризованная следующим образом $\gamma : u_j = u_j(t)$. Тогда гладкое семейство $\xi(t)$ представляется следующим образом:*

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) r_i(u(t)).$$

Рассмотрим ковариантную производную гладкого семейства $\xi(t)$ вдоль γ:

$$\nabla_{\dot\gamma}\xi = \Pi\left(\sum_{i=1}^{n} \dot\xi_i r_i + \xi_i \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial u_j}\dot u_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \dot\xi_i r_i + \sum_{i,j=1}^{n} \dot u_j \xi_i \prod(r_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} (\dot\xi_i + \sum_{k,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij}(u(t))\dot u_j \xi_k) r_i.$$

Имеют место следующие два утверждения:

1) *Верно соотношение*

$$\dot{\xi}_i + \sum_{k,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij}(u(t))\dot{u}_j\xi_k = 0$$

2) $\xi_i(0) = \xi_i^0$.

Определение 37. Семейство $\xi(t)$ — результат параллельного переноса ξ^0 вдоль кривой γ; $\gamma(T)$ — результат параллельного переноса ξ^0 из точки P в точку Q вдоль кривой γ.

Лекция 6

6. Геодезические

Свойства параллельного переноса вектора вдоль кривой

Определение 38. Семейство $\xi(t)$ параллельно вдоль γ, если $\nabla_{\dot\gamma}\xi(t) = 0$.

Теорема 9. *Пусть γ — гладкая кривая, $\gamma(0) = P$; $\gamma(T) = Q$ и пусть $\xi^0 \in T_PM$. Тогда существует единственное гладкое семейство $\xi(t)$ вдоль γ такое, что*

1) *$\xi(t)$ параллельно вдоль γ;*

2) *$\xi(0) = \xi^0$.*

Определение 39. Семейство $\xi(t)$ — результат параллельного переноса ξ^0 вдоль кривой γ; $\gamma(T)$ — результат параллельного переноса ξ^0 из точки P в точку Q вдоль γ.

Свойства параллельного переноса вектора вдоль кривой:

1) $\nabla_{\dot\gamma}\xi = 0$, а именно

$$\dot\xi_i + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}\xi_k\dot u_j = 0$$

2) $\xi(0) = \xi^0$;

$$\xi_i\Big|_{t=0} = \xi_i^0.$$

Пусть p_γ — линейное отображение

$$p_\gamma : T_PM \longrightarrow T_QM$$

0) Параллельный перенос зависит от γ.

1) $\xi(t)$; $\xi(T)$ линейно зависят от ξ^0.

2) p_γ сохраняет скалярное произведение

Доказательство.

$$(\xi^0, \widetilde{\xi}^0) = (p_\gamma(\xi^0), p_\gamma(\widetilde{\xi}^0)) = (\xi(t), \widetilde{\xi}(t)).$$

$$\frac{d}{dt}(\xi(t), \widetilde{\xi}(t)) = (\dot\xi, \widetilde{\xi}) = (\xi, \dot{\widetilde{\xi}}) = (\Pi(\dot\xi), \widetilde{\xi}) + (\xi, \Pi(\dot{\widetilde{\xi}})) = \\ = (\underbrace{\nabla_{\dot\gamma}\xi}_{=0}, \widetilde{\xi}) + (\xi, \underbrace{\nabla_{\dot\gamma}\widetilde{\xi}}_{=0})$$

□

- $|\xi(t)| = |\xi(T)| = |\xi^0|$, то есть при параллельном переносе сохраняется длина.

  Рассмотрим кривую (петлю) $\gamma(T) = \gamma(0)$,
  $$p_\gamma : T_P M \longrightarrow T_P M$$
  — оператор голономии, соответствующий петле γ. Все такие операторы образуют группу операторов голономии в точке P.

- Пусть M, N — поверхности, касающиеся вдоль кривой γ, $T_{\gamma(t)}M = T_{\gamma(t)}N$, $p_\gamma^M = p_\gamma^N$.

- Параллельный перенос сохраняется при изометриях.

Геодезические на поверхностях

Кривая геодезическая, если
$$\Pi(\ddot{\gamma}) = 0 = \nabla_{\dot{\gamma}}(\dot{\gamma}).$$
Это означает, что вектор ускорения ортогонален $T_\gamma M$. Семейство $\dot{\gamma}$ параллельно вдоль γ.

$(u_1, \ldots, u_n)$, $\gamma : u_i = u_i(t)$; $\xi_i \longrightarrow \dot{u}_i$.

Уравнения геодезических:
$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0, \quad \ddot{u}_i + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma_{jk}^n(u)\dot{u}_k\dot{u}_j = 0.$$

Свойства геодезических

Пусть имеем $2n$ функций: $u_1, \ldots, u_n; \xi_1, \ldots, \xi_n$.
$$\begin{cases} \dot{u}_i = \xi_i \\ \dot{\xi}_i = \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^n \xi_j \xi_k \end{cases}$$
$$\begin{cases} u_i(0) = u_i^0 \\ \xi_i(0) = \xi_i^0 \end{cases}$$

1) Для всякой точки $P \in M$ и для любого вектора $\xi \in T_P M$ существует единственная геодезическая $\gamma(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, проходящая при $t = 0$ через точку P: $\dot{\gamma}(0) = \xi^0$.

2) Пусть $\gamma(t)$ — геодезическая. Тогда $|\dot{\gamma}| = \text{const}$.

3) При параллельном переносе вдоль геодезической сохраняется угол *между геодезической* и переносимым вектором.

4) При изометриях геодезические переходят в геодезические.

5) Если M и N касаются вдоль γ, то γ геодезическая на $M \Longleftrightarrow \gamma$ геодезическая на N.

Экспоненциальное отображение

Рассмотрим точку P на многообразии M. Пусть $\xi \in T_P M$, $\gamma_\xi(t)$:

$$\begin{cases} \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0, \\ \gamma(0) = P, \\ \dot\gamma(0) = \xi. \end{cases}$$

Лемма 1. *Для всякого* $\lambda > 0$

$$\gamma_\xi(\lambda t) = \gamma_{\lambda\xi}(t).$$

Доказательство.

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma_\xi(\lambda t) = \dot\gamma_\xi(0)\cdot\lambda = \lambda\xi$$

□

Вообще говоря, верно следующее

$$\gamma_\xi(\varepsilon) = \gamma_{\varepsilon\xi}(1).$$

$$\xi : \quad |\xi| < \varepsilon, \quad \gamma_\xi(t)$$

Определение 40. Экспоненциальное отображение — отображение $\exp : U \longrightarrow M$, U — окрестность 0 в $T_P M$ и $\exp(\xi) = \gamma_\xi(1)$.

Замечание 10.

$$\exp(0) = P.$$

Утверждение 9. *Отображение* $\exp$ *— локальный диффеоморфизм, т.е. оно определяет диффеоморфизм некоторой окрестности нуля в* $T_P M$ *на свой образ.*

Доказательство. 1) $\exp(\xi)$ — гладкое, $\gamma(0) = P$, $\dot\gamma(0) = \xi$.

2) $d_0 \exp = \mathrm{id}$ — тождественный оператор.

Если имеем $f : M \longrightarrow N$, то $d_Q f : T_Q M \longrightarrow T_{f(Q)} N$. Тогда

$$d_0 \exp : T_P M \longrightarrow T_P M,$$

$\delta(t)$ — кривая в $T_P M$ такая, что $\dot\delta(0) = \eta$.

$$d_0 \exp(\eta) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(\delta(t)).$$

$$d_0 \exp(\eta) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(\eta t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma_{\eta,t}(1) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma_\eta(t) = \eta.$$

□

Замечание 11. 1) Прямые, проходящие через O, при экспоненциальном отображении переходят в геодезические, выходящие из точки P.

2) Пусть $(u_1, \ldots, u_n)$ — координаты в $T_P M$ в ортогональном базисе; Q — точка на M из окрестности точки P, $Q \longrightarrow u(\exp^{-1}(Q))$.

   Определение 41. Такие координаты — нормальные координаты в окрестности точки P.

Пусть $M \ni P$, $\xi(s) \subset T_P M$ — такая кривая, что $|\xi(s)| = a = \text{const}$,

$$f(t,s) = \exp(t\xi(s)), \quad f : [-\varepsilon, \varepsilon] \times [s_1, s_2] \longrightarrow M,$$

где f гладкое отображение, f_t, f_s — касательные векторы к M в точке $f(t,s)$.

Утверждение 10. $(f_t, f_s) = 0$.

Доказательство.

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_t, f_s) = (f_{tt}, f_s) + (f_t, f_{st}) = (f_t, f_{ts}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}(f_t, f_t) = \\ = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}|f_t|^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}|\xi(s)|^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}a^2 = 0.$$

$$(f_t, f_s)(t,s) = (f_t, f_s)(0,s)$$

$$f(0,s) = \exp(0 \cdot \xi(s)) = \exp(0) = P \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial s}(0,s) = 0 \Longrightarrow$$

$$(f_t, f_s)(t,s) = (f_t, f_s)(0,s) = 0.$$

□

Лекция 7

7. Геодезические (продолжение)

Лемма Гаусса

Пусть M — n–мерная поверхность в $\mathbb{R}^N$, $P \in M$,

$$\exp : U \longrightarrow V,$$

где U — окрестность 0 в T_PM, V — окрестность P на M, вектор $\xi \in T_PM$; $\exp(\xi) = \gamma_\xi(1)$.

Рассмотрим $\xi(s) \in T_PM$, $|\xi(s)| = a$,

$$f(t,s) = \exp(t\xi(s)), \quad (f_t, f_s) = 0,$$

$$\sum_a \subset U : \{\xi; |\xi| = a\}.$$

Определение 42. Геодезическая сфера с центром P радиуса a — образ $\sum_a$, т.е.

$$S_a = \exp(\sum_a).$$

Геодезический шар — образ $\{\xi; |\xi| \leqslant a\}$.

Пусть $\sigma(s)$ — гладкая кривая, лежащая на S_a; s_0 — точка на σ и $\dot\sigma(s_0)$ — вектор скорости к σ.

Пусть γ — геодезическая, соединяющая P с $\sigma(s_0)$ и $\dot\gamma$ — ее вектор скорости.

Лемма 2 (Гаусс). $\dot\gamma(s_0) \perp \dot\gamma$.

Доказательство.

$$f(t,s) = \exp(t\xi(s)), \quad \xi(s) = \exp^{-1}(\sigma(s)), \quad \sigma(s) = \exp(\xi(s))$$

$$|\xi(s)| = a.$$

$$f_t(t_0, s_0) = \dot\gamma, \quad f_s(t_0, s_0) = \dot\sigma.$$

□

Геодезические как локально кратчайшие

Утверждение 11. *Пусть $\sigma(s)$ — кривая на M, лежащая в окрестности U точки P, в которой $\exp$ — диффеоморфизм, причем $\sigma(s)$ не проходит через точку P. Тогда длина*

$$l(\sigma) \geqslant ||\xi(s_2)| - |\xi(s_1)||,$$

где $\xi(s_2) = \exp^{-1}\sigma(s_2)$, $\xi(s_1) = \exp^{-1}\sigma(s_1)$ и $s \in [s_1, s_2]$, причем равенство достигается $\Longleftrightarrow$ $\sigma(s)$ монотонно параметризует отрезок радиальной геодезической, выходящей из точки P.

Доказательство.

$$\xi(s) = \exp^{-1}(\sigma(s)) \neq s \in [s_1, s_2];$$

$$\omega(s) = \frac{\xi(s)}{|\xi(s)|}; \quad r(s) = |\xi(s)|; \quad |\omega(s)| = 1.$$

$$\sigma(s) = \exp(r(s)\omega(s)) = f(r(s), s), \quad \dot{\sigma} = f_t\frac{dr}{ds} + f_s,$$

$$l(\sigma) = \int_{s_1}^{s_2} |\dot{\sigma}| ds$$

$$|\dot{\sigma}| = \sqrt{|f_t|^2(\frac{dr}{ds})^2 + |f_s|^2} \geq |f_t| \cdot |\frac{dr}{ds}|.$$

$$l(\sigma) \geq \int_{s_1}^{s_2} |f_t| \cdot |\frac{dr}{ds}| ds = \int_{s_1}^{s_2} |\frac{dr}{ds}| ds \geqslant |\int_{s_1}^{s_2} \frac{dr}{ds} ds| =$$
$$= |r(s_2) - r(s_1)| = ||\xi(s_2)| - |\xi(s_1)||.$$

$\square$

Теорема 10. *Для любой точки $P \in M$ существует такая окрестность U, что $\forall Q \in U$ существует единственная геодезическая γ, соединяющая P и Q и лежащая в U, причем $l(\gamma) \leqslant l(\sigma)$, где σ — любая кривая, соединяющая P и Q.*

Доказательство. Рассмотрим точку P и ее окрестность U; $V \subset T_P M$, $\exp : V \longrightarrow U$ — диффеоморфизм, где V — открытый шар в $T_P M$.

Рассмотрим точку $Q \in U$; пусть S_δ — такая геодезическая сфера радиуса δ, что Q — вне геодезического шара радиуса δ.

Пусть σ соединяет P и Q.

1) σ целиком лежит в U; s_1 — последний момент выхода σ из геодезической сферы S_δ радиуса δ.

$$|\sigma| \geq |\sigma_1| \geq ||\xi(s_2)| - |\xi(s_1)|| \geq d - \delta,$$

так как $|\xi(s_1)| = \delta$, $d = |\exp^{-1}(Q)|$.

2) σ выходит из U

$$|\sigma| \geq |\sigma_1| \geq d - \delta.$$

$\square$

Утверждение 12 (без доказательства). *Для любой точки $P \in M$ существует окрестность U точки P и $\varepsilon > 0$ такие, что $\forall Q \in U$ шар радиуса ε в $T_Q M$ под действием* exp *диффеоморфно отображает на некоторую окрестность U_Q точки Q, содержащую U.*

Задача 9. *1) Доказать, что для всякой точки $P \in M$ существует такая окрестность U точки P, что для любых точек $Q_1, Q_2 \in U$ существует единственная геодезическая γ, соединяющая Q_1 и Q_2 и лежащая в U, причем для любой кривой σ, соединяющей Q_1 и Q_2 верно неравенство $|\sigma| \geqslant |\gamma|$.*

2) *Доказать, что любая геодезическая на M локально кратчайшая, т.е. $\forall t_0 \in (t_1, t_2)$ существует $\varepsilon > 0$ такое что γ — кратчайшая среди всех кривых, соединяющих $\gamma(t_0)$ с $\gamma(t)$ при $|t - t_0| < \varepsilon$.*

3) *Пусть $P, Q \in M$ и γ — кратчайшая кривая, соединяющая P и Q. Доказать, что γ — геодезическая.*

Метрические пространства

Рассмотрим поверхность M и отображение

$$P, Q \longrightarrow |PQ| \geqslant 0.$$

1) $|PQ| = 0 \iff P = Q$

2) $|PQ| + |QR| \geq |PR|$

Определение 43. Множество $V \subseteq \mathbb{R}$ называется *открытым*, если $\forall a \in V$ существует $U(a) \subset V$.

Определение 44. Множество $F \subseteq \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если $\mathbb{R} \setminus F$ открыто.

Определение 45. Число 0 называется пределом последовательности $\{P_n\}$ (при $n \longrightarrow \infty$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |P_n| < \varepsilon.$$

Определение 46. Последовательность $\{P_n\}$ — *фундаментальная или удовлетворяет условию Коши*, если

$$\forall \varepsilon \ \ \exists N : \ \ \forall n, m > N \ \ |P_n P_m| < \varepsilon.$$

Пусть $P_n \longrightarrow 0$, $P_n \neq 0$.

Определение 47. Пространство M — полно, если любая фундаментальная последовательность в M сходится.

Рассмотрим пространства M, N и отображение $f : M \longrightarrow N$. Оно *непрерывно* в точке $P \in M$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\delta > 0$: $\forall P' \in M$: $|PP'| < \delta$ выполнено $|f(P)f(P')| < \varepsilon$.

Определение 48. Множество $K \subset \mathbb{R}$ называется *компактом*, если для всякого набора открытых множеств $\{U_\alpha\}$ таких, что $\bigcup_\alpha U_\alpha \supset K$ найдется конечный поднабор $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_N}$: $\bigcup_{k=1}^N U_{\alpha_k} \supset K$, т.е. из всякого покрытия K открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Пусть M — n–мерная поверхность в $\mathbb{R}^N$.

Утверждение 13 (Свойства компактов)**.** *1) Компакт — ограниченное множество (т.е. лежит в некотором отрезке).*

Доказательство. Покроем компакт множествами вида $(-n;n)$:

$$K \subset \bigcup_n (-n;n).$$

В объединении это, конечно, вся числовая ось. Так как K — компакт, то из любого его покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Т.е. существуют $n_1, \ldots, n_N$:

$$K \subset \bigcup_{s=1}^{N} (-n_s;n_s).$$

Но все эти интервалы последовательно вложены друг в друга. Положим

$$C = \max_{1 \leqslant s \leqslant N} n_s.$$

Следовательно, $K \subset (-C;C) \Longrightarrow K \subset [-C;C]$.

□

2) *Компакт — замкнутое множество.*

Доказательство. Чтобы доказать, что некоторое множество замкнуто, нужно доказать, что дополнение к нему открыто.

Рассмотрим точку $a \in \mathbb{R} \setminus K$. Нужно доказать, что любая точка из дополнения входит в него с некоторым интервалом. Возьмем отрезок

$$[a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}].$$

Рассмотрим дополнения к этому отрезку: получим два луча. Обозначим дополнение так

$$U_n = \mathbb{R} \setminus [a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}].$$

$$\bigcup_n U_n = \mathbb{R} \setminus \{a\} \supset K.$$

По определению существует конечное подпокрытие $U_{n_1}, \ldots, U_{n_N}$. Возьмем в качестве

$$M = \max_{1 \leqslant s \leqslant N} \{n_s\}.$$

Тогда $\mathbb{R} \setminus [a - \frac{1}{M}; a + \frac{1}{M}] \supset K$. Следовательно,

$$(a - \frac{1}{M}; a + \frac{1}{M}) \subset \mathbb{R} \setminus K.$$

Следовательно, $\mathbb{R} \setminus K$ открыто и K замкнуто.

□

3) *Если замкнутое множество F является подмножеством компакта K, то F — компакт.*

Доказательство. Пусть

$$F \subset \bigcup_\alpha U_\alpha \Longrightarrow K \subset \bigcup_\alpha U_\alpha \cup (\mathbb{R} \setminus F).$$

По определению существует конечное подпокрытие K

$$U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_N} \text{ и может быть } (\mathbb{R} \setminus F).$$

Эти множества будут покрывать $K \Longrightarrow$ они будут покрывать F. Следовательно,

$$F \subset U_{\alpha_1} \ldots \cup U_{\alpha_N} \cup (?)(\mathbb{R} \setminus F).$$

Последнее множество можно не учитывать, потому что там нет ни одной точки F. Итак, нашли конечное подпокрытие для F

$$F \subset U_{\alpha_1} \ldots \cup U_{\alpha_N}.$$

□

Определение 49. Расстояния (внутренние) между точками P и Q поверхности M

$$|PQ| = \inf |\gamma|,$$

где γ соединяет P с Q.

Задача 10. *1) Доказать, что $|PQ|$ не изменится, если гладкие кривые заменить на кусочно–гладкие.*

$$\gamma = \bigcup_{j=1}^{m} \gamma_j,$$

где γ_j — гладкие; конечная точка γ_j = начальная точка γ_{j+1}.

2) Доказать, что $|PQ|$ превращает M в метрическое пространство (внутренняя метрика на M).

Теорема Хопфа–Ринова

Пусть M — n–мерная поверхность в $\mathbb{R}^N$.

Теорема 11. *(Хопф–Ринов) Следующие условия 1–4 эквивалентны и каждое из них влечет свойство 5:*

1) *существует точка такая $P \in M$, что $\exp_P$ определено на всем T_PM;*
2) *любое ограниченное замкнутое подмножество M компактно;*
3) *M — полно;*
4) *$\forall Q \in M$, что $\exp_Q$ определено на всем T_QM (геодезическая полнота);*
5) *$\forall P, Q$ существует геодезическая длины $|PQ|$, соединяющая эти точки.*

Лекция 8

8. Теорема Хопфа–Ринова. Тензоры

Теорема Хопфа–Ринова

Теорема 12. *(Хопф–Ринов) Следующие условия 1–4 эквивалентны и каждое из них влечет свойство 5:*

1) существует точка такая $P \in M$, что $\exp_P$ определено на всем $T_P M$;

2) любое ограниченное замкнутое подмножество M компактно;

3) M — полно;

4) $\forall Q \in M$, что $\exp_Q$ определено на всем $T_Q M$ (геодезическая полнота);

5) $\forall P, Q$ существует геодезическая длины $|PQ|$, соединяющая эти точки.

Лемма 3. *$P, Q \in M$, $d = |PQ|$, S_a — геодезическая сфера с центром в точке P радиуса a. На сфере S_a существует такая точка x_0, что $|x_0 Q| = \inf_{x \in S_a} |xQ|$, причем $|x_0 Q| = d - a$ (точка Q лежит вне геодезической сферы).*

Доказательство. Рассмотрим точку $x_1 = \gamma(t_0)$ на кривой $\gamma(t)$, где t_0 — время выхода, $\gamma(t_0) \in S_a$

$$l(\gamma) = |\gamma_1| + |\gamma_2| \geqslant a + |x_0 Q|.$$

Следовательно,

$$d \geqslant a + |x_0 Q|.$$

Так как x_0 — точная нижняя грань, то всегда найдется кривая, которая соединяет точку Q с x_0, то есть

$$|\delta_1| < |x_0 Q| + \varepsilon.$$

Кроме того,

$$d < a + |x_0 Q|.$$

Следовательно,

$$d = a + |x_0 Q|.$$

□

Перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство. Докажем $1 \Longrightarrow 2$. Рассмотрим произвольное ограниченное замкнутое множество D. Так как оно ограничено, то содержится в некотором шаре с центром в точке P. Пусть P — радиус этого шара. Далее будем рассматривать геодезические шары. Эта импликация доказана.

Докажем $2 \Longrightarrow 3$. Рассмотрим фундаментальную последовательность $\{x_n\}$. Это ограниченное замкнутое множество. Рассмотрим его замыкание. Тогда по свойству 2 оно компактно.

Докажем $3 \Longrightarrow 4$. Проведем доказательство от противного: пусть существует точка P, что отображение определено не везде. То есть существует геодезическая, которая не продолжается на все времена, то есть существует t_0, что геодезическая продолжается на $[0, t_0)$ и не продолжается на $[0, t_0]$. Рассмотрим последовательность времен $t_m \longrightarrow t_0$, $t_m < t_0$. Тогда

$$|\gamma(t_m)\gamma(t_k)| < |t_m - t_k|.$$

Следовательно, γ_m фундаментальна и тогда в силу полноты пространства сходится к точке $Q \in M$.

Рассмотрим точку Q и ее вполне нормальная окрестность. То есть существует такое число $\varepsilon > 0$, что для окрестности точки Q выполнено следующее условие: если рассмотреть любую точку из этой окрестности, то определен геодезический шар в этой окрестности радиуса ε с центром в этой точке. Рассмотрим геодезическую и ее точку $\gamma(t_m)$. Геодезическая δ продолжается до ε. Кроме того,

$$|t_m - t_0| < \varepsilon/2.$$

Докажем $4 \Longrightarrow 1$. Рассмотрим геодезическую сферу с центром в точке P и точку Q. Пусть $|PQ| = d$. Точка x_0 по лемме — ближайшая к Q. Расстояние $|xQ| = d - a$. Соединим точки x_0 и P и продолжим геодезическую на отрезке $t \in [0; d]$. Нужно доказать, что $\gamma(d) = Q$.

Рассмотрим такое множество $I \subset [0; d]$, что

$$I = \{t : |\gamma(t)Q| = d - t\}.$$

Понятно, что $a \in I$. Обозначим $t_1 = \sup I$. Предположим, что $t_1 < d$, $x_1 = \gamma(t_1)$,

$$|x_1 Q| = d - t_1.$$

Рассмотрим $\delta < d_1$. Найдем на геодезической сфере S_δ точку x_2, что

$$|x_2 Q| = |x_1 Q| - \delta = d - t_1 - \delta.$$

$$|Px_2| \leqslant |Px_1| + \delta \leqslant t_1 + \delta.$$

$$|Px_2| \geqslant |PQ| - |qx_2| = d - (d - t_1 - \delta) = t_1 + \delta.$$

Теперь рассмотрим кривую, которая состоит из двух геодезических, рассмотренных ранее: 1) та, которая соединяет P с x_1; 2) та, которая соединяет x_1 с x_2. Так как геодезическая — кратчайшая траектория, то эта новая кривая — тоже геодезическая. Противоречие. $\square$

Тензоры

Определим (p, q)–тензоры. Пусть L — векторное пространство,

$$\underbrace{L \otimes \ldots \otimes L}_{p} \underbrace{L^* \otimes \ldots \otimes L^*}_{q} = V^{(p,q)}.$$

$$T(\alpha^1, \dots, \alpha^p, \xi_1, \dots, \xi_q),$$
$$\alpha^j \in L^*,\ \xi_k \in L.$$
$$\dim V^{(p,q)} = n^{p+q}, \quad \dim L = n$$

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис в L, $e^1, \dots, e^n$ — двойственный базис в L^*. Имеет место равенство
$$e^i(\xi) = \xi^i$$
— i–ая координата в $e_1, \dots, e_n$.

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$$

$$\xi = \xi^i e_i = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i$$
$$T = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$$

1) Тензорное умножение $T \in V^{(p,q)}$, $S \in V^{(p',q')}$

$$T \otimes S(\alpha^1, \dots, \alpha^{p+p'}, \xi_1, \dots, \xi_{q+q'}) =$$
$$= T(\alpha^1, \dots, \alpha^p, \xi_1, \dots, \xi_q) S(\alpha^{p+1}, \dots, \alpha^{p+p'}, \xi_{q+1}, \dots, \xi_{q+q'})$$

$$(T \otimes S)^{i_1 \dots i_{p+p'}}_{j_1 \dots j_{q+q'}} = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \cdot S^{i_{p+1} \dots i_{p+p'}}_{j_{q+1} \dots j_{q+q'}}.$$

2) Свертки.

   T — (1,1)–тензор. $\Sigma(T) = \operatorname{tr} T = T^i_i$

$$T = T^{i_1 \dots i_k = e \dots i_p}_{j_1 \dots j_s = e \dots j_q}$$

3) Подъем и опускание индексов.

$$G(\xi)(\eta) = (\xi, \eta).$$

   $\widehat{G}$ — опускание индекса.
$$\widehat{G} V^{(p,q)} \longrightarrow V^{(p-1,q+1)}$$
$$(\widehat{G}T)(\alpha^1, \dots, \alpha^{p-1}, \xi_0, \dots, \xi_q) = T(\underbrace{\alpha^1, \dots, \alpha^{p-1}, G(\xi_0)}_{p}, \xi_1, \dots, \xi_q)$$

$$\widehat{G}^{-1}:$$
$$(\widehat{G}^{-1}T)(\alpha^1, \dots, \alpha^{p+1}, \xi_2, \dots, \xi_q) = T(\alpha^1, \dots, \alpha^p, \underbrace{G^{-1}(\alpha^{p+1}), \xi_2, \dots, \xi_q}_{q})$$

$$(\widehat{G}T)^{i_1 \dots i_p}_{j_0 \dots j_q} = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} g_{j_0 i_p}.$$
$$T^{i'_1 \dots i'_p}_{j'_1 \dots j'_q} = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} b^{i'_1}_{i_1} b^{i'_p}_{i_p} a^{j_1}_{j'_1} a^{j_q}_{j'_q}$$

Определение 50. Гладкое тензорное поле типа (p, q) на M — соответствие, сопоставляющее каждой точке $P \in M$ тензор типа (p, q) в $T_P M$, гладко зависящий от P.

$$(u^1, \ldots, u^n) \longrightarrow r_1, \ldots, r_u, \quad r_j = \frac{\partial r}{\partial u_j}.$$

$$\frac{\partial}{\partial u^j} \equiv r_j,$$

$$du^1, \ldots, du^n \text{ — базис.}$$

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(u)$$

$$\frac{\partial}{\partial v^k} = \frac{\partial u^i}{\partial v^k} \frac{\partial}{\partial u^i}$$

$$du^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i} du^i.$$

Лекция 9

9. Искривление поверхности

Гладкие тензорные поля на поверхностях

0) Гладкие функции $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ — тензорное поле типа $(0,0)$.

1) Векторные поля: $P \longrightarrow \xi(P) \in T_P M$ — тензорное поле типа $(1,0)$.

2) Ковекторные поля (1–формы), $P \longrightarrow \alpha(P) \in T_P M^*$

$$\xi = \xi^i(u)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \alpha = a_j(u)du^j.$$

3) Тензорные поля типа $(0,2)$

$$b_{ij}(u) = b\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)$$

$$b = b_{ij}(u)du^i \otimes du^j$$

$\alpha^1, \ldots, \alpha^p$ — тензорные поля типа $(0,1)$, $\xi_1, \ldots, \xi_q$ — векторные поля.

$$T(\alpha^1, \ldots, \alpha^p, \xi_1, \ldots, \xi_q) : M \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots j_q}\alpha^1_{i_1}, \ldots, \alpha^p_{i_p}, \xi^{j_1}_1, \ldots, \xi^{j_q}_q.$$

Обозначим через v — пространство векторных полей, Λ — пространство 1–форм, а $\mathcal{F}$ — пространство гладких функций. Отображение

$$T : \underline{\Lambda \times \ldots \times \Lambda}_p \times \underline{V \times \ldots \times V}_q \longrightarrow \mathcal{F}$$

является полилинейным.

$$T(\alpha^1, \ldots, f\alpha^k, \ldots, \alpha^p, \xi_1, \ldots, \xi_q) = fT(\alpha^1, \ldots, \alpha^p, \xi_1, \ldots, \xi_q).$$

$$W(\alpha, \xi, \eta) = \alpha(\nabla_\xi \eta).$$

$$W(\alpha, \xi, f\eta) = \alpha(f\nabla_\xi \eta + \eta\partial_\xi(f)) = f\alpha(\nabla_\xi \eta) + \partial_\xi(f) \cdot \alpha(\eta).$$

Утверждение 14. *Пусть T — отображение, которое полилинейно и $\mathcal{F}$ — линейно. Тогда T определяет (p,q)–тензорное поле.*

Доказательство. Пусть $P \in M$

$$\alpha^1, \ldots, \alpha^p, \xi_1, \ldots, \xi_q$$

$$\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^p, \widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_q,$$

$$\alpha^j(P) = \widetilde{\alpha}^j(P), \quad \xi_i(P) = \widetilde{\xi}_i(P)$$

$$T(\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^p, \widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_q) = T(\alpha^1 + (\widetilde{\alpha}^1 - \alpha^1), \ldots, \xi_1 + (\widetilde{\xi}_1 - \xi_1), \ldots =$$
$$= T(\alpha^1, \ldots, \alpha^p, \xi_1, \ldots, \xi_q) + \ldots T(\ldots(\widetilde{\alpha}^k - \alpha^k)\ldots)$$

□

$$T(\beta^1, \ldots, \beta^P, \eta_1, \ldots, \eta_q), \quad \beta^k(P) = 0$$

$$\beta^k = \beta^k_j(u)du^j, \quad \beta^k_j(P) = 0$$

$$T(\beta^1, \ldots, \beta^k_j(u)du^j, \ldots) = \beta^k_j(u)T(\beta^1, \ldots, du^j, \ldots) = 0 \text{ в точке } P.$$

Обозначим $\widehat{T}$:

$$\underline{\Lambda \times \ldots \times \Lambda_p} \times v \times \ldots \times v \longrightarrow v$$

$$\widehat{T}(\alpha^1, \ldots, \alpha^p, \xi_1, \ldots, \xi_q)$$

$$T(\alpha^1, \ldots, \alpha^p, \alpha^{p+1}, \xi_1, \ldots, \xi_q) = \alpha^{p+1}(\widehat{T}(\alpha^1, \ldots, \alpha^p, \xi_1, \ldots, \xi_q))$$

$$\Phi(\varepsilon)\zeta = \zeta + \varepsilon^2 R(\xi, \eta)\zeta + O(\varepsilon^3)$$

$$\widehat{R}(\alpha, \xi, \eta, \zeta) = \alpha(R(\xi, \eta)\zeta)$$

Коммутатор векторных полей

Пусть ξ — векторное поле,

$$f \longrightarrow \partial_\xi(f) = \xi^i(u)\frac{\partial f}{\partial u^i}$$

Тогда можно определить коммутатор векторных полей:

$$[\partial_\xi, \partial_\eta] = \partial_\xi \partial_\eta - \partial_\eta \partial_\xi.$$

Утверждение 15. $[\partial_\xi, \partial_\eta]$ *— линейный дифференциальный оператор первого порядка.*

Доказательство.

$$\partial_\xi \partial_\eta(f) = \partial_\xi(\eta^i \frac{\partial f}{\partial u^i}) = \xi^j(u)\frac{\partial}{\partial u^j}(\eta^i \frac{\partial f}{\partial u^i}) = \xi^j \eta^i \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} + \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial u^j}\frac{\partial f}{\partial u^i}$$

$$\partial_\eta \partial_\xi(f) = \xi^j \eta^i \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} + \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial u^j}\frac{\partial f}{\partial u^i}$$

$$[\partial_\xi, \partial_\eta]f = (\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial u^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial u^j})\frac{\partial f}{\partial u^i} = \zeta^i(u)\frac{\partial f}{\partial u^i}.$$

□

Определение 51. Поле ζ — коммутатор ξ и η, $\zeta = [\xi, \eta]$.

Замечание 12. $[\xi, \eta]^i = \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial u^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial u^j}$.

$$\partial_{[\xi, \eta]} = [\partial_\xi, \partial_\eta].$$

Свойства:

1) Билинейная операция.

2) $[\xi,\eta]=-[\eta,\xi]$.

3) Верно равенство

$$[[\xi,\eta],\zeta]+[[\eta,\zeta],\xi]+[[\zeta,\xi],\eta]=0.$$

4) $[f\xi,\eta]=f[\xi,\eta]-\xi\partial_\eta(f)$,

$$\begin{aligned}\partial_{f\xi}\partial_\eta-\partial_\eta\partial_{f\xi}&=f\partial_\xi\partial_\eta-\partial_\eta(f\partial_\xi)=\\&=f\partial_\xi\partial_\eta-f\partial_\eta(\partial_\xi)-\partial_\eta(f)\cdot\partial_\xi=f\partial_{[\xi,\eta]}-\partial_{\partial_\eta(f)\xi}=\partial_{f[\xi,\eta]-\partial_\eta(f)\xi}.\end{aligned}$$

Тензор Римана

Определение 52. Оператор кривизны (Римана), соответствующий полям ξ и η — это оператор

$$R(\xi,\eta)\zeta=(\nabla_\xi\nabla_\eta-\nabla_\eta\nabla_\xi-\nabla_{[\xi,\eta]})\zeta.$$

Утверждение 16. *Отображение R $\mathcal{F}$–линейно.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}R(f\xi,\eta)\zeta&=(\nabla_{f\xi}\nabla_\eta-\nabla_\eta\nabla_{f\xi}-\nabla_{[f\xi,\eta]})\zeta=\\&=(f\nabla_\xi\nabla_\eta-\nabla_\eta f\nabla_\xi-\nabla_{f[\xi,\eta]-\xi\partial_\eta(f)})\zeta=\\&=(f\nabla_\xi\nabla_\eta-\nabla_\eta f\nabla_\xi-\partial_\eta(f)\nabla_\xi-f\nabla_{[\xi,\eta]}+\partial_\eta(f)\nabla_\xi)\zeta=fR(\xi,\eta)\zeta.\end{aligned}$$

Кроме того, $R(\xi,\eta)=-R(\eta,\xi)$.

$$\begin{aligned}R(\xi,\eta)(f\zeta)&=\nabla_\xi f\nabla_\eta\zeta+\nabla_\xi\partial_\eta(f)\zeta-\nabla_\eta f\nabla_\xi\zeta-\nabla_\eta\partial_\xi(f)\zeta-f\nabla_{[\xi,\eta]}\zeta-\partial_{[\xi,\eta]}(f)\zeta=\\&=f\nabla_\xi\nabla_\eta\zeta+\partial_\xi(f)\nabla_\eta\zeta+\partial_\eta(f)\nabla_\xi\zeta+\partial_\xi\partial_\eta(f)\cdot\zeta-\\&-f\nabla_\eta\nabla_\xi\zeta-\partial_\eta(f)\nabla_\xi\zeta-\partial_\xi(f)\nabla_\eta\zeta-\partial_\eta\partial_\xi(f)\cdot\zeta-\\&-f\nabla_{[\xi,\eta]}\zeta-\partial_{[\xi,\eta]}(f)\zeta=fR(\xi,\eta)\zeta.\end{aligned}$$

□

Следствие 3. *Тензор R задает тензорное поле типа* $(1;3)$,

$$\widehat{R}(\alpha,\xi,\eta,\zeta)=\alpha(R(\xi,\eta)\zeta).$$

Определение 53. $\widehat{R}$ — тензор Римана (тензор кривизны).

$$R(\alpha,\xi,\eta,\zeta)=R^q_{ij,k}\xi^i\eta^j\zeta^k\alpha_q$$

$$R^q_{ij,k}=R(du^q,\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j},\frac{\partial}{\partial u^k})=du^q\left(R(\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j})\frac{\partial}{\partial u^k}\right)$$

$$\begin{aligned}R(\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j})\frac{\partial}{\partial u^k}&=(\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i)\frac{\partial}{\partial u^k}=\\&=\nabla_i\Gamma^s_{jk}\frac{\partial}{\partial u^s}-\nabla_j\Gamma^s_{ik}\frac{\partial}{\partial u^s}=\left(\frac{\partial\Gamma^s_{jk}}{\partial u^i}+\Gamma^s_{im}\Gamma^m_{jk}\right)\frac{\partial}{\partial u^s}.\end{aligned}$$

$$\nabla_i \xi = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial u^j} + \Gamma^i_{jk}\xi^k\right)\frac{\partial}{\partial u^i}$$

$$R^q_{ij,k} = \frac{\partial \Gamma^q_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma^q_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^q_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^q_{jm}\Gamma^m_{ik}.$$

Лекция 10

10. Тензор Римана

Симметрии тензора Римана

Напомним определение тензора Римана:

$$R(\xi,\eta)\zeta = (\nabla_\xi\nabla_\eta - \nabla_\eta\nabla_\xi - \nabla_{[\xi,\eta]})\zeta$$

$$R(\xi,\eta)\zeta = R^q_{ij,k}\xi^i\eta^j\zeta^k\frac{\partial}{\partial u^q}.$$

Теорема 13 (симметрия тензора Римана)**.** *1)* $R(\xi,\eta) = -R(\eta,\xi)$.

2) $R(\xi,\eta)\zeta + R(\eta,\zeta)\xi + R(\zeta,\xi)\eta = 0$ *(тождество Бьянки).*

Доказательство. Пусть

$$\xi = \frac{\partial}{\partial u^i};\quad \eta = \frac{\partial}{\partial u^j};\quad \zeta = \frac{\partial}{\partial u^k}.$$

Преобразуем выражение

$$\nabla_\xi\nabla_\eta\zeta - \nabla_\eta\nabla_\xi\zeta + \nabla_\eta\nabla_\zeta\xi - \nabla_\zeta\nabla_\eta\xi + \nabla_\zeta\nabla_\xi\eta - \nabla_\xi\nabla_\zeta\eta = \\ = \nabla_\xi(\nabla_\eta\zeta - \nabla_\zeta\eta) + \nabla_\eta(\nabla_\zeta\xi - \nabla_\xi\zeta) + \nabla_\zeta(\nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi).$$

Представление в координатах имеет вид:

$$\nabla_\eta\zeta = \nabla_j\frac{\partial}{\partial u^k} = \Gamma^s_{jk}\frac{\partial}{\partial u^s};\quad \nabla_\zeta\eta = \Gamma^s_{kj}\frac{\partial}{\partial u^s}$$

□

3) $(R(\xi,\eta)\zeta,\omega) = -(\zeta, R(\xi,\eta)\omega)$.

Доказательство. По определению имеем

$$(R(\xi,\eta)\zeta,\omega) = ((\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)\frac{\partial}{\partial u^k}\frac{\partial}{\partial u^s})$$

$$\partial_\xi(\zeta,\omega) = (\nabla_\xi\zeta,\omega) + (\zeta,\nabla_\xi\omega)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^i\partial u^j}(\zeta,\omega) = (\nabla_\eta\nabla_\xi\zeta,\omega) + (\nabla_\xi\zeta,\nabla_\eta\omega) + (\nabla_\eta\zeta,\nabla_\xi\omega) + (\zeta,\nabla_\eta\nabla_\xi\omega).$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^i\partial u^j}(\zeta,\omega) = \nabla_\xi\nabla_\eta\zeta,\omega) + (\zeta,\nabla_\xi\nabla_\eta\omega) + (\nabla_\xi\zeta,\nabla_\eta\omega) + (\nabla_\eta\zeta,\nabla_\xi\omega).$$

$$0 = (R(\xi,\eta)\zeta,\omega) + (\zeta, R(\xi,\eta)\omega).$$

□

4) $(R(\xi,\eta)\zeta,\omega) = (R(\zeta,\omega)\xi,\eta)$.

Доказательство.

$$(R(\xi,\eta)\zeta,\omega) + (R(\eta,\zeta)\xi,\omega) + (R(\zeta,\xi)\eta,\omega) = 0,$$

$$(R(\eta,\zeta)\omega,\xi) + (R(\zeta,\omega)\eta,\xi) + (R(\omega,\eta)\zeta,\xi) = 0,$$
$$(R(\zeta,\omega)\xi,\eta) + (R(\omega,\xi)\zeta,\eta) + (R(\xi,\zeta)\omega,\eta) = 0,$$
$$(R(\omega,\xi)\eta,\zeta) + (R(\xi,\eta)\omega,\zeta) + (R(\eta,\omega)\xi,\zeta) = 0.$$

Складывая первые две строчки и вычитая из нее две вторые, получаем

$$2(R(\xi,\eta)\zeta,\omega) - 2(R(\zeta,\omega)\xi,\eta) = 0.$$

□

Симметрии тензора Римана в координатах

1) $R^q_{ij,k} = -R^q_{ji,k}$.
2) $R^q_{ij,k} + R^q_{jk,i} + R^q_{ki,j} = 0$.
3) $R_{ij,kq} = R^m_{ij,k} g_{mq}$.
4) $R_{ij,kq} = -R_{ij,kq}$.
5) $R_{ij,kq} = R_{kq,ij}$.

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2} =$$
$$= \frac{n(n-1)(\cancel{6} + 6n - \cancel{12} + n^2 - 5n + \cancel{6})}{12} = \frac{n^2(n-1)(n+1)}{12} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Итак, число независимых компонент равно

$$\boxed{\frac{n^2(n^2-1)}{12}.}$$

Зависимость плоскости поверхности от тензора Римана

Рассмотрим риманову метрику и преобразование ее компонент

$$g_{i'j'} = g_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}$$

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(0) = 0$$

в количестве $\frac{n^2(n-1)}{2}$.

Утверждение 17. *Имеет место равенство*

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(0) = 0.$$

Доказательство. Пусть $\xi \in T_P M$, $u = \xi t$. Тогда

$$\ddot{u}^i + \Gamma^i_{jk}(u(t))\dot{u}^j \dot{u}^j k = 0$$

$$\Gamma^i_{jk}(\xi t)\xi^j \xi^k = 0 \Longrightarrow \Gamma^i_{jk}(0)\xi^j \xi^k = 0 \Longrightarrow \Gamma^i_{jk}(0) = 0.$$

□

Рассмотрим тензор $T_{i_1 i_2 i_3}$ и вычислим количество его компонент

$$T_{i_1 i_2 i_3} \quad C^3_{n+2},$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n^2(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n^2(n+1)(3n+3-2n-4)}{12} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Задача 11. *Доказать, что в нормальных координатах*

$$g_{ij}(u) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{ik,lj}u^k u^l + o(|u|^2).$$

Тензор Риччи и скалярная кривизна

При $n = 2$ одна независимая компонента — $R_{12,12}$.
При $n = 3$ шесть независимых компонент.

Определение 54. Тензор Риччи

$$R_{ij} = R^k_{ki,j}.$$

Задача 12. *Доказать, что $R_{ij} = R_{ji}$.*

Определение 55. Скалярная кривизна $R = R_{ij}g^{ij}$.

Задача 13. *1) Пусть $n = 2$. Выразить $R_{ij,kq}$ через R (и g_{ij}).*

2) Пусть $n = 3$. Выразить $R_{ij,kq}$ через R_{ij}.

Гладкие многообразия и гладкие расслоения

Определение 56. Топологическое пространство (M, τ) — совокупность открытых подмножеств в M:

1) M, $\varnothing$ — открыты.

2) U_α — открыты $\Longrightarrow \bigcup_\alpha U_\alpha$ — открыто.

3) $U_1, \ldots, U_N$ — открыты $\Longrightarrow \bigcap_{j=1}^N U_j$ — открыто

Определение 57. Для последовательности $x_1, \ldots, x_n$, $x_j \in M$, $x_n \longrightarrow x_0$ для всякого открытого U для x_0 существует n_0, что для всякого $n \geqslant n_0$ верно, что $x_n \in U$.

Функция f *непрерывна* в точке x_0, если для всякой окрестности V точки $f(x_0)$ существует такая окрестность U точки x_0, что $f(U) \subset V$.

Непрерывная кривая в M — это $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$, $t \longrightarrow \gamma(t) \in M$.

Пространство M *линейно связно*, если для всяких $P, Q \in M$ существует такая непрерывная кривая γ, что $\gamma(a) = P$ и $\gamma(b) = Q$.

Пространство M *хаусдорфово*, если для всяких точек $P, Q \in M$, $P \neq Q$ существуют окрестности U_P и U_Q, что $U_P \cap U_Q = \varnothing$.

Определение 58. Отображение $f : M \longrightarrow N$ — гомеоморфизм, если

1) f — биекция;

2) f и f^{-1} непрерывны.

Определение 59. Топологическое многообразие размерности n — это такое пространство M, что

1) у любой точки $P \in M$ существует окрестность, гомеоморфная некоторой области в $\mathbb{R}^n$.

2) M хаусдорфово.

3) У M существует счетная база окрестностей $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$.

Лекция 11

11. Гладкое многообразие

Карты на многообразии

Пусть нам задано топологическое хаусдорфово пространство X.

Определение 60. Пространство X называется топологическим непрерывным *многообразием*, если $X = \bigcup_{(i)} U_i$, где U_i — открытые множества такие, что $\forall \varphi_i : U_i \to D^n \subset \mathbb{R}^n$, где φ_i — гомеоморфизм, а n не зависит от i. Число n называется размерностью X.

$$U_\alpha; \quad \bigcup_\alpha U_\alpha = M,$$

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$$

$$x_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$$

Назовем φ_α — координатные гомеоморфизмы, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ — карта.

$$U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta},$$

где $x_\beta^i = x_\beta^i(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$, $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим функции перехода и функции склейки:

$$v_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

$$v_{\beta\alpha} = \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

$$\varphi_{\alpha\beta} : V_{\alpha\beta} \longrightarrow V_{\beta\alpha}$$

$$\varphi_{\alpha\beta}(x) = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x)$$

$$\varphi_{\beta\alpha} : V_{\beta\alpha} \longrightarrow V_{\alpha\beta}$$

$$\varphi_{\beta\alpha}(x) = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x)$$

Определение 61. Атлас на M гладкий, если все функции склейки гладкие.

Определение 62. Два гладких атласа эквивалентны, если их объединение — гладкий атлас.

Определение 63. Гладкая структура на M — класс эквивалентности гладких атласов.

Определение 64. Гладкое многообразие – (топология многообразие M, гладкая структура).

Пусть M — гладкое n–мерное многообразие, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $U \ni P \in M$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Рассмотрим такие отображения

$$\widehat{f} : V \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\varphi : U \longrightarrow V,$$

что

$$\widehat{f}(x) = f(\varphi^{-1}(x))$$

Определение 65. Функция f гладкая в окрестности точки P, если $f(x^1, \ldots, x^n)$ гладкая ($\widehat{f}$ гладкая в окрестности $\varphi(P)$).

Рассмотрим многообразия M^m, N^n и отображение

$$f : M \longrightarrow N, \quad P \in M, \quad f(P) \in N$$

с координатами $(x^1, \ldots, x^m)$ и $(y^1, \ldots, y^n)$ соответственно.

$$y^i = f^i(x^1, \ldots, x^m), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Определение 66. Отображение f гладкое в окрестности точки P, если $f^i(x)$ гладкие.

$$\widehat{f}(x) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$$

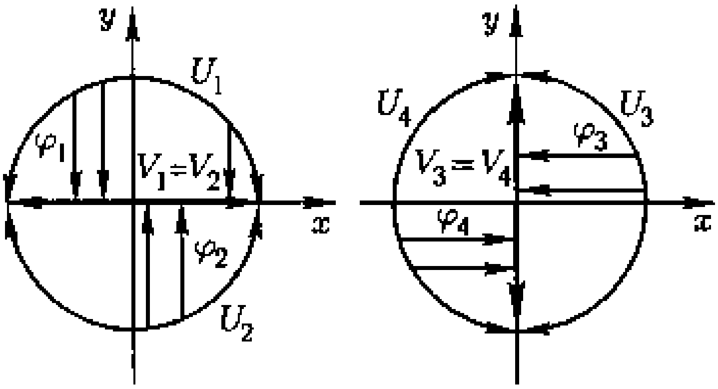


Рис. 11.3

Определение 67. Пара (U_i, φ_i) называется *локальной картой*, φ — *координатным гомеоморфизмом*, а совокупность $\{(U_i, \varphi_i)\}$ — *атласом.*

Определение 68. Рассмотрим пересечение карт $U_i \cap U_j$ (рис. 11.4). Отображение $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ называется *функцией склейки.*

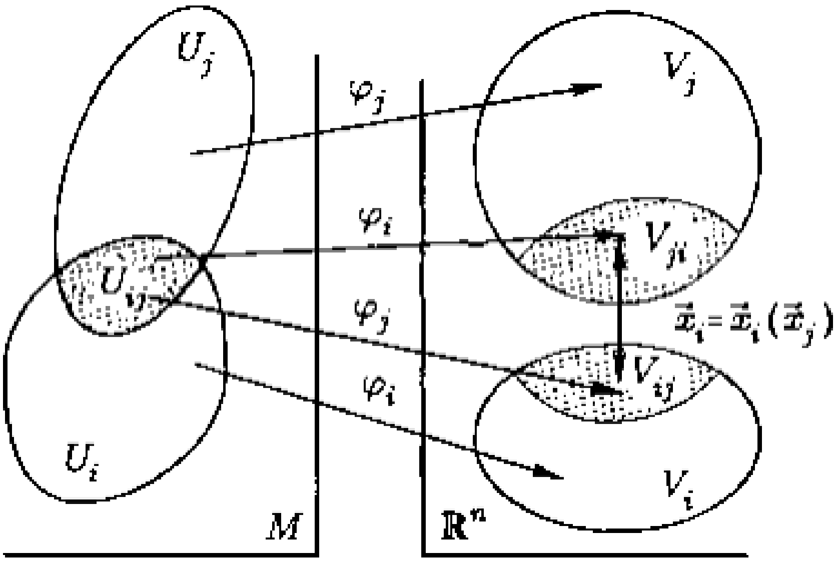


Рис. 11.4

Определение 69. Топологическое многообразие X^n называется гладким, если все функции перехода $\varphi_{ij} \in C^\infty$. Аналогично определяются комплексно–аналитические, вещественно–аналитические многообразия.

Теорема 14. *Рассмотрим гладкое связное многообразие M^1. Если оно компактно, то оно гомеоморфно окружности, если многообразие некомпактно, то оно гомеоморфно прямой $\mathbb{R}^1$.*

Напомним, что многообразия M^n и P^n называются гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм $f : M^n \to P^n$.*

Понятие касательного вектора

Пусть M — гладкое многообразие.

Определение 70. Гладкая кривая γ на M — гладкое отображение

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow M.$$

Рассмотрим сопоставление

$$t \longrightarrow \gamma(t) \in M.$$

Пусть

$$t_0 : \quad \gamma(t_0) \in U;$$
$$x^i = x^i(t).$$

Рассмотрим две такие кривые

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow M$$

$$\widetilde{\gamma} : [a, b] \longrightarrow M,$$

что

$$\gamma(t_0) = \widetilde{\gamma}(\tau_0) = P.$$

Параметризация кривых имеет вид:

$$\gamma: \; x^i = x^i(t)$$

$$\widetilde{\gamma}: \; x^i = \widetilde{x}^i(\tau)$$

Определение 71. Кривые γ и $\widetilde{\gamma}$ касаются в точке P, если

$$\dot{x}^i(t_0) = \dot{\widetilde{x}}^i(\tau_0) \quad \forall i = 1, \ldots n.$$

Утверждение 18. *Касание не зависит от выбора локальных координат x^i.*

Доказательство. Рассмотрим два набора координат x^i, $x^{i'}$, $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$. Рассмотрим кривые

$$\gamma: \; x^{i'} = x^{i'}(x^i(t)),$$
$$\widetilde{\gamma}: \; x^{i'} = x^{i'}(\widetilde{x}^i(\tau)).$$

Продифференцируем

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} x^{i'}(x^i(t)) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\dot{x}^i(t_0)$$

$$\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0} x^{i'}(\widetilde{x}^i(\tau)) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\dot{\widetilde{x}}^i(\tau_0)$$

□

Пусть на многообразии $M^n \subset \mathbb{R}^N$ задан атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}$. Координатные отображения вводят локальные регулярные координаты $x^1, \ldots, x^n$ в картах. Рассмотрим гладкие функции $f(x)$ на M^n.

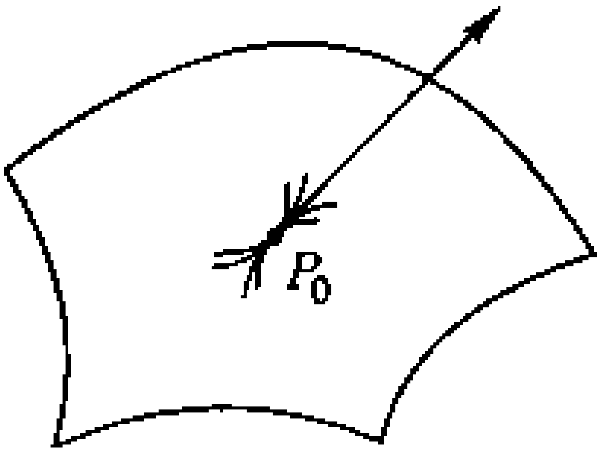


Рис. 11.5

Определение 72 (Первое определение касательного вектора)**.** Рассмотрим кривые $\gamma(t)$ в окрестности U, проходящие через точку x: $\gamma(0) = x$, $\gamma(t) = x(t)$. Две кривые γ_1 и γ_2 называются *эквивалентными* или *соприкасающимися*, если для любой $f \in U$

$$\frac{df}{d\gamma_1} = \frac{df}{d\gamma_2}.$$

Касательным вектором в данной точке назовем класс соприкасающихся кривых в данной точке (рис. 11.5).

Напомним, что

$$\frac{df}{d\gamma} = \frac{d}{dt}f(x(t))|_{t=0}.$$

Определение 73 (Второе определение касательного вектора)**.** Скажем, что в точке $x \in M$ задан *касательный вектор* $a = (a^1, \dots, a^n)$, если в любой локальной регулярной криволинейной системе координат числа a^i преобразуются по следующему закону

$$a^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{x^i}a^i.$$

Определение 74 (Третье определение касательного вектора)**.** Скажем, что в точке $x \in M$ задан *касательный вектор* $a = (a^1, \dots, a^n)$, если задан линейный дифференциальный оператор

$$D = a^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Теорема 15. *Все три определение касательного вектора эквивалентны.*

Доказательство. $\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Пусть в точке задан пучок соприкасающихся кривых. Имеем

$$\frac{df}{d\gamma} = \frac{d}{dt}f(x(t))|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^i}a^i.$$

Набор чисел (a^i) сопоставим пучку кривых. Скажем, что мы получили касательный вектор в смысле определения 2. Проверим корректность определения.

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}a^i = \frac{df}{d\gamma_1} = \frac{df}{d\gamma_2} = \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}b^i.\ \forall t \Longrightarrow a^i = b^i.$$

Убедимся теперь, что числа преобразуются по нужному нам закону

$$a^{i'} = \frac{dx^{i'}}{dt}|_{t=0} = \frac{\partial x^{i'}}{x^i}\frac{dx^i}{dt}|_{t=0} = \frac{\partial x^{i'}}{x^i}a^i.$$

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$ По определению 2 задан набор чисел. Сопоставим ему оператор $D = a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$. Проверим корректность при замене координат:

$$\widetilde{D} = a^{i'}\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^{i'}}{x^i}a^i\frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\frac{\partial}{\partial x^p} = \delta^p_i a^i\frac{\partial}{\partial x^p} = D.$$

$\boxed{3 \Longrightarrow 1}$ Пусть задан дифференциальный оператор $D = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Рассмотрим точку x и все кривые $\gamma(t)$: $\gamma(0) = x$ такие, что $D(f) = \frac{df}{d\gamma}$ $\forall f$. берем γ_1 и γ_2 из этого пучка. Тогда

$$\frac{df}{d\gamma_1} = D(f) = \frac{df}{d\gamma_2}.$$

Значит, эти кривые соприкасаются. Мы получили пучок таких кривых, а это и есть касательный вектор в смысле определения 1. Почему существуют такие кривые? Рассмотрим кривую $\gamma(t)$: $\dot{\gamma}(t) = a$. Тогда $D(f) = \frac{df}{d\gamma}$ $\forall f$ очевидно выполнено. $\square$

Задача 14. *Зная параметрические уравнения γ и $\widetilde{\gamma}$, написать параметрические уравнения кривых, у которых касательные векторы — $\xi + \eta$ или $c\xi$.*

Следствия

Пусть на многообразии $M^n \subset \mathbb{R}^N$ задан атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}$.

Определение 75. *Касательным пространством* в точке x к многообразию M^n назовем все операторы вида $D = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, т.е.

$$T_x M^n = \{D = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\}.$$

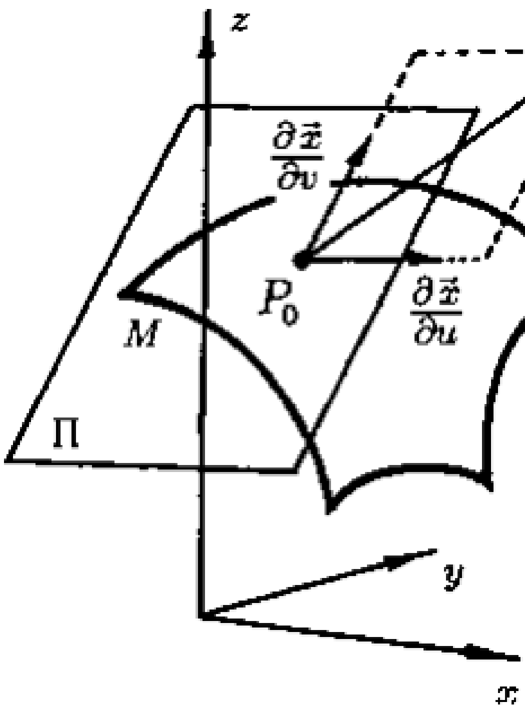


Рис. 11.6

Пространство $T_x M^n$ является линейным вещественным пространством. Пусть даны два дифференциальных оператора D и Q. Тогда определена их линейная комбинация

$$\alpha D + \beta Q = (\alpha a^i + \beta b^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

— это снова линейный дифференциальный оператор. Значит, это снова касательный вектор.

Рассмотрим теперь два гладких многообразия M^n и P^m. Пусть есть гладкое отображение $f : M \longrightarrow P$. Тогда возникает отображение

$$df : T_xM \longrightarrow T_{y=f(x)}P.$$

Рассмотрим вектор $a \in T_xM^n$ и его образ $f(a) = b \in T_yP^m$. Тогда

$$b^i = \frac{dy^i(x)}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial y^i(x)}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}a^\alpha,$$

$$(df(a))^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}a^\alpha.$$

Лекция 12

12. Вложение гладкого многообразия в евклидово пространство

Карты на многообразии

Рассмотрим сферу

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$$

и отображение

$$\varphi : (S^2/N) \longrightarrow \mathbb{R},$$

где N — северный полюс.

Пусть M и N — n–мерные гладкие многообразия. Рассмотрим гладкое отображение

$$f : M \longrightarrow N.$$

Рассмотрим кривую $\gamma \subset M$ точку на ней $P \in M$. Пусть $\xi \in T_P M$ — вектор скорости этой кривой в точке P при $t = t_0$. Рассмотрим $Q = f(P) \in N$ и

$$f(\gamma) = f \circ \gamma : [a, b] \longrightarrow N,$$

$$\eta = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} f(\gamma).$$

Утверждение 19. *Вектор η не зависит от γ; соответствие $\xi \longrightarrow \eta$ — линейное отображение из $T_P M$ в $T_Q N$.*

Доказательство. Пусть x^i — координаты в окрестности точки P; x_0^i — координаты точки P.

Пусть y^j — координаты в окрестности точки Q, y_0^j — координаты точки Q. Тогда

$$f: \; y^j = f^j(x), \quad y_0 = f(x_0)$$

$$x = (x^1, \dots, x^n), \quad y = (y^1, \dots, y^n).$$

Для кривой γ

$$\gamma : x^i = x^i(t) \quad x^i(t_0) = x_0^i,$$

$$\dot{x}^i(t_0) = \xi^i,$$

$$f(\gamma): \; y^j = y^j(x(t)).$$

Итак, имеем

$$\eta^j = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} y^j(x(t)) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0)\dot{x}^i(t_0) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0)\xi^i.$$

$\square$

Определение 76. Это отображение — дифференциал f в точке P

$$d_P f(\xi) = \eta.$$

Погружение и вложение многообразий

Пусть $m \leqslant n$. $y^j = f^j(x^1, \ldots, x^m)$, $j = 1, \ldots, n$.

Определение 77. Гладкое отображение $f : M \longrightarrow N$ — погружение, если $\forall P \in M$ $d_P M$ — вложение касательных пространств, т.е.

$$\operatorname{Ker} d_P f = \{0\}.$$

Пример 3. Пусть $M = S^1$, $N = \mathbb{R}^2$ $(y = (y^1, y^2))$

$$f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$g : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin 2\varphi \end{pmatrix}$$

$$df = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$dg = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ 2\cos 2\varphi \end{pmatrix}$$

Определение 78. Отображение f — вложение, если

1) f — погружение,

2) f определяет гомеоморфизм M и $f(M)$.

Задача 15. *Доказать, что если f — погружение и M компактно, и, кроме того, f — биекция между M и $f(M)$, то f — вложение.*

Пусть M — гладкое многообразие. Существует ли вложение (погружение) M в $\mathbb{R}^N$?

Утверждение 20. *Существует такая функция $f(t)$, что $f(t) = 0$ при $t \leqslant 0$, $f(t) > 0$ при $t > 0$ и $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть следующую функцию:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0. \end{cases}$$

□

Утверждение 21. *Пусть $0 < a < b$. Существует такая $g(t)$, что*

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \leqslant a, \\ 0, & t \geqslant b. \end{cases}, \quad 0 < g < 1,\ a < t < b.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть следующую функцию:

$$g(t) = \frac{f(b-t)}{f(b-t) + f(t-a)}.$$

Очевидно, что оба свойства из условия выполнены ☐

Утверждение 22. *Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < a < b$. Существует такая функция $h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, что*

$$\begin{cases} h(x) = 1, & |x - x_0| \leqslant a, \\ h(x) = 0, & |x - x_0| \geqslant b, \\ 0 < h(x) < 1; & a < |x - x_0| < b. \end{cases}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть функцию

$$h(x) = g(|x - x_0|),$$

где функция g — из предыдущего утверждения. ☐

Теорема о вложении гладкого многообразия

Теорема 16. *Для всякого гладкого компактного многообразия M существует вложение M в $\mathbb{R}^N$ для некоторого N.*

Доказательство. Рассмотрим точку $P \in M$ и координатный гомеоморфизм

$$\varphi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n.$$

Пусть $|x - x_0| \leqslant b$, $x_0 = \varphi(P)$. Построим срезающую функцию в ее окрестности

$$H_P(Q) = \begin{cases} h(\varphi(Q)), & Q \in U \\ 0, & Q \notin U. \end{cases}$$

Рассмотрим области

$$V_P = \varphi^{-1}(x \in \mathbb{R}^n :\ |x - x_0| < a),$$
$$W_P = \varphi^{-1}(x \in \mathbb{R}^n :\ |x - x_0| < b).$$

Очевидно, что V_P открытые множества. Так как P пробегает все M, то $\bigcup_P V_P$ — открытое покрытие M. Выберем конечное число точек $P_1, \ldots, P_m$ и связанные с ними множества

$$V_1, \ldots, V_m,$$
$$W_1, \ldots, W_m$$

и функции

$$H_1, \ldots, H_m.$$

Понятно, что

$$M = \bigcup_{j=1}^{n} V_j.$$

В каждом W_j определены координатные гомеоморфизмы φ_j

$$\varphi_j : W_j \longrightarrow \text{ шар},$$

или, что эквивалентно, в каждом W_j определены координаты W_j.

Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $N = m(n+1)$, $f(Q) \in \mathbb{R}^{m(n+1)}$

$$f(Q) = \begin{pmatrix} H_1(Q)\varphi_1(Q) \\ \vdots \\ H_m(Q)\varphi_m(Q) \\ H_1(Q) \\ \vdots \\ H_m(Q) \end{pmatrix}$$

1) Проверим, что отображение f — погружение. Рассмотрим точку $Q \in M$, она попадает в одну из областей $Q \in V_j$ с координатами $x_j^1, \ldots, x_j^n$. Посмотрим на один из столбцов

$$H_j(Q')\varphi(Q') = \begin{pmatrix} x_j^1 \\ \vdots \\ x_j^n \end{pmatrix},$$

где Q' — точка из некоторой окрестности Q. Посчитаем матрицу Якоби отображения f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \vdots \\ E \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Матрица E имеет размеры $n \times m$. Сама матрицы Якоби имеет размерность $n \times (m(n+1))$. Следовательно, для любой точки Q ранг матрицы Якоби f равен n. Значит, f — погружение.

2) Докажем, что f — вложение. Надо доказать, что если $f(Q) = f(Q') \Longrightarrow Q = Q'$. Или, наоборот, если $Q \neq Q' \Longrightarrow f(Q) \neq f(Q')$.

   - Если $Q, Q' \in V_j$. То

$$H_j(Q)\varphi_j(Q) = x_j(Q),$$
$$H_j(Q')\varphi_j(Q') = x_j(Q'),$$

   и $x_j(Q) \neq x_j(Q')$.

- Если $Q \in V_j$, а $Q' \notin V_j$. Тогда $H_j(Q) = 1$, а $H_j(Q') \neq 1$. Утверждение доказано.

$\square$

Теорема 17 (Слабая теорема Уитни)**.** *Для любого компактного гладкого многообразия существует погружение M в $\mathbb{R}^{2n}$ и вложение в $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Теорема 18 (Сильная теорема Уитни)**.** *Для любого гладкого многообразия существует погружение M в $\mathbb{R}^{2n}$ и вложение в $\mathbb{R}^{2n}$.*

Теорема 19. *Всякое n–мерное многообразие погружается в $\mathbb{R}^{2n-\alpha}$, где α — число единиц в двоичной записи числа n.*

Лекция 13

13. Векторное расслоение. Геометрия гладких многообразий

Касательное расслоение

Рассмотрим произвольное гладкое многообразие M^n. Тогда можно построить касательное векторное пространство $T_P M$ для точки P.

Рассмотрим множество, которое состоит из пар

$$TM = \{P; \xi\},$$

где $p \in M$, $\xi \in T_P M$.

Определение 79. Множество TM называется касательным расслоением многообразия M. Его размерность равна $2n$.

Рассмотрим на многообразии атлас $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Рассмотрим карту U_α с локальными координатами $x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n$. Эта карта порождает карту на множестве TM:

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

$$(P, \xi) = (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n, \xi_\alpha^1, \ldots, \xi_\alpha^n).$$

Как устроены функции склейки?

$$U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta},$$

с координатами x_α и x_β соответственно, то

$$x_\beta = x_\beta(x_\alpha)$$

$$\xi_\beta^i = \frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j} \xi_\alpha^j.$$

Векторное расслоение

Итак, если у нас имеется произвольное гладкое и многообразие, то мы можем соорудить такое с размерностью в два раза большей многообразие, которое называется касательное расслоение. Оно индуцирует, на самом деле, целый класс многообразий, который нам будет встречаться в разных вариантах.

Эти многообразия называются векторными расслоениями. Если мы посмотрим на функции склейки или на выражение для замены координат, то заметим особенность этих карт: особенность такая, что часть координат в наших картах «бегает» по векторному пространству $\mathbb{R}^n$ и при этом когда мы пишем функции склейки, то координаты которые бегают по векторному пространству друг через друга выражаются линейно. Другими словами, если мы фиксируем точку P, а меняем вектор

ξ, то мы движемся в касательном пространстве, значит этот векторξ меняется в касательном пространстве которое есть векторное пространство.

Касательное расслоение неформально можно представлять так: у нас имеется многообразие и над каждой точкой этого многообразия висит векторное пространство; это векторное пространство является касательным пространством к многообразию в этой точке. То есть есть подлежащее многообразие, она называется базой и над каждой точкой его висит еще некоторое векторное пространство; все векторные пространства одной и той же размерности и называются слоями.

Определение 80. n-мерное векторное расслоение над гладким многообразием M^n это набор следующих данных:

1) многообразие E^{n+m}, у которого размерность —- это сумма размерностей m и n, которое называется тотальным пространством.

2) гладкое отображение
$$\pi : E^{n+m} \longrightarrow M^n,$$
которое называется проекцией.

3) структура расслоения. Что означает «M имеет структуру расслоения»? Это означает, что на M имеется атлас $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, который обладает следующими свойствами:

   - Все, что «висит» над каждой картой устроено как декартово произведения этой карты на векторное пространство
   $$\pi^{-1}(U_\alpha) \simeq U_\alpha \times \mathbb{R}^m.$$
   Следовательно, в каждом таком множестве можно ввести координаты (x_α, ξ_α). Стоит подчеркнуть, что мы в евклидовом пространстве фиксируем линейную структуру.

   - если у нас есть две карты
   $$U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta},$$
   то в этих картах у нас имеются координаты x_α в одной карте и соответствующие координаты ξ_α в $\mathbb{R}^m$, а в другой карте у нас имеются координаты x_β и соответствующие координаты ξ_β в $\mathbb{R}^m$. Тогда заданы функции, которые линейные координаты ξ_β выражают через линейные координаты ξ_α:
   $$x_\beta = x_\beta(x_\alpha),$$
   $$\xi^j_\beta = T^i_j(x_\alpha)\xi^j_\alpha.$$

   Если фиксирована точка $P \in M$, то $\pi^{-1}(P) = \mathbb{R}^m$ — слой над P.

Примеры векторных расслоений

Пример 4. Рассмотрим прямой круговой цилиндр в $\mathbb{R}^3$ — одномерное векторное расслоение над S^1, тогда база — это окружность, а слой — это прямая проходящая через точку окружности. Весь этот цилиндр есть декартово произведения окружности на прямую

$$E = S^1 \times \mathbb{R}.$$

Все свойства, которые описаны выше, здесь выполнены, но тут координаты на прямой могут быть выбраны единой вообще для для всех точек нашей окружности, то есть функции склейки тождественные по второй координате.

Пример 5. Рассмотрим декартово произведение какого-то гладкого многообразия M размерности n на евклидово пространство размерности m:

$$E = M^n \times \mathbb{R}^m.$$

Размерность самого пространства расслоения $n+m$ — размерность базы плюс размерность слоя. Мы можем тогда в этом евклидовом пространстве размерности m раз и навсегда фиксировать координаты, а значит просто каждый вектор ξ задавать набором координат. В этом случае функции склейки все будут тождественны, потому что у нас все координаты едины в слоях — одинаковые для всех точек многообразия.

$$T_j^i(x_\alpha) = \delta_j^i$$

— это просто символы Кронекера единичной матрицы. Такие векторное расслоения называются *тривиальными*.

Пример 6. Касательное расслоение TM к M — n–мерное векторное расслоение над M^n.

Пример 7. Рассмотрим множество $T_P^*M = (P, v)$, $P \in M$, $\alpha \in T_P^*M$, если у нас есть две карты

$$U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta},$$

то в этих картах у нас имеются координаты x_α в одной карте и соответствующие координаты ξ_α в $\mathbb{R}^m$, а в другой карте у нас имеются координаты x_β и соответствующие координаты ξ_β в $\mathbb{R}^m$. Тогда заданы функции, которые линейные координаты ξ_β выражают через линейные координаты ξ_α:

$$x_\beta = x_\beta(x_\alpha),$$

$$\xi_\beta^j = T_j^i(x_\alpha)\xi_\alpha^j.$$

Рассмотрим базисы

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}$$

— базис в T_PM, dx_α^i — базис в T_P^*M. Вектор v имеет вид

$$v = v_i^\alpha dx_\alpha^i.$$

Пример 8. Рассмотрим гладкое n–мерное многообразие M и рассмотрим такое множество VM (n^{p+q}–мерное векторное расслоение), которое состоит из пары $\{P; S\}$, где S — (p, q)–тензор в $T_P M$, размерность n^{p+q}.

Как устроены координаты? Если есть карты $\{U, x^i\}$, $U \times \mathbb{R}^{n^{p+q}}$.

Пример 9. Пусть M — это n–мерная поверхность в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$. Это частный случай гладкого многообразия. Это гладкое многообразие, которое само может быть гомеоморфно области в евклидовом пространстве, на нем можно ввести глобальные координаты, то есть она задается параметрическими уравнениями $x = r(u^1, \dots, u^n)$.

Если у нас имеется такая поверхность, то с ней связано как минимум три векторных расслоения:

1) касательное расслоение $TM = \{P, \xi\}$, где ξ — касательный векторы;

2) нормальное расслоение $N_P M = T_P M^{\perp}$;

3) $WM = \{P, \zeta\}$, где ζ — это произвольный N–мерный вектор, приложенный в точке P, то есть мы в точку P переносим начала координат в нашем объемлющем пространстве и рассматриваем все векторы которые выходят из точки P.

Геометрия гладкого многообразия

Пусть у нас есть гладкое n–мерное многообразие M. Поскольку его можно реализовать как поверхность в евклидовом пространстве, то понятно, что внутренняя дифференциальная геометрия на нем должна быть очень похожа на внутреннюю дифференциальную геометрию в евклидовом пространстве.

Давайте вспомним из каких элементов состояла эта внутренняя геометрия на поверхностях. Она состояла, по сути дела, из одного элемента, но если говорить чуть–чуть более внимательно то из двух, на самом деле друг с другом связанных:

1) $g_{ij}(u)$ — первая квадратичная форма или первая фундаментальная форма. Как только мы ее задали, мы сразу же понимаем, как считать длины кривых, углы между кривыми, углы между касательными векторами и так далее.

2) ∇_ξ — оператор ковариантного дифференцирования векторных полей. Этот объект определял параллельный перенос, помимо самого дифференцирования, геодезические, а кроме того, с этим дифференцированием был связан объект, который описывал внутренние искривления поверхности и который назывался тензором кривизны Римана.

В чем на самом деле смысл общей ситуации: для того чтобы определять эти объекты на гладких многообразиях, мы должны рассматривать либо многообразие, на котором задан аналог первой фундаментальной формы, либо многообразие на котором задан оператор ковариантного дифференцирования. Это две разные структуры, которые можно определять на многообразиях, но при этом между ними так же, как и в случае с поверхностями в евклидовом пространстве есть связь, которая состоит в том, что если мы потребуем некоторую согласованность между этими двумя объектами, то тогда по аналогу первой фундаментальной формы восстанавливается аналог операции ковариантного дифференцирования.

Определение 81. Гладкое векторное поле на многообразии M — это соответствие, сопоставляющее каждой точке $P \in M$ касательный вектор $\xi(P) \in T_P M$ в этой точке, гладко зависящий от точки P.

Гладкая зависимость от точки означает следующее: если мы рассмотрим произвольную карту, содержащую точку P, то есть рассмотрим произвольные координаты $x^1, \ldots, x^n$, которые заданы в окрестности точки P, то значит эти координаты порождают базис в каждой касательной плоскости, и, стало быть, каждый касательный вектор задается своим набором координат. Поскольку этот вектор задан в каждой точке P, то для каждого набора координат у нас имеются наборы координат $\xi = \{\xi^i(x)\}$. Эти функции должны быть гладкими функциями для произвольной системы локальных координат x.

Определение 82. Аналогично определяется гладкое тензорное поле. Это тоже соответствие, сопоставляющее каждой точке P из M^n (p, q)–тензор $S(P)$ в касательной плоскости, гладко зависящий от точки. Гладкая зависимость опять определяется точно также.

Риманова метрика на гладком многообразии

Определение 83. Риманова метрика на многообразии M — гладкое $(0, 2)$–тензорное поле g, такое что для всякой точки $P \in M$ билинейная форма g симметрична и положительна.

По–другому: риманова метрика — это соответствие, которое каждой точки P сопоставляет евклидову структуру в касательной плоскости.

$$g_{ij}(x) = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = (\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}).$$

Пример 10. Рассмотрим поверхность в евклидовом пространстве. В качестве римановой метрики можно взять первую фундаментальную форму.

Пример 11. Пусть есть многообразие M^n и вложение (или погружение) в евклидово пространство

$$f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^N.$$

Тогда дифференциал

$$d_P f : T_P M \longrightarrow \mathbb{R}^N.$$

И так как в $\mathbb{R}^N$ уже задано скалярное произведение, то естественным образом по дифференциалу определяется скалярное произведение и в $T_P M$. Получается риманова метрика. Такая риманова метрика называется *индуцированной*.

Следовательно, на вопрос: на всяком ли многообразии существует риманова метрика, ответ будет положительный, так как всякое многообразие можно вложить в евклидово пространство.

Определение 84. Риманово многообразие — это пара (M, g), где g — это риманова метрика на M.

Аффинная связность

Пусть M — поверхность в евклидовом пространстве. Тогда для любой точки P был определен оператор

$$\nabla_\eta,$$

где $\eta \in T_P M$. Каждому векторному полю сопоставлялся касательный вектор.

Напомним свойства ковариантного дифференцирования:

1) Верно равенство
$$\nabla_\eta(c\xi + \widetilde{c}\widetilde{\xi}) = c\nabla_\eta \xi + \widetilde{c}\nabla_\eta \widetilde{\xi},$$
где $c, \widetilde{c} \in \mathbb{R}$.

2) Верно равенство
$$\nabla_{c\eta + \widetilde{c}\widetilde{\eta}}\xi = c\nabla_\eta \xi + \widetilde{c}\nabla_{\widetilde{\eta}}\xi.$$

3) Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция
$$\nabla_\eta(f\xi) = f(P)\nabla_\eta \xi + \partial_\eta f \cdot \xi(P),$$
где
$$\partial_\eta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j}\eta_j$$
— производная f вдоль η.

4) Пусть ξ, $\widetilde{\xi}$ — векторные поля на M.
$$\partial_\eta(\xi, \widetilde{\xi}) = (\nabla_\eta \xi, \widetilde{\xi}) + (\xi, \nabla_\eta \widetilde{\xi}).$$

Эти свойства можно аксиоматизировать для произвольного многообразия.

Определим, что такое производная вдоль вектора.

Определение 85. Рассмотрим поверхность M, функцию f, гладкую в окрестности точки P , вектор $\eta \in T_P M$.

Определим, что такое производная f вдоль вектора η. Пусть $\gamma(t)$ — гладкая кривая, такая что

$$\gamma(0) = P, \quad \dot{\gamma}(0) = \eta.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = f \circ \gamma = f(\gamma(t)).$$

Производная f вдоль η имеет вид

$$\partial_\eta(f) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi(t).$$

Задача 16. *Доказать, что*

$$\partial_\eta(f) = \eta^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

То есть производная не зависит от выбора системы координат.

Определение 86. Будем говорить, что на многообразии M задана аффинная связность, если для любой точки P и вектора $\eta \in T_P M$ определено отображение

$$\nabla_\eta : v \longrightarrow T_P M,$$

причем выполнены свойства 1–4.

Лекция 14

14. Аффинная связность

Аффинная связность на многообразии

Рассмотрим многообразие M^n с римановой метрикой и аффинной связностью.

Определение 87. Будем говорить, что на многообразии M задана аффинная связность, если для любой точки P и вектора $\eta \in T_P M$ определено отображение

$$\nabla_\eta : v \longrightarrow T_P M,$$

причем выполнены свойства 1–3.

Напомним свойства ковариантного дифференцирования:

1) Верно равенство
$$\nabla_\eta(c\xi + \widetilde{c}\widetilde{\xi}) = c\nabla_\eta \xi + \widetilde{c}\nabla_\eta \widetilde{\xi},$$
где $c, \widetilde{c} \in \mathbb{R}$.

2) Верно равенство
$$\nabla_{c\eta+\widetilde{c}\widetilde{\eta}}\xi = c\nabla_\eta \xi + \widetilde{c}\nabla_{\widetilde{\eta}}\xi.$$

3) Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция
$$\nabla_\eta(f\xi) = f(P)\nabla_\eta \xi + \partial_\eta f \cdot \xi(P),$$
где
$$\partial_\eta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j}\eta_j$$
— производная f вдоль η.

Если заданы локальные координаты x^i, то можем определить канонический базис $\partial/\partial x^i$. Тогда можно найти ковариантную производную по базисному вектору

$$\nabla_{\partial/\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma^i_{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Определение 88. $\Gamma^i_{jk}(x)$ — коэффициенты связности или символы Кристоффеля.

Пусть

$$\nabla_\eta \xi = (\nabla_\eta \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} = \xi^i \nabla_\eta \frac{\partial}{\partial x^i} + \partial_\eta(\xi^i)\frac{\partial}{\partial x^i} =$$
$$= \xi^i \eta^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} = \eta^j \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\Gamma^i_{jk}\xi^k\right)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Преобразование символов Кристоффеля

Символы Кристоффеля не являются тензорами!
Пусть есть две системы координат: x^i и $x^{i'}$. Тогда имеют место

$$\Gamma^i_{jk}(x), \quad \Gamma^{i'}_{j'k'}(x')$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{j'}}} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} = \Gamma^{i'}_{j'k'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{j'}}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{j'}}} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^k} =$$
$$= \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Итак,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{j'}}} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} = \Gamma^{i'}_{j'k'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \Gamma^i_{jk} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

В итоге получаем

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^i_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}.$$

Операции, определяемые с помощью аффинной связности

С помощью аффинной связности можно производить следующие операции:

1) Ковариантные производные векторных полей.

2) Параллельный перенос касательных векторов вдоль кривых.

   Определение 89. Гладкое семейство касательных векторов к M вдоль кривой γ — соответствие, сопоставление каждой точке t касательный вектор $\xi(t) \in T_{\gamma(t)}M$, гладко зависит от t.

   $$\xi(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) r_i(u(t))$$

   Определение 90. Семейство $\xi(t)$ — параллельно вдоль γ, если $\nabla_{\dot\gamma}\xi = 0$.

   Уравнение параллельного переноса:

   $$\dot\xi_i + \Gamma^i_{jk} \xi_k \dot x^j = 0.$$

3) Геодезические

Определение 91. Кривая γ называется геодезической, если

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0.$$

$$\begin{cases} \ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}(x(t))\dot{x}^j\dot{x}^k = 0 \\ x^i(t_0) = x^i_0 \\ \dot{x}^i(t_0) = \xi^i_0 \end{cases}$$

4) Ковариантные производные произвольных тензорных полей. Пусть на многообразии задана аффинная связность.

Пусть α — $(0,1)$–тензорное поле (1–форма); ξ — векторное поле; $\alpha(\xi)$ — гладкая функция

$$\alpha(\xi) = \alpha_j(x)\xi^j(x).$$

Пусть $\eta \in T_P M$. Как определить

$$\nabla_\eta\alpha = ?$$

Определение 92. Ковариантная производная от 1–формы α вдоль η — 1–форма $\nabla_\eta\alpha$, такая что для любого векторного поля ξ

$$(\nabla_\eta\alpha)(\xi) = \partial_\eta\alpha(\xi) - \alpha(\nabla_\eta\xi).$$

а) Верно равенство

$$\nabla_\eta(c\alpha + \widetilde{c}\widetilde{\alpha}) = c\nabla_\eta\alpha + \widetilde{c}\nabla_\eta\widetilde{\alpha},$$

где $c, \widetilde{c} \in \mathbb{R}$.

б) Верно равенство

$$\nabla_{c\eta+\widetilde{c}\widetilde{\eta}}\alpha = c\nabla_\eta\alpha + \widetilde{c}\nabla_{\widetilde{\eta}}\alpha.$$

в) Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция

$$\nabla_\eta(f\alpha) = f(P)\nabla_\eta\alpha + \partial_\eta f \cdot \alpha(P),$$

где

$$\partial_\eta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j}\eta_j$$

— производная f вдоль η.

$$(\nabla_\eta\alpha)_i = (\nabla_\eta\alpha)(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \partial_\eta\alpha_i(x) - \alpha\left(\nabla_\eta\frac{\partial}{\partial x^i}\right) =$$

$$= \eta^j\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j} - \eta^j\alpha\left(\nabla_{\partial/\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \eta^j\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j} - \eta^j\alpha\left(\Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \eta^j\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ji}\alpha_k\right).$$

Итак,

$$\nabla_\eta\alpha = \eta^j\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ji}\alpha_k\right)dx^i.$$

Теперь можно определить ковариантную производную тензора:

Определение 93. Ковариантная производная (p, q)–тензорного поля T вдоль η — (p, q)–тензорное поле $\nabla_\eta T$, такое что для любого набора векторных полей $\xi_1, \ldots, \xi_q$ и 1–формы выполнено следующее:

$$\partial_\eta(T(\alpha, \xi)) = (\nabla_\eta T)(\alpha, \xi) + \sum_{s=1}^{p} T(\alpha^1, \ldots, \nabla_\eta \alpha^s, \ldots, \alpha^p, \xi) + \\ + \sum_{s=1}^{q} T(\alpha, \xi_1, \ldots, \nabla_\eta \xi_s, \ldots, \xi_q).$$

Свойства связности

Определение 94. Связность симметрична (связность без кручения), если для всякой локальной системы координат

$$\Gamma^i_{jk}(x) = \Gamma^i_{kj}(x).$$

Лекция 15

15. Риманова связность

Кручение векторных полей

Рассмотрим многообразие с аффинной связностью. Пусть ξ, η — векторные поля.

Определение 95. Кручение полей ξ и η определяется следующим образом

$$\Omega(\xi, \eta) = \nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi - [\xi, \eta].$$

Это алгебраический оператор.

Утверждение 23. *Верно следующее*

$$\Omega(f\xi, \eta) = f\Omega(\xi, \eta).$$

Доказательство. Имеет место цепочка равенств:

$$\Omega(f\xi, \eta) = \nabla_{f\xi}\eta - \nabla_\eta f\xi - [f\xi, \eta] = f\nabla_\xi \eta - f\nabla_\eta \xi - \xi\partial_\eta(f) - f[\xi, \eta] + \xi\partial_\eta(f) = f\Omega(\xi, \eta).$$

□

Следствие 4. *Операция кручения определяет тензорное поле типа* $(1, 2)$

$$\widehat{\Omega}(\alpha, \xi, \eta) = \alpha(\Omega(\xi, \eta))$$

— тензор кручения связности ∇.

Зависимость аффинной связности от кручения

Утверждение 24. *(∇ симметрична)* $\Longleftrightarrow$ *($\widehat{\Omega} \equiv 0$).*

Доказательство. Пусть Ω^k_{ij} — координаты $\widehat{\Omega}$. Тогда имеем

$$\Omega(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \Omega^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k},$$

$$\nabla_{\partial/\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\partial/\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} - [\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k} = (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

□

Замечание 13. Связность симметрична $\Longleftrightarrow$

$$\nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi = [\xi, \eta].$$

Определение 96. Связность ∇ согласована с метрикой g на римановом многообразии с аффинной связностью, если для любых ξ, η и для любого касательного вектора ζ выполнено

$$\xi, \eta \longleftarrow (\xi, \eta) = g(\xi, \eta),$$
$$\partial_\zeta(g(\xi, \eta)) = g(\nabla_\zeta \xi, \eta) + g(\xi, \nabla_\xi \eta) + (\nabla_\zeta g)(\xi, \eta).$$

Замечание 14. Связность согласована с римановой метрикой, если любого касательного вектора ζ

$$\nabla_\zeta g = 0.$$

Теорема 20. *На любом римановом многообразии существует единственная связность, такая что*

1) *связность симметрична,*

2) *связность согласована с римановой метрикой.*

Доказательство. Докажем второй пункт. Условие согласованности:

$$\partial_\zeta(g(\xi,\eta)) = g(\nabla_\zeta\xi,\eta) + g(\xi,\nabla_\xi\eta).$$

Рассмотрим базисные векторы

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \eta = \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \zeta = \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

$$(\xi,\eta) = g_{ij}(x).$$

Итак,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = (\Gamma^s_{ki}\frac{\partial}{\partial x^s}, \frac{\partial}{\partial x^j}) + (\frac{\partial}{\partial x^i}, \Gamma^s_{kj}\frac{\partial}{\partial x^s}) = \Gamma^s_{ki}g_{sj} + \Gamma^s_{kj}g_{is},$$

$$\Gamma_{ij,k} = \Gamma^s_{ij}g_{sk}.$$

Тогда

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i},$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{ij,k} + \Gamma_{ik,j},$$

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = \Gamma_{jk,i} + \Gamma_{ji,k}.$$

Заметим, что связность симметрична. Сложим последние два равенства и вычтем из их суммы третье

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right).$$

Вернемся обратно к символам Кристоффеля

$$\Gamma_{ij,k}g^{km} = \Gamma^m_{ij}.$$

Тогда получим

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2}g^{km}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right).$$

Докажем существование такой связности. Рассмотрим многообразие с картами $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ с фиксированной римановой метрикой g^α_{ij} для каждой карты (в каждой карте фиксированы координаты).

$$\nabla^\alpha_\eta\xi = \eta^j\left(\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j_\alpha} + \Gamma^k_{ij}\xi^k\right)\frac{\partial}{\partial x^i_\alpha}.$$

Это, очевидным образом, связность для каждой отдельной карты.

Определим связность для всего многообразия. Пусть $P \in M$, $\exists \alpha : P \in U_\alpha$, $\forall \eta \in T_P M$ и $\forall \xi$
$$\nabla_\eta \xi = \nabla_\eta^\alpha \xi.$$
Проблема могла возникнуть на пересечении карт $U_\alpha = U_\beta$, где
$$\nabla_\eta^\alpha \xi = \nabla^\beta \eta \xi.$$

□

Риманова связность

Определение 97. Риманова связность — это симметричная связность, согласованная с римановой метрикой.

Определение 98. Пусть M — поверхность в $\mathbb{R}^N$. Тогда в качестве g — первая фундаментальная форма, а
$$\nabla_\eta \xi = \prod\left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\right).$$

Для римановой связности естественным образом определяются:

1) Ковариантное дифференцирование тензорных полей.

2) Параллельный перенос касательных векторов вдоль кривых — сохраняет скалярное произведение.

3) Геодезические —
   - вектор скорости имеет постоянную длину,
   - при параллельном переносе вдоль геодезических сохраняет угол между геодезической и переносимым вектором,
   - экспоненциальное отображение, нормальные координаты,
   - геодезические сферы,
   - лемма Гаусса,
   - геодезические — локально кратчайшая, и наоборот,
   - теорема Хопфа-Ринова для линейно связных римановых многообразий.

4) Тензор Римана.
$$R(\xi, \eta)\zeta = (\nabla_\xi \nabla_\eta - \nabla_\eta \nabla_\xi - \nabla_{[\xi,\eta]})\zeta.$$
Он, вообще говоря, определен для любой симметричной связности. Это явным образом выводится из симметрий Римана:

Теорема 21 (симметрия тензора Римана). *a) $R(\xi, \eta) = -R(\eta, \xi)$. Для любой связности* *б)* $R(\xi,\eta)\zeta + R(\eta,\zeta)\xi + R(\zeta,\xi)\eta = 0$ *(тождество Бьянки). Для симметричных связностей.*

в) $(R(\xi,\eta)\zeta,\omega) = -(\zeta, R(\xi,\eta)\omega)$. *Для римановых связностей.*

$$(R(\xi,\eta)\zeta,\omega) = ((\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)\frac{\partial}{\partial u^k}\frac{\partial}{\partial u^s})$$

г) $(R(\xi,\eta)\zeta,\omega) = (R(\zeta,\omega)\xi,\eta)$. *Для римановых связностей.*

Линейные связности в векторных расслоениях

Напомним определение векторного расслоения:

Определение 99. n-мерное векторное расслоение над гладким многообразием M^n это набор следующих данных:

1) многообразие E^{n+m}, у которого размерность —- это сумма размерностей m и n, которое называется тотальным пространством.

2) гладкое отображение
$$\pi : E^{n+m} \longrightarrow M^n,$$
которое называется проекцией.

3) структура расслоения. Что означает «M имеет структуру расслоения»? Это означает, что на M имеется атлас $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, который обладает следующими свойствами:

   - Все, что «висит» над каждой картой устроено как декартово произведения этой карты на векторное пространство
   $$\pi^{-1}(U_\alpha) \simeq U_\alpha \times \mathbb{R}^m.$$
   Следовательно, в каждом таком множестве можно ввести координаты (x_α, ξ_α). Стоит подчеркнуть, что мы в евклидовом пространстве фиксируем линейную структуру.

   - если у нас есть две карты
   $$U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta},$$
   то в этих картах у нас имеются координаты x_α в одной карте и соответствующие координаты ξ_α в $\mathbb{R}^m$, а в другой карте у нас имеются координаты x_β и соответствующие координаты ξ_β в $\mathbb{R}^m$. Тогда заданы функции, которые линейные координаты ξ_β выражают через линейные координаты ξ_α:
   $$x_\beta = x_\beta(x_\alpha),$$
   $$\xi^j_\beta = T^i_j(x_\alpha)\xi^j_\alpha.$$

   Если фиксирована точка $P \in M$, то $\pi^{-1}(P) = \mathbb{R}^m$ — слой F над P.

Определение 100. Гладкое сечение векторного расслоения E — гладкое отображение $\xi : M \longrightarrow E$, такое что $\pi_0\xi(P) = P$ (т.е. $\xi(P) \in F_P$).

Пример 12. Векторное поле на M — слоение TM.

Определение 101. В векторном расслоении E задана линейная связность, если для любой точки $P \in M$ и для любого $X \in T_PM$ задано отображение

$$\nabla_X \Gamma(E) \longrightarrow F_P,$$

гладко зависящее от P, причем

1) $\nabla_X(c\xi + \widetilde{c}\widetilde{\xi}) = c\nabla_X\xi + \widetilde{c}\nabla_X\widetilde{\xi}$, $c, \widetilde{c} \in \mathbb{R}$.

2) $\nabla_{cX+\widetilde{c}\widetilde{X}}\xi = c\nabla_X\xi + \widetilde{c}\nabla_{\widetilde{X}}\xi$.

3) Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция

$$\nabla_X(f\xi) = f(P)\nabla_X\xi + \partial_X f \cdot \xi(P),$$

где

$$\partial_X f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j} X_j$$

— производная f вдоль η.

Рассмотрим координаты на базе $(x^1, \ldots, x^n)$, выберем $e_1(x), \ldots, e_m(x)$ — базис в слоях. Тогда

$$\xi = \xi^i(x)e_i(x),$$
$$X = X^i e_i.$$

Запишем в координатах дифференцирование

$$\nabla_X\xi = \nabla_X\xi^p(x)e_p = \xi^p\nabla_X e_p + e_p\partial_X\xi^p(x) = X^j\frac{\partial\xi^p}{\partial x^j}e_p + \xi^p X^j \nabla_{\partial/\partial x^j} e_p,$$

$$\nabla_{\partial/\partial x^j} e_p = \Gamma^q_{jp} e_q,$$

$$\nabla_X\xi = \nabla_X\xi^p(x)e_p = \xi^p\nabla_X e_p + e_p\partial_X\xi^p(x) = X^j(\frac{\partial\xi^p}{\partial x^j} + \Gamma^q_{jp}\xi^q)e_p.$$

Лекция 16

16. Внешняя геометрия подмногообразий

Гладкое семейство вектор слоев над кривой

Определение 102. В векторном расслоении E задана линейная связность, если для любой точки $P \in M$ и для любого $X \in T_PM$ задано отображение

$$\nabla_X \Gamma(E) \longrightarrow F_P,$$

гладко зависящее от P, причем

1) $\nabla_X(c\xi + \widetilde{c}\widetilde{\xi}) = c\nabla_X\xi + \widetilde{c}\nabla_X\widetilde{\xi}$, $c, \widetilde{c} \in \mathbb{R}$.

2) $\nabla_{cX+\widetilde{c}\widetilde{X}}\xi = c\nabla_X\xi + \widetilde{c}\nabla_{\widetilde{X}}\xi$.

3) Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция

$$\nabla_X(f\xi) = f(P)\nabla_X\xi + \partial_X f \cdot \xi(P),$$

где

$$\partial_X f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j} X_j$$

— производная f вдоль η.

Рассмотрим координаты на базе $(x^1, \ldots, x^n)$, выберем $e_1(x), \ldots, e_m(x)$ — базис в слоях. Тогда

$$\xi = \xi^i(x)e_i(x),$$
$$X = X^i e_i.$$

Запишем в координатах дифференцирование

$$\nabla_X\xi = \nabla_X\xi^p(x)e_p = \xi^p\nabla_X e_p + e_p\partial_X\xi^p(x) = X^j\frac{\partial\xi^p}{\partial x^j}e_p + \xi^p X^j\nabla_{\partial/\partial x^j}e_p,$$

$$\nabla_{\partial/\partial x^j}e_p = \Gamma^q_{jp}e_q,$$

$$\nabla_X\xi = \nabla_X\xi^p(x)e_p = \xi^p\nabla_X e_p + e_p\partial_X\xi^p(x) = X^j(\frac{\partial\xi^p}{\partial x^j} + \Gamma^q_{jp}\xi^q)e_p.$$

Рассмотрим на базе кривую $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$.

Определение 103. Гладкое семейство векторов слоев над γ — соответствие, сопоставляющее каждой точке $t \in \gamma$ вектор $\xi(t) \in F_{\gamma(t)}$, гладко зависящий от t.

Кривая задается следующим образом: $\gamma : x^i = x^i(t)$,

$$\xi(t) = \xi^p(t)e_p(x(t)).$$

Определение 104. Гладкое семейство $\xi(t)$ параллельно вдоль кривой γ, если

$$\nabla_{\dot\gamma}\xi \equiv 0.$$

Замечание 15.

$$\dot\xi^P + \Gamma^p_{jq}(x(t))\dot x^j \xi^q = 0.$$

Следствие 5. *Для любой гладкой кривой $\gamma : [0,T] \longrightarrow M$ и для любого вектора $\xi_0 \in F_{\gamma(0)}$ существует единственное параллельное над γ семейство $\xi(t)$, такое что $\xi(0) = \xi_0$.*

Пример 13. Пусть $E = M \times \mathbb{R}^m$. Сечения ξ — векторные функции. Связность можно определить следующим образом

$$\nabla_X\xi = \begin{pmatrix} \partial_X(\xi^1) \\ \vdots \\ \partial_X(\xi^m) \end{pmatrix}$$

— тривиальная связность.

Оператор кривизны на векторном расслоении

Пусть есть векторное расслоение E и связность ∇, X, Y — векторные поля на M.

Определение 105. Оператор кривизны, соответствующий X и Y — это

$$R(X,Y)\xi = (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})\xi.$$

Пространство сечений традиционно обозначается $\Gamma(E)$.

Задача 17. *Доказать, что отображение R $\mathcal{F}$–линейно по X, Y, ξ.*

Кроме того, верно равенство

$$R(X,Y)\xi = R^q_{ij,p}(x)X^iY^j\xi^p e_q,$$

$$R(X,Y) = -R(Y,X).$$

Тождество Бьянки не выполняется.

Определение 106. Векторное расслоение E называется евклидовым, если для любой $P \in M$ в F_P задано скалярное произведение, гладко зависящее от P.

Определение 107. Связность называется евклидовой, если для любых $\xi, \eta \in \Gamma(E)$ и для любых $P \in M$, $X \in T_PM$ верно равенство

$$\partial_X(\xi,\eta) = (\nabla_X\xi,\eta) + (\xi,\nabla_X\eta).$$

Внешняя геометрия подмногообразий

Обозначим через Q риманово объемлющее многообразие. Пусть $\dim Q = N$. Для него метрика и связность соответственно g^Q и ∇^Q.

Обозначим через M — n–мерное многообразие ($n < N$), вложение $f : M \longrightarrow Q$.

Рассмотрим произвольную точку $P \in M$ и касательные плоскости T_PM и T_PQ. Нормальное пространство к M в точке P — это

$$N_PM = (T_PM)^{\perp}.$$

Пусть g^M — риманова метрика на M, индуцированная из Q.

Определение 108. Пара (M, f) — подмногообразие в Q.

Есть три векторных расслоения:

1) $TM = (P, X)$, $P \in M$, $X \in T_PM$.

2) Нормальное расслоение NM, (P, ξ), $P \in M$, $\xi \in N_PM$

$$m = \dim N_PM = N - n.$$

3) Q–расслоение, (P, ξ), $P \in M$, $\xi \in T_PQ$

$$T_PQ = T_PM \oplus N_PM.$$

Обозначим через g^N евклидову структуру в N_PM.

Пусть ∇^Q — риманова связность на Q. Пусть Y — касательное векторное поле на M. Пусть $X \in T_PM$.

$$\nabla^Q_X Y = \Pi(\nabla^Q_X Y) + b(X, Y),$$

где Π — ортогональная проекция на T_PM. Пусть ξ — сечение NM.

$$\nabla^Q_X \xi = \Pi^N(\nabla^Q_X \xi) - B(X, \xi),$$

где Π^N — ортогональная проекция на NM. Отметим, что $b(X, Y) \in N_PM$, $B(X, \xi) \in T_PM$.

Утверждение 25. *1) Отображение $(X, Y) \longrightarrow \Pi(\nabla^Q_X Y)$ — риманова связность на M.*

2) Отображение $(X, \xi) \longrightarrow \Pi^N(\nabla^Q_X \xi)$ — риманова связность в NM.

Доказательство. Докажем первый пункт. Рассмотрим формулу

$$\nabla^Q_X Y = \Pi(\nabla^Q_X Y) + b(X, Y),$$

$$\Pi(\nabla^Q_X (fY)) = \Pi(f(P)\nabla^Q_X Y + Y(P)\partial_X(f)) = f(P)\Pi(\nabla^Q_X Y) + \partial_X(f)Y(P).$$

Тем самым доказали, что это связность.

Посмотрим на кручение, чтобы доказать симметричность связности:

$$\Omega^M(X,Y) = \Pi(\nabla^Q_X Y) - \Pi(\nabla^Q_Y X) - [X,Y] = \Pi(\nabla^Q_X Y - \nabla^Q_Y X - [X,Y] = \Pi(\Omega^Q(X,Y)) = 0.$$

Осталось доказать согласованность с римановой метрикой. Надо доказать, что

$$\partial_Z(X,Y) = (\Pi(\nabla^Q_Z X), Y) + (X, \Pi(\nabla^Q_Z Y)).$$

$$\partial_Z(X,Y) = (\nabla^Q_Z X, Y) + (X, nabla^Q_Z Y) = (\Pi(\nabla^Q_Z X), Y) + (X, \Pi(\nabla^Q_Z Y)).$$

$\square$

Утверждение 26. *Отображение b и B билинейны и $\mathcal{F}$–линейны. Кроме того,*

$$(b(X,Y),\xi) = (B(X,\xi),Y).$$

Лекция 17

17. Внешняя геометрия подмногообразий

Вторая квадратичная форма, оператор Вейнгартена

Обозначим через Q риманово объемлющее многообразие. Пусть $\dim Q = N$. Для него метрика и связность соответственно g^Q и ∇^Q. Пусть ∇^Q — риманова связность на Q.

Обозначим через M — n–мерное многообразие ($n < N$), вложение $f : M \longrightarrow Q$.

Есть три векторных расслоения:

1) $TM = (P, X)$, $P \in M$, $X \in T_P M$.

2) Нормальное расслоение NM, (P, ξ), $P \in M$, $\xi \in N_P M$
$$m = \dim N_P M = N - n.$$

3) Q–расслоение, (P, ξ), $P \in M$, $\xi \in T_P Q$
$$T_P Q = T_P M \oplus N_P M.$$

Пусть ∇^Q — риманова связность на Q. Пусть Y — касательное векторное поле на M. Пусть $X \in T_P M$.
$$\nabla^Q_X Y = \Pi(\nabla^Q_X Y) + b(X, Y),$$
где Π — ортогональная проекция на $T_P M$. Пусть ξ — сечение NM.
$$\nabla^Q_X \xi = \Pi^N(\nabla^Q_X \xi) - B(X, \xi),$$
где Π^N — ортогональная проекция на NM. Отметим, что $b(X, Y) \in N_P M$, $B(X, \xi) \in T_P M$.

Утверждение 27. *Отображение b и B билинейны и $\mathcal{F}$–линейны. Кроме того,*
$$(b(X, Y), \xi) = (B(X, \xi), Y).$$

Доказательство. Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция. Рассмотрим равенство
$$\nabla^Q_X (fY) = \nabla^M_X (fY) + b(X, fY),$$
$$f\nabla^Q_X Y + \partial_X(f)Y = f\nabla^M_X Y + \partial_X(f)Y + fb(X, Y),$$
$$f\nabla^Q_X Y = f\nabla^M_X Y + fb(X, Y)$$
$$b(X, fY) - fb(X, Y) = 0.$$

Далее,
$$(\nabla^Q_X Y, \xi) + (\nabla^Q_X \xi, Y) = (\nabla^M_X Y, \xi) + (b(X, Y), \xi) - (\nabla^N_X \xi, Y) - (B(X, Y), Y),$$

$$(\nabla^Q_X Y, \xi) + (\nabla^Q_X \xi, Y) = (b(X,Y), \xi) - (B(X,Y), Y).$$

Посмотрим на левую часть

$$\partial_W(u,v) = (\nabla^Q_W u, v) + (u, \nabla^Q_W v),$$

$$\partial_x(U,\xi) = (\nabla^Q_X Y, \xi) + (Y, \nabla^Q_X \xi) = 0.$$

Следовательно,

$$(b(X,Y), \xi) - (B(X,Y), Y) = 0.$$

□

Определение 109. Отображение $b(X,Y)$ — вторая фундаментальная форма M. Оператор $B(X,Y)$ — оператор Вейнгартена. Формулы

$$\nabla^Q_X Y = \Pi(\nabla^Q_X Y) + b(X,Y),$$

$$\nabla^Q_X \xi = \Pi^N(\nabla^Q_X \xi) - B(X,\xi)$$

называются деривационными формулами Гаусса—Вейнгартена.

В координатах эти два оператора примут вид

$$b(X,Y) = b^p_{ij}(x) e_p(x) X^i Y^j,$$

$$B(X,\xi) = B^j_{ip} \xi^p X^i \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Симметричность второй квадратичной формы

Определение 110. Вторая фундаментальная форма $b(X,Y)$ симметрична:

$$b(X,Y) = b(Y,X).$$

Доказательство.

$$\nabla^Q_X Y = \nabla^M_X Y + b(X,Y),$$
$$\nabla^Q_Y X = \nabla^M_Y X + b(Y,X),$$

Вычтем одно из другого

$$\nabla^Q_X Y - \nabla^Q_Y X = \nabla^M_X Y + b(X,Y) - \nabla^M_Y X - b(Y,X)$$

$$[X,Y] = [X,Y] = b(X,Y) - b(Y,X)$$

□

Геометрический смысл второй квадратичной формы

Определение 111. Геодезическая кривизна кривой γ — это

$$k_g = |\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma|.$$

Утверждение 28. *Пусть γ — геодезическая на M*

$$\nabla^Q_{\dot\gamma}\dot\gamma = b(\dot\gamma, \dot\gamma).$$

Доказательство. Рассмотрим формулу

$$\nabla^Q_{\dot\gamma}\dot\gamma = \nabla^M_{\dot\gamma}\dot\gamma + b(\dot\gamma, \dot\gamma),$$

где

$$\nabla^M_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0.$$

□

Замечание 16. Пусть $m = N - n = 1$, $b(\dot\gamma, \dot\gamma) = \pm k_g$.

Нормальное сечение подмногообразия

Пусть $Q = \mathbb{R}^N$. Пусть связность ∇^Q тривиальная.

Определение 112. Нормальное сечение подмногообразия M в точке P, соответствующее паре $X \in T_PM$ и $\xi \in N_PM$ — пересечение M с 2–плоскостью, проходящей через X и ξ.

Задача 18. *Доказать, что нормальное сечение в окрестности точки P — гладкая регулярная кривая на M.*

Пусть $\widetilde{k}$ — кривизна (со знаком, определенным ориентацией (X, ξ)) нормального сечения в точке P.

Утверждение 29. $\widetilde{k} = (b(X, X), \xi)$

Доказательство. Пусть γ — нормальное сечение, $X = \dot\gamma$.

$$\ddot\gamma = \nabla^Q_{\dot\gamma}\dot\gamma = \nabla^M_{\dot\gamma}\dot\gamma + b(\dot\gamma, \dot\gamma).$$

Связность ∇^Q тривиальная

$$(\ddot\gamma, \xi) = (b(\dot\gamma, \dot\gamma), \xi).$$

$$\widetilde{k} = (b(X, X), \xi).$$

□

Замечание 17. Пусть $|X| \neq 1$,

$$X_0 = \frac{X}{|X|},$$

$$\widetilde{k} = (b(X_0, X_0), \xi) = \frac{(b(X, X), \xi)}{|X|^2} = \frac{(b(X, X), \xi)}{g(X, X)}.$$

Замечание 18. Если $N = n + 1$, то

$$\widetilde{k} = \frac{b(X, X)}{g(X, X)}$$

— теорема об отношении пары форм.

Замечание 19. Имеет место следующая формула

$$k \cos \alpha = (b(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}), \xi),$$

где α — угол между $\ddot{\gamma}$ и ξ.

Замечание 20. Имеет место следующая формула

$$k \cos \alpha = b(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}),$$

где α — угол между $\ddot{\gamma}$ и вектором нормали к поверхности. Это теорем Менье.

Замечание 21. Если параметр t не натуральный, то

$$k \cos \alpha = \frac{b(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}{(g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}.$$

Геометрический смысл второй квадратичной формы

Пусть $Q = \mathbb{R}^N$, $N = n + 1$. Зафиксируем вектор $\xi \in N_P M$, $|\xi| = 1$.
Введем величину $\delta(P') = (r(P') - r(P), \xi)$.

Определение 113. Величина $\delta(P')$ — отклонение P' от касательной плоскости $T_P M$.

Замечание 22. Заметим, что $\delta(P) = 0$.

Лекция 18

18. Вторая квадратичная форма

Первый и второй дифференциалы функции в точке

Пусть M — гладкое n–мерное многообразие. Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция. Рассмотрим дифференциал

$$d_P f : T_P M \longrightarrow \mathbb{R}$$

— линейное отображение. Рассмотрим кривую $\gamma(t) : [a, b] \longrightarrow M$, $\gamma(t_0) = P$, $\dot{\gamma}(t_0) = X$.

Рассмотрим отображение $\varphi(t) = f \circ \gamma = f(\gamma(t))$. Имеет место равенство

$$d_P f(X) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} \varphi(t).$$

Утверждение 30. *Пусть $d_P f = 0$. Тогда*

$$\frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=t_0} \varphi(t)$$

не зависит от γ и определяет квадратичную форму на $T_P M$.

Доказательство. Рассмотрим координаты $x = (x^1, \ldots, x^n)$, точку $P(x_0^1, \ldots, x_0^n)$. Кривая задается в виде

$$\gamma : \ x^i = x^i(t), \quad x^i(t_0) = x_0^i$$
$$\dot{x}^i(t_0) = X^i$$

С новой функцией: $\varphi(t) = f(x(t))$. Продифференцируем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\dot{x}^i$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{\partial f}{\partial x^i}\ddot{x}^i,$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=t_0} \varphi(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) X^i X^j.$$

Выражение

$$\frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=t_0} \varphi(t)$$

не зависит от γ и определяет квадратичную форму на $T_P M$. □

Определение 114. Эта квадратичная форма — второй дифференциал функции f в точке P

$$d_P^2 f.$$

Напомним, что M — гладкое n–мерное вложенное в $\mathbb{R}^N$ подмногообразие, где $N = n + 1$.

Зафиксируем вектор $\xi \in N_P M$, $|\xi| = 1$.

Введем величину $\delta(P') = (r(P') - r(P), \xi)$.

Определение 115. Величина $\delta(P')$ — отклонение P' от касательной плоскости $T_P M$.

Замечание 23. Заметим, что $\delta(P) = 0$.

Утверждение 31. *Верно следующее:*

$$d_P\delta = 0, \quad d_P^2\delta = b.$$

Доказательство. Рассмотрим вектор $X \in T_P M$ и такую кривую $\gamma \in M$, что

$$\gamma(t_0) = P, \quad \dot\gamma(t_0) = X, \quad \gamma = r(P'(t)).$$

Пусть

$$\varphi(t) = \delta(\gamma(t)) = (\gamma(t) - r(P), \xi).$$

Посчитаем производные:

$$\dot\varphi = (\dot\gamma, \xi),$$
$$\dot\varphi(t_0) = (X, \xi) = 0,$$

следовательно, доказано первое равенство. Посчитаем вторую производную:

$$\ddot\varphi\Big|_{t=t_0} = (\ddot\gamma, \xi)\Big|_{t=t_0} = b(X, X).$$

Доказано второе равенство. □

Следствие 6. 1) *Пусть b в точке P знакоопределена. Тогда некоторая окрестность точке P на M лежит по одну сторону от $T_P M$.*

2) *Пусть b в точке P знакопеременна. Тогда любая окрестность точки P лежит на M по обе стороны от $T_P M$.*

Матрицы первой и второй квадратичных форм

Теорема 22. *Пусть L — евклидово пространство, b — квадратичная форма в L. В L существует ортонормированный базис, в котором матрица квадратичной формы b диагональна.*

Теорема 23. *Для любой точки $P \in M$ в пространстве $T_P M$ существует базис $X_1, \ldots, X_n$, в котором матрица первой квадратичной формы единичная, а матрица второй квадратичной формы диагональная:*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Определение 116. Числа λ_j называются главными кривизнами многообразия M в точке P, а прямые, проходящие через векторы X_j — главными направлениями.

Теорема 24 (Формула Эйлера)**.** *Пусть $X = T_P M$, $\widetilde{k}(x)$ — кривизна нормального сечения, проведенного в направлении X. Тогда*

$$\widetilde{k}(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cos^2 \alpha_j,$$

где λ_j — главные кривизны, α_j — угол между X и j–м главным направлением.

Доказательство. Используем явный вид кривизны, полученный ранее:

$$\widetilde{k}(X) = b(X, X) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (X^j)^2,$$

где $|X| = 1$. Кроме того,

$$X^j = (X, X_j) = \cos \alpha_j.$$

Теорема доказана. □

Следствие 7. *1) $\lambda_j = \widetilde{k}(X_j)$.*

2) Обозначим через $\lambda^+ = \max \widetilde{k}(X)$, $X \neq 0$; через $\lambda^- = \min \widetilde{k}(X)$, $X \neq 0$. Тогда

$$\lambda^+ = \max \lambda_j, \quad \lambda^- = \min \lambda_j.$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Обозначим $\lambda_1 = \max \lambda_j$. Тогда

$$\widetilde{k}(x) = \lambda_1 \cos^2 \alpha_1 + \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \cos^2 \alpha_j,$$

Знаем, что

$$\sum_{j=1}^{n} \cos^2 \alpha_j = 1,$$

тогда

$$\alpha_1 = 1 - \sum_{j=2}^{n} \cos^2 \alpha_j.$$

Подставляем в исходное равенство

$$\widetilde{k}(x) = \lambda_1 + \sum_{j=2}^{n} \cos^2 \alpha_j (\lambda_j - \lambda_1).$$

Так как λ_1 — максимальное среди всех λ_j, то $\lambda_j - \lambda_1 \leqslant 0$. Следовательно,

$$\widetilde{k}(x) \leqslant \lambda_1.$$

□

Гауссова и средняя кривизны многообразия

Определение 117. Гауссова кривизна многообразия M в точке P есть

$$K = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j.$$

Средняя кривизна многообразия M в точке P есть

$$H = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j.$$

Рассмотрим двумерный случай $M^2 \subset \mathbb{R}^3$. Тогда получим матрицу квадратичной формы вида

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad K = \lambda_1 \lambda_2.$$

Утверждение 32. *Если гауссова кривизна $K(P) > 0$, то b знакоопределена, и окрестность точки P лежит по одну сторону от касательной плоскости*

Если гауссова кривизна $K(P) < 0$, то b знакопеременна, и любая окрестность точки P лежит по обе стороны от $T_P M$.

Определение 118. Гауссова кривизна точки $P \in M^2 \subset \mathbb{R}^3$ называется

- эллиптической, если $K(P) > 0$;
- гиперболической, если $K(P) < 0$;
- параболической, если $K(P) = 0$.

Координатные формулы

Рассмотрим многообразие $Q^N(y^1, \ldots, y^N)$, риманова метрика $\overset{Q}{g}_{ij}(y)$, риманова связность $\overset{Q}{\Gamma}{}^k_{ij}(y)$.

Пусть имеется гладкое вложение: подмногообразие $M^n(x_1, \ldots, x^n)$, $y^i = y^i(x)$ с римановой метрикой $\overset{M}{g}_{ij}(x)$ и римановой связностью $\overset{M}{\Gamma}{}^k_{ij}(x)$.

Рассмотрим нормальное расслоение NM с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Риманова метрика:

$$g^N_{pq} = (e_p, e_q).$$

Уравнение Гаусса:

$$\nabla^Q_X Y = \nabla^M_X Y + b(X, Y),$$

где

$$X = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Тогда

$$\nabla^Q_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\nabla^M_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial y^s}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^s}=$$
$$=\frac{\partial^2 y^s}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^s}+\frac{\partial y^s}{\partial x^j}\nabla^Q_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial y^s}=$$
$$=\frac{\partial^2 y^s}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^s}+\frac{\partial y^s}{\partial x^j}\frac{\partial y^l}{\partial x^i}\nabla^Q_{\frac{\partial}{\partial y^l}}\frac{\partial}{\partial y^s}.$$

Итак,

$$\nabla^Q_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\frac{\partial^2 y^s}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^s}+\frac{\partial y^s}{\partial x^j}\frac{\partial y^l}{\partial x^i}\overset{Q}{\Gamma}{}^k_{ls}\frac{\partial}{\partial y^k}.$$

$$\nabla^M_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\overset{M}{\Gamma}{}^s_{ij}\frac{\partial}{\partial x^s}.$$

$$b(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})=b^p_{ij}(x)e_p.$$

Итак, деривационные формулы Гаусса будут иметь следующий вид:

$$\left(\frac{\partial^2 y^k}{\partial x^i\partial x^j}+\frac{\partial y^s}{\partial x^j}\frac{\partial y^l}{\partial x^i}\overset{Q}{\Gamma}{}^k_{ls}\right)\frac{\partial}{\partial y^k}=\overset{M}{\Gamma}{}^s_{ij}\frac{\partial}{\partial x^s}+b^p_{ij}(x)e_p.$$

Посчитаем вторую квадратичную форму:

$$b^p_{ij}(e_p,e_q)=\left(\frac{\partial^2 y^k}{\partial x^i\partial x^j}+\frac{\partial y^s}{\partial x^j}\frac{\partial y^l}{\partial x^i}\overset{Q}{\Gamma}{}^k_{ls}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^k},e_q\right).$$

$$b^p_{ij}=\left(\frac{\partial^2 y^k}{\partial x^i\partial x^j}+\frac{\partial y^s}{\partial x^j}\frac{\partial y^l}{\partial x^i}\overset{Q}{\Gamma}{}^k_{ls}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^k},e_q\right)\overset{N}{g}_{pq}.$$

Рассмотрим случаи:

1) Пусть $Q=\mathbb{R}^N$, y — евклидовы координаты. Тогда

$$b^p_{ij}=\left(\frac{\partial^2 y^k}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^k},e_q\right)\overset{N}{g}_{pq}.$$

$$b^p_{ij}=(r_{ij},e_q)\overset{N}{g}_{pq},$$

где

$$r_{ij}=\frac{\partial^2 r}{\partial y^i\partial y^j}.$$

2) Пусть $Q=\mathbb{R}^N$, $N=n+1$, вектор e — единичный вектор нормали.

$$b_{ij}=(r_{ij},e).$$

Лекция 19

19. Векторное расслоение. Геометрия гладких многообразий

Координатные формулы

Рассмотрим многообразие $Q^N(y^1, \dots, y^N)$, риманова метрика $\overset{Q}{g}_{ij}(y)$, риманова связность $\overset{Q}{\Gamma}{}^k_{ij}(y)$.

Пусть имеется гладкое вложение: подмногообразие $M^n(x_1, \dots, x^n)$, $y^i = y^i(x)$ с римановой метрикой $\overset{M}{g}_{ij}(x)$ и римановой связностью $\overset{M}{\Gamma}{}^k_{ij}(x)$.

$$\nabla^Q_X Y = \nabla^M_X Y + b(X, Y),$$

$$\nabla^Q_X \xi = \nabla^N_X \xi - B(X, Y),$$

Рассмотрим нормальное расслоение NM. Пусть

$$X = \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^s}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^s}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial y^l}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^l}.$$

$$\left(\frac{\partial^2 y^k}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial y^s}{\partial x^j}\frac{\partial y^l}{\partial x^i}\overset{Q}{\Gamma}{}^k_{ls}\right)\frac{\partial}{\partial y^k} = \overset{M}{\Gamma}{}^s_{ij}\frac{\partial}{\partial x^s} + b^p_{ij}(x)e_p.$$

$$b^p_{ij} = \left(\frac{\partial^2 y^k}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial y^s}{\partial x^j}\frac{\partial y^l}{\partial x^i}\overset{Q}{\Gamma}{}^k_{ls}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^k}, e_q\right)\overset{N}{g}_{pq}.$$

$$(b(X, Y), \xi) = (B(X, \xi), Y).$$

$$b^p_{ij} g^N_{qp} = B^s_{ip} g^M_{sj}$$

$$B^s_i = \overset{M}{g}{}^{sj} b_{ij}.$$

$$\begin{cases} r_{ij} = \frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j} = \overset{M}{\Gamma}{}^k_{ij}\frac{\partial r}{\partial x^k} + b_{ij}e, \\ \frac{\partial e}{\partial x^i} = -\overset{M}{g}{}^{sj} b_{ij}\frac{\partial r}{\partial x^s}. \end{cases}$$

Риманово искривление

Оператор кривизны Римана:

$$R(x, y)z = (\nabla_x \nabla_y - \nabla_y \nabla_x - \nabla_{[x,y]})z.$$

Найдем ковариантную производную

$$\nabla^Q_Y Z = \nabla^M_Y Z + b(Y, Z).$$

Применим оператор ковариантного дифференцирования второй раз

$$\nabla^Q_X \nabla^Q_Y Z = \nabla^M_X \nabla^M_Y Z + b(X, \nabla^M_Y Z) + \nabla^N_X b(Y, Z) - B(X, b(Y, Z)).$$

Рассмотрим другой случай:

$$\nabla^Q_{[X,Y]} Z = \nabla^M_{[X,Y]} Z + b([X, Y], Z).$$

По свойству кручения имеем

$$0 = \Omega(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Итак, имеет место равенство:

$$\begin{aligned} R^Q(X, Y)Z = R^M(X, Y)Z - B(X, b(Y, Z)) + B(Y, b(X, Z)) + \\ + \nabla^M_X (b(Y, Z)) + b(X, \nabla^M_Y Z) - \nabla^N_Y (b(X, Z)) - b(Y, \nabla^M_X Z) - \\ - b(\nabla^M_X Y, Z) + b(\nabla^M_Y X, Z). \end{aligned}$$

Отделяя нормальную часть, получаем формулу

$$(R^Q(X, Y)Z, W) = (R^M(X, Y)Z, W) - (B(X, b(X, Z)), W) + (B(Y, b(X, Z)), W).$$

Воспользуемся связью операторов:

$$(b(X, Y), \xi) = (B(X, \xi), Y).$$

Тогда

$$(R^Q(X, Y)Z, W) = (R^M(X, Y)Z, W) - (b(X, W), b(Y, Z)) + (b(X, Z), b(Y, W)).$$

Замечание 24. Если $Q = \mathbb{R}^N$, то

$$(R^M(X, Y)Z, W) = (b(X, W), b(Y, Z)) - (b(X, Z), b(Y, W)).$$

Запишем теперь касательную часть:

$$\begin{aligned} (R^Q(X, Y)Z)^N = \nabla^N_X (b(Y, Z)) - b(\nabla^M_X Y, Z) - b(Y, \nabla^M_X Z) - \\ - (\nabla^N_Y (b(X, Z)) - b(\nabla^M_Y X, Z) - b(X, \nabla^M_Y Z) = \star. \end{aligned}$$

Это уравнения Петерсона—Майнарди—Кодацци.

$$\star = (\widehat{\nabla}_X b)(Y, Z) - (\widehat{\nabla}_Y b)(X, Z),$$

где

$$(\widehat{\nabla}_X b)(Y, Z) = \nabla^N_X (b(Y, Z)) - b(\nabla^M_X Y, Z) - b(Y, \nabla^M_X Z).$$

Итак,

$$\boxed{(R^Q(X, Y)Z)^N = (\widehat{\nabla}_X b)(Y, Z) - (\widehat{\nabla}_Y b)(X, Z)}.$$

Пусть
$$X = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x^j},$$
$$Z = \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad W = \frac{\partial}{\partial x^q}.$$
Тогда в координатах формула примет вид
$$\frac{\partial y^s}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^j}\frac{\partial y^m}{\partial x^k}\frac{\partial y^t}{\partial x^q}R^Q_{sl,mt} = R^M_{ij,kq} - g^N_{pr}(b^p_{iq}b^r_{jk} - b^p_{ik}b^r_{jq}).$$
Рассмотрим случаи:

1) $Q = \mathbb{R}^N$
$$R^M_{ij,kq} = g^N_{pr}(b^p_{iq}b^r_{jk} - b^p_{ik}b^r_{jq}).$$

2) $N = n+1$
$$R^M_{ij,kq} = b^p_{iq}b^r_{jk} - b^p_{ik}b^r_{jq}.$$

Тензор Риччи:
$$R_{ij} - R^k_{ki,j} = g^{kq}R_{ki,jq}.$$
$$R^M_{ij} = \overset{M}{g}{}^{kq}(b_{kq}b_{ij} - b_{kj}b_{iq}).$$
Скалярная кривизна:
$$R = g^{ij}R_{ij}$$
$$R^M = \overset{M}{g}{}^{ij}\overset{M}{g}{}^{kq}(b_{kq}b_{ij} - b_{kj}b_{iq}).$$
В евклидовом случае:
$$R^M = \sum_{i,k=1}^n (b_{kq}b_{ij} - b_{kj}b_{iq}) = (\operatorname{tr} b)^2 - \operatorname{tr}(b^2) = (\sum_{i=1}^n \lambda_i)^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j.$$

В случае $n = 2$, $N = 3$, $R = 2K$.

Теорема 25 (Ergerium Гаусса)**.** *Гауссова кривизна двумерной поверхности не меняется при изометриях.*

Уравнения Петерсона—Майнарди—Кодацци

Пусть
$$X = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial x^k}.$$
Имеем:
$$\nabla^N_X(b(Y,Z)) = \nabla_{\partial/\partial x^i} b^p_{jk}e_p = \frac{b^p_{jk}}{\partial x^i}e_p + \overset{N}{\Gamma}{}^q{}_{ip}e_p b^p_{jk}.$$
Так как
$$\nabla^M_X Y = \overset{M}{\Gamma}{}^s{}_{ij}\frac{\partial}{\partial x^s},$$

$$b(\nabla^M_X Y, Z) = \overset{M}{\Gamma}{}^s{}_{ij} b^p_{sk} e_p,$$

тогда имеет место равенство.

$$\begin{aligned}\overset{Q}{R}{}^l{}_{ij,k}\frac{\partial}{\partial y^l} = (\frac{\partial b^p_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial b^p_{ik}}{\partial x^j} + \overset{N}{\Gamma}{}^p{}_{iq} b^q_{jk} - \overset{N}{\Gamma}{}^p{}_{jq} b^q_{ik} - \\ - \overset{M}{\Gamma}{}^s{}_{ij} b^p_{sk} + \overset{M}{\Gamma}{}^s{}_{ji} b^p_{sk} - \overset{M}{\Gamma}{}^s{}_{ik} b^p_{js} + \overset{M}{\Gamma}{}^s{}_{jk} b^p_{is}) e_p = \\ = \left(\frac{\partial b^p_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial b^p_{ik}}{\partial x^j} + \overset{N}{\Gamma}{}^p{}_{iq} b^q_{jk} - \overset{N}{\Gamma}{}^p{}_{jq} b^q_{ik} - \overset{M}{\Gamma}{}^s{}_{ik} b^p_{js} + \overset{M}{\Gamma}{}^s{}_{jk} b^p_{is}\right) e_p.\end{aligned}$$

Лекция 20

20. Восстановление поверхности по квадратичным формам

Уравнение Риччи

В прошлый раз были получены: уравнения Гаусса для тензора Римана

$$(R^Q(x,y)z,w) = (R^M(x,y)z,w) - (b(x,w),b(y,z)) + (b(x,z),b(y,w)) \tag{1}$$

и уравнения Петерсона – Майнарди – Кодацци

$$(R^Q(x,y)^Q z)^N = (\widetilde{\nabla}_x b)(y,z) - (\widetilde{\nabla}_y b)(x,z) \tag{2}$$

Вычислим оператор кривизны

$$R^Q(x,y) = \nabla^Q_x\nabla^Q_y - \nabla^Q_y\nabla^Q_x - \nabla^Q_{[x,y]}i,$$

примененный к нормальному вектору ξ, используя деривационные формулы Вайнгартена:

$$\nabla^Q_x\nabla^Q_y\xi = \nabla^Q_x(\nabla^N_y\xi - B(y,\xi)) = \nabla^N_x\nabla^N_y\xi - B(x,\nabla^N_y\xi) - \nabla^M_x(B(y,\xi)) - b(x,B(y,\xi)); \tag{3}$$

$$\nabla^Q_{[x,y]}\xi = \nabla^N_{[x,y]}\xi - B([x,y],\xi). \tag{4}$$

Так как касательная компонента $R^Q(x,y)\xi$ получается из $(R^Q(x,y)z)^N$ путем перестановки x, y, ξ и вектор, на который мы это скалярно умножим, то достаточно написать лишь нормальную компоненту:

$$(R^Q(x,y)\xi)^N = R^N(x,y)\xi - b(x,B(y,\xi)) + b(y,B(x,\xi)). \tag{5}$$

Равенство (5) называется *равенством Риччи.*

Пусть η — нормальный вектор. Тогда, учитывая соотношение

$$(b(x,y),\xi) = (y,B(x,\xi)),$$

равенство (5) можно переписать в виде

$$(R^Q(x,y)\xi,\eta) = (R^N(x,y)\xi,\eta) - (\eta,b(x,B(y,\xi))) + (\eta,b(y,B(x,\xi))) = \tag{6}$$

$$= (R^N(x,y)\xi,\eta) - (B(x,\eta),B(y,\xi)) + (B(y,\eta),B(x,\xi)). \tag{7}$$

Задание риманова многообразия

Рассмотрим случай $Q = \mathbb{R}^N$. Пусть имеется многообразие M размерности n с римановой метрикой g^M и пусть имеется вторая квадратичная форма b и связность в нормальном расслоении ∇^N.

Зададимся следующими вопросами:

1) Есть ли какие-либо связи между g^M, b и ∇^N, если M — поверхность в Q?

2) Как связаны два многообразия, у которых одинаковые метрика, вторая квадратичная форма и связность в нормальном расслоении?

Рассмотрим оба этих вопроса сперва для гиперповерхностей, то есть в случае $N = n + 1$.

Первый вопрос

Так как $N = n + 1$, то связанность в нормальном расслоении ∇^N тривиальная, а вторая квадратичная форма b скалярна. Учитывая, что рассматриваемое пространство Q евклидово, то левые части уравнений Гаусса, Петерсона – Майнарди – Кодацци — нули, то есть имеются необходимые соотношения на b и ∇^N

$$(R^M(x, y)z, w) - (b(x, w), b(y, z)) + (b(x, z), b(y, w)) = 0 \tag{8}$$

и

$$(\widetilde{\nabla}_x b)(y, z) = (\widetilde{\nabla}_y b)(x, z), \tag{9}$$

которые, как мы покажем позже, являются еще и достаточными.

Второй вопрос

Теорема 26. *Пусть M и $\widetilde{M}$ — две n-мерные гиперповерхности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Следующие условия эквивалентны:*

1) существуют единые координаты x на M и $\widetilde{M}$ такие, что в этих координатах первая и вторая квадратичные формы этих поверхностей совпадают, то есть $g_{ij}(x) = \widetilde{g}_{ij}(x)$ и $b_{ij}(x) = \widetilde{b}_{ij}(x)$;

2) существует движение $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ евклидова пространства, переводящее M в $\widetilde{M}$, то есть $f(M) = \widetilde{M}$.

Доказательство. Случай 1. Пусть существует движение $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ такое, что $f(M) = \widetilde{M}$. Зададим M параметрическими уравнениями: $y = r(x)$. Тогда параметрические уравнения $\widetilde{M}$ следующие: $y = Ar(x) + a$. Покажем, что это и есть искомые единые координаты. Первая и вторая квадратичные формы поверхности M равны:

$$g_{ij} = (r_i, r_j) = \left(\frac{\partial r}{\partial x_i}, \frac{\partial r}{\partial x_j}\right); \tag{10}$$

$$b_{ij} = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}, m\right), \tag{11}$$

где m — нормаль к поверхности. Тогда

$$\widetilde{g}_{ij} = \left(\frac{\partial Ar + a}{\partial x_i}, \frac{\partial Ar + a}{\partial x_j}\right) = (Ar_i, Ar_j) = (r_i, r_j) = g_{ij}; \tag{12}$$

$$\widetilde{b}_{ij} = \left(\frac{\partial^2 Ar + a}{\partial x_i \partial x_j}, \widetilde{m}\right) = \left(A\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}, Am\right) == \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}, m\right) = b_{ij}, \tag{13}$$

где $\widetilde{m}$ — единичная нормаль к $\widetilde{M}$, так как

$$\left(\widetilde{m}, \frac{\partial(Ar+a)}{\partial x_i}\right) = (Am, Ar_i) = (m, r_i) = 0. \tag{14}$$

Первая часть теоремы доказана.

Случай 2. Пусть $g_{ij}(x) = \widetilde{g}_{ij}(x)$ и $b_{ij}(x) = \widetilde{b}_{ij}(x)$.

Зададим M и $\widetilde{M}$ параметрическими уравнениями: $y = r(x)$ и $y = \widetilde{r}(x)$ соответственно. Построим f как композицию сдвига и поворота.

Существует биекция, сопоставляющая каждой точке $P = r(x) \in M$ точку $\widetilde{P} = \widetilde{r}(x) \in \widetilde{M}$. Будем называть такие точки соответствующими. Зафиксируем пару соответствующих точек $P_0 \in M$ и $\widetilde{P}_0 \in \widetilde{M}$. Сделаем сдвиг, переводящий P_0 в $\widetilde{P}_0$.

Рассмотрим в точке P_0 канонические базисы $r_1, \ldots, r_n$ и $\widetilde{r}_1, \ldots, \widetilde{r}_n$ поверхностей M и $\widetilde{M}$. Пусть $r_1, \ldots, r_n, m$ и $\widetilde{r}_1, \ldots, \widetilde{r}_n, \widetilde{m}$ — базисы $\mathbb{R}^{n+1}$, причем $\|m\| = \|\widetilde{m}\| = 1$. Кроме того,

$$(r_i, r_j) = g_{ij} = \widetilde{g}_{ij} = (\widetilde{r}_i, \widetilde{r}_j) \quad \text{и} \quad (r_i, m) = 0 = (\widetilde{r}_i, \widetilde{m}), \tag{15}$$

поэтому существует вращение, переводящее $r_1, \ldots, r_n, m$ в $\widetilde{r}_1, \ldots, \widetilde{r}_n, \widetilde{m}$. Осуществим сей поворот.

Таким образом, в точке P_0 поверхности M и $\widetilde{M}$ имеют общую касательную плоскость и канонические базисы совпадают, то есть $r_i(0) = \widetilde{r}(0)$ и $m(0) = \widetilde{m}(0)$.

Покажем, что теперь $M = \widetilde{M}$. Запишем деривационные формулы для гиперповерхностей: пусть $x = r_i$, $y = r_j$, $\xi = m$; тогда

$$\nabla_x^Q y = \frac{\partial r_i}{\partial x^j}; \quad \nabla_x^M y = \Gamma_{ij}^k r_k;$$

$$b(x, y) = b_{ij} m; \quad \nabla_x^Q \xi = \frac{\partial m}{\partial x^j};$$

$$\nabla_x^N \xi = 0; \quad B(x, \xi) = -B_j^k r_k$$

и деривационные формулы принимают вид

$$\frac{\partial r_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k r_k + b_{ij} m; \quad \frac{\partial m}{\partial x^j} = -B_j^k r_k. \tag{16}$$

Выберем какие-либо две соответствующие точки $P = M(\widehat{x})$ и $\widetilde{P} = \widetilde{M}(\widehat{x})$, причем $P \neq P_0$ (и, стало быть, $\widetilde{P} \neq \widetilde{P}_0$). Соединим P_0 и P гладкой кривой γ, задаваемая координатами $x^i = x^i(t)$, $x^i(0) = 0$, $x^i(T) = \widehat{x}$. Тогда есть соответствующая кривая $\widetilde{\gamma}$ на $\widetilde{M}$. Рассмотрим в каждой точке γ векторы канонического базиса на M и соответствующие векторы канонического базиса на $\widetilde{M}$. То есть имеется два семейства векторов: $r_i(x(t)), m(x(t))$ и $\widetilde{r}_i(x(t)), \widetilde{m}(x(t))$. Тогда

$$\dot{r}_i = \frac{\partial r_i}{\partial x^j} \dot{x}^j = (\Gamma_{ij}^k r_k + b_{ij} m) \dot{x}^j; \quad \dot{m} = \frac{\partial m}{\partial x^j} \dot{x}^j = -B_j^k r_k \dot{x}^j. \tag{17}$$

В матричном виде эту систему можно записать следующим образом: $\dot{R}(t) = U(t) R(t)$, где $R = (r_1, \ldots, r_n, m)^t$. При этом для $\widetilde{M}$ система будет $\dot{\widetilde{R}}(t) = U(t) \widetilde{R}(t)$. Стало быть, $R = \widetilde{R}$ вдоль γ.

Покажем, что $r(P) = r(\widetilde{P})$, что в силу произвольности точки P и кривой γ завершит доказательство:

$$r(P) = r(x(T)) = \int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r(x(t))\,\mathrm{d}t + r(P_0) = \int_0^T \frac{\partial r}{\partial x^i}\dot{x}^i\,\mathrm{d}t + r(P_0) = \\ = \int_0^T r_i(x(t))\dot{x}^i\,\mathrm{d}t + r(P_0);$$

$$r(\widetilde{P}) = \widetilde{r}(x(T)) = \int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{r}(x(t))\,\mathrm{d}t + \widetilde{r}(P_0) = \\ = \int_0^T \frac{\partial \widetilde{r}}{\partial x^i}\dot{x}^i\,\mathrm{d}t + \widetilde{r}(P_0) = \int_0^T \widetilde{r}_i(x(t))\dot{x}^i\,\mathrm{d}t + \widetilde{r}(P_0).$$

□

Покажем теперь достаточность (8) для задания гиперповерхности с заданными первой и второй формами.

Теорема 27. *Пусть заданы симметричные матрицы $g_{ij}(x)$ и $b_{ij}(x)$, элементы которых являются гладкими функциями, причем матрица $g_{ij}(x)$ является положительно определенной и пусть выполнены соотношения Гаусса – Кодацци (8). Тогда существует поверхность для которой $g_{ij}(x)$ и $b_{ij}(x)$ являются матрицами первой и второй квадратичной формы.*

Доказательство. Будем пытаться решить деривационные уравнения

$$\frac{\partial r_i}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} r_k + b_{ij} m; \quad \frac{\partial m}{\partial x^j} = -B^k_j r_k. \tag{18}$$

Это система особого вида. Пусть $x = (x^1, \ldots, x^n)$ — точка n-мерного пространства, $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^m)$ — вектор m-мерного пространства. Деривационные уравнения являются уравнениями вида

$$\frac{\partial \alpha^k}{\partial x^j} = f^k_j(x, \alpha). \tag{19}$$

Рассмотрим, как в общем случае устроено решение данной системы. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ и $V \subset \mathbb{R}^m$ — малые окрестности нуля. Предположим, что заданы гладкие функции $f_j : U \times V \to V$. Для $\alpha \in V$ рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x^j} = f_j(x, \alpha). \tag{20}$$

Зададим начальные условия в нуле:

$$\alpha(0) = \alpha_0. \tag{21}$$

Покажем, что полученная система уравнений с частными производными при определенных условиях имеет единственное решение. Начнем с необходимых условий.

Если существует решение, причем гладкое, то у него должны совпадать смешанные производные:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i} f_j(x, \alpha) = \frac{\partial f_j}{\partial x^i} + \frac{\partial f_j}{\partial \alpha^k}\frac{\partial \alpha^k}{\partial x^j} = \frac{\partial f_j}{\partial x^i} + \frac{\partial f_j}{\partial \alpha^k} f_i^k. \tag{22}$$

Итак, мы доказали следующее важное утверждение: если существует решение системы (20), то выполнены равенства

$$\frac{\partial f_j}{\partial x^i} + \frac{\partial f_j}{\partial \alpha^k} f_i^k = \frac{\partial f_i}{\partial x^j} + \frac{\partial f_i}{\partial \alpha^k} f_j^k. \tag{23}$$

Условия (23) называются *условиями совместности (интегрируемости)* системы (20). Покажем, что эти условия достаточны, то есть если они выполнены, то система (20) имеет решение, причем единственное, если заданы также начальные условия $\alpha(0) = \alpha_0$.

□

Теорема 28. *Пусть выполнены условия (23). Тогда уравнения (20) и (21) имеют единственные решения в некоторой окрестности нуля.*

Доказательство. Определим следующую функцию

$$\alpha_{(1)} : \begin{cases} \frac{\partial \alpha_{(1)}}{\partial x^1} = f_1(x_1, 0, \ldots, 0, \alpha_{(1)}), \\ \alpha_{(1)}(0) = \alpha_0. \end{cases}$$

Если $|x^1| < \varepsilon_1$, то у этой системы есть единственное решение $\alpha_{(1)}(x^1)$.

Определим новую функцию

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_{(2)}}{\partial x^1} = f_2(x_1, x^2, 0, \ldots, 0, \alpha_{(2)}), \\ \alpha_{(2)}\Big|_{x^2=0} = \alpha_{(1)}(x^1). \end{cases}$$

Продолжение доказательства в лекции 21. □

Лекция 21

21. Восстановление поверхности по квадратичным формам

Существование и единственность решения задачи

Теорема 29. *Пусть выполнены условия (23). Тогда уравнения (20) и (21) имеют единственные решения в некоторой окрестности нуля.*

Доказательство. Определим следующую функцию

$$\alpha_{(1)} : \begin{cases} \frac{\partial \alpha_{(1)}}{\partial x^1} = f_1(x_1, 0, \ldots, 0, \alpha_{(1)}), \\ \alpha_{(1)}(0) = \alpha_0. \end{cases}$$

Если $|x^1| < \varepsilon_1$, то у этой системы есть единственное решение $\alpha_{(1)}(x^1)$.

Определим новую функцию $\alpha_{(2)}$

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_{(2)}}{\partial x^1} = f_2(x_1, x^2, 0, \ldots, 0, \alpha_{(2)}), \\ \alpha_{(2)}\Big|_{x^2=0} = \alpha_{(1)}(x^1). \end{cases}$$

Если $|x^2| < \varepsilon_2$, то у этой системы есть единственное решение $\alpha_{(2)}(x^2)$.

Утверждается, что

$$\frac{\partial \alpha_{(2)}}{\partial x^1} = f_1(x_1, x^2, 0, \ldots, 0, \alpha_{(2)}).$$

Действительно, имеем

$$\frac{\partial g}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial \alpha_{(2)}}{\partial x^2} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha^k}\frac{\partial \alpha^k_{(2)}}{\partial x^2} =$$
$$= \frac{\partial f_2}{\partial x^1} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_2}{\partial \alpha^k}\frac{\partial \alpha^k_{(2)}}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha^k} f_2^k =$$
$$= \frac{\partial f_2}{\partial x^1} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_2}{\partial \alpha^k}(f_1^k + g^k) - \frac{\partial f_1}{\partial x^2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha^k} f_2^k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_2}{\partial \alpha^k} g^k.$$

$$\frac{\partial \alpha^k_{(2)}}{\partial x^1} = g^k + f_1^{(k)}$$

где

$$g = \frac{\partial \alpha_{(2)}}{\partial x^1} - f_1(x_1, x^2, 0, \ldots, 0, \alpha_{(2)}).$$

При $x^2 = 0$ имеем начальное условие

$$g|_{x^2=0} = 0.$$

По теореме существования–единственности $g = 0$. Итак,

$$\frac{\partial \alpha_{(2)}}{\partial x^1} = f_1(x_1, x^2, 0, \ldots, 0, \alpha_{(2)}),$$

$$\alpha_{(1)}(0) = \alpha_0.$$

Докажем единственность. Пусть у нас есть решение системы $\alpha(x)$. Рассмотрим $\alpha(x^1, 0, \ldots, 0)$. Так как это решение единственно для первой системы по теореме существования–единственности, то это функция $\alpha_{(1)}$. Аналогично для второго случая для функции $\alpha(x^1, x^2, 0, \ldots, 0)$. И так далее. $\square$

Построение гиперповерхности по квадратичным формам

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть заданы две матрицы $g_{ij}(x)$, $b_{ij}(x)$.

Теорема 30. *Пусть $g_{ij}(x)$ и $b_{ij}(x)$ — гладкие функции в окрестности нуля в $\mathbb{R}^n$. Пусть $g_{ij}(x)$, $b_{ij}(x)$ — симметрические, а g_{ij} положительно определена. Пусть $g_{ij}(x)$ и $b_{ij}(x)$ удовлетворяют уравнениями Гаусса и Петерсона – Майнарди – Кодацци. Тогда существует гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, задаваемая уравнением $y = r(x)$, $x \in$окрестности нуля, причем $g_{ij}(x)$ и $b_{ij}(x)$ — первая и вторая квадратичные формы.*

Доказательство. Напомним явный вид уравнения Гаусса:

$$R_{ij,kq} = b_{iq}b_{jk} - b_{ik}b_{jq}.$$

Уравнения Петерсона – Майнарди – Кодацци имеют вид

$$\frac{\partial b_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma^s_{ik}b_{sj} - \Gamma^s_{jk}b_{si}.$$

Рассмотрим систему уравнений, которая по виду совпадает с деривационными формулами

$$\begin{cases} \frac{\partial r_s}{\partial x_j} = \Gamma^k_{sj}r_k + b_{sj}m, \\ \frac{\partial m}{\partial x^j} = -B^k_j r_k, \end{cases}$$

$$r_i(0) = r_i^0, \quad m(0) = m^0.$$

Продифференцируем:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^k_{sj}r_k + b_{sj}m = \frac{\partial \Gamma^k_{sj}}{\partial x^i}r_k + \Gamma^k_{sj}\frac{\partial r_k}{\partial x^i} + \frac{\partial b_{sj}}{\partial x^i}m + \frac{\partial m}{\partial x^i}b_{sj} =$$
$$= \frac{\partial \Gamma^k_{sj}}{\partial x^i}r_k + \Gamma^k_{sj}\Gamma^l_{ki}r_l + \Gamma^k_{sj}b_{ki}m + \frac{\partial b_{js}}{\partial x^i}m - b_{sj}B^k_i r_k.$$

Рассмотрим такое же выражение, но с заменой i на j и вычтем одно из другого:

$$r_l: \ \frac{\partial \Gamma^l_{js}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^k_{is}}{\partial x^j} + \Gamma^k_{sj}\Gamma^l_{ki} - \Gamma^k_{si}\Gamma^l_{kj} - b_{sj}B^l_i + b_{si}B^l_j =$$
$$= R^l_{ij,s} - g^{lk}(b_{sj}b_{ik} - b_{si}b_{jk}) = g^{lk}(R_{ij,sk} - (b_{sj}b_{ik} - b_{si}b_{jk})) = 0.$$

Получается, что при каждом векторе r_l стоит нулевой коэффициент.

$$m: \ \frac{\partial b_{js}}{\partial x^i} - \frac{\partial b_{is}}{\partial x^j} + \Gamma^k_{js} b_{ik} - \Gamma^k_{is} b_{jk} = 0.$$

Итак, для первой части системы выполнены условия совместности. Проверим для второй

$$\frac{\partial m}{\partial x^j} = -B^k_j r_k,$$

$$-\frac{\partial B^k_j}{\partial x^i} r_k - B^k_j \frac{\partial r_k}{\partial x^i} = -\frac{\partial B^k_j}{\partial x^i} r_k - B^k_j (\Gamma^s_{ki} r_s + b_{ik} m).$$

Рассмотрим такое же выражение, но с заменой i на j и вычтем одно из другого:

$$m: \ -B^k_j b_{ik} + B^k_i b_{jk} = g^{ks} b_{is} b_{jk} - g^{ks} b_{js} b_{ik} = 0.$$

$$\left((\frac{\partial B^s_i}{\partial x^j} - \frac{\partial B^s_j}{\partial x^i} + B^k_i \Gamma^s_{kj} - B^k_j \Gamma^s_{ki}) r_s, r_l \right)$$

$$\frac{\partial B_{is}}{\partial x^j} g_{sl} - \frac{\partial B^s_j}{\partial x^i} g_{sl} + B^k_i \Gamma^s_{kj} g_{sl} - B^k_j \Gamma^s_{ki} g_{sl}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j} B^s_i g_{sl} - B^s_i \frac{\partial g_{sl}}{\partial x^j} + B^k_i \Gamma^s_{kj} g_{sl} - B^k_j \Gamma^s_{ki} g_{sl}.$$

Итак, получаем

$$\frac{\partial b_{il}}{\partial x^j} - B^s_i \frac{\partial g_{sl}}{\partial x^j} + B^k_i \Gamma^s_{kj} g_{sl} - \frac{\partial b_{jl}}{\partial x^i} + B^s_j \frac{\partial g_{sl}}{\partial x^i} - B^k_j \Gamma^s_{ki} g_{sl} = \star$$

Напомним, что

$$\Gamma_{kj,l} = \Gamma^s_{kj} g_{sl},$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ik,j} - \Gamma_{jk,i}.$$

$$\star = \frac{\partial b_{il}}{\partial x^j} - B^s_i (\Gamma_{sj,l} - \Gamma_{lj,s}) B^k_i \Gamma_{kj,l} - (\frac{\partial b_{jl}}{\partial x^i} + B^s_j \frac{\partial g_{sl}}{\partial x^i} - B^k_j \Gamma^s_{ki} g_{sl} =$$
$$= \frac{\partial b_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial b_{jl}}{\partial x^i} - B^s_i \Gamma_{lj,s} + B^s_j \Gamma_{li,s} =$$
$$= \frac{\partial b_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial b_{jl}}{\partial x^i} - B^s_i g_{sk} \Gamma^k_{lj} + B^s_j g_{sk} \Gamma^k_{li} = 0.$$

Доказательство совместности завершено. □

$$\begin{cases} \frac{\partial r_k}{\partial x_j} = \Gamma^s_{kj} r_s + b_{kj} m, \\ \frac{\partial m}{\partial x^j} = -B^s_j r_s, \end{cases}$$

$$r_i(0) = r^0_i, \quad m(0) = m^0.$$

Эта система совместна, а значит, в некоторой окрестности нуля у нас есть набор гладких функций $r_1, (x), \ldots, r_m(x), m(x)$, которые являются решениями системы.

Мы хотим найти поверхность, чтобы эти векторы были векторы канонического базиса. Будем искать функцию $r(x)$, что

$$\frac{\partial r}{\partial x^j} = r_j(x), \quad r(0) = r_0.$$

Рассмотрим поверхность M: $y = r(x)$. Докажем, что

$$g_{ij} = (r_i(x), r_j(x)).$$

Рассмотрим матрицы

$$G_{ij}(x) = (r_i(x), r_j(x)), \quad a_i(x) = (r_i(x), m(x)), \lambda(x) = (m, m).$$

Подсчитаем производные:

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial x^k} = (\frac{\partial r_i}{\partial x^k}, r_j) + (r_i, \frac{\partial r_j}{\partial x^k}) = \Gamma^s_{ik} G_{sj} + \Gamma^s_{jk} G_{is},$$

$$G_{ij}|_{x=0} = g_{ij}(0).$$

Получается, что $G_{ij} = g_{ij}$.

Далее

$$\frac{\partial a_j}{\partial x^k} = (\frac{\partial r_j}{\partial x^k}, m) + (r_j, \frac{\partial m}{\partial x^k}) = \Gamma^s_{kj}(r_s, m) + b_{jk}(m, m) - B^s_k g_{js}.$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x^k} = -2B^s_k(r_s, m).$$

$$a_j(0) = 0, \quad \lambda(0) = 1.$$

Утверждается, что если рассмотреть $a_j(x) = 1$, $\lambda(x) = 1$, то они будут удовлетворять этой системе. Действительно, при явной подстановке в систему это становится очевидно.

Итак, скалярные произведения векторов r_i — заданная матрица первой квадратичной формы, а $m(x)$ —единичный вектор нормали.

Осталось проверить, что матрица второй квадратичной формы построенной поверхности — это матрица b. Обозначим матрицу второй квадратичной формы нашей поверхности M через $\widehat{b}_{ij}$. Тогда имеем

$$\widehat{b}_{ij} = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j}, m\right) = \left(\frac{\partial r_i}{\partial x^j}, m\right) = b_{ij}$$

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ