ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЛУКЬЯНЕНКО
ДМИТРИЙ ВИТАЛЬЕВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ

НЕКРАСОВА АЛЕКСЕЯ ДМИТРИЕВИЧА

Содержание

Лекция 1. Основные понятия **5**
Значение дифференциальных уравнений 5
Предметная и математическая постановки задачи 5
Определение дифференциального уравнения 7
Линейное дифференциальное уравнение первого порядка 7
Линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка . . . 7
Общее решение однородного дифференциального уравнения 8
Теорема о единственности представления решения 9
Корректно поставленная задача по Адамару 10
Задача Коши 10
Линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка . . 10
Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения . 11

Лекция 2. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши **14**
Постановка задачи Коши 14
Дополнительные условия на неоднородность 14
Ограничения на область существования решения 15
Теорема существования и единственности решения задачи Коши в локальной формулировке 17

Лекция 3. Теорема сравнения и метод дифференциальных неравенств **20**
Теорема существования и единственности решения задачи Коши в глобальной формулировке 20
Пример применения локальной формулировки теоремы 20
Расширение множества, на котором решение существует и единственно . . 21
Теорема Чаплыгина о дифференциальных неравенствах 22
Теорема существования и единственности решения задачи Коши в формулировке Чаплыгина 23

Лекция 4. Теорема о существовании и единственности решения для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений **25**
Нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений 25
Понятие нормы вектора 25
Условия для выполнения теоремы 25
Локальная формулировка теоремы 26
Банаховы пространства 26
Понятие неподвижной точки 27
Сжимающий оператор 27

Лекция 5. Линейные однородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка **29**
Определение дифференциального уравнения порядка n 29
Идея доказательства теоремы о существовании и единственности решения 29

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема о принципе суперпозиции 31
Однородное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка 32
Определитель Вронского системы функций 32
Фундаментальная система решений 35
Теорема о существовании фундаментальной системы решений 35

Лекция 6. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка 38
Теорема об общем решении неоднородного дифференциального уравнения 38
Решение неоднородного уравнения 38
Представление решения с помощью функции Коши 39
Уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами 42

Лекция 7. Системы линейных дифференциальных уравнений 44
Определение системы линейных дифференциальных уравнений 44
Однородная система линейных дифференциальных уравнений 44
Линейная зависимость и независимость вектор-функций 45
Фундаментальная система решений линейной системы дифференциальных уравнений 46
Теорема о представлении решения однородной системы 47
Способ нахождения фундаментальной матрицы системы уравнений 48
Решение неоднородной системы дифференциальных уравнений 48
Получение решения неоднородной системы уравнений методом Лагранжа 49
Матрица Коши 50

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 1. Основные понятия

Значение дифференциальных уравнений

Практически все задачи в современной науке так или иначе сводятся к решению дифференциальных или интегральных уравнений. Данный курс посвящен обыкновенным дифференциальным уравнениям, то есть таким уравнениям, в которых неизвестная функция зависит только от одной переменной, причем функция и ее производные задаются при каждом значении переменной однозначно. Такие уравнения в задачах физики встречаются очень часто.

Предметная и математическая постановки задачи

При решении любой задачи физики сначала выполняется *предметная постановка* задачи. Под предметной постановкой задачи подразумевается выбор области мироздания, в которой лежит данная задача и выбор законов, которые будут учитываться при решении задачи, а которые — пренебрегаться. Далее в соответствие каждому закону ставится дифференциальное уравнение. Это *математическая постановка* задачи.

Пример: классическая задача о броске тела под углом к горизонту. Данная задача принадлежит физической области мироздания, конкретно — к разделу физики — механике, подразделу — кинематике. В школьной программе физики постановка этой задачи учитывает только всемирный закон тяготения. Таким образом, предметная постановка задачи завершена. Данной предметной постановке сопоставляется математическая постановка: либо уравнение, описывающее второй закон Ньютона, либо (в продвинутых школах) дифференциальное уравнение для второго закона Ньютона. Математическая постановка завершена. Далее можно получать решение задачи.

По мере развития науки и техники данная предметная постановка задачи становится неудовлетворительной — необходимо учитывать действующие на тело эффекты других сил. Например — силу трения воздуха. В школе эффект силы трения не удается учесть, т. к. методы школьной математики не позволяют решать такую математическую задачу. В рамках теоретической механики решение задачи о броске тела уже может учитывать трение воздуха.

По мере дальнейшего развития техники при решении данной задачи приходится учитывать все более и более тонкие эффекты (плотность воздуха, сила Кориолиса и так далее). Математическая постановка задачи тоже усложняется. По мере усложнения задачи становится все более сложным получение аналитического решения, возникает необходимость в использовании численных методов для решения дифференциальных уравнений.

Данный курс предполагает также умение адекватно ставить предметную модель, так как при неверной постановке предметной модели решение математической модели (дифференциального уравнения) лишено практического смысла.

Пример: задача о тепловыделении в простейшей химической реакции:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ x\,(0) = 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Очевидное аналитическое решение:

$$x\,(t) = \frac{1}{1-t}. \tag{1.2}$$

Из аналитического решения можно сделать вывод о бесконечном тепловыделении в момент времени $t = 1$ ($x \to \infty$ при $t \to 1$). Можно это видеть на картинке 1.1, где представлены аналитическое решение задачи (1.1) и численные решения, полученные с помощью разных численных схем. Однако, этот вывод неверный — не может выделиться бесконечная энергия в результате химической реакции с конечным количеством вещества.

Вывод: постановка задачи (1.1) не учитывает законы сохранения, и потому модель не является корректной, решению задачи нельзя доверять для любых значений аргумента t. Для задачи (1.1) можно получить корректную постановку, если рассматривать ее решение на некотором конечном интервале времени $t \in [0, 1)$. Этот вывод можно сделать и из иллюстрации 1.1, так как разные численные решения точно воспроизводят аналитическое решение (1.2) только до момента $t = 1$.

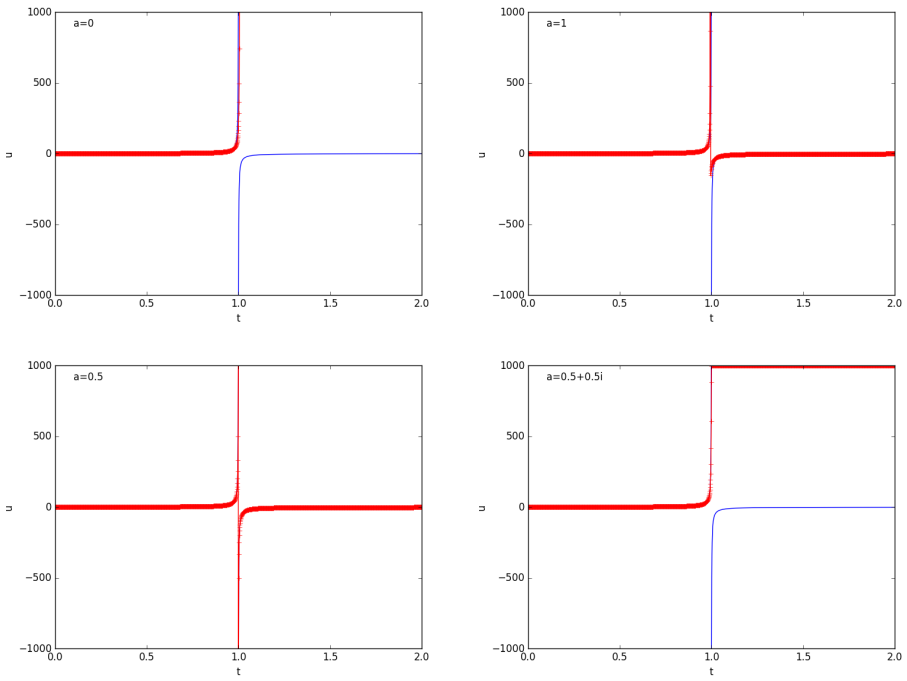

Рис. 1.1. Аналитическое решение задачи о тепловыделении (1.1) (синяя линия) и численные решения (красные кресты), полученные разными методами. Данная иллюстрация аналогична иллюстрации, сделанной преподавателем на доске, но для наглядности разделена на четыре рисунка.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Реальные задачи не предполагают априорного знания результата, поэтому необходимо иначе учитывать корректность постановки задачи. Действенным методом проверки корректности предметной задачи является решение математической модели численными методами с последующим сравнением полученного решения с предсказываемым.

Теоретическая часть курса «Дифференциальные уравнения» в том числе позволяет сделать выводы о том, какой части численного решения исследуемой задачи можно доверять.

Определение дифференциального уравнения

Введем формальное определение дифференциального уравнения.

Определение 1.1. *Уравнение называется дифференциальным, если неизвестная функция входит в него под знаком производной или дифференциала.*

Определение 1.2. *Уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением, если неизвестная функция входит в него под знаком производной или дифференциала и зависит только от одной переменной.*

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Начнем рассмотрение обыкновенных дифференциальных уравнений с простейшего случая — линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Определение 1.3. *Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, которая входит в данное уравнение.*

Определение 1.4. *Дифференциальное уравнение называется линейным, если функция и ее производные входят в уравнение линейно.*

Определение 1.5. *Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида:*

$$y' + p(x)\, y = f(x). \tag{1.3}$$

Форма записи (1.3) подразумевает, что функции $p(x)$, $f(x)$ не зависят от y, а сама функция $y = y(x)$ зависит только от аргумента x.

Определение 1.6. *Функция $f(x)$, которая не зависит ни от искомой функции y, ни от ее производных, называется неоднородностью.*

Линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка

Рассмотрим сначала уравнение вида (1.3), в котором $f(x) = 0$:

Определение 1.7. *Линейное дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если оно записывается в форме:*

$$y' + p(x)\, y = 0. \tag{1.4}$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения

Получим решение однородного уравнения в общем виде.

Перепишем уравнение (1.4) в виде:

$$\frac{dy}{dx} = -p\left(x\right)y, \tag{1.5}$$

разделим переменные, то есть все множители, содержащие y, перенесем в одну часть, все множители, содержащие аргумент x, — в другую:

$$\frac{dy}{y} = -p\left(x\right)dx. \tag{1.6}$$

Заметим: переход между двумя последними равенствами (1.9) и (1.6) неэквивалентен, он подразумевает, что $y\left(x\right) \neq 0$. Для того, чтобы не потерять возможное решение, надо рассматривать этот случай отдельно. Можно подставить $y\left(x\right) = 0$ в исходное уравнение (1.4) и убедиться, что это равенство является решением однородного уравнения.

Теперь проинтегрируем уравнение с разделенными переменными (1.6):

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p\left(x\right)dx,$$

$$\ln\left|y\right| = -\int p\left(x\right)dx + C, \quad C \in \mathbb{R}^1.$$

Эквивалентное преобразование:

$$\left|y\right| = e^{-\int p(x)dx + C} = e^C e^{-\int p(x)dx},$$

переобозначим константу:

$$C = e^C, \quad C \in \mathbb{R}^{1+} = \left(0, +\infty\right),$$

$$y = \pm Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}^{1+},$$

снова переобозначим константу:

$$C = \pm C, \quad C \in \mathbb{R}^1 \backslash \{0\},$$

$$y\left(x\right) = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}^1 \backslash \{0\}. \tag{1.7}$$

Осталось вспомнить про замечание, что $y\left(x\right) = 0$ тоже является решением, что можно естественным образом учесть, добавив в область значений константы в выражении (1.7) значение $C = 0$.

Таким образом, решение изначального однородного уравнения (1.4):

$$y\left(x\right) = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}^1. \tag{1.8}$$

Определение 1.8. *В курсах дифференциальных уравнений процесс решения дифференциального уравнения принято называть интегрированием.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

То есть термин «интегрирование» эквивалентен термину «решение». Поэтому, чтобы не происходило неточностей в терминологии, приняты следующие определения:

Определение 1.9. *Знак интеграла принято называть квадратурой, а процесс поиска определенного или неопределенного интеграла принято называть квадрированием.*

Определение 1.10. *Решением дифференциального уравнения в квадратурах называется выражение неизвестной функции через элементарные функции и интегралы от элементарных функций.*

В зависимости от вида функции $p(x)$ можно либо аналитически получить выражение для функции $y(x)$ из формулы (1.8), либо, для сложного вида $p(x)$, с помощью численного интегрирования получать значения функции $y(x)$ для используемых в задаче значений аргумента x.

Определение 1.11. *Общим решением дифференциального уравнения называется совокупность всех его решений.*

Теорема о единственности представления решения

Теперь докажем теорему о единственности представления решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка.

Теорема 1.1. *Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка представимо в таком виде:*

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}^1. \tag{1.9}$$

Доказательство:

Пусть $\varphi(x)$ — любое решение. То есть:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} + p(x)\varphi(x) = 0.$$

Теперь рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\Phi(x) = \varphi(x)e^{+\int p(x)dx}.$$

Вычислим производную:

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx}e^{+\int p(x)dx} + p(x)\varphi(x)e^{+\int p(x)dx} = \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} + p(x)\varphi(x)\right)e^{+\int p(x)dx} = 0,$$

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) = C.$$

Значит, любое решение дифференциального линейного однородного уравнения первого порядка представимо в виде, аналогичном (1.9):

$$\varphi(x) = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

■

Замечание: с математической точки зрения рассмотренная нами задача (1.4) имеет бесконечно много решений. В прикладных задачах бесконечное множество решений невозможно, поэтому с практической точки зрения задача (1.4) не является корректно поставленной. Введем определение корректно поставленной задачи.

Корректно поставленная задача по Адамару

Определение 1.12. *Задача называется корректно поставленной по Адамару, если ее решение:*

1) существует;

2) единственно;

3) устойчиво по отношению ко входным данным.

Невыполнение любого из этих условий означает некорректную постановку задачи.

Задача Коши

Для выделения единственного решения задачи (1.4) необходимо поставить дополнительные условия. Обычно дополнительное условие ставится в виде известного значения функции при некотором значении аргумента — так называемая задача Коши:

$$\begin{cases} y' + p(x)\, y = 0, \\ y\left(x^0\right) = y^0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Дополнительное условие выделяет из множества интегральных кривых (при любых значениях C) одну определенную кривую, например, как показано на рис. 1.2.

Задачу Коши также называют *начальной* задачей, так как на практике часто аргументом искомой функции является время.

Решение задачи Коши (1.10) с учетом выкладок, проведенных ранее, получится:

$$y(x) = y^0 e^{-\int\limits_{x^0}^{x} p(\xi) d\xi}, \tag{1.11}$$

можно убедиться в этом прямой подстановкой в систему (1.10).

Замечание: если рассматривать линейное однородное уравнение с дополнительным условием, также равным нулю ($y^0 = 0$), то решением задачи (1.10) будет функция, тождественно равная нулю $y(x) = 0$.

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

Вернемся к рассмотрению неоднородного уравнения (1.3):

$$y' + p(x)\, y = f(x).$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

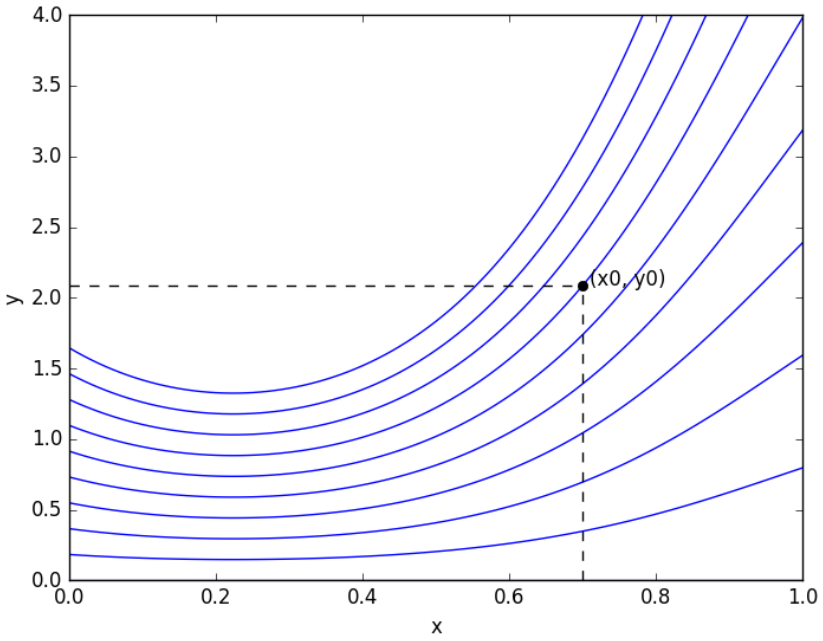

Рис. 1.2. Множество интегральных кривых $y(x)$ — синие линии и выделение из них одной кривой с помощью начального условия в задаче (1.10).

Решение уравнения (1.3) можно искать разными способами. Одним из самых распространенных способов поиска решения является *метод вариации постоянной или метод Лагранжа*. Данный метод заключается в следующем:

1) Находится общее решение однородного уравнения (1.4):

$$y\left(x\right) = Ce^{-\int p(x)dx};$$

2) Решение неоднородного уравнения (1.3) находится в виде:

$$y\left(x\right) = C\left(x\right)e^{-\int p(x)dx}, \tag{1.12}$$

то есть константа варьируется по переменной x.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

В соответствии с методом вариации постоянной при подстановке (1.12) в производную y' получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} - p\left(x\right)C\left(x\right)e^{-\int p(x)dx},$$

подставим в неоднородное уравнение (1.3):

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} - p\left(x\right)C\left(x\right)e^{-\int p(x)dx} + p\left(x\right)C\left(x\right)e^{-\int p(x)dx} = f\left(x\right),$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

два слагаемых сокращаются, после чего разделяем переменные:

$$dC\left(x\right) = f\left(x\right)e^{+\int p(x)dx}dx,$$

интегрируем:

$$\int dC\left(x\right) = \int f\left(x\right)e^{+\int p(x)dx}dx,$$

$$C\left(x\right) = \int f\left(x\right)e^{+\int p(x)dx}dx + \tilde{C},$$

подставим результат в решение (1.12):

$$y\left(x\right) = e^{-\int p(x)dx}\int f\left(x\right)e^{+\int p(x)dx}dx + \tilde{C}e^{-\int p(x)dx}. \tag{1.13}$$

Таким образом, методом вариации постоянной получено решение неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка (1.3) для произвольных функций $p\left(x\right)$, $f\left(x\right)$ в квадратурах. То есть функция $y\left(x\right)$ выражена явно. Для конкретных функций $p\left(x\right)$, $f\left(x\right)$ можно вычислять интегралы в формуле (1.13) либо аналитически, либо численно.

Обратим внимание на структуру общего решения: второй член в формуле (1.13) совпадает с общим решением однородного уравнения (1.8), первый член является некоторым частным решением неоднородного уравнения (1.3). Поэтому получается утверждение, аналогичное утверждению, справедливому для алгебраических уравнений: *общее решение неоднородного уравнения является суммой общего решения однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения.*

Снова заметим, что задача (1.3) поставлена некорректно. Добавим дополнительное условие для выделения единственного решения:

$$\begin{cases} y' + p\left(x\right)y = f\left(x\right), \\ y\left(x^0\right) = y^0. \end{cases} \tag{1.14}$$

Тогда решение (1.13) преобразуется:

$$y\left(x\right) = e^{-\int\limits_{x^0}^{x} p(\xi)d\xi}\int\limits_{x^0}^{x} f\left(\eta\right)e^{\int\limits_{x^0}^{\eta} p(\xi)d\xi}d\eta + y^0 e^{-\int\limits_{x^0}^{x} p(\xi)d\xi},$$

преобразуем далее:

$$y\left(x\right) = \int\limits_{x^0}^{x} f\left(\eta\right)e^{-\left(\int\limits_{x^0}^{x} p(\xi)d\xi + \int\limits_{\eta}^{x^0} p(\xi)d\xi\right)}d\eta + y^0 e^{-\int\limits_{x^0}^{x} p(\xi)d\xi},$$

$$y\left(x\right) = \int\limits_{x^0}^{x} e^{-\int\limits_{\eta}^{x} p(\xi)d\xi} f\left(\eta\right)d\eta + y^0 e^{-\int\limits_{x^0}^{x} p(\xi)d\xi}.$$

Введем обозначение:

$$K\left(x,\eta\right) = e^{-\int\limits_{\eta}^{x} p(\xi)d\xi}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 1.13. *Функция $K(x,\eta)$ называется функцией Коши или импульсной функцией.*

С ее помощью решение задачи Коши (1.14) можно записать в виде:

$$y(x) = \int_{x^0}^{x} K(x,\eta)\, f(\eta)\, d\eta + y^0 K\left(x, x^0\right). \tag{1.15}$$

Смысл рассмотрения функции Коши заключается в том, что для определенного класса задач с одной функцией $p(x)$ можно один раз получить функцию Коши и применять ее для различных начальных условий и неоднородностей. Это позволяет существенно сократить время расчетов, так как можно не решать для каждой задачи вида (1.14) дифференциальное уравнение, а просто вычислять интеграл (1.15), используя найденную функцию Коши.

Лекция 2.
Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши

Постановка задачи Коши

Тема данной лекции — теорема существования и единственности решения задачи Коши для скалярного обыкновенного дифференциального уравнения.

Рассмотрим дифференциальное уравнение общего вида:

$$y' = f(x, y). \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) — первого порядка, разрешенное относительно старшей производной. Но уравнение (2.1) написано в общем случае и может быть нелинейным. Для выделения единственного решения (при условии существования решения) добавим дополнительное условие, получим задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ y\left(x^0\right) = y^0, \end{cases} \tag{2.2}$$

Выбор конечного интервала $(x^0, a]$ в задаче (2.2) для поиска решения связан с тем, что в практически значимых задачах моделирование выполняется в ограниченных пределах по временной координате, если координата x выполняет роль времени.

Дополнительные условия на неоднородность

Для доказательства последующих утверждений наложим дополнительные условия на функцию $f(x, y)$. Будем предполагать, что $f(x, y)$ — непрерывна на множестве (см. рис. 2.1):

$$D = \left[x^0, a\right] \times \left[y^0 - b, y^0 + b\right]. \tag{2.3}$$

Выбор ограниченной области по координате y связан с тем, что при таком выборе область (2.3) оказывается ограниченной и замкнутой, в отличие от возможного выбора области-полосы $[x^0, a] \times (-\infty, +\infty)$, которая не является ограниченной. Это позволяет применить для области (2.3) теорему Вейерштрасса.

Далее будем предполагать условия:

1) Функция $f(x, y)$ является определенной и непрерывной на множестве D.

   Из условия ограниченности области D и теоремы Вейерштрасса можно утверждать:

$$|f(x, y)| \leqslant M \quad \forall (x, y) \in D.$$

2) $f(x, y)$ — удовлетворяет условию Липшица по переменной y на множестве D.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

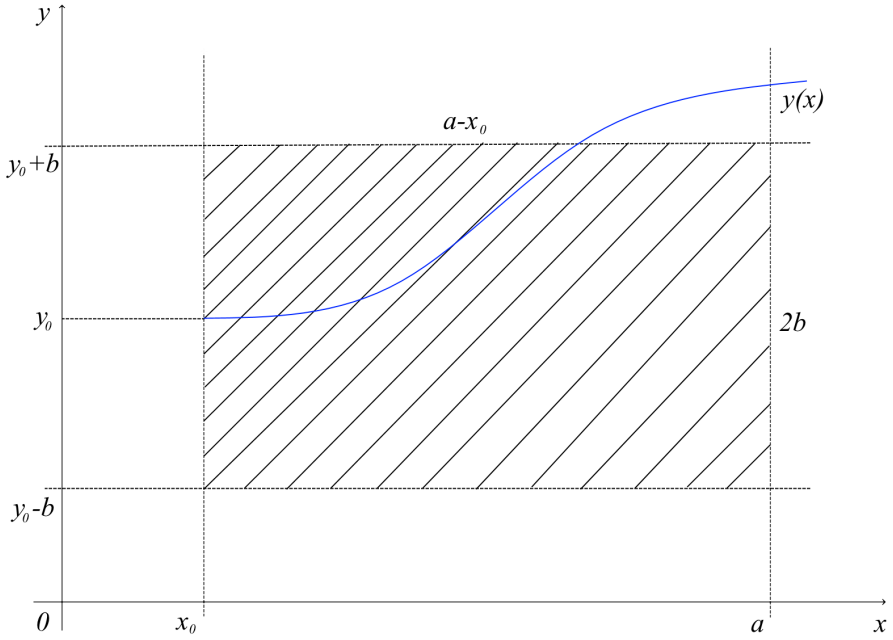

Рис. 2.1. Область D, задаваемая формулой (2.3).

Определение 2.1. *Функция $f(x,y)$ называется удовлетворяющей условию Липшица по переменной y, если:*

$$\exists L: \quad \left(x,y^1\right), \left(x,y^2\right) \in D \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \left|f\left(x,y^1\right) - f\left(x,y^2\right)\right| \leqslant L\left|y^1 - y^2\right|. \tag{2.4}$$

Замечание: при стремлении $y^2 \to y^1$ неравенство (2.4) переходит в условие ограниченности частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}$. Однако, условие (2.4) получается более общим, так как частная производная может не существовать, а условие Липшица будет оставаться справедливым.

Ограничения на область существования решения

Для области (2.3) определенные интегральные кривые $y(x)$ могут выходить за пределы этой области. Сделаем оценку множества, в котором заключены кривые. Для этого рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) = \pm M, \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ y\left(x^0\right) = y^0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Задача (2.5) дает ограничения на все интегральные кривые для задачи Коши (2.2) в области D. Решим задачу (2.5):

$$dy = \pm M dx,$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

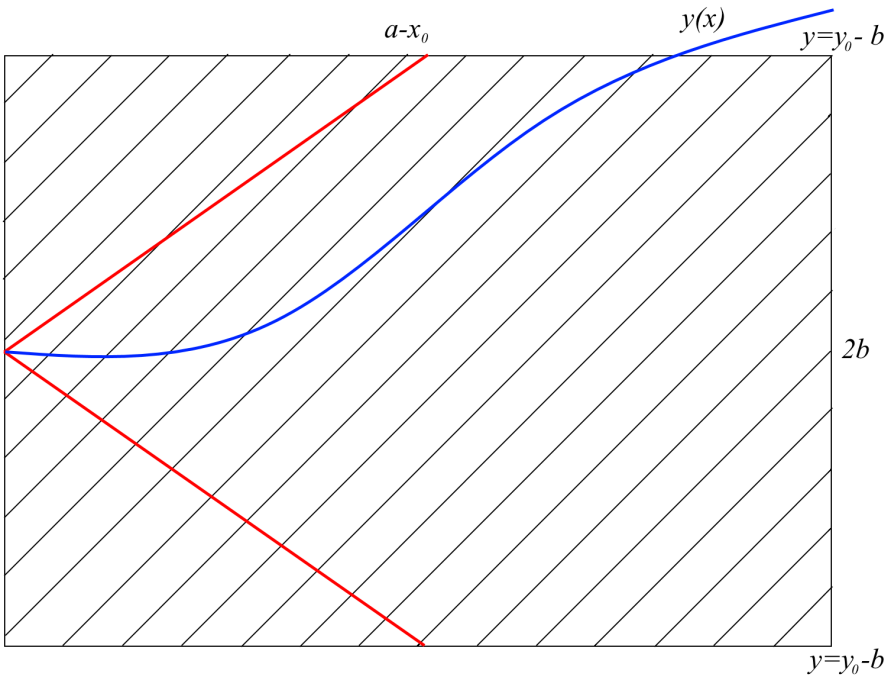

Рис. 2.2. Красные линии — ограничивающие кривые, полученные из задачи (2.5) для всех интегральных кривых в области D для задачи (2.2).

$$\begin{gathered} y = \pm Mx + C, \\ y^0 = \pm Mx^0 + C \quad \Rightarrow \quad C = y^0 \mp Mx^0, \\ y = \pm Mx + y^0 \mp x^0 = y^0 \pm M\left(x - x^0\right). \end{gathered} \tag{2.6}$$

Теперь получим результат пересечения кривых (2.6) с верхней и нижней границами области D, эти границы задаются уравнениями $y = y^0 \pm b$ (см. рис. 2.2).

$$\begin{cases} y = y^0 \pm M\left(x - x^0\right), \\ y = y^0 \pm b. \end{cases} \tag{2.7}$$

Приравняем правые части уравнений (2.7):

$$y^0 \pm b = y^0 \pm M\left(x - x^0\right),$$

$$x = x^0 + \frac{b}{M}.$$

То есть на отрезке $x \in \left[x^0, x^0 + \frac{b}{M}\right]$ мы можем быть уверены, что интегральная кривая не покинет прямоугольник D. Обозначим:

$$H = \min\left(\frac{b}{M}, a - x^0\right). \tag{2.8}$$

Добавление в равенство (2.8) величины $a - x^0$ связано с тем, что при достаточно малом M ограничивающие кривые не пересекутся с верхней и нижней границами прямоугольника D, то есть все интегральные кривые заведомо принадлежат области D.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема существования и единственности решения задачи Коши в локальной формулировке

Теорема 2.1. *Пусть функция $f(x,y)$ удовлетворяет условиям 1 и 2, то есть $f(x,y)$ — определена и непрерывна в D, а также удовлетворяет условию Липшица (2.4) по переменной y в области D. Тогда решение задачи Коши (2.2):*

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ y\left(x^0\right) = y^0, \end{cases} \tag{2.9}$$

существует и единственно на отрезке $x \in [x^0, x^0 + H]$.

Теорема 2.1 — теорема существования и единственности решения задачи Коши в *локальной* формулировке, потому как данная теорема утверждает существование и единственность решения задачи Коши только на локальном подмножестве интервала $[x^0, a]$.

Доказательство:

Сначала докажем существование решения задачи при $x \in (x^0, x^0 + H]$.

Заметим, что задача Коши (2.2) эквивалентна интегральному уравнению:

$$y(x) = y^0 + \int\limits_{x^0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi. \tag{2.10}$$

Будем использовать метод последовательных приближений — так называемый метод Пикара. Для этого возьмем произвольную непрерывную на $[x^0, x^0 + H]$ функцию $y_0(x)$ и составим последовательность задач для $n \geqslant 1$:

$$\begin{cases} y_n' = f(x, y_{n-1}(x)), \quad x \in \left(x^0, x^0 + H\right], \\ y_n\left(x^0\right) = y^0, \end{cases}$$

каждая из которых эквивалентна уравнению вида (2.10):

$$y_n(x) = y^0 + \int\limits_{x^0}^{x} f(\xi, y_{n-1}(\xi))\, d\xi. \tag{2.11}$$

Уравнение вида (2.11) уже не является интегральным, так как на каждой следующей итерации мы подставляем в интеграл известную функцию, полученную на предыдущей итерации, причем на каждой итерации получается непрерывная функция. Поэтому получаем бесконечную последовательность функций:

$$\{y_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}.$$

Исследуем данную функциональную последовательность на равномерную сходимость с помощью мажорантного признака Вейерштрасса. Для этого построим мажорирующую функцию:

$$S(x) = y_1(x) + (y_2(x) - y_1(x)) + \ldots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)). \tag{2.12}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Очевидно, что:

$$S_n(x) = y_n(x).$$

Рассмотрим модуль разности двух итераций (2.11):

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left| y^0 + \int_{x^0}^{x} f(\xi, y_1(\xi))\, d\xi - \left(y^0 + \int_{x^0}^{x} f(\xi, y_0(\xi))\, d\xi \right) \right| =$$

$$= \left| \int_{x^0}^{x} \left[f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_0(\xi)) \right] d\xi \right| \leqslant \int_{x^0}^{x} |f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_0(\xi))|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant L \int_{x^0}^{x} |y_1(\xi) - y_0(\xi)|\, d\xi \leqslant L \max_{\xi \in D} |y_1(\xi) - y_0(\xi)| \left(x - x^0\right) \leqslant$$

$$\leqslant L2b\left(x - x^0\right) \leqslant 2bLH.$$

Теперь аналогично получим для следующих двух итераций:

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leqslant L \int_{x^0}^{x} |y_2(\xi) - y_1(\xi)|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant L \int_{x^0}^{x} L2b\left(\xi - x^0\right) d\xi = 2bL^2 \left. \frac{\left(\xi - x^0\right)^2}{2} \right|_{x^0}^{x} = 2bL^2 \frac{\left(x - x^0\right)^2}{2} \leqslant 2b\frac{(LH)^2}{2}.$$

Используя метод математической индукции, можно показать, что:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant 2b\frac{(LH)^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{2.13}$$

Поэтому для оценки модуля функции (2.12) получаем числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2b\frac{(LH)^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{2.14}$$

который сходится. Сходимость ряда можно доказать, например, с помощью признака Даламбера.

Тем самым мы доказали, используя мажорантный признак Вейерштрасса для функциональных рядов, что функциональный ряд (2.12) равномерно сходится и мажорируется числовым рядом (2.14). Из равномерной сходимости следует сходимость, поэтому существует непрерывная функция, к которой сходятся частичные суммы ряда (2.12):

$$\exists y(x): \quad y_n(x) \Longrightarrow y(x), \quad n \to +\infty.$$

Теперь вернемся к интегральному уравнению (2.11) и возьмем предел от обеих частей:

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(y^0 + \int_{x^0}^{x} f(\xi, y_{n-1}(\xi))\, d\xi \right),$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$y(x) = y^0 + \int\limits_{x^0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi,$$

что совпадает с (2.10).

Таким образом, мы показали, что существует функция, которая удовлетворяет интегральному уравнению (2.10). Из эквивалентности интегрального уравнения (2.10) задаче Коши (2.2) следует тот факт, что существует решение задачи Коши. Теперь докажем единственность решения задачи (2.2).

Допустим, что существует два решения задачи Коши $y_1(x)$, $y_2(x)$, которые одновременно удовлетворяют задаче (2.2), или, что эквивалентно, удовлетворяют соответствующему интегральному уравнению (2.10).

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$u(x) = y_2(x) - y_1(x).$$

Проведем оценки:

$$|u(x)| = |y_2(x) - y_1(x)| = \left| y^0 + \int\limits_{x^0}^{x} f(\xi, y_2(\xi))\, d\xi - y^0 - \int\limits_{x^0}^{x} f(\xi, y_1(\xi))\, d\xi \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{x^0}^{x} (f(\xi, y_2(\xi)) - f(\xi, y_1(\xi)))\, d\xi \right| \leqslant \int\limits_{x^0}^{x} |f(\xi, y_2(\xi)) - f(\xi, y_1(\xi))|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant L \int\limits_{x^0}^{x} |y_2(\xi) - y_1(\xi)|\, d\xi = L \int\limits_{x^0}^{x} |u(\xi)|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant L\left(x - x^0\right) \max_{[x^0, x^0+H]} |u(x)| \leqslant LH \max_{[x^0, x^0+H]} |u(x)|. \quad (2.15)$$

Вспомогательное утверждение:

$$\text{Если } LH < 1, \text{ то: } u(x) \equiv 0. \quad (2.16)$$

Утверждение (2.16) справедливо, так как для ненулевой функции на некотором отрезке всегда выполняется $|u(x)| \leqslant C \max |u(x)|$, где $C \geqslant 1$.

Если же для рассматриваемой задачи (2.2) получилось, что $LH \geqslant 1$, то рассмотрим такое значение h, чтобы выполнялось $Lh < 1$, и тогда на рассматриваемом новом отрезке получим $u(x) = 0$.

На оставшейся части отрезка $[x^0 + h, x^0 + H]$ проведем оценки, аналогичные оценке (2.15), с заменой константы H на константу $H - h$.

Снова сравниваем $L(H - h)$ с единицей и повторяем процедуру до тех пор, пока не покроем весь отрезок $[x^0, x^0 + H]$.

Таким образом, $u(x) \equiv 0$ на $[x^0, x^0 + H]$.

Следовательно, $y_1(x) \equiv y_2(x)$, что доказывает единственность решения скалярной задачи Коши (2.2).

■

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 3. Теорема сравнения и метод дифференциальных неравенств

Теорема существования и единственности решения задачи Коши в глобальной формулировке

Теперь мы будем обобщать утверждение теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши в локальной формулировке 2.1 (для ограниченной области) на более общий случай решения в полосе $D = [x^0, a] \times \mathbb{R}^1$ и получим таким образом глобальную формулировку теоремы. Она формулируется и доказывается аналогично локальной формулировке, поэтому доказательство опускается.

С практической точки зрения глобальная формулировка является более удобной. Однако данная формулировка теоремы не всегда применима, например:

$$\begin{cases} y' = y^2, \quad x \in (0, 2], \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Можно проверить, что для задачи (3.1) не выполняется условие Липшица, если рассматривать область-полосу (то есть если пользоваться глобальной формулировкой). В случае задачи (3.1), как уже было рассмотрено в первой лекции, известно аналитическое решение:

$$y(x) = \frac{1}{1 - x}, \tag{3.2}$$

которое, применительно к практическим задачам, задает решение, которому можно доверять лишь на интервале $x \in [0, 1)$. Теорема в локальной формулировке 2.1 позволяет доказать, что решение задачи Коши (3.1) существует лишь на данном интервале $[0, 1)$. Аналогично, теорему 2.1 можно применять и для других задач, для которых неизвестно аналитическое решение, если использовать численные методы решения.

Таким образом, теорема в глобальной формулировке более удобна для применения в практических задачах, а теорема в локальной формулировке применима для более широкого класса задач.

Пример применения локальной формулировки теоремы

Воспользуемся локальной формулировкой 2.1 для определения области существования решения рассматриваемой задачи (3.1).

Предположим, что решение задачи (3.1) существует и возрастает на искомом отрезке существования решения $[x^0, x^0 + H]$.

Имеем:

$$H = \frac{b}{M}, \quad M = \max_D |f(x, y)| = \max y^2.$$

Если мы допускаем, что функция только возрастает, то она достигает своего набольшего значения на правой границе:

$$M = \max_D y^2 = (1 + b)^2, \quad H(b) = \frac{b}{M} = \frac{b}{(1 + b)^2}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Если мы хотим найти наибольшую область существования решения, то надо найти экстремум функции $H(b)$:

$$H'(b) = 0,$$

$$\frac{1 \cdot (1+b)^2 - b \cdot 2(1+b)}{(1+b)^4} = 0,$$

$$(1+b)(1+b-2b) = 0,$$

$$b - 1 = 0, \quad b = 1 \quad \Rightarrow \quad H(1) = \frac{1}{4}.$$

То есть решение точно существует на отрезке $\left[x^0, x^0 + \frac{1}{4}\right]$. Так как мы знаем аналитическое решение (3.2), то мы можем заметить, что оценка отрезка существования решения получилась заниженной. Это связано с тем, что мы делали довольно грубые допущения. Можно добиться более точной оценки, если делать более точные допущения о поведении функции.

Расширение множества, на котором решение существует и единственно

Далее можно попробовать расширить найденную гарантированную область существования решения. Для этого нужно рассмотреть следующую задачу:

$$\begin{cases} y' = y^2, \quad x \in \left(\frac{1}{4}, 2\right], \\ y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3}, \end{cases} \tag{3.3}$$

где начальное значение функции вычислено из известного аналитического решения (3.2). Для задачи (3.3) можно повторить рассуждения из предыдущего подраздела. Тогда получим:

$$H(b) = \frac{b}{\left(\frac{4}{3} + b\right)^2},$$

экстремум достигается в точке $b = \frac{3}{16}$. Получаем область существования решения:

$$\left[0, \frac{1}{4} + \frac{3}{16}\right], \tag{3.4}$$

далее можно аналогично ставить вспомогательные задачи на новых отрезках (аналогично (3.3)) и в итоге получить область существования решения $[0, 1)$.

Однако, данный метод неприменим в практических задачах, так как он предполагает использование известного аналитического решения для получения нового начального условия (3.3), (3.2). В реальной задаче этим воспользоваться нельзя.

Снова рассмотрим задачу Коши в общем виде:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ y\left(x^0\right) = y^0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Имеем следующую проблему: глобальная формулировка теоремы применима для ограниченного класса функций $f(x,y)$. Локальная формулировка неудобна для практических целей, она дает гарантированные оценки лишь на ограниченных подмножествах.

Теорема Чаплыгина о дифференциальных неравенствах

Сначала сформулируем вспомогательные утверждения.

Теорема 3.1. *Пусть существует $y(x)$ — решение задачи Коши (3.5), и пусть также существует функция $z(x) \in C([x^0,a]) \cap C^1((x^0,a])$, удовлетворяющая условиям:*

$$\begin{cases} z'(x) < f(x, z(x)), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ z\left(x^0\right) < y^0. \end{cases}$$

Тогда:

$$z(x) < y(x) \quad \forall x \in \left[x^0, a\right].$$

Доказательство:

Будем доказывать от противного.

Заметим:

$$z\left(x^0\right) < y\left(x^0\right) = y^0.$$

Допустим, что данное неравенство первый раз нарушится в точке $x^1 \in (x^0, a]$, то есть:

$$z\left(x^1\right) = y\left(x^1\right), \quad z'\left(x^1\right) \geqslant y'\left(x^1\right) = f\left(x^1, y\left(x^1\right)\right) = f\left(x^1, z\left(x^1\right)\right).$$

То есть мы только что получили, что:

$$z' \geqslant f\left(x^1, z\left(x^1\right)\right),$$

и это противоречит условию теоремы. Значит, утверждение теоремы верно. ∎

Определение 3.1. *Функция $\alpha(x) \in C([x^0,a]) \cap C^1((x^0,a])$ называется нижним решением, если для нее справедливы условия (см. рис. 3.1):*

$$\begin{cases} \alpha'(x) < f(x, \alpha(x)), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ \alpha\left(x^0\right) < y^0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Определение 3.2. *Функция $\beta(x) \in C([x^0,a]) \cap C^1((x^0,a])$ называется верхним решением, если для нее справедливы условия (см. рис. 3.1):*

$$\begin{cases} \beta'(x) > f(x, \alpha(x)), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ \beta\left(x^0\right) > y^0. \end{cases} \tag{3.7}$$

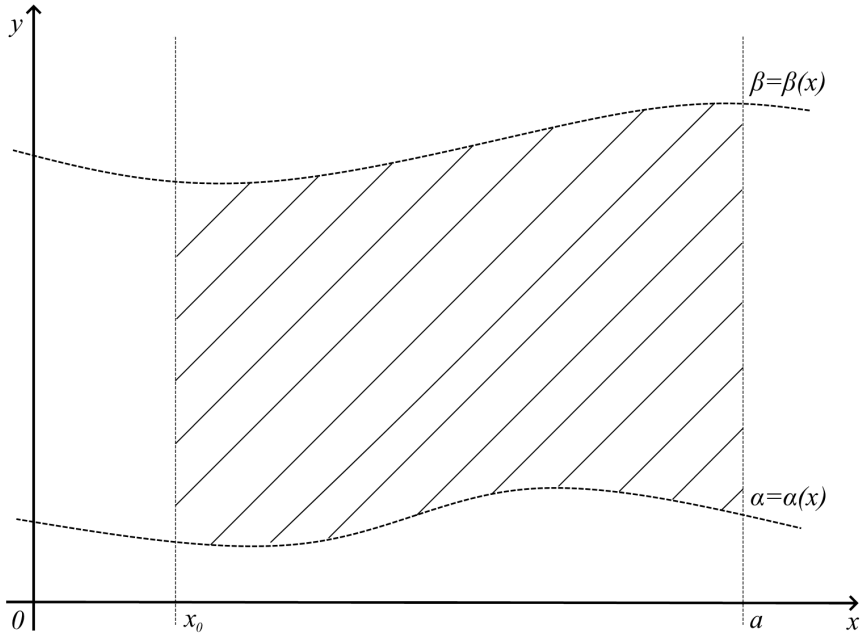

Рис. 3.1. Верхнее и нижнее решения α, β ограничивают область D.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши в формулировке Чаплыгина

Теорема 3.2 (Чаплыгина)**.** *Пусть существуют верхнее* (3.7) *и нижнее* (3.6) *решения задачи Коши* (3.5) $\beta(x)$, $\alpha(x)$ *и пусть функция* $f(x,y)$ *— определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной* y *в области* $D = [x^0, a] \times [\alpha(x), \beta(x)]$.

Тогда функция-решение задачи Коши (3.5) $y(x)$ *существует и единственна на* $[x^0, a]$ *и лежит между верхним и нижним решениями.*

Доказательство:

Построим вспомогательную функцию:

$$h(x,y) = \begin{cases} f(x, \beta(x)) + (y - \beta(x)), & y > \beta(x), \\ f(x,y), & y \in [\alpha(x), \beta(x)], \\ f(x, \alpha(x)) + (y - \alpha(x)), & y < \alpha(x). \end{cases} \tag{3.8}$$

В результате мы получаем функцию, определенную и непрерывную в полосе $[x^0, a] \times [-\infty, +\infty] = D^{\text{п}}$. Определим, удовлетворяет ли данная функция (3.8) условию Липшица. То есть нам надо доказать, что:

$$\exists N: \quad \forall \left(x, y^1\right), \left(x, y^2\right) \in D^{\text{п}} \quad \Rightarrow \quad \left|h\left(x, y^1\right) - h\left(x, y^2\right)\right| \leqslant N \left|y^1 - y^2\right|.$$

На данный момент нам известно, что:

$$\exists L: \quad \forall \left(x, y^1\right), \left(x, y^2\right) \in D \quad \Rightarrow \quad \left|f\left(x, y^1\right) - f\left(x, y^2\right)\right| \leqslant L \left|y^1 - y^2\right|.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Рассмотрим разные случаи, при которых функция (3.8) определяется разными способами (согласно определению).

В случае, когда точки $(x, y_1), (x, y_2)$ расположены в области между верхним и нижним решениями, $h(x, y) = f(x, y)$, доказательство тривиально.

В случае, например, когда $y_1 \geqslant \beta(x)$, $y_2 < \alpha(x)$, получаем:

$$\begin{aligned}\left|h\left(x, y^1\right) - h\left(x, y^2\right)\right| &= \left|f(x, \beta(x)) + y^1 - \beta(x) - f(x, \alpha(x)) - y^2 + \alpha(x)\right| = \\ &= \left|f(x, \beta(x)) - f(x, \alpha(x)) + y^1 - y^2 + \alpha(x) - \beta(x)\right| \leqslant \\ &\leqslant |f(x, \beta(x)) - f(x, \alpha(x))| + \left|y^1 - y^2\right| + |\alpha(x) - \beta(x)| \leqslant \\ &\leqslant L\,|\beta(x) - \alpha(x)| + \left|y^1 - y^2\right| + \left|y^1 - y^2\right| \leqslant (L+2)\left|y^1 - y^2\right|, \quad (3.9)\end{aligned}$$

то есть:

$$\left|h\left(x, y^1\right) - h\left(x, y^2\right)\right| \leqslant (L+2)\left|y^1 - y^2\right| = N\left|y^1 - y^2\right|. \quad (3.10)$$

Во всех других случаях, проводя аналогичные оценки (3.9), получим выражения, аналогичные (3.10). Таким образом, для любых произвольных y^1, y^2 из полосы $D^{\text{п}}$ выполнено условие Липшица с конечной константой N.

Значит, для вспомогательной задачи:

$$\begin{cases} y' = h(x, y), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ y\left(x^0\right) = y^0, \end{cases} \quad (3.11)$$

выполнены условия теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши в глобальной формулировке.

Вспомогательная задача (3.11) совпадает с рассматриваемой задачей (3.5) в интересующей нас области-полосе между верхним и нижним решениями. Таким образом, теорема доказана. ■

Теорема Чаплыгина 3.2 полезна с практической точки зрения: она применима для широкого круга задач, как и теорема в локальной формулировке, и она доказывает существование и единственность решения на всем рассматриваемом отрезке $[x^0, a]$. Нахождение верхнего и нижнего решений на практике зачастую не составляет больших трудностей.

Лекция 4. Теорема о существовании и единственности решения для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений

Определение 4.1. *Система уравнений вида:*

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \vec{f}\left(t, \vec{x}\right), \quad t \in \left(t_0, T\right], \\ \vec{x}\left(t_0\right) = \vec{x}_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

где

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}, \quad \vec{f}\left(t, \vec{x}\right) = \begin{pmatrix} f^1\left(t, x^1, \ldots, x^m\right) \\ \vdots \\ f^m\left(t, x^1, \ldots, x^m\right) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f^1\left(t, \vec{x}\right) \\ \vdots \\ f^m\left(t, \vec{x}\right) \end{pmatrix},$$

называется нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Термин «нормальная система» в данном случае означает, что уравнения разрешены относительно старшей производной.

Понятие нормы вектора

Для того, чтобы сравнивать между собой вектора, введем понятие нормы вектора:

$$\left\|\vec{y}\right\| := \max_{i=1,\ldots,m} \left|y^i\right|.$$

Норма вводится в таком виде как наиболее удобная для упрощения выкладок в последующей части курса.

Теперь введем понятие нормы вектор-функции:

$$\left\|\vec{x}\left(t\right)\right\| := \max_{i=1,\ldots,m} \max_{t\in[t_0,T]} \left|x^i\left(t\right)\right|.$$

Условия для выполнения теоремы

Перед формулировкой теоремы сформулируем условия:

1) $\vec{f}\left(t, \vec{x}\right)$ — определена и непрерывна в $m+1$-мерном параллелепипеде:

$$\overline{D} = \left\{t \in \left[t_0, T\right], \quad x^i \in \left[x_0^i - b^i, x_0^i + b^i\right]\right\}.$$

2) $\vec{f}\left(t, \vec{x}\right)$ — удовлетворяет условию Липшица по переменной $\vec{x}$ в $\overline{D}$:

$$\exists L > 0\colon \quad \forall \left(t, \vec{x}_1\right), \left(t, \vec{x}_2\right) \in \overline{D} \quad \forall i = 1, \ldots, m \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left|f^i\left(t, \vec{x}_1\right) - f^i\left(t, \vec{x}_2\right)\right| \leqslant L \sum_{j=1}^{m} \left|x_1^i - x_2^i\right|.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Утверждение: рассматриваемая задача Коши (4.1):

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \vec{f}\,(t, \vec{x}\,), \quad t \in (t_0, T\,], \\ \vec{x}\,(t_0) = \vec{x}_0, \end{cases}$$

эквивалентна системе интегральных уравнений:

$$\vec{x}\,(t) = \vec{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{f}\,(\xi, \vec{x}\,(\xi))\, d\xi. \tag{4.2}$$

В справедливости данного утверждения можно убедиться прямой подстановкой (4.2) в (4.1).

Локальная формулировка теоремы

Теорема 4.1. *Если $\vec{f}\,(t, \vec{x})$ — определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица в области $\overline{D}$, то решение задачи Коши* (4.1) *существует и единственно на множестве $[t_0, t_0 + H]$, где:*

$$H = \min\left(T - t_0, \frac{\min\limits_i b^i}{M}\right), \quad M \geqslant \left\|\vec{f}\,(t, \vec{x})\right\|.$$

Доказательство теоремы 4.1 можно проводить аналогично способу доказательства теоремы 2.1. Мы проведем доказательство другим способом — с помощью сведений из курса интегральных уравнений. Для этого сначала введем несколько определений.

Банаховы пространства

Определение 4.2. *Полное нормированное пространство называется банаховым.*

Зачем нужны банаховы пространства на практике?

Одним из свойств нормированного пространства является наличие нулевого элемента:

$$\|y\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \theta.$$

Это свойство позволяет сравнивать элементы пространства. Чем ближе норма разности двух элементов к нулю, тем ближе между собой два элемента.

Полнота пространства означает, что любая фундаментальная последовательность в нем сходится. Большинство численных методов решения задач — итерационные. На каждой итерации вычисляется очередной элемент пространства. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока разность элементов не станет меньше заданной точности вычислений. Из того, что последовательность элементов фундаментальная, следует сходимость последовательности. Поэтому можно остановить итерационный процесс при достижении нужной точности и считать, что полученное приближенное решение достаточно близко к точному.

Понятие неподвижной точки

Пусть Φ — оператор, определенный на заданном подмножестве D банахова пространства B.

Определение 4.3. *Точка $y \in D \subset B$ называется неподвижной точкой банахова пространства B, если:*

$$\Phi(y) = y.$$

Сжимающий оператор

Определение 4.4. *Оператор Φ называется сжимающим, если $\forall y_1, y_2 \in D \subset B$ выполняется:*

$$\exists q \in (0,1]: \quad \|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)\| \leqslant q\|y_1 - y_2\|.$$

Наша цель в доказательстве теоремы — показать, что у интегрального уравнения (4.2):

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\xi, \vec{x}(\xi))\, d\xi,$$

существует решение. Приступаем к доказательству.

Доказательство:

Определим оператор:

$$\Phi(\vec{x}) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\xi, \vec{x}(\xi))\, d\xi. \tag{4.3}$$

Покажем, что оператор (4.3) является сжимающим. Рассмотрим два произвольных вектора:

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \overline{D}_H = \left\{ t \in [t_0, t_0 + H], \quad x^i \in \left[x_0^i - b^i, x_0^i + b^i\right] \right\}.$$

Теперь рассмотрим разность значений оператора (4.3) для этих векторов:

$$\|\Phi(\vec{x}_1) - \Phi(\vec{x}_2)\| = \left\| \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\xi, \vec{x}_1(\xi))\, d\xi - \vec{x}_0 - \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\xi, \vec{x}_2(\xi))\, d\xi \right\| =$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\xi, \vec{x}_1(\xi))\, d\xi - \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\xi, \vec{x}_2(\xi))\, d\xi \right\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \left[\vec{f}(\xi, \vec{x}_1(\xi)) - \vec{f}(\xi, \vec{x}_2(\xi)) \right] d\xi \right\| \leqslant$$

$$\leqslant H \left\| \max_{t \in [t_0, t_0+H]} \left| \vec{f}(t, \vec{x}_1(t)) - \vec{f}(t, \vec{x}_2(t)) \right| \right\| = H \max_{t \in [t_0, t_0+H]} \left\| \vec{f}(t, \vec{x}_1(t)) - \vec{f}(t, \vec{x}_2(t)) \right\| =$$

$$= H \max_{i=1,\ldots,m} \max_{t \in [t_0, t_0+H]} \left| f^i(t, \vec{x}_1(t)) - f^i(t, \vec{x}_2(t)) \right| \leqslant H \max_{i=1,\ldots,m} \max_{t \in [t_0, t_0+H]} L \sum_{j=1}^{m} \left| x_1^j - x_2^j \right| \leqslant$$

$$\leqslant HL \max_{t \in [t_0, t_0+H]} \max_{j=1,\ldots,m} \left| x_1^j - x_2^j \right| \cdot m = HLm \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

То есть:

$$\|\Phi(\vec{x}_1) - \Phi(\vec{x}_2)\| \leqslant HLm\,\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|.$$

Таким образом, оператор Φ — сжимающий, если:

$$HLm \leqslant 1.$$

Данная сравнительно грубая оценка определяет область, в которой гарантированно существует решение задачи Коши. Теперь воспользуемся теоремой из курса интегральных уравнений, которая утверждает, что сжимающий оператор имеет неподвижную точку:

$$\Phi(\vec{x}) = \vec{x}.$$

Значит, рассматриваемое интегральное уравнение (4.2) имеет единственное решение. Эквивалентная этому уравнению задача Коши (4.1) также имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_0 + H]$. ■

Имеет место аналогичная теорема в глобальной формулировке. Она гарантирует единственность решения задачи (4.1) на всем отрезке решения $[t_0, T]$, но требует выполнения условий на функцию $\vec{f}(t, \vec{x})$ не в параллелепипеде $\overline{D}$, а в $m+1$-мерной полосе.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 5. Линейные однородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

Определение дифференциального уравнения порядка *n*

Будем рассматривать задачу для следующего дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = f(x), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ y\left(x^0\right) = y_1^0, \\ y'\left(x^0\right) = y_2^0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}\left(x^0\right) = y_n^0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Дифференциальное уравнение из системы (5.1) является линейным, так как оно состоит из линейной комбинации функции $y(x)$ и ее производных. Это уравнение является уравнением n-го порядка, так как старшая производная имеет порядок n.

Интегрирование данного уравнения дает n произвольных констант. Поэтому для выделения единственного решения необходимо включать в задачу (5.1) n дополнительных условий.

Идея доказательства теоремы о существовании и единственности решения

Теорема существования и единственности решения задачи Коши (5.1) легко доказывается с помощью теоремы существования и единственности для нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка 4.1 после введения замены:

$$\begin{cases} y_1(x) = y(x), \\ y_2(x) = y'(x), \\ \vdots \\ y_n(x) = y^{(n-1)}(x). \end{cases}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

После этого получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2(x), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3(x), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ \vdots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = y_n(x), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ \dfrac{dy_n}{dx} = -a_1(x)\, y_n(x) - \ldots - a_n(x)\, y_1(x) + f(x), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ y_1\left(x^0\right) = y_1^0, \\ y_2\left(x^0\right) = y_2^0, \\ \vdots \\ y_n\left(x^0\right) = y_n^0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Систему (5.2) можно переписать в компактном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\vec{Y} = \vec{F}\left(x, \vec{Y}\right), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ \vec{Y}\left(x^0\right) = \vec{Y}_0, \end{cases} \tag{5.3}$$

где:

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ f(x) - a_1(x)\, y_n(x) - \ldots - a_n(x)\, y_1(x) \end{pmatrix}.$$

Система (5.3) — нормальная, значит, к ней можно применять соответствующую теорему 4.1. Выполнение условий теоремы при требовании непрерывности функций $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ доказывается тривиально.

Теперь вернемся к исходной задаче Коши (5.1) и введем обозначение:

$$\begin{cases} Ly := y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = f(x), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ y\left(x^0\right) = y_1^0, \\ y'\left(x^0\right) = y_2^0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}\left(x^0\right) = y_n^0, \end{cases}$$

где L — линейный дифференциальный оператор, действующий на функцию $y(x)$ при условии, что функция n раз дифференцируема.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема о принципе суперпозиции

Теорема 5.1. *Пусть:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(x),$$

причем:

$$Ly_i = f_i(x),$$

тогда решение уравнения из системы (5.1) *представимо в виде комбинации:*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x).$$

Доказательство:

Подставим представление для функции $y(x)$ в исходное уравнение (5.1), затем преобразуем:

$$Ly = L\left(\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)\right) = L(C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)) =$$
$$= C_1 L y_1(x) + \ldots + C_n L y_n(x) = C_1 f_1(x) + \ldots + C_n f_n(x) = f(x).$$

■

Теорема 5.2. *Любая комбинация решений однородного уравнения $Ly = 0$ тоже является решением однородного уравнения.*

Доказательство:

Для однородного уравнения $f(x) = 0$. Поэтому если y_i — набор решений однородного уравнения:

$$Ly_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то комбинация решений также будет удовлетворять однородному уравнению:

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} C_i L y_i(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot 0 = 0.$$

■

Теорема 5.3. *Разность двух любых решений неоднородного уравнения $Ly = f$ является решением однородного уравнения.*

Доказательство:

Пусть:

$$Ly_1 = f(x),$$
$$Ly_2 = f(x),$$

тогда:

$$L(y_1 - y_2) = Ly_1 - Ly_2 = f(x) - f(x) = 0.$$

■

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Однородное линейное дифференциальное уравнение *n*-го порядка

Начнем изучение свойств линейного уравнения n-го порядка со случая однородного уравнения:

$$Ly = 0. \tag{5.4}$$

Заметим, что все возможные решения однородного уравнения (5.4) образуют линейное пространство. Это следует из теоремы о суперпозиции 5.2: из того, что любая линейная комбинация решений однородного уравнения тоже является его решением, следует тот факт, что эта линейная комбинация образует линейное пространство. Построим базис для данного пространства.

Пусть имеется набор из n функций:

$$y_1(x), \ldots, y_n(x) \quad \text{на отрезке} x \in [a, b]. \tag{5.5}$$

Определение 5.1. *Будем называть функции* (5.5) *линейно зависимыми, если найдется нетривиальный набор коэффициентов* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *такой, что:*

$$C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) \equiv 0, \quad x \in [a, b].$$

Определение 5.2. *Будем называть функции* (5.5) *линейно независимыми, если равенство:*

$$C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) \equiv 0, \quad x \in [a, b],$$

возможно только в том случае, когда $C_1, \ldots, C_n$ *— тривиальны.*

Теперь сформулируем практический критерий зависимости функций (5.5).

Определитель Вронского системы функций

Определение 5.3. *Определитель вида:*

$$W(x) \equiv W[y_1(x), \ldots, y_n(x)] := \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \tag{5.6}$$

называется определителем Вронского системы функций (5.5).

Теорема 5.4. *Пусть набор функций* (5.5) *является линейно зависимым на отрезке* $[a, b]$. *Тогда определитель Вронского* (5.6) *системы этих функций тождественно равен нулю на* $[a, b]$*:*

$$W(x) = W[y_1(x), \ldots, y_n(x)] \equiv 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Доказательство:

Если функции (5.5) линейно зависимы, значит, существует такая нетривиальная линейная комбинация этих функций, которая равна нулю:

$$C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Теперь составим следующую систему:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) = 0, \\ C_1 y_1'(x) + \ldots + C_n y_n'(x) = 0, \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x) = 0. \end{cases}$$

Перепишем эту систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся теоремой из линейной алгебры, которая гласит, что однородная система алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю. Так как по условию доказываемой теоремы нетривиальный набор коэффициентов существует, значит определитель системы, который совпадает с определителем Вронского (5.6), равен нулю. ■

Теорема 5.5. *Пусть набор функций* (5.5) *является линейно независимым на отрезке* $[a, b]$ *и пусть каждая из этих функций удовлетворяет однородному уравнению:*

$$Ly_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда определитель Вронского системы функций (5.5) *не равен нулю на* $[a, b]$*:*

$$W(x) = W[y_1(x), \ldots, y_n(x)] \neq 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Доказательство:

Предположим, что $\exists x^0 \in [a, b]$:

$$W(x^0) = 0.$$

Снова составим систему из комбинации функций в данной точке x^0:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x^0) + \ldots + C_n y_n(x^0) = 0, \\ C_1 y_1'(x^0) + \ldots + C_n y_n'(x^0) = 0, \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x^0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x^0) = 0. \end{cases}$$

Перепишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_1(x^0) & \ldots & y_n(x^0) \\ y_1'(x^0) & \ldots & y_n'(x^0) \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(x^0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x^0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Имеем систему однородных алгебраических уравнений (5.7). Определитель этой системы совпадает с определителем Вронского (5.6):

$$W\left(x^0\right) = W\left[y_1\left(x^0\right), \ldots, y_n\left(x^0\right)\right] = 0.$$

Снова воспользуемся теоремой из линейной алгебры (аналогично доказательству теоремы 5.4), откуда получим, что система (5.7) имеет нетривиальное решение: $C_1^0, \ldots, C_n^0$.

Составим вспомогательную функцию:

$$y\left(x\right) = C_1^0 y_1\left(x\right) + \ldots + C_n^0 y_n\left(x\right). \tag{5.8}$$

Заметим: $y_1\left(x\right), \ldots, y_n\left(x\right)$ являются решениями однородного дифференциального уравнения. По теореме 5.2 их комбинация (5.8) тоже является решением однородного уравнения. Вычислим значение комбинации (5.8) и ее производных в точке x^0, пользуясь системой (5.7), после чего составим задачу:

$$\begin{cases} Ly = 0, \quad x \in \left(x^0, b\right], \\ y\left(x^0\right) = 0, \\ y'\left(x^0\right) = 0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}\left(x^0\right) = 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Таким образом, мы получили однородную задачу Коши с тривиальными начальными условиями. Система (5.9) всегда имеет единственное тривиальное решение:

$$y\left(x\right) \equiv 0, \quad x \in \left(x^0, b\right].$$

Можно поставить аналогичную задачу (5.9) и в обратную сторону, на отрезке $\left[a, x^0\right)$. В итоге получим:

$$y\left(x\right) \equiv 0, \quad x \in \left[a, b\right].$$

То есть мы нашли нетривиальный набор коэффициентов $C_1^0, \ldots, C_n^0$, который дает линейную комбинацию функций $y_1\left(x\right), \ldots, y_n\left(x\right)$, равную нулю на отрезке $[a, b]$. Значит, данный набор функций является линейно зависимым, что противоречит условию теоремы. Утверждение теоремы доказано. ■

Очевидное следствие:

Теорема 5.6. *Если имеется однородное дифференциальное уравнение n-го порядка и известна система решений этого уравнения на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского этой системы решений либо тождественно равен нулю в каждой точке отрезка $[a, b]$ и система решений линейно зависима на этом отрезке, либо не равен нулю во всех точках отрезка и решения являются линейно независимыми.*

Таким образом, определитель Вронского дает практический критерий линейной зависимости или независимости систем функций.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Фундаментальная система решений

Определение 5.4. *Под фундаментальной системой решений однородного дифференциального уравнения порядка n будем подразумевать набор любых n линейно независимых на отрезке $[a, b]$ решений уравнения.*

Всегда ли уравнение имеет фундаментальную систему решений? Ответ дает следующая теорема.

Теорема о существовании фундаментальной системы решений

Теорема 5.7. *Всякое линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с непрерывными коэффициентами на отрезке $[a, b]$ имеет фундаментальную систему решений.*

Доказательство:

Рассмотрим определитель из произвольного набора чисел, не равный нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5.10}$$

Поставим n задач Коши по определению функций y_k следующим образом:

$$\begin{cases} Ly_k = 0, \quad x \in \left(x^0, b\right], \quad k = 1, \dots, n, \\ y_k\left(x^0\right) = a_{1k}, \\ y_k'\left(x^0\right) = a_{2k}, \\ \vdots \\ y_k^{(n-1)}\left(x^0\right) = a_{nk}. \end{cases} \tag{5.11}$$

По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши решение данных задач (5.11) существует. Значит, решая задачи Коши (5.11), мы можем найти n функций:

$$y_k(x), \quad k = 1, \dots, n. \tag{5.12}$$

Составим из полученных функций (5.12) определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \tag{5.13}$$

Данный определитель (5.13) в точке x^0 по построению функций y_k (5.12) совпадет с определителем (5.10):

$$W\left(x^0\right) = \Delta \neq 0.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

То есть определитель Вронского не равен нулю в точке x^0, а значит, не равен нулю и на всем отрезке $[x^0, b]$. Значит, полученный набор функций (5.12) образует независимую систему функций на отрезке $[x^0, b]$, то есть образует фундаментальную систему решений. Теорема очевидным образом доказывается и для всего отрезка $[a, b]$. ■

Теорема 5.8. *Пусть система из n функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, являющихся решениями однородного уравнения:*

$$Ly_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

образует фундаментальную систему решений. Тогда любое решение однородного уравнения может быть представлено в виде линейной комбинации элементов фундаментальной системы решений:

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x). \tag{5.14}$$

Доказательство:

Поставим задачу Коши:

$$\begin{cases} Lz = 0, \quad x \in \left(x^0, b\right], \\ z\left(x^0\right) = z_1^0, \\ z'\left(x^0\right) = z_2^0, \\ \vdots \\ z^{(n-1)}\left(x^0\right) = z_n^0, \end{cases} \tag{5.15}$$

где z_i^0 — произвольные начальные условия. Таким образом, получаем произвольное решение однородного уравнения $z(x)$.

Предполагая, что коэффициенты C_i существуют, представим $z(x)$ в виде (5.14):

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x).$$

Теперь подставим представление для $z(x)$ (5.14) в начальные условия (5.15) и составим комбинацию:

$$\begin{cases} C_1 y_1\left(x^0\right) + \ldots + C_n y_n\left(x^0\right) = z_1^0, \\ C_1 y_1'\left(x^0\right) + \ldots + C_n y_n'\left(x^0\right) = z_2^0, \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}\left(x^0\right) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}\left(x^0\right) = z_n^0. \end{cases} \tag{5.16}$$

Так как мы рассматриваем неоднородную систему уравнений, то гарантированно найдется решение системы (5.16), то есть коэффициенты $C_1^0, \ldots, C_n^0$ существуют.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Составим вспомогательную функцию:

$$z^0(x) = C_1^0 y_1(x) + \ldots + C_n^0 y_n(x),$$

заметим, что в точке x^0 эта функция совпадает с решением задачи Коши (5.15): начальные условия выполняются по построению функции, а подстановка в дифференциальное уравнение дает верное тождество. Если эта функция удовлетворяет задаче Коши, то по теореме о существовании и единственности получаем, что функция z^0 совпадает с решением (5.14):

$$z(x) = z^0(x) = C_1^0 y_1(x) + \ldots + C_n^0 y_n(x).$$

■

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 6. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

Теорема об общем решении неоднородного дифференциального уравнения

На прошлой лекции мы начали рассматривать линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка, они записываются в виде:

$$Ly = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = f(x). \tag{6.1}$$

Теорема 6.1. *Общее решение неоднородного уравнения* (6.1) *можно представить в виде суммы некоторого частного решения $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения:*

$$y(x) = \tilde{y}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x).$$

Доказательство:

Рассмотрим разность общего решения неоднородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения: $y(x) - \tilde{y}(x)$. По теореме о разности двух решений неоднородного уравнения 5.3 разность этих решений удовлетворяет однородному уравнению. По уже доказанной теореме о решении однородного уравнения 5.8, разность этих решений может быть представлена в виде комбинации элементов фундаментальной системы решений:

$$y(x) - \tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x).$$

■

Решение неоднородного уравнения

Для нахождения решения неоднородного уравнения (6.1) существует два подхода: первый связан с методом вариации постоянной и разбирается подробно на семинарской части курса, поэтому на лекционной части не разбирается; второй подход связан с использованием функции Коши. Этот подход носит важный теоретический и прикладной характер, поэтому его мы рассмотрим подробно.

Сначала рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} Ly = 0, \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ y\left(x^0\right) = 0, \\ y'\left(x^0\right) = 0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}\left(x^0\right) = 1. \end{cases} \tag{6.2}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Преобразуем задачу (6.2), введя переменную ξ:

$$\begin{cases} Ly = 0, \quad x^0 < \xi < x \leqslant a, \\ y\left(\xi\right) = 0, \\ y'\left(\xi\right) = 0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}\left(\xi\right) = 1. \end{cases} \tag{6.3}$$

Теперь решение задачи (6.3) будет зависеть и от переменной x, и от переменной ξ:

$$y = K\left(x, \xi\right).$$

Представление решения с помощью функции Коши

Определение 6.1. *Функцией Коши $K\left(x, \xi\right)$ называется функция-решение следующей задачи Коши:*

$$\begin{cases} L_x K\left(x, \xi\right) = 0, \quad x^0 < \xi < x \leqslant a, \\ K\left(\xi, \xi\right) = 0, \\ K'_x\left(\xi, \xi\right) = 0, \\ \vdots \\ K_x^{(n-1)}\left(\xi, \xi\right) = 1. \end{cases} \tag{6.4}$$

Индекс x у оператора L_x и производных означает, что производные вычисляются дифференцированием по переменной x.

Теорема 6.2. *Если поставлена задача Коши вида:*

$$\begin{cases} Ly = f\left(x\right), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ y\left(\xi\right) = 0, \\ y'\left(\xi\right) = 0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}\left(\xi\right) = 0, \end{cases} \tag{6.5}$$

то решение этой задачи может быть найдено в следующем виде:

$$y\left(x\right) = \int\limits_{x^0}^{x} K\left(x, \xi\right) f\left(\xi\right) d\xi. \tag{6.6}$$

Практическая значимость теоремы 6.2 заключается в том, что для конкретной практической задачи дифференциальный оператор не меняется, но для разных условий эксперимента меняются начальные условия и неоднородность. Если необходимо найти множество решений задачи для различных условий, то достаточно

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

один раз решить задачу (6.5) для нахождения функции Коши, после чего можно использовать функцию Коши для построения различных решений, отвечающих разным значениям неоднородности $f(x)$. Однородность начальных условий всегда можно обеспечить путем замены переменной. Таким образом, можно один раз решить дифференциальное решение, после чего достаточно каждый раз вычислять интеграл (6.6), а не решать задачу Коши (6.5) для каждой рассматриваемой задачи.

Доказательство:

Подставим выражение для функции $y(x)$ (6.6) в задачу Коши (6.5):

$$Ly(x) = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y.$$

Вычислим производные:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int\limits_{x^0}^{x+\Delta x} K(x+\Delta x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi - \int\limits_{x^0}^{x} K(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int\limits_{x^0}^{x} K(x+\Delta x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi + \int\limits_{x}^{x+\Delta x} K(x+\Delta x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi - \int\limits_{x^0}^{x} K(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int\limits_{x^0}^{x} [K(x+\Delta x, \xi) - K(x,\xi)]\, f(\xi)\, d\xi}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int\limits_{x}^{x+\Delta x} K(x+\Delta x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi}{\Delta x} =$$

$$= \int\limits_{x^0}^{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[K(x+\Delta x, \xi) - K(x,\xi)]\, f(\xi)\, d\xi}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int\limits_{x}^{x+\Delta x} K(x+\Delta x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi}{\Delta x} =$$

$$= \int\limits_{x^0}^{x} K'_x(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{K(x+\Delta x, \xi^*)\, f(\xi^*)\, \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \int\limits_{x^0}^{x} K'_x(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi + K(x,x)\, f(x).$$

Итого, учитывая что $K(x,\xi)$ — решение задачи Коши с однородными начальными

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

условиями (кроме $n-1$ условия) (6.4), заметим закономерность:

$$y(x)=\int\limits_{x^0}^{x}K(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi,$$

$$y'(x)=\int\limits_{x^0}^{x}K'_x(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi+K(x,x)\,f(x)=\int\limits_{x^0}^{x}K'_x(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi,$$

$$y''(x)=K'_x(x,x)\,f(x)+\int\limits_{x^0}^{x}K''_x(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi=\int\limits_{x^0}^{x}K''_x(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi,$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(x)=K_x^{(n-2)}(x,x)\,f(x)+\int\limits_{x^0}^{x}K_x^{(n-1)}(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi=\int\limits_{x^0}^{x}K_x^{(n-1)}(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi,$$

$$y^{(n)}(x)=K_x^{(n-1)}(x,x)\,f(x)+\int\limits_{x^0}^{x}K_x^{(n)}(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi=f(x)+\int\limits_{x^0}^{x}K_x^{(n)}(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi.$$

Итого получим:

$$\begin{aligned}Ly=y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)\,y=f(x)+\\+\int\limits_{x^0}^{x}\left[K_x^{(n)}(x,\xi)+a_1(x)\,K_x^{(n-1)}(x,\xi)+\ldots+a_n(x)\,K(x,\xi)\right]f(\xi)\,d\xi=\\=f(x)+\int\limits_{x^0}^{x}L_xK(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi=f(x)+\int\limits_{x^0}^{x}0f(\xi)\,d\xi=f(x).\end{aligned}$$

Таким образом, функция $y(x)$, записанная через функцию Коши, действительно удовлетворяет неоднородному уравнению. Теперь покажем, что $y(x)$ удовлетворяет

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

однородным начальным условиям:

$$y\left(x^0\right) = \int\limits_{x^0}^{x^0} K\left(x,\xi\right) f\left(\xi\right) d\xi = 0,$$

$$y'\left(x^0\right) = \int\limits_{x^0}^{x^0} K'_x\left(x,\xi\right) f\left(\xi\right) d\xi = 0,$$

$$y''\left(x^0\right) = \int\limits_{x^0}^{x^0} K''_x\left(x,\xi\right) f\left(\xi\right) d\xi = 0,$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}\left(x^0\right) = \int\limits_{x^0}^{x^0} K_x^{(n-1)}\left(x,\xi\right) f\left(\xi\right) d\xi = 0.$$

То есть данная функция действительно удовлетворяет задаче Коши для неоднородного уравнения с однородными начальными условиями (6.5). ■

Уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим часто встречающийся на практике частный случай:

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \quad a_i = const, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6.7}$$

Воспользуемся для поиска нетривиального решения однородного уравнения (6.7) методом Эйлера:

$$y\left(x\right) = Ce^{\lambda x}, \quad C \neq 0.$$

$$Ly = L\left[Ce^{\lambda x}\right] = C\left(\lambda^n e^{\lambda x} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \ldots + a_n e^{\lambda x}\right) =$$
$$= C\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n\right)e^{\lambda x} = 0.$$

Получаем условие на коэффициенты λ:

$$M\left(\lambda\right) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{6.8}$$

Определение 6.2. *Многочлен из уравнения* (6.8)*:*

$$M\left(\lambda\right) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n,$$

называется характеристическим многочленом, а уравнение (6.8) *называется характеристическим уравнением.*

С учетом кратности многочлен (6.8) степени n имеет ровно n корней.

Рассмотрим простейший случай: все корни многочлена — простые. Получаем n различных решений характеристического уравнения (6.8) λ_k, $k = 1, \ldots, n$, и получаем n различных функций вида:

$$y_k\left(x\right) = e^{\lambda_k x}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{6.9}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 6.3. *Функции* (6.9) *при условии, что все корни характеристического многочлена* λ_k *— простые, образуют фундаментальную систему решений однородного дифференциального уравнения порядка* n *с постоянными коэффициентами* (6.7).

Доказательство:

Так как функций (6.9) ровно n штук и они являются решениями однородного уравнения (6.7), нам остается лишь показать, что эти функции линейно независимы.

Допустим, что нашлась нетривиальная линейная комбинация, равная нулю:

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x} = 0.$$

Допустим, что, по крайней мере:

$$C_1 \neq 0. \tag{6.10}$$

Разделим комбинацию на $e^{\lambda_n x}$:

$$C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_n)x} + C_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_n)x} + \ldots + C_n = 0,$$

продифференцируем:

$$(\lambda_1 - \lambda_n)\, C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_n)x} + (\lambda_2 - \lambda_n)\, C_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_n)x} + \ldots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\, e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x} C_{n-1} = 0.$$

Повторим процедуру, разделим на $e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x}$:

$$C_1 (\lambda_1 - \lambda_n)\, e^{(\lambda_1 - \lambda_{n-1})x} + C_2 (\lambda_2 - \lambda_n)\, e^{(\lambda_2 - \lambda_{n-1})x} + \ldots + C_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) = 0,$$

продифференцируем:

$$C_1 (\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_1 - \lambda_{n-1})\, e^{(\lambda_1 - \lambda_{n-1})x} + \ldots + \\ + C_{n-2} (\lambda_{n-1} - \lambda_n)(\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1})\, e^{(\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1})x} = 0.$$

Повторяя эту процедуру $n - 1$ раз, придем к выражению:

$$C_1 (\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_1 - \lambda_{n-1}) \ldots (\lambda_1 - \lambda_2)\, e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} = 0. \tag{6.11}$$

По предположению (6.10), все скобки в выражении (6.11) не равны нулю и экспонента не равна нулю. Поэтому приходим к противоречию в предположении о существовании нетривиальной комбинации. Теорема доказана. ■

Теперь рассмотрим случай, когда, например, корень многочлена (6.8) λ_k имеет кратность $p > 1$. Тогда различных функций (6.9) меньше чем n, их совокупность не образовывает фундаментальную систему решений. В таком случае строятся так называемые присоединенные функции:

$$e^{\lambda_k x}, \quad x e^{\lambda_k x}, \quad x^2 e^{\lambda_k x}, \ldots, x^{p-1} e^{\lambda_k x}. \tag{6.12}$$

Функции (6.12) образуют набор из p функций. Прямой подстановкой можно доказать, что эти функции являются решениями однородного уравнения (6.7), и по аналогии с доказательством 6.3 можно доказать, что эти функции являются линейно независимыми (6.12). Совокупность функций (6.9) и (6.12) в таком случае образовывает фундаментальную систему решений. Очевидно, что корней с кратностью больше единицы может быть несколько. В таком случае для каждого кратного λ_k строится аналогичный набор функций (6.12).

Лекция 7.
Системы линейных дифференциальных уравнений

Определение системы линейных дифференциальных уравнений

В общем случае система линейных дифференциальных уравнений записывается в виде:

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\,\vec{x} + \vec{F}(t), \tag{7.1}$$

где:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{F}(t) = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ f^2(t) \\ \vdots \\ f^n(t) \end{pmatrix}.$$

Далее будем предполагать, что все компоненты функций $A(t)$ и $\vec{F}(t)$ являются непрерывными функциями на отрезке $t \in [a, b]$. Это нужно для того, чтобы применять теорему существования и единственности решения задачи Коши для задачи с системой (7.1):

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A(t)\,\vec{x} + \vec{F}(t), \quad t \in \left(t^0, T\right] \subset [a, b], \\ \vec{x}\left(t^0\right) = \vec{x}_0. \end{cases} \tag{7.2}$$

Однородная система линейных дифференциальных уравнений

Начнем рассмотрение систем линейных уравнений с системы однородного вида:

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\,\vec{x}. \tag{7.3}$$

Теорема 7.1. *Любая линейная комбинация решений однородной системы* (7.3) *также является решением однородной системы.*

Доказательство:

Рассмотрим произвольную линейную комбинацию решений однородной системы:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{m} c^i \vec{x}_i(t),$$

то есть функции $\vec{x}_i$ удовлетворяют уравнениям:

$$\dot{\vec{x}}_i = A(t)\,\vec{x}_i.$$

Вычислим:

$$\dot{\vec{x}} = \sum_{i=1}^{m} c^i \dot{\vec{x}}_i = \sum_{i=1}^{m} c^i A(t)\,\vec{x}_i = A(t) \sum_{i=1}^{m} c^i \vec{x}_i = A(t)\,\vec{x}.$$

■

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 7.2. *Разность двух любых решений неоднородной системы* (7.1) *является решением однородной системы* (7.3).

Доказательство:

Запишем разность двух решений (7.1):

$$\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2,$$

где:

$$\dot{\vec{x}}_1 = A(t)\,\vec{x}_1 + \vec{F}(t),$$
$$\dot{\vec{x}}_2 = A(t)\,\vec{x}_2 + \vec{F}(t).$$

Вычислим:

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}_1 - \dot{\vec{x}}_2 = A(t)\,\vec{x}_1 + \vec{F}(t) - A(t)\,\vec{x}_2 - \vec{F}(t) = A(t)\,(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A(t)\,\vec{x}.$$

■

Линейная зависимость и независимость вектор-функций

Введем понятия линейной зависимости и линейной независимости вектор-функций. Пусть вектор-функции:

$$\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t), \tag{7.4}$$

являются решениями однородной системы линейных уравнений:

$$\dot{\vec{x}}_i = A(t)\,\vec{x}_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{7.5}$$

Определение 7.1. *Решения однородной системы* (7.5) *называются линейно зависимыми на отрезке* $[a,b]$*, если:*

$$\exists \vec{C} = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^n \end{pmatrix} \neq \vec{0}: \qquad c^1\vec{x}_1(t) + c^2\vec{x}_2(t) + \ldots + c^n\vec{x}_n(t) \equiv \vec{0}, \quad \forall t \in [a,b]. \tag{7.6}$$

Можно записать равенство (7.6) в более компактной форме:

$$X(t)\,\vec{C} \equiv \vec{0}, \quad \forall t \in [a,b], \tag{7.7}$$

где:

$$X(t) = (\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)).$$

Определение 7.2. *Если равенство* (7.7) *возможно только в том случае, когда* $\vec{C} \equiv 0$*, то соответствующие функции* (7.4) *называются линейно независимыми на* $[a,b]$.

Если решения (7.4) являются линейно независимыми, то будем записывать их в виде матрицы, называемой фундаментальной матрицей:

$$W(t) = (\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)). \tag{7.8}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Фундаментальная система решений линейной системы дифференциальных уравнений

Определение 7.3. *Совокупность n линейно независимых решений* (7.4) *линейной системы* (7.1) *из n уравнений называется фундаментальной системой решений данной системы.*

Теорема 7.3. *Определитель Вронского, построенный из n линейно независимых решений однородной линейной системы на отрезке* $[a, b]$ *(то есть построенный из фундаментальной системы решений), отличен от нуля во всех точках этого отрезка:*

$$detW\left(t\right) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]\,.$$

Доказательство:

Предположим, что найдется точка t^0:

$$detW\left(t^0\right) = 0.$$

Составим систему:

$$W\left(t^0\right)\vec{C} = \vec{0}. \tag{7.9}$$

Воспользуемся теоремой из линейной алгебры, которая гласит, что однородная система линейных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы этой системы равен нулю. Значит, система (7.9) имеет нетривиальное решение: $\vec{C}_0 \neq \vec{0}$.

Составим вектор из функций (7.4):

$$\vec{x}\left(t\right) = W\left(t\right)\vec{C}_0 = c_0^1\vec{x}_1\left(t\right) + \ldots + c_0^n\vec{x}_n\left(t\right).$$

Каждая из функций $\vec{x}_1\left(t\right), \ldots, \vec{x}_n\left(t\right)$ является решением однородной системы. Вектор $\vec{x}\left(t\right)$ представляет из себя линейную комбинацию решений однородной системы, и потому тоже является решением однородной системы:

$$\dot{\vec{x}} = A\left(t\right)\vec{x}.$$

С другой стороны, в точке t^0:

$$\vec{x}\left(t^0\right) = W\left(t^0\right)\vec{C}_0 = \vec{0}.$$

Получаем однородную задачу Коши с однородным начальным условием:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A\left(t\right)\vec{x}, \quad t \in \left(t^0, T\right], \\ \vec{x}\left(t^0\right) = \vec{0}. \end{cases} \tag{7.10}$$

Система (7.10) имеет только тривиальное решение:

$$\vec{x}\left(t\right) = c_0^1\vec{x}_1\left(t\right) + \ldots + c_0^n\vec{x}_n\left(t\right) \equiv 0 \quad \forall t \in [a, b]\,. \tag{7.11}$$

Таким образом, мы получили определение линейно зависимых на $[a, b]$ функций $\vec{x}_1\left(t\right), \ldots, \vec{x}_n\left(t\right)$, что противоречит условию теоремы. Значит, утверждение теоремы верно. ■

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 7.4. *Пусть $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ — решения однородной линейной системы. И пусть вектора $\vec{x}_1(t^0), \ldots, \vec{x}_n(t^0)$ — линейно независимы, $t^0 \in [a,b]$. Тогда вектор-функции $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ тоже являются линейно независимыми на отрезке $[a,b]$.*

Доказательство:

Нам нужно доказать, что:

$$X(t)\vec{C} = \vec{0} \quad \forall t \in [a,b] \quad \Leftrightarrow \quad \vec{C} = \vec{0}.$$

Предположим, что нашлась точка t^1:

$$X\left(t^1\right)\vec{C} = \vec{0}, \quad \vec{C} \neq \vec{0}. \tag{7.12}$$

Если однородная система имеет нетривиальное решение, то определитель матрицы системы (7.12) равен нулю.

Составим вектор:

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{C}.$$

Данный вектор представляет собой линейную комбинацию решений однородной системы, и потому тоже является решением однородной системы:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}, \quad t \in \left(t^1, T\right], \\ \vec{x}\left(t^1\right) = \vec{0}. \end{cases}$$

Снова получаем, что $\vec{x}(t) = \vec{0}$ на $[a,b]$. В частности:

$$\vec{x}\left(t^0\right) = X\left(t^0\right)\vec{C} = c^1\vec{x}_1\left(t^0\right) + \ldots + c^n\vec{x}_n\left(t^0\right) \equiv 0.$$

То есть, вектора $\vec{x}_1(t^0), \ldots, \vec{x}_n(t^0)$ — линейно зависимы. Получаем противоречие с условием теоремы. Значит, предположение о точке t^1 (7.12) неверно. Следовательно, утверждение теоремы верно. ■

Теорема о представлении решения однородной системы

Теорема 7.5. *Любое решение однородной системы может быть представлено в виде линейной комбинации элементов фундаментальной системы решений:*

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c^i\vec{x}_i(t) = W(t)\vec{C}. \tag{7.13}$$

Доказательство:

Составим следующую систему уравнений:

$$W\left(t^0\right)\vec{C} = \vec{x}_0 = \vec{x}\left(t^0\right). \tag{7.14}$$

Получаем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений. Так как определитель системы (7.14) ненулевой, то она имеет решение $\vec{C}_0$. Составим вспомогательную функцию:

$$\vec{x}(t) = W(t)\vec{C}_0.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Данная функция представляет из себя линейную комбинацию решений однородной системы, и потому тоже является решением однородной системы:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A(t)\,\vec{x}, \quad t \in \left(t^0, T\right], \\ \vec{x}\left(t^0\right) = \vec{x}_0. \end{cases}$$

Получаем задачу Коши, по теореме существования и единственности решение этой задачи существует и представимо в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений (7.14):

$$\vec{x}(t) = W(t)\,\vec{C}_0.$$

Так как вектор $\vec{C}_0$ существует (7.14), то за счет перебора всех возможных векторов $\vec{x}_0$ получаем произвольные решения однородной системы, представимые в виде линейной комбинации, что доказывает утверждение теоремы. ■

Замечание: так как каждый столбец фундаментальной матрицы (7.8) является решением однородной системы (7.3), то мы можем переписать эту совокупность систем в матричном виде:

$$\dot{W} = A(t)\,W. \tag{7.15}$$

Возникает вопрос: как на практике найти фундаментальную систему решений?

Способ нахождения фундаментальной матрицы системы уравнений

Можно это сделать, поставив задачу Коши для матричного уравнения (7.15):

$$\begin{cases} \dot{W} = A(t)\,W, \quad t \in \left(t^0, T\right], \\ W\left(t^0\right) = B, \end{cases} \tag{7.16}$$

где B — произвольная матрица, определитель которой отличен от нуля:

$$detB \neq 0.$$

На практике проще всего взять в качестве матрицы B единичную матрицу: $B = E$.

Решение неоднородной системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим неоднородную систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\,\vec{x} + \vec{F}(t). \tag{7.17}$$

По аналогии с материалом пятой лекции, можно доказать, что общее решение неоднородной системы (7.17) представляется в виде суммы общего решения однородной системы (7.3) и частного решения неоднородной системы (7.17):

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_{\text{ч}}(t) + \sum_{i=1}^{n} c^i \vec{x}_i(t).$$

Для доказательства достаточно рассмотреть разность общего решения неоднородной системы и частного решения неоднородной системы, после чего воспользоваться теоремой о разности двух решений неоднородной системы и заметить, что любое решение однородной системы представимо в виде линейной комбинации элементов фундаментальной системы решений.

Получение решения неоднородной системы уравнений методом Лагранжа

Для нахождения решения неоднородной системы воспользуемся методом вариации постоянной, также называемым методом Лагранжа.

Сначала необходимо найти фундаментальную систему решений $W(t)$ однородной задачи с помощью задачи (7.16). Когда фундаментальная система решений найдена, можем найти общее решение однородной системы (7.3):

$$\vec{x}(t) = W(t)\,\vec{C},$$

после этого решение неоднородной системы находится в виде:

$$\vec{x}(t) = W(t)\,\vec{C}(t).$$

Подставим это выражение в исходную систему (7.16):

$$W(t)\,\dot{\vec{C}}(t) + \dot{W}(t)\,\vec{C}(t) = A(t)\,W(t)\,\vec{C}(t) + \vec{F}(t),$$

$$W(t)\,\dot{\vec{C}}(t) + \left[\dot{W}(t) - A(t)\,W(t)\right]\vec{C}(t) = \vec{F}(t),$$

так как фундаментальная матрица удовлетворяет однородному матричному уравнению (7.16), второе слагаемое сокращается:

$$W(t)\,\dot{\vec{C}}(t) = \vec{F}(t),$$

$$\dot{\vec{C}}(t) = W^{-1}(t)\,\vec{F}(t).$$

Последний переход правомерен, так как определитель фундаментальной матрицы отличен от нуля. Теперь можем записать:

$$\vec{C}(t) = \int\limits_{t^0}^{t} W^{-1}(\tau)\,\vec{F}(\tau)\,d\tau + \vec{C}_0.$$

Общее решение неоднородной системы примет вид:

$$\vec{x}(t) = W(t)\,\vec{C}(t) = W(t)\,\vec{C}_0 + W(t)\int\limits_{t^0}^{t} W^{-1}(\tau)\,\vec{F}(\tau)\,d\tau.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Если поставлена задача Коши:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A(t)\,\vec{x} + \vec{F}(t), \quad t \in \left(t^0, T\right], \\ \vec{x}\left(t^0\right) = \vec{x}_0, \end{cases}$$

то можем определить $\vec{C}_0$:

$$\vec{x}\left(t^0\right) = W\left(t^0\right)\vec{C}_0, \quad \Rightarrow \quad \vec{C}_0 = W^{-1}\left(t^0\right)\vec{x}\left(t^0\right).$$

$$\vec{x}(t) = W(t)\,W^{-1}\left(t^0\right)\vec{x}\left(t^0\right) + \int\limits_{t^0}^{t} W(t)\,W^{-1}(\tau)\,\vec{F}(\tau)\,d\tau.$$

Матрица Коши

Введем обозначение:

$$W(t)\,W^{-1}(\tau) = K(t,\tau).$$

Определение 7.4. *Матрица $K(t,\tau)$ называется матрицей Коши или импульсной матрицей.*

С помощью матрицы Коши решение задачи Коши может быть записано в виде:

$$\vec{x}(t) = K(t,t_0)\,\vec{x}\left(t^0\right) + \int\limits_{t^0}^{t} K(t,\tau)\,\vec{F}(\tau)\,d\tau.$$

По аналогии с функцией Коши, вводившейся ранее, матрица Коши позволяет уменьшать количество вычислений, когда необходимо многократно решать одну и ту же задачу с различными выражениями для неоднородности $\vec{F}(t)$ и начальных условий $\vec{x}_0$.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ