МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

ДЬЯЧЕНКО
МИХАИЛ ИВАНОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ЗАБОЛОТСКУЮ ВАЛЕРИЮ ДМИТРИЕВНУ

Содержание

Лекция 1 **6**
Системы множеств . . . 6
1.1. Аксиоматика и обозначения . . . 6
1.2. Кольца и полукольца . . . 6
1.3. σ-кольцо, δ-кольцо . . . 8
1.4. Свойства полуколец . . . 9

Лекция 2 **11**
Мера на полукольце . . . 11
2.1. Свойства меры на полукольце . . . 11
2.2. Пример меры на полукольце . . . 12
2.3. Продолжение меры на минимальное кольцо . . . 13
2.4. Меры Лебега и Жордана . . . 14

Лекция 3 **16**
Меры Лебега и Жордана . . . 16
3.1. Теорема об оценках внешних мер Лебега и Жордана . . . 16
3.2. Продолжение мер по Лебегу и по Жордану . . . 16
3.3. Меры Лебега-Стилтьеса . . . 18

Лекция 4 **20**
Непрерывность и полнота мер . . . 20
4.1. σ-аддитивная и σ-конечная меры Лебега . . . 20
4.2. Борелевская σ-алгебра . . . 21
4.3. Непрерывность и полнота мер . . . 22

Лекция 5 **24**
Некоторые свойства измеримых множеств . . . 24
5.1. Неизмеримые множества . . . 24
5.2. Структура измеримых по Лебегу множеств . . . 25
5.3. Теорема Витали . . . 25
5.4. Теорема о структуре открытых множеств . . . 27

Лекция 6 **28**
Измеримые функции . . . 28
6.1. Измеримое пространство. Измеримая функция . . . 28
6.2. Измеримость пределов и точных граней последовательности функций. Измеримость производной функции . . . 30
6.3. Сходимость по мере и её свойства . . . 31

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 7 **33**
Сходимость почти всюду . . . 33
7.1. Теорема о сходимости последовательности композиций непрерывной функции и членов сходящейся последовательности . . . 33
7.2. Фундаментальные по мере последовательности и критерий Коши . . . 34
7.3. Сходимость почти всюду и её связь со сходимостью по мере . . . 35

Лекция 8 **38**
Интеграл Лебега . . . 38
8.1. Интеграл Лебега для простых функций . . . 38
8.2. Определения и свойства интеграла Лебега . . . 40

Лекция 9 **43**
Интеграл Лебега. Часть 2 . . . 43
9.1. Теоремы о линейности интеграла Лебега . . . 43
9.2. Предельный переход под знаком интеграла Лебега . . . 45

Лекция 10 **48**
Интеграл Лебега. Часть 3 . . . 48
10.1. Теорема Лебега . . . 48
10.2. Некоторые свойства интеграла Лебега . . . 49
10.3. Неравенство Чебышёва и критерий интегрируемости по Лебегу . . . 50
10.4. Сравнение интегралов Римана и Лебега . . . 51
10.5. Заряды . . . 52

Лекция 11 **53**
Теорема Радона-Никодима . . . 53
11.1. Разложение Хана . . . 53
11.2. Теорема Радона-Никодима . . . 55

Лекция 12 **58**
Пространство Lp . . . 58
12.1. Неравентсво Гёльдера . . . 58
12.2. Неравентсво Минковского . . . 59
12.3. Пространство L_p . . . 59

Лекция 13 **63**
Абсолютно непрерывные функции . . . 63
13.1. Всюду плотное в линейном нормированном пространстве множество . . . 63
13.2. Вариационная сумма функции. Функция ограниченной вариации . . . 64
13.3. Абсолютно непрерывные на отрезке функции . . . 66

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 14 **68**
N-свойство Лузина 68
14.1. Теорема об абсолютной непрерывности вариации абсолютно непрерывной функции 68
14.2. N-свойство Лузина 68
14.3. Индикатриса Банаха 70
14.4. Теорема Банаха-Зарецкого 71

Лекция 15 **73**
Интеграл Лебега с переменным верхним пределом 73
15.1. Теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега с переменным верхним пределом 73
15.2. Теорема о существовании у интеграла Лебега с переменным верхним пределом производной на почти всех точках отрезка. Обратная теорема 73
15.3. Теоремы об интегрировании по частям и замене переменной в интеграле Лебега 76

Лекция 16 **77**
Прямые произведения мер 77
16.1. Прямое произведение полуколец 77
16.2. Прямое произведение мер 78
16.3. Две теоремы Фубини 80

Лекция 1

Системы множеств

1.1. Аксиоматика и обозначения

В данном курсе используется система аксиом Цермело — Френкеля, в частности, признаётся аксиома выбора.

Аксиома выбора. *Пусть* $\{A_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ *- система непустых множеств таких, что* $A_{\omega_1} \cap A_{\omega_2} = \varnothing$ *при* $\omega_1 \neq \omega_2$
Тогда существует множество $B = \{a_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ *такое, что* $\forall\omega \in \Omega \quad a_\omega \in A_\omega$

Разные математические школы расходятся во мнении относительно возможности её использования. Однако до сих пор некоторые утверждения не могут быть установлены без помощи аксиомы выбора, поэтому в данном курсе она считается справедливой.

Обозначения

- $\cup$ – объединение, $\cap$ – пересечение, $\setminus$ – разность
- $A\triangle B$ – симметрическая разность
  $A\triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- $A \sqcup B$ – дизъюнктное объединение
  $C = A \sqcup B \Leftrightarrow C = A \cup B$ и $A \cap B = \varnothing$

Некоторые тождества

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2) $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$
3) $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$

1.2. Кольца и полукольца

Опр. 1.1. Пусть $K = \{A_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ - система множеств и $E \in K$. Тогда скажем, что E - *единица* $K \Leftrightarrow \forall\omega \in \Omega \quad A_\omega \cap E = A_\omega$ (что равносильно $A_\omega \subseteq E$).

Опр. 1.2. Пусть K - система множеств. Тогда скажем, что K - *полукольцо* $\Leftrightarrow$ выполнены следующие 3 условия:

1) $\varnothing \in K$
2) $A, B \in K \Rightarrow A \cap B \in K$
3) Если $A, A_1 \in K$ и $A_1 \subset A$, то существует конечный набор $A_2, ..., A_n \in K$ такой, что $A = \bigsqcup\limits_{i=2}^{n} A_i$

Примеры

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1) Пусть $[a, b) \subset \mathbb{R}^1$, где b - конечное число. Положим $K = \varnothing \cup \{[\alpha, \beta) \subseteq [a, b)\}$. Покажем, что K - полукольцо. Для этого проверим каждое из условий определения. 1) Очевидно. 2) Пересечение двух полуинтервалов либо пусто, либо полуинтервал. 3) Если один полуинтервал лежит внутри другого, то понятно, что он дополняем до большего другими полуинтервалами (можно обойтись двумя).
2) Пусть $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$. Положим $K = \varnothing \cup \{\{\alpha, \beta\} \subseteq [a, b]\}$, где $\{\alpha, \beta\}$ - всевозможные промежутки (отрезки, интервалы, полуинтервалы). Ясно, что K - полукольцо, доказательство аналогично примеру 1.
3) Пусть $[a, b] = \prod\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$. Положим $K = \varnothing \cup \{\{\alpha, \beta\} = \prod\limits_{i=1}^{n} \{\alpha_i, \beta_i\} \subseteq [a, b]\}$. Первые два условия очевидны, третье рассмотрим на примере плоскости (рис.1.1).

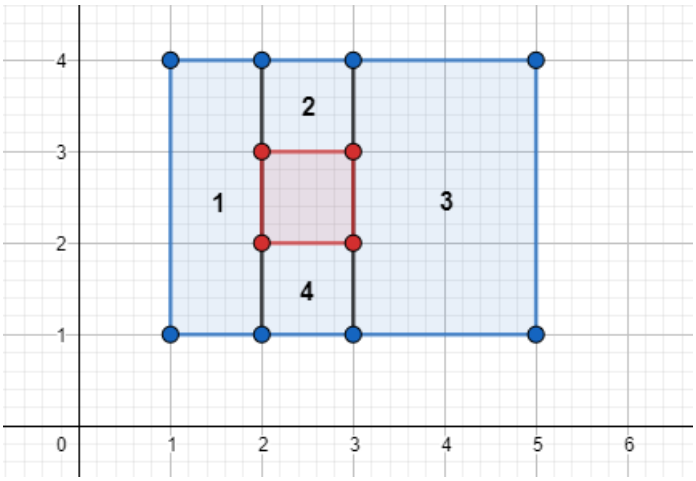


Рис. 1.1. Случай плоскости

Как мы видим, в случае $\mathbb{R}^2$ хватит 4-ех прямоугольников.

4) Рассмотрим все открытые подмножества [0, 1]. Они не образуют полукольцо (т.к. не выполнено условие 3).

Опр. 1.3. Система множеств R назвается кольцом $\Leftrightarrow$
1) R не пусто
2) $A, B \in R \Rightarrow A \cap B \in R$ и $A \triangle B \in R$

Кольцо с единицей будем называть алгеброй.

Утв. 1.1. *1) Пусть R – кольцо. Тогда R – полукольцо.*
2) Если $A, B \in R$, то $A \cup B \in R$

Доказательство. 1) R – кольцо $\Rightarrow \exists A \in R \Rightarrow \varnothing = A \triangle A \in R$
Условие 2 выполнено автоматически.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пусть $A, A_1 \in K$ и $A_1 \subset A \Rightarrow A \setminus A_1 = A \triangle A_1 = A_2 \in R$, то есть $A = A_1 \sqcup A_2$
2) Если $A, B \in R \Rightarrow A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B) \in R$ ■

1.3. σ-кольцо, δ-кольцо

Опр. 1.4. Пусть R – система множеств. Тогда R – σ-кольцо (δ-кольцо) $\Leftrightarrow$
1) R – кольцо
2) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in R = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in R \quad (\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in R)$

σ-кольцо (δ-кольцо) с единицей будем называть σ-алгеброй (δ-алгеброй)

Утв. 1.2. *Пусть R – σ-кольцо. Тогда R – δ-кольцо. Обратное, вообще говоря, неверно. Но если R – δ-алгебра, то R – σ-алгебра.*

Доказательство. Пусть R – σ-кольцо и $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in R$.
Тогда $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \setminus (\bigcup\limits_{i=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_i))$. Если R – δ-алгебра с единицей E и $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in R$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = E \setminus \cap_{i=1}^{\infty} (E \setminus A_i) \in R$. ■

Пример Рассмотрим все ограниченные подмножества прямой $\mathbb{R}^1$. Понятно, что этот набор – кольцо. Более того, это δ-кольцо. Но не σ-кольцо, т.к. счётными объединениями ограниченных множеств можно получить всю прямую.

Утв. 1.3. *Пусть $\{R_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – некоторая система колец. Тогда $R = \cap_{\omega \in \Omega} R_\omega$ – кольцо.*

Доказательство. $\forall \omega \in \Omega \quad \varnothing \in R_\omega \Rightarrow R = \bigcap\limits_{\omega \in \Omega} R_\omega \ni \varnothing \Rightarrow R$ не пусто. Предположим, что $A, B \in R$, тогда $\forall \omega \in \Omega \quad A, B \in R_\omega \Rightarrow \forall \omega \in \Omega \quad A \cap B \in R_\omega$ и $A \triangle B \in R_\omega$. Тогда $A \cap B$ и $A \triangle B \in R$ ■

Замечание 1.1. Если все R_ω обладали одной и той же единицей E, тогда E – единица R, т.е. R – алгебра.

Замечание 1.2. Утверждение, аналогичное утверждению 1.3, справедливо и для σ-колец.

Теорема 1.1. *Пусть K - система множеств. Тогда существует кольцо $R(K)$:*
1) $R(K) \supseteq K$
2) Если кольцо $R_1 \supseteq K \Rightarrow R_1 \supseteq R(K)$

($R(K)$ называют минимальным кольцом, содержащим K)

Доказательство. Пусть $K = \{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$. Рассмотрим $B = \cup_{\omega \in \Omega} A_\omega$ и пусть $\overline{R}$ – все подмножества B, включая $\varnothing$. Очевидно, $\overline{R}$ – кольцо. Теперь пусть $\{R_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ – все кольца, которые содержатся в $\overline{R}$ и содержат K. Эта система не пуста ($\overline{R} = R_{\gamma_0}$). Положим $R(K) = \cap_{\gamma \in \Gamma} R_\gamma$. Согласно утверждению 1.3, $R(K)$ – кольцо, а по выбору $\{R_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ $R(K) \supseteq K$. Предположим, что некоторое кольцо $T \supseteq K$. Пусть $\widetilde{R} = \overline{R} \cap T$ – кольцо и $\widetilde{R} = R_{\gamma_1} \Rightarrow R(K) \subseteq R_{\gamma_1} \subseteq T$ ■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Замечание 1.3. Если E – единица K, то $B = E$ и $R(K)$ – алгебра с единицей E.

Замечание 1.4. Аналогично доказывается, что существует минимальное σ-кольцо, содержащее K, а если K обладало единицей, то оно будет σ-алгеброй.

1.4. Свойства полуколец

Лемма 1.1. *Пусть S – полукольцо, $A \in S$, $A_1, ..., A_l \in S$ и $\bigsqcup\limits_{i=1}^{l} A_i \subset A$. Тогда $\exists A_{l+1}, ..., A_m \in S : A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} A_i$*

Доказательство. Индукция по l. Если $l = 1$ – определение полукольца. Пусть теперь $l \geqslant 1$ и лемма доказана для l, имеем $A, A_1, ..., A_{l+1} \in S : \bigsqcup\limits_{i=1}^{l+1} A_i \subset A$. По предположению индукции $\exists B_1, .., B_k \in S : \bigsqcup\limits_{i=1}^{l} A_i \sqcup (\bigsqcup\limits_{j=1}^{k} B_j) = A$. Рассмотрим $C_j = A_{l+1} \cap B_j$, $j = 1, ..., k$. $C_j \in S$ по определению полукольца. Кроме того, $C_j \subseteq B_j \Rightarrow \forall j\ \exists \{D_{j,\nu}\}_{\nu=1}^{\nu_j} \subset S : B_j = C_j \sqcup (\bigsqcup\limits_{\nu=1}^{\nu_j} D_{j,\nu})$ по определению полукольца. Отсюда $A = (\bigsqcup\limits_{i=1}^{l} A_i) \sqcup (\bigsqcup\limits_{j=1}^{k} C_j) \sqcup (\bigsqcup\limits_{j=1}^{k} \bigsqcup\limits_{\nu=1}^{\nu_j} D_{j,k})$. Проверим, что $\bigsqcup\limits_{j=1}^{k} C_j = A_{l+1}$. Т.к. $A_{l+1} \cap (\bigsqcup\limits_{i=1}^{l} A_i) = \varnothing$ и $A_{l+1} \subset A \Rightarrow A_{l+1} \subseteq \bigsqcup\limits_{j=1}^{k} B_j \Rightarrow A_{l+1} = A_{l+1} \cap (\cup_{j=1}^{k} B_j) = \bigsqcup\limits_{j=1}^{k} (A_{l+1} \cap B_j) = \bigsqcup\limits_{j=1}^{k} C_j$ ■

Теорема 1.2. *Пусть S– полукольцо. Тогда $R(S) = \{\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i : A_i \in S$ (включая пустое)$\}$*

Доказательство. 1) Очевидно, что $S \subset R(S)$
2) Если произвольное кольцо $R \supset S \Rightarrow R \supseteq \{\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i : A_i \in S\}$
3) Проверим, что $L = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i : A_i \in S$ – кольцо. Пусть $A, B \subseteq L$. Тогда $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, $B = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B_j$, где все $A_i, B_j \in S$. Имеем $(A \cap B) = (\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i) \cap (\bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B_j) = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j) \in L$. Пусть $C_{i,j} = A \cap B \in S$. Тогда $C_{i_1}, ..., C_{i_m} \subset A_i$ и попарно не пересекаются. Поэтому по лемме 1.1 $\exists \{D_{i,r}\}_{r=1}^{r_i} \in S : A_i = (\bigsqcup\limits_{j=1}^{m} C_{i,j}) \sqcup (\bigsqcup\limits_{r=1}^{r_i} D_{i,r})\ \forall i$. Аналогично $\forall j\ \exists \{E_{j,\nu}\}_{\nu=1}^{\nu_j} \subset S : B_j = (\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} C_{i,j}) \cup (\bigsqcup\limits_{\nu=1}^{\nu_j} E_{j,\nu})$. Отсюда $A \triangle B = (\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i) \triangle (\bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B_j) = ((\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} C_{i,j}) \sqcup (\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} \bigsqcup\limits_{r=1}^{r_i} D_{i,r})) \triangle ((\bigsqcup\limits_{j=1}^{m} \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} C_{i,j}) \sqcup (\bigsqcup\limits_{j=1}^{m} \bigsqcup\limits_{\nu=1}^{\nu_j} E_{j,\nu})) = (\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} \bigsqcup\limits_{r=1}^{r_i} D_{i,r}) \sqcup (\bigsqcup\limits_{j=1}^{m} \bigsqcup\limits_{\nu=1}^{\nu_j} E_{j,\nu})$. Видно, что $A \triangle B$ представилась в виде конечного дизъюнктного объединения элементов S, значит $A \triangle B \in L$, то есть L – кольцо. ■

Лемма 1.2. *Пусть S – полукольцо, $A_1, ..., A_k \in S$. Тогда $\exists$ конечный набор* ***попарно не пересекающихся*** *$\{B_j\}_{j=1}^{M} \in S : \forall i \in \{1, ..., k\}\ \exists \Omega(i) \subset \{1, ..., M\} : A_i = \bigsqcup\limits_{j \in \Omega_i} B_j$.*
(на практике это означает, что если у нас есть конечный набор каких-то множеств из S, то мы можем найти такой набор элементарных "кирпичиков" т.е.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

попарно не пересекающихся множеств из S, что каждое наше множество составится из этих "кирпичиков"в виде конечного объединения.)

Доказательство. Доказательство проведём индукцией по k. При $k = 1$, очевидно, $B_1 = A_1$. Предположим, что утверждение доказано для некоторого $k \geqslant 1$. Тогда по предположению индукции для $A_1, .., A_k \in S$ $\{B_j\}_{j=1}^{M} \in S : \forall i \in \{1, ..., k\}$ $\exists \Omega(i)$: $A_i = \bigsqcup\limits_{j \in \Omega_i} B_j$. Рассмотрим $C_j = A_{k+1} \cap B_j \in S$, $j = 1, ..., M$. Тогда по лемме 1.1 $\exists D_1, .., D_r \in S : A_{k+1} = (\bigsqcup\limits_{j=1}^{m} C_j) \sqcup (\bigsqcup\limits_{l=1}^{r} D_l)$. Кроме того, по определению полукольца $\forall j$ $\exists \{E_{j,\mu}\}_{\mu=1}^{\mu_j} : B_j = C_j \sqcup (\bigsqcup\limits_{\mu=1}^{\mu_j} E_{j,\mu})$ $\qquad (\star)$

Покажем, что набор $\{C_j\}_{j=1}^{M} \sqcup \{D_l\}_{l=1}^{r} \sqcup (\bigsqcup\limits_{j=1}^{m} \bigsqcup\limits_{\mu=1}^{\mu_j} E_{j,\mu})$ – требуемый. Понятно, что из этих "кирпичиков" можно составить любое B_j, а значит и все множества $A_1, ..., A_k$. Затем A_{k+1} составляется из $\{C_j\}_{j=1}^{M}$ и $\{D_l\}_{l=1}^{r}$. Осталось проверить, что множества не пересекаются между собой. Ясно, что $E_{j,\mu}$ не пересекаются между собой. Также $E_{j,\mu}$ не пересекаются с C_j, т.к. при одном j имеем равенство $(\star)$, а при разных j они лежат в разных B_j и, следовательно, не пересекаются. С D_l они тоже не пересекаются, потому что D_l лежат в A_{k+1}, причём в той части, которая не пересекается ни с одним B_j и т.д. ■

Замечание 1.5. В дальнейшем при использовании леммы 1.2 всегда будем считать, что $\{B_j\}_{j=1}^{M} : \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} \Omega(i) = \{1, .., M\}$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 2

Мера на полукольце

2.1. Свойства меры на полукольце

Опр. 2.1. Пусть S – полукольцо. Заданная на S функция $m : S \to [0, \infty)$ называется мерой $\Leftrightarrow \forall A, A_1, ..., A_n \in S : A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ имеем $m(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)$.

При этом m называется σ-аддитивной $\Leftrightarrow \forall A, A_1, ..., A_n, ... \in S : A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ имеем $m(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)$.

Утв. 2.1. *Пусть S – полукольцо, m – мера на S и пусть $A_0, ..., A_n \in S$ и $A_0 \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. Тогда $m(A_0) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)$.*

<u>*Доказательство.*</u> По лемме 1.2 $\exists \{B_j\}_{j=1}^{M} \subseteq S : B_j$ попарно не пересекаются и $\forall i \in \{0, 1, ..., n\}\ \exists \Omega(i) \subseteq \{1, ..., M\} : A_i = \bigsqcup\limits_{j \in \Omega(i)} B_j$. При этом $\bigcup\limits_{i=0}^{n} \Omega(i) = \{1, ..., M\}$. Поскольку $A_0 \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, то $\Omega(0) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Omega(i)$ (потому что если бы это было не так, то нашелся бы элемент B, который лежал бы в той части A_0, которая не покрыта ни одним A_i). Из $\Omega(0) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Omega(i)$ следует $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \Omega(i) = \{1, ..., M\}$.

Теперь $m(A_0) = \sum\limits_{j \in \Omega(0)} m(B_j) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{M} m(B_j) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j \in \Omega(i)} m(B_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)$ ■

Утв. 2.2. *Пусть S – полукольцо и m – мера на S. Пусть также $A, A_1, ..., A_n \in S$ и $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subseteq A$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i) \leqslant m(A)$.*

<u>*Доказательство.*</u> По лемме 1.1 $\exists A_{n+1}, ..., A_l \in S : A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{l} A_i$.

Тогда $m(A) = \sum\limits_{i=1}^{l} m(A_i) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)$. ■

Следствие 2.1. *Если S – полукольцо, m – мера на S и $A, A_1, ..., A_n, ... \in S$ и $\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A$, то $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i) \leqslant m(A)$.*

<u>*Доказательство.*</u> $\forall N \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subseteq A$, отсюда по утв. 2.2 $\sum\limits_{i=1}^{N} m(A_i) \leqslant m(A)$. Переходя к пределу в этом неравенстве при $N \to \infty$, получаем требуемое. ■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2.2. Пример меры на полукольце

Пусть n – натурально число, $[a,b] = \prod\limits_{j=1}^{n}[a_j,b_j] \subset \mathbb{R}^n$.

$S = \varnothing \sqcup \{\{\alpha,\beta\} = \prod\limits_{j=1}^{n}\{\alpha_j,\beta_j\} \subseteq [a,b]\}$. Понятно, что это полукольцо с единицей ($[a,b]$ - единица). Определим функцию $m(\{\alpha,\beta\}) = m_n(\{\alpha,\beta\}) = \prod\limits_{j=1}^{n}(\beta_j - \alpha_j)$. Неотрицательность m очевидна, далее докажем, что m – мера на S.

Теорема 2.1. *m – мера на S.*

Доказательство. Индукция по размерности n.
Пусть $\{\alpha,\beta\} = \bigsqcup\limits_{k=1}^{r}\{\alpha(k),\beta(k)\}$. (*)
Если $n=1$, то можно занумеровать промежутки так, что $\alpha = \alpha(1) \leqslant \beta(1) = \alpha(2) \leqslant ... \leqslant \beta(r) = \beta$. Поэтому
$m_1(\{\alpha,\beta\}) = \beta - \alpha = \sum\limits_{k=1}^{r}(\beta(k) - \alpha(k)) = \sum\limits_{k=1}^{r} m_1(\{\alpha(k),\beta(k)\})$.
Предположим, что $n > 1$ и утверждение доказано для m_{n-1}. Проверим его для m_n. Для множеств $F \subseteq \mathbb{R}^n$ определим $E_{n,t}(F) = \{(x_1,...,x_{n-1}) : (x_1,...,x_{n-1},t) \in F\}$ (сечение множества F). Заметим, что $\forall\{\alpha,\beta\}$

$$E_{n,t}(F) = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{n-1}\{\alpha_i,\beta_i\} & \text{, если } t \in \{\alpha_n,\beta_n\} \\ \varnothing & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Тогда, если выполнено (*), то $\forall t \in \{\alpha_n,\beta_n\}$ имеем $E_{n,t}(\{\alpha,\beta\}) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{r} E_{n,t}(\{\alpha(k),\beta(k)\})$.
Тогда $m_n(\{\alpha,\beta\}) = \prod\limits_{j=1}^{n}(\beta_j - \alpha_j) = \int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} m_{n-1}(E_{n,t}(\{\alpha,\beta\}))dt =$
$= \int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n}\sum\limits_{k=1}^{r} m_{n-1}(E_{n,t}(\{\alpha(k),\beta(k)\}))dt = \sum\limits_{k=1}^{r}\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} m_{n-1}(E_{n,t}(\{\alpha(k),\beta(k)\}))dt =$
$= \sum\limits_{k=1}^{r}\int\limits_{\alpha_{n(k)}}^{\beta_{n(k)}}\prod\limits_{j=1}^{n-1}(\beta_j(k) - \alpha_j(k))dt = \sum\limits_{k=1}^{r}\prod\limits_{j=1}^{n}(\beta_j(k) - \alpha_j(k)) = \sum\limits_{k=1}^{r} m_n(\{\alpha(k),\beta(k)\})$. (Данные функции кусочно-постоянны, а значит интегрируемы по Риману). Таким образом, введённая нами функция m является мерой. ■

Теорема 2.2. *m – σ-аддитивная мера на S.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha,\beta\} = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}\{\alpha(k),\beta(k)\}$. Предположим, что задано некоторое $\varepsilon > 0$.
Тогда подберём n-мерный отрезок $[\alpha',\beta'] \subset \{\alpha,\beta\} : m(\{\alpha,\beta\}) < m([\alpha',\beta']) + \dfrac{\varepsilon}{2}$. (Это можно сделать в силу определения меры m: видно, что при малых изменениях координат изменения меры тоже малы). Кроме того, $\forall k$ подберём интервал

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$(\alpha'(k), \beta'(k)) \supset \{\alpha(k), \beta(k)\} : m((\alpha'(k), \beta'(k))) < m(\{\alpha(k), \beta(k)\}) + \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}$.
Значит $[\alpha', \beta'] \subseteq \{\alpha, \beta\} = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} \{\alpha(k), \beta(k)\} \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha'(k), \beta'(k))$.
Тогда по лемме Гейне-Бореля $\exists M : [\alpha', \beta'] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{M} (\alpha'(k), \beta'(k))$. Тогда по утверждению **??** $m([\alpha', \beta']) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{M} m(\alpha'(k), \beta'(k))$. Отсюда $m(\{\alpha, \beta\}) < \dfrac{\varepsilon}{2} + m([\alpha', \beta']) \leqslant$
$\leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \sum\limits_{k=1}^{M} m((\alpha'(k), \beta'(k))) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \sum\limits_{k=1}^{M} (m(\{\alpha(k), \beta(k)\}) + \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}) <$
$< \dfrac{\varepsilon}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(\{\alpha(k), \beta(k)\})$. Так как $\varepsilon > 0$ – произвольное, получаем
$m(\{\alpha, \beta\}) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(\{\alpha(k), \beta(k)\})$. Обратное неравенство получаем из следствия 2.1 ■

2.3. Продолжение меры на минимальное кольцо

Опр. 2.2. Пусть S – полукольцо, m – мера на S и $R(S)$ – минимальное кольцо, содержащее S. Тогда, если $A \in R(S)$ и $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} B_i, B_i \in S$, то положим
$\nu(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} m(B_i)$.

Утв. 2.3. *ν корректно определена.*

Доказательство. Пусть $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} B_i = A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} C_j$, где все $B_i, C_j \in S$. Необходимо доказать, что сумма мер B_i равна сумме мер C_j, то есть что ν не зависит от способа представления.
Определим $D_{i,j} = B_i \cap C_j \in S$, где $i = 1, ..., n; j = 1, ..., m$.
$\forall i$ имеем $B_i = B_i \cap A = B_i \cap \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} C_j = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} D_{i,j}$. Аналогично $\forall j\ C_j = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} D_{i,j}$.
Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} m(B_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} m(D_{i,j}) = \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{n} m(D_{i,j}) = \sum\limits_{j=1}^{m} m(C_j)$. А значит ν определена корректно. ■

Теорема 2.3. *ν – мера на $R(S)$.*

Доказательство. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{r} A_k$, где $A_k \in R(S)$.
Тогда $\forall k\ A_k = \bigsqcup\limits_{i=1}^{i_k} B_{k,i}$, где все $B_{k,i} \in S \Rightarrow A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{r} \bigsqcup\limits_{i=1}^{i_k} B_{k,i} \Rightarrow \nu(A) = \sum\limits_{k=1}^{r} \sum\limits_{i=1}^{i_k} m(B_{k,i}) =$
$= \sum\limits_{k=1}^{r} \nu(A_k)$ ■

Теорема 2.4. *Если m σ-аддитивна на S, то $\nu - \sigma$-аддитивна на $R(S)$.*

Доказательство. Пусть $A, A_1, ..., A_n, ... \in R(S)$ и $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.
Тогда $A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B_j$, где $B_j \in S$ и $\forall n\ A_n = \bigsqcup\limits_{l=1}^{l_n} C_{l,n}$, где $C_{l,n} \in S$.

Рассмотрим $\forall j, n, l\ D_{j,n,l} = B_j \cap C_{n,l} \in S$. Имеем: $\forall j\ B_j = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigsqcup\limits_{l=1}^{l_n} D_{j,n,l}$. Тогда $\nu(A) = \sum\limits_{j=1}^{m} m(B_j)$. Так как мера m σ-аддитивна, $\sum\limits_{j=1}^{m} m(B_j) = \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{l=1}^{l_n} m(D_{j,n,l})$. А так как m – неотрицательна, имеем $\sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{l=1}^{l_n} m(D_{j,n,l}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{l=1}^{l_n} \sum\limits_{j=1}^{m} m(D_{j,n,l}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{l=1}^{l_n} m(C_{n,l}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$. ■

Замечание 2.1. Если $A \in S$, то $\nu(A) = m(A)$ (вытекает из корректности определения ν).

Утв. 2.4. *Пусть R – кольцо и ν – σ-аддитивная мера на R.*
Тогда, если $A, A_1, ..., A_n, ... \in R$ и $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, то $\nu(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$. (При этом справа допускается бесконечное значение).

Доказательство. Введём множества $B_1 = A_1 \cap A$, $B_i = (A_i \setminus \cup_{j=1}^{i-1} A_j) \cap A$. Тогда:

1) $B_i \in R$ (кольцо)
2) $\forall i\ \nu(B_i) \leqslant \nu(A_i)$ (т.к. B_i – часть A_i)
3) $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$

Значит $\nu(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$. ■

2.4. Меры Лебега и Жордана

Далее в этом разделе используем следующие обозначения:

- S – полукольцо с единицей E
- m – σ-аддитивная мера на S
- $R(S)$ – минимальная алгебра, содержащая S
- ν – продолжение m на $R(S)$

Опр. 2.3. Если $A \subseteq E$, то определим
внешнюю меру Лебега $\mu^*(A) = \inf\limits_{\substack{A_1,...,A_n,..\in S: \\ A\subseteq\cup_{n=1}^{\infty} A_n}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.

Внешняя мера Жордана $\mu_J^*(A) = \inf\limits_{\substack{A_1,...,A_n\in S: \\ A\subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}} \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)$.

Замечание 2.2. $\forall A \subseteq E$ имеем $\mu^*(A) \leqslant \mu_J^*(A) \leqslant m(E)$.

Утв. 2.5. *Если $A \in R(S)$, то $\mu^*(A) = \mu_J^*(A) = \nu(A)$.*

Доказательство. Проверим для меры Лебега (для меры Жордана аналогично).
С одной стороны, т.к. $A \in R(S) \Rightarrow A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} A_i \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} m(A_i) = \nu(A)$.

Предположим, что $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где все $A_i \in S \subseteq R(S)$. Согласно утверждению 2.4 $\nu(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)$. Переходя справа к inf $\Rightarrow \nu(A) \leqslant \mu^*(A)$. ■

Утв. 2.6. *Величины внешних мер Лебега и Жордана не изменятся, если брать* $\inf\limits_{\substack{A_1,\dots,A_n,..\in S:\\ A\subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(A_n)$. *(Соответственно для меры Жордана число A_i конечно)*

Доказательство. Установим его для меры Лебега.

Пусть $A \in E$ и $\widetilde{\mu^*}(A) = \inf\limits_{\substack{A_1,\dots,A_n,..\in S:\\ A\subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(A_n)$. Очевидно, что $\mu^*(A) \leqslant \widetilde{\mu^*}(A)$. (В μ^* более богатый набор покрытий: любое покрытие из $\widetilde{\mu^*}$ содержится в μ^*, а значит, т.к. мы берём нижнюю грань, $\mu^*(A)$ не превосходит $\widetilde{\mu^*}(A)$). Предположим $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где все $A_i \in S \Rightarrow A_i \in R(S)$. Определим $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, ..., B_n = A_n \setminus \cup_{j=1}^{n-1} A_j, ...$ все эти множества $\in R(S)$, значит $\forall i\ B_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{j_i} C_{i,j}$, где $C_{i,j} \in S$. Имеем $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} \bigsqcup\limits_{j=1}^{j_i} C_{i,j}$. При этом $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{j_i} m(C_{i,j})$ (неравенство верно, т.к. $B_i \subseteq A_i \forall i$). Имеем $A \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigsqcup\limits_{j=1}^{j_i} C_{i,j}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{j_i} m(C_{i,j}) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(A_i)$. Переходя к inf, получаем $\widetilde{\mu^*}(A) \leqslant \mu^*(A)$. ■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 3

Меры Лебега и Жордана

3.1. Теорема об оценках внешних мер Лебега и Жордана

Теорема 3.1. *Если* $A, A_1, ..., A_n, ... \subseteq E$ *и* $A \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ *(при этом справа допускается бесконечное значение).*
(для μ_J^* *неравенство справедливо для случая ,когда* $A \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$*).*

Доказательство. Установим неравенство для μ^* (для μ_J^* аналогично).
Если $\sum$ справа $= \infty$, утверждение очевидно. Пусть задано некоторое $\varepsilon > 0$, тогда по определению внешней меры Лебега $\forall n\ \exists \{C_{n,i}\}_{i=1}^{\infty} \subset S : A_n \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_{n,i}$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(C_{n,i}) < \mu^*(A_n) + \dfrac{\varepsilon}{2^n}$. Тогда
$A \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_{n,i} \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(C_{n,i}) < \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\mu^*(A_n) + \dfrac{\varepsilon}{2^n}) =$
$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$
Из того, что $\varepsilon > 0$ - произвольное, вытекает утверждение теоремы. ■

Следствие 3.1. *Если* $A, B \subseteq E$*, то справедлива следующая оценка:*
$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B)$*. (Для* μ_J^* *аналогично).*

Доказательство. Имеем $A \leqslant (A \triangle B) \cup B \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(A \triangle B) + \mu^*(B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mu^*(A) - \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A \triangle B)$. Так как A и B равноправны, то отсюда следует утверждение следствия. ■

3.2. Продолжение мер по Лебегу и по Жордану

Опр. 3.1. Пусть $A \subseteq E$, тогда скажем, что $A \in M$ или A измеримо по Лебегу (что $A \in M_J$ или A измеримо по Жордану) $\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists A_\varepsilon \in R(S) : \mu^*(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon \quad (\mu_J^*(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon)$

Замечание 3.1. Очевидно, если $A \in R(S) \Rightarrow A \in M, A \in M_J$. Кроме того, т.к. $\forall B$ $\mu^*(B) \leqslant \mu_J^*(B)$, то $M_J \subseteq M$.

Теорема 3.2. M *– алгебра (*M_J *– алгебра).*

Доказательство. Пусть $A, B \in M$, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists A_\varepsilon, B_\varepsilon \in R(S) : \mu^*(A \triangle A_\varepsilon) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\mu^*(B \triangle B_\varepsilon) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Имеем : $(A \cap B) \triangle (A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) \subseteq (A \triangle A_\varepsilon) \cup (B \triangle B_\varepsilon)$. (Проверяется непосредственно: если некоторое a лежит в левой части, то либо $a \in A \cap B$ и a не лежит хотя бы в одном из A_ε или B_ε, либо $a \in A_\varepsilon \cap B_\varepsilon$ и a не лежит хотя бы в одном

из A или B. В каждом из этих случаев a лежит в правой части).
Аналогично $(A\triangle B)\triangle(A_\varepsilon\triangle B_\varepsilon) \subseteq (A\triangle A_\varepsilon)\cup(B\triangle B_\varepsilon)$. (Точка лежит в левой части, если принадлежит ровно одному или ровно трём из множеств $A, B, A_\varepsilon, B_\varepsilon$. Ясно, что тогда точка лежит и в правой части).
Тогда по теореме 3.1 $\mu^*((A\cap B)\triangle(A_\varepsilon\cap B_\varepsilon)) \leqslant \mu^*(A\triangle A_\varepsilon)+\mu^*(B\triangle B_\varepsilon) < \varepsilon$. Аналогично $\mu^*((A\triangle B)\triangle(A_\varepsilon\triangle B_\varepsilon)) < \varepsilon$. Отсюда M – кольцо, а т.к. $E \in M$, M – алгебра. ■

Теорема 3.3. *μ^* – мера на M (μ^*_J – мера на M_J).*

Доказательство. (для μ^*, а для μ^*_J аналогично).
Пусть $A = B \sqcup C$, где $B, C \in M$. Тогда по теореме 3.1 $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)+\mu^*(C)$.
Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists C_\varepsilon, B_\varepsilon \in R(S) : \mu^*(B\triangle B_\varepsilon) < \dfrac{\varepsilon}{6}$ и $\mu^*(C\triangle C_\varepsilon) < \dfrac{\varepsilon}{6}$. Заметим, что $A\triangle(B_\varepsilon\cup C_\varepsilon) \subseteq (B\triangle B_\varepsilon)\cup(C\triangle C_\varepsilon)$ (проверяется непосредственно) и
$B_\varepsilon\cap C_\varepsilon \subseteq (B\triangle B_\varepsilon)\cup(C\triangle C_\varepsilon)$ (т.к. $B\cap C = \varnothing$).
По теореме 3.1 $\mu^*(A\triangle(B_\varepsilon\cup C_\varepsilon)) \leqslant \mu^*(B\triangle B_\varepsilon)+\mu^*(C\triangle C_\varepsilon) < \dfrac{\varepsilon}{3}$ и, т.к. $B_\varepsilon\cap C_\varepsilon \in R(S)$, $\mu^*(B_\varepsilon\cap C_\varepsilon) = \nu(B_\varepsilon\cap C_\varepsilon) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Используя следствие 3.1,
$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(B_\varepsilon\cup C_\varepsilon) - \mu^*(A\triangle(B_\varepsilon\cup C_\varepsilon)) = \nu(B_\varepsilon\cup C_\varepsilon) - \mu^*(A\triangle(B_\varepsilon\cup C_\varepsilon)) \geqslant \nu(B_\varepsilon\cup C_\varepsilon) - \dfrac{\varepsilon}{3}$.
(Понятно, что $\nu(B_\varepsilon\cup C_\varepsilon) = \nu(B_\varepsilon)+\nu(C_\varepsilon\setminus(B_\varepsilon\cap C_\varepsilon)) = \nu(B_\varepsilon)+\nu(C_\varepsilon)-\nu(B_\varepsilon\cap C_\varepsilon)$).
Тогда $\nu(B_\varepsilon\cup C_\varepsilon) - \dfrac{\varepsilon}{3} = \nu(B_\varepsilon)+\nu(C_\varepsilon)-\nu(B_\varepsilon\cap C_\varepsilon) - \dfrac{\varepsilon}{3} > \nu(B_\varepsilon)+\nu(C_\varepsilon) - \dfrac{2\varepsilon}{3} =$
$= \mu^*(B_\varepsilon)+\mu^*(C_\varepsilon) - \dfrac{2\varepsilon}{3} \geqslant$ (по следствию 3.1) $\geqslant \mu^*(B)-\mu^*(B\triangle B_\varepsilon)+\mu^*(C)-\mu^*(C\triangle C_\varepsilon) - \dfrac{2\varepsilon}{3} > \mu^*(B)+\mu^*(C)-\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольное, то $\mu^*(A) \geqslant \mu^*(B)+\mu^*(C) \Rightarrow \mu^*(A) = \mu^*(B)+\mu^*(C)$.
Если $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, где $A_k \in M \Rightarrow A = (\bigsqcup\limits_{k=2}^{n} A_k) \sqcup A_1$ (Причём $(\bigsqcup\limits_{k=2}^{n} A_k) \in M$ и $A_1 \in M$) $\Rightarrow \mu^*(A) = \mu^*(\bigsqcup\limits_{k=2}^{n} A_k) + \mu^*(A_1) = ... = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu^*(A_k)$. ■

Обозначение
Для $A \in M$ положим $\mu(A) = \mu^*(A)$ и назовём μ – мерой Лебега. Аналогично для $A \in M_J$ $\quad \mu_J(A) = \mu^*_J(A)$ и называется мерой Жордана.

Теорема 3.4. *M – σ-алгебра **(для M_J неверно!)***

Доказательство. Пусть $A_1, ..., A_n, .. \in M$ и $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.
Положим $B_1 = A_1, B_i = A_i \setminus \cup_{j=1}^{i-1}$, где $i = 2, 3, ...$ Тогда все $B_i \in M$, т.к. M – алгебра. При этом $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Заметим, что $\forall N \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq A \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu^*(A) \geqslant \mu^*(\bigsqcup\limits_{n=1}^{N} B_n) = \sum\limits_{n=1}^{N} \mu^*(B_n) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) < \infty$. Теперь, если задано некоторое $\varepsilon > 0$, то подберём $N : \sum\limits_{n=1}^{N} \mu^*(B_n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. $\bigsqcup\limits_{n=1}^{N} B_n \in M \Rightarrow \exists C_\varepsilon \in R(S) : \mu^*((\bigsqcup\limits_{n=1}^{N} B_n)\triangle C_\varepsilon) <$

$\frac{\varepsilon}{2}$.

Далее $A \triangle C_\varepsilon \subseteq ((\bigsqcup\limits_{n=1}^{N} B_n) \triangle C_\varepsilon) \cup (\bigsqcup\limits_{n=N+1}^{\infty} B_n)$ (В самом деле, если некоторое $a \in A$ и $a \notin C_\varepsilon$, то либо $a \in \bigsqcup\limits_{n=1}^{N} B_n$, либо $a \in \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$; если же $a \in C_\varepsilon$ и $a \notin A$, то ясно, что $a \in (\bigsqcup\limits_{n=1}^{N} B_n) \triangle C_\varepsilon$).

Значит $\mu^*(A \triangle C_\varepsilon) \leqslant \mu^*((\bigsqcup\limits_{n=1}^{N} B_n) \triangle C_\varepsilon) + \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \mu^*(B_n) < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольное, то $A \in M$. ■

Теорема 3.5. *μ – σ-аддитивная мера на M.*

Доказательство. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где все $A_n \in M$. Тогда по теореме 3.1 $\mu(A) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. С другой стороны, т.к. μ – мера, то по следствию 2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu(A)$. ■

Теорема 3.6. *Если $A \in M_J$, то $\mu(A) = \mu_J(A)$.*

Доказательство. Всегда $\mu^*(A) \leqslant \mu_J^*(A) \Rightarrow \mu(A) \leqslant \mu_J(A)$. Осталось получить обратное неравенство. Подберём для заданного $\varepsilon > 0$ $A_\varepsilon \in R(S) : \mu_J^*(A \triangle A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\mu(A \triangle A_\varepsilon) = \mu^*(A \triangle A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Поэтому $\mu_J(A) \leqslant \mu_J(A_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} = \nu(A_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} = \mu(A_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \mu(A) + \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольное, то $\mu_J(A) \leqslant \mu(A)$. ■

Следствие 3.2. *μ_J σ-аддитивна на M_J.*

Опр. 3.2. Если $S = \{\{\alpha, \beta\} \subseteq [a, b] = \prod\limits_{j=1}^{n} [a_j, b_j]\}$ и $m(\{\alpha, \beta\}) = \prod\limits_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j)$, то получившиеся продолжения m по Лебегу и по Жордану меры будем называть классическими мерами Лебега (соответственно Жордана).

Замечание 3.2. Классические меры Лебега и Жордана инвариантны относительно сдвигов, точнее : если $A \subseteq [a, b] \subset \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^n : A + t = \{x + t : x \in A\} \subseteq [a, b]$, то $A \in M \Leftrightarrow A + t \in M$, причём, если принадлежит, то $\mu(A) = \mu(A + t)$. Это вытекает из соответствующего свойства функции m на S.

3.3. Меры Лебега-Стилтьеса

Пусть φ – неубывающая ограниченная непрерывная слева функция на $\mathbb{R}$. Определим $\varphi(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x)$, $\varphi(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$ (существуют в силу ограниченности и монотонности). Пусть $S = \varnothing \sqcup \{[a, b)$, где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, причём $[-\infty, b) = (-\infty, b)\}$. Тогда S – полукольцо с единицей $E = (-\infty, +\infty)$. Определим функцию $m : S \to [0, +\infty) : m([\alpha, \beta)) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$.

Теорема 3.7. *m – σ-аддитивная мера на S.*

Доказательство. 1) Проверим, что m – мера.
Если $[a,b) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n}[a_k,b_k)$, то можно считать, что $a = a_1 < b_1 = a_2 < ... = b_n = b \Rightarrow$
$\Rightarrow m([a,b)) = \varphi(b) - \varphi(a) = \sum\limits_{k=1}^{n}(\varphi(b_k) - \varphi(a_k)) = \sum\limits_{k=1}^{n} m([a_k,b_k))$. Значит m – мера.
2) Теперь пусть $[a,b) = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n)$, так как m – мера, тогда по следствию 2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m([a_n,b_n)) \leqslant m([a,b))$.
Докажем обратное неравенство. Пусть вначале $-\infty < a < b < +\infty$ и задано некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда в силу непрерывности слева $\varphi(x)$ можно найти такое число $b' \in [a,b) : \varphi(b) < \varphi(b') + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Аналогично $\forall n$ найдём $a'_n < a_n : \varphi(a_n) < \varphi(a'_n) + \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Заметим, что $[a,b'] \subset [a,b) = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n] \subset \cup_{n=1}^{\infty}(a'_n,b_n)$. Тогда $\exists N : [a,b') \subset [a,b'] \subseteq \cup_{n=1}^{N}(a'_n,b_n) \subseteq \cup_{n=1}^{N}[a'_n,b_n)$. По лемме **??** $m([a,b')) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{N} m([a'_n,b_n))$. Далее $m([a,b)) - \dfrac{\varepsilon}{2} = \varphi(b) - \varphi(a) - \dfrac{\varepsilon}{2} < \varphi(b') - \varphi(a) = m([a,b')) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{N} m([a'_n,b_n)) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{N}(\varphi(b_n) - \varphi(a_n)) < \sum\limits_{n=1}^{N}(\varphi(b_n) - \varphi(a_n)) + \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} m([a_n,b_n)) + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда $m([a,b)) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} m([a_n,b_n))$.
Пусть теперь $a = -\infty$ $(b < \infty)$, тогда
$m(-\infty,b) = \lim\limits_{k\to-\infty} m([k,b)) \leqslant \lim\limits_{k\to-\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} m([min(a_n,k),b_n)) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} m([a_n,b_n))$. Аналогично для $b = \infty$. Таким образом $m([a,b)) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m([a_n,b_n))$. ■

Опр. 3.3. Мерой Лебега-Стилтьеса, построенной по функции $\varphi(x)$, называется Лебеговское продолжение меры m.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 4

Непрерывность и полнота мер

4.1. σ-аддитивная и σ-конечная меры Лебега

Пусть S – полукольцо подмножеств некоторого множества X, причём $\exists$ представление $X = \cup_{n=1}^{\infty} A'_n$, где все $A'_n \in S$. (Например, полукольцо всевозможных конечных промежутков на прямой, где X – прямая). Пусть также m – σ-аддитивная мера на S, μ – продолжение m на $R(S)$. Положим $A_1 = A'_1, A_j = A'_j \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{j-1} A'_i$, где $j = 2, 3, ...$ Тогда все $A_j \in R(S) \Rightarrow \forall j\ A_j = \bigsqcup\limits_{k=1}^{k_j} L_{j,k}$ где все $L_{j,k} \in S$. Кроме того, $X = \cup_{n=1}^{\infty} A'_n = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} \bigsqcup\limits_{k=1}^{k_j} L_{j,k} = \bigsqcup\limits_{r=1}^{\infty} B_r$, где все $B_r \in S$.

Опр. 4.1. При r = 1, 2, ... обозначим через M_r Лебеговскую σ-алгебру подмножеств B_r, полученную при продолжении меры m с полукольца $S \cap B_r$ (B_r – единица).
μ_r – соответствующая мера Лебега на M_r.

Опр. 4.2. Пусть $A \subseteq X$, тогда скажем, что $A \in M \Leftrightarrow \forall r\ A \cap B_r \in M_r$. При этом, если $A \in M$, то предполагаем $\mu(A) = \sum\limits_{r=1}^{\infty} \mu_r(A \cap B_r)$ (возможно, что $\mu(A) = \infty$).

Теорема 4.1. *M – σ-алгебра.*

Доказательство. 1) Заметим, что $X \in M$ (Ясно, что $X \cap B_r = B_r \in M_r$).
2) Пусть $A, C \in M$. Тогда $\forall r\ A \cap B_r, C \cap B_r \in M_r$ (по определению). Значит
$(A \cap C) \cap B_r = (A \cap B_r) \cap (C \cap B_r) \in M_r$ и аналогично
$(A \triangle C) \cap B_r = (A \cap B_r) \triangle (C \cap B_r) \in M_r \Rightarrow A \cap C, A \triangle C \in M$. То есть M – алгебра.
3) Пусть $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, где все $A_n \in M$. Тогда $\forall r, n\ A_n \cap B_r \in M_r \Rightarrow$
$\Rightarrow (\cup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B_r) = \cup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_r) \in M_r\ \forall r$. Значит $A \in M$. ■

Теорема 4.2. *μ – σ-аддитивная мера на M (с возможными бесконечными значениями).*

Доказательство. Пусть $A_1, ..., A_n, .. \in M$ и $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда
$\forall r\ \mu_r(A) = \mu_r((\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \cap B_r) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_r(A_n \cap B_r)$. Тогда $\mu(A) = \sum\limits_{r=1}^{\infty} \mu_r(A \cap B_r) =$
$= \sum\limits_{r=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_r(A_n \cap B_r) =$ (т.к. слагаемые неотрицательны) $=$
$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{r=1}^{\infty} \mu_r(A_n \cap B_r) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. ■

Замечание 4.1. Пусть S – полукольцо с единицей E, $A \in S$,
а $S' = S \cap A = \{A \cap B : B \in S\}$. Тогда S' – полукольцо с единицей A. Пусть также

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

m – σ-аддитивная мера на S. Тогда из процесса построения меры Лебега видно, что если M – σ-алгебра подмножеств E, измеримых по Лебегу и μ – соответствующая мера Лебега на M, а N - σ-алгебра подмножеств A, измеримых по Лебегу, полученная с помощью продолжения меры m с S' и ν – соответствующая мера Лебега на N, то $N = M \cap A$ и $\forall B \in M$ $\nu(B) = \mu(B)$.

Теорема 4.3. *Пусть $\exists$ два представления $\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = X = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} B'_j$ где все $B_i, B'_j \in S$. Пусть M и M' – σ-алгебры для соответствующих σ-конечных мер, а μ и μ' – σ-конечные меры. Тогда $M = M'$ и $\forall A \in M$ $\mu(A) = \mu'(A)$.*

Доказательство. Пусть $\forall i, j$ $C_{i,j} = B_i \cap B_j \in S$. Пусть $A \in M$, тогда $\forall i$ $A \cap B_i \in M_i \Rightarrow \forall i, j$ $A \cap C_{i,j} \in M_i$. Но мера Лебега на подмножествах $C_{i,j}$ может быть получена (см. замечание 4.1) с помощью Лебеговского продолжения меры m с $S \cap C_{i,j}$. Точно так же обстоит дело с мерой μ_j на подмножествах $C_{i,j}$. Следовательно, $A \cap C_{i,j} \in M'_j$ $\forall i, j \Rightarrow A \in M'$ ($M' - \sigma$-алгебра). Кроме того,

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mu_i(A \cap C_{i,j}) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mu'_j(C_{i,j} \cap A) =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \mu'_j(C_{i,j} \cap A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu'_j(A \cap B'_j) = \mu'(A). \qquad \blacksquare$$

Обозначение Построенная мера называется σ-конечной мерой Лебега. Если изначально m – мера на промежутках в $\mathbb{R}^n$, равная их n-мерному объёму, то меру μ будем называть классической σ-конечной мерой Лебега.

4.2. Борелевская σ-алгебра

Опр. 4.3. Боролевской σ-алгеброй B_n будем называть минимальную σ-алгебру, содержащую все открытые подмножества $\mathbb{R}^n$. Для $n = 1$ обозначим $B = B_1$.

Утв. 4.1. *Пусть M - лебеговская σ-алгебра, соответствующая классической σ-конечной мере Лебега на подмножествах $\mathbb{R}^n$. А открытое множество $G \in \mathbb{R}^n$. Тогда $G \in M$.*

Доказательство. Для точек $x \in G$ обозначим $d_x = \inf\limits_{y \in \mathbb{R}^n \setminus G} |x - y|$.
Если $P = \{\bar{p} = (p_1, ..., p_n) \in G$: все $p_i \in \mathbb{Q}\}$, то P – счётное. Легко заметить, что $G = \cup_{\bar{p} \in P} \prod\limits_{j=1}^{n} (p_j - \frac{d_{\bar{p}}}{n}, p_j + \frac{d_{\bar{p}}}{n})$. Но все $\prod\limits_{j=1}^{n} (p_j - \frac{d_{\bar{p}}}{n}, p_j + \frac{d_{\bar{p}}}{n}) \in M \Rightarrow G \in M$. $\blacksquare$

Следствие 4.1. $B_n \subseteq M$.

Доказательство. И то, и другое – σ-алгебры; и то, и другое содержит все открытые множества.
(На самом деле есть такие множества, которые лежат в M, но не лежат в B_n, а значит $B_n \subset M$, но это будет обсуждаться на семинарах). $\blacksquare$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Опр. 4.4. Мерой Бореля называется соответствующая классическая σ-конечная мера Лебега, суженная на B_n. (Ясно, что мера Бореля σ-аддитивна).

4.3. Непрерывность и полнота мер

Опр. 4.5. Пусть R – кольцо и ν – мера на R. Тогда ν называется непрерывной на $R \Leftrightarrow \forall A, A_1, ..., A_n, ... \in R : A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq ...$ и $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ имеем $\nu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \nu(A_n)$.

Теорема 4.4. *Пусть R – кольцо и ν – конечная мера на R. Тогда ν - непрерывна $\Leftrightarrow$ ν – σ-аддитивна.*

Доказательство. $\Leftarrow$) Пусть $A, A_1, ..., A_n, ... \in R : A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq ...$ и $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда $A_1 = A \sqcup (\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1}))$. Значит (т.к. ν – σ-аддитивна)
$\nu(A_1) = \nu(A) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(A_n \setminus A_{n+1}) =$ (т.к. $A_{n+1} \subseteq A_n$) $= \nu(A) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\nu(A_n) - \nu(A_{n+1})) =$
$= \nu(A) + \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N-1} (\nu(A_n) - \nu(A_{n+1})) = \nu(A) + \nu(A_1) - \lim\limits_{N\to\infty} \nu(A_N)$.
Имеем $\nu(A_1) = \nu(A) + \nu(A_1) - \lim\limits_{N\to\infty} \nu(A_N)$. А значит $\nu(A) = \lim\limits_{N\to\infty} \nu(A_N)$.
$\Rightarrow$) Пусть $A, A_1, ..., A_n, ... \in R$ и $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.
Обозначим $\forall N$ $B_N = \bigsqcup\limits_{n=N+1}^{\infty} A_n = A \setminus \bigsqcup\limits_{n=1}^{N} A_n$ (т.к. R – кольцо, то $B_N \in R$). При этом $B_1 \supseteq B_2 \supseteq ...$ и $\cap_{N=1}^{\infty} B_N = \varnothing \Rightarrow$ (т.к. ν – непрерывна) $\Rightarrow \nu(B_N) \underset{N\to\infty}{\to} \nu(\varnothing) = 0$.
Но $\forall N$ $A = (\bigsqcup\limits_{n=1}^{N} A_n) \sqcup B_N \Rightarrow$ (т.к. ν – мера) $\Rightarrow \nu(A) = \sum\limits_{n=1}^{N} \nu(A_n) + \nu(B_N) \Rightarrow \nu(A) - \nu(B_N) = \sum\limits_{n=1}^{N}$. Устремляем $N \to \infty$, тогда левая часть $\to \nu(A) \Rightarrow$ существует предел справа, т.е. $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \nu(A)$. ■

Замечание 4.2. Если R – кольцо, ν – σ-аддитивная конечная мера на R, $A, A_1, ..., A_n, ... \in R$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ...$ и $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда $\nu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \nu(A_n)$. Для этого достаточно рассмотреть множества $B_n = A \setminus A_n \in R$, $B_1 \supseteq B_2 \supseteq ...$ и $\cap_{n=1}^{\infty} = \varnothing$ и применить теорему 4.4.

Замечание 4.3. При доказательстве теоремы 4.4 не использовалась неотрицательность ν.

Следствие 4.2. *Пусть R – кольцо, μ – σ-конечная σ-аддитивная мера на R. Пусть также $A, A_1, ..., A_n, ... \in R$ и $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$. Пусть, кроме того, $\mu(A_1) < \infty$. Тогда $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \nu(A_n)$.*

Доказательство. Пусть $R_1 = R \cap A_1$, тогда сужение μ на R_1 – конечная σ-аддитивная мера и мы можем применить теорему 4.4. ■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Замечание 4.4. Пусть μ – классическая σ-конечная мера Лебега на подмножествах $\mathbb{R}^1$, $A_n = [n, \infty), n = 1, 2, ...$ и $A = \varnothing$. Тогда $A_1 \supset A_2 \supset ...$, $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$,
но $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(A_n) = \infty$.

Утв. 4.2. *Пусть R – кольцо, μ – σ-конечная σ-аддитивная мера на R,*
$A, A_1, ..A_n, .. \in R$, причём $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ...$ и $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.
Тогда $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Доказательство. Если $\exists n_0 : \mu(A_{n_0}) = \infty \Rightarrow \forall n > n_0\ \mu(A_n) = \infty$ и $\mu(A) = \infty$, то есть условие теоремы выполняется.
Пусть $\forall n\ \mu(A_n) < \infty$. Тогда $A = A_1 \sqcup (\bigsqcup\limits_{n=2}^{\infty}(A_n \setminus A_{n-1})) \Rightarrow$
$\Rightarrow \nu(A) = \mu(A_1) + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \nu(A_n \setminus A_{n-1}) =$ (т.к. $A_{n-1} \subseteq A_n$) $=$
$= \mu(A_1) + \sum\limits_{n=2}^{\infty}(\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})) = \mu(A_1) + \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=2}^{N}(\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})) = \lim\limits_{N\to\infty} \mu(A_n)$. ■

Опр. 4.6. Пусть R – кольцо и μ – мера на R. Тогда μ называется полной $\Leftrightarrow$ если $A \in R, \mu(A) = 0$ и $B \subseteq A \Rightarrow B \in R$ и $\mu(B) = 0$.
(То есть любое подмножество множества меры 0 должно быть измеримо, и его мера должна равняться 0).

Наблюдение Меры Лебега, Жордана, σ-конечная мера Лебега, меры Лебега-Стилтьеса полны.
Мера Бореля не полна.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 5

Некоторые свойства измеримых множеств

5.1. Неизмеримые множества

Пусть M – все подмножества прямой $\mathbb{R}^1$,

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & A \ni 0 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Легко проверить, что это σ-аддитивная мера, более того, это мера Лебега-Стилтьеса, порождённая функцией φ (напоминаем, что требовалась только непрерывность слева):

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

В данном случае все множества измеримы. Теперь рассмотрим классическую меру Лебега.

Теорема 5.1. *Пусть M – классическая лебеговская σ-алгебра на подмножествах отрезка [0, 1], μ – соответствующая классическая мера Лебега, $A \in M$ и $\mu(A) > 0$. Тогда $\exists B \subset A : B \notin M$.*
(Другими словами, в любом множестве положительной меры относительно классической меры Лебега есть неизмеримое подмножество).

Доказательство. Введём на [0, 1] отношение эквивалентности: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Рефлексивность, симметричность и транзитивность очевидны.
Тогда $[0,1] = \bigsqcup\limits_{\alpha\in\Omega} K_\alpha$, где K_α – классы эквивалентности. Теперь, используя аксиому выбора, образуем множество $E_0 = \{x_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$, где $x_\alpha \in K_\alpha$ $\forall\alpha \in \Omega$ (то есть из каждого класса взяли по представителю). Затем пусть $\{r_n\}_{n=0}^{\infty} = \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, где $r_0 = 0$. Обозначим $E_n = E_0 + r_n = \{x_\alpha + r_n, \alpha \in \Omega\}$, n= 1, 2, ...
1)Докажем, что $E_n \cap E_m = \varnothing$ при $n \neq m$. Предположим, что $\exists z \in E_n \cap E_m$, то есть $x_\alpha + r_n = z = x_\beta + r_m \Rightarrow x_\alpha - x_\beta = r_m - r_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow x_\alpha \sim x_\beta$, но тогда $\alpha = \beta$ и $x_\alpha = x_\beta$. Тогда $r_m = r_n \Rightarrow m = n$.
2) Проверим, что $[0, 1] \subset \bigsqcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n$. Пусть $x \in [0,1] \Rightarrow \exists\alpha_0 : x \in K_{\alpha_0} \Rightarrow$
$\Rightarrow x - x_{\alpha_0} = q(\in \mathbb{Q}) \in [-1, 1] \Rightarrow q = r_{n_0}$. То есть $x = x_{\alpha_0} + r_{n_0} \in E_n$.
Так как $[0,1] \subset \bigsqcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n, A \subset [0,1] \Rightarrow A = \bigsqcup\limits_{n=0}^{\infty}(A \cap E_n)$, обозначим $A_n = A \cap E_n$. Предположим, что $\forall n\ A_n \in M$. Тогда $\mu(A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \Rightarrow \exists n_0 :$
$\mu(A_{n_0}) = \gamma > 0$ (иначе если бы все A_n имели бы меру 0, то и A было бы меры 0). Множество $A_{n_0} \subset E_{n_0}$. Рассмотрим при $n \neq n_0$ множества $C_n = A_{n_0} - r_{n_0} + r_n$. Ясно,

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

что $C_n \subset E_n$ ($A_{n_0} \subset E_{n_0}$, затем мы сдвинули влево на r_{n_0} и попали в E_0, а затем сдвинули вправо на r_n и попали в r_n). $C_{n_0} = A_{n_0}$. Так как классическая мера Лебега инвариантна относительно сдвигов $\Rightarrow \forall n\ C_n \in M$ и $\mu(C_n) = \gamma\ \forall n$. Поэтому $\bigsqcup\limits_{n=0}^{\infty} C_n \subseteq \bigsqcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n \subseteq [-1, 2]$ (объединение дизъюнктное, т.к. $C_n \subset E_n$, которые, как было показано выше, не пересекаются). Тогда $\infty = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(C_n) \leqslant \mu([-1, 2]) =$
$= 3$ – противоречие. А значит $\exists n_1 : A_{n_1} = A \cap E_{n_1} \notin M$. Обозначим $B = A_{n_1}$. ■

5.2. Структура измеримых по Лебегу множеств

Теорема 5.2. *Пусть M - σ-алгебра, на которой задана σ-аддитивная σ-конечная мера Лебега, полученная лебеговским продолжением σ-аддитивной меры m с полукольца S. $A \in M$ и $\mu(A) < \infty$. Тогда A можно представить в виде : $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \setminus A_0$, где все $A_{i,j} \in R(S)$, $\forall i\ A_{i,1} \subseteq A_{i,2} \subseteq ...$; если $B_i = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$, то $\mu(B_1) < \infty$, $B_1 \supseteq B_2 \supseteq ...$ а $A_0 \in M : \mu(A_0) = 0$*

Доказательство. Из процесса построения конечной и σ-конечной меры Лебега следует, что $\forall n\ \exists \{C_{n,i}\}_{i=1}^{\infty} \subset S$:

1) $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_{n,i}$
2) $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_{n,i} \setminus A) < \dfrac{1}{n}$.

Положим$B_1 = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} C_{1,l}$ и при i > 1 $B_i = \bigcap\limits_{k=1}^{i} \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} C_{k,l}$. Тогда $\mu(B_1) = \mu(\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} C_{1,l}) \leqslant \mu(A) + \dfrac{1}{n}$. Затем $B_1 \supseteq B_2 \supseteq ....$ Кроме того, $\forall i\ B_i \supseteq A$. Наконец, $\forall i\ B_i = \bigcup\limits_{l_1=1}^{\infty} \bigcup\limits_{l_2=1}^{\infty} ... \bigcup\limits_{l_i=1}^{\infty} (C_{1,l_1} \cap C_{2,l_2} \cap ... \cap C_{i,l_i})$. (Ясно, что любое конечное пересечение множеств $C_{i,j} \in S$). Тогда $B_i = \bigcup\limits_{l_1=1}^{\infty} \bigcup\limits_{l_2=1}^{\infty} ... \bigcup\limits_{l_i=1}^{\infty} (C_{1,l_1} \cap C_{2,l_2} \cap ... \cap C_{i,l_i}) = \bigcup\limits_{r=1}^{\infty} D_{i,r}$, где все $D_{i,r} \in S$. Тогда положим при $j \geqslant 1$ $A_{i,j} = \bigcup\limits_{r=1}^{j} D_{i,r} \in R(S)$. При этом $\forall i\ A_{i,1} \subseteq A_{i,2} \subseteq ...$ Определим $A_0 = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i \setminus A$, так как $A \subseteq B_i\ \forall i$ и $\mu(B_i \setminus A) \leqslant \mu(\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} C_{i,l} \setminus A) < \dfrac{1}{i} \Rightarrow A_0 \in M$ и $\mu(A_0) = 0$. ■

5.3. Теорема Витали

Опр. 5.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^1$ и K – система невырожденных отрезков ([a, b] – невырожденный $\Leftrightarrow$ b $>$ a). Тогда говорят, что E покрыто системой K в смысле Витали $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists I = I_{x,\varepsilon} \in K$:
1) $x \in I$
2) $\mu(I) < \varepsilon$ (μ – классическая мера Лебега).

Теорема 5.3. *(Теорема Витали)*
Пусть ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^1$ и система невырожденных отрезков K по-

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

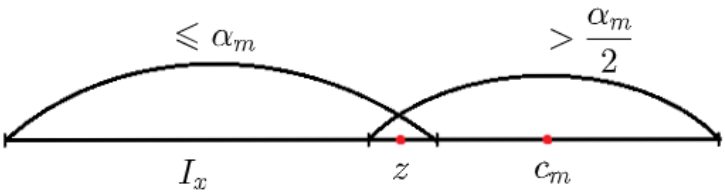
крывает E в смысле Витали. Тогда $\exists$ система попарно непересекающихся отрезков $\{I_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K : \mu^*(E \setminus \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n) = 0$, где μ^* – классическая внешняя мера Лебега.

<u>*Доказательство.*</u> Пусть $E \subseteq [a, b]$. Тогда, т.к. система K покрывала E в смысле Витали, система $K_1 = \{I \in K : I \subseteq [a-1, b+1]\}$ также покрывает E в смысле Витали. Определим число $\alpha_1 = \sup\limits_{I \in K_1} \mu(I) < \infty$ и можно выбрать $I_1 \in K_1 : \mu(I_1) > \dfrac{\alpha_1}{2}$. Теперь пусть $K_2 = \{I \in K_1 : I \cap I_1 = \varnothing\}$. Если $K_2 = \varnothing$, процесс заканчиваем, в противном случае полагаем $\alpha_2 = \sup\limits_{I \in K_2} \mu(I)$ и выбираем $I_2 \in K_2 : \mu(I_2) > \dfrac{\alpha_2}{2}$ и т.д.
Возможны 2 случая:
1) Процесс оборвётся, т.е. $\exists n_0 : K_{n_0} = \varnothing$. Мы имеем систему попарно непересекающихся отрезков $I_1, ..., I_{n_0-1} \in K$. Предположим, что $\exists x \in E \setminus \bigsqcup\limits_{l=1}^{n_0-1} I_l$. Так как $F = \bigsqcup\limits_{l=1}^{n_0-1} I_l$ – замкнутое, то $dist(x, F) = \inf\limits_{y \in F} |x - y| = \alpha > 0$. Но по условию $\exists$ отрезок $I_{x,\alpha} \in K_1 : x \in I_{x,\alpha}$ и $\mu(I_{x,\alpha}) < \dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow I_{x,\alpha} \cap F = \varnothing$ (если было бы непустое пересечение, то расстояние было бы не больше $\dfrac{\alpha}{2}$, а у нас расстояние α) – противоречие с утверждением, что $K_{n_0} = \varnothing$. Тогда $E \subset F$ и утверждение доказано.
2) Построена счётная система попарно непересекающихся отрезков $\{I_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K_1$, причём $\forall n \ \mu(I_n) > \dfrac{\alpha_n}{2}$, где $\alpha_n = \sup\limits_{I \in K_n} \mu(I)$. Пусть некоторое число $\gamma > 0$. Тогда, т.к. $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n \subseteq [a-1, b+1] \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) < \infty \Rightarrow \exists N = N(\gamma) : \sum\limits_{n=N}^{\infty} \mu(I_n) < \dfrac{\gamma}{5}$. Рассмотрим $x \in E \setminus \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n \Rightarrow x \in E \setminus \bigsqcup\limits_{n=1}^{N} I_n \Rightarrow$ если $F_N = \bigsqcup\limits_{n=1}^{N} I_n$, то $dist(x, F_N) > 0$. Поэтому $\exists I_x \in K_{N+1}$, т.е. отрезок из $K_1 : x \in I_x$ и $I_x \cap F_N = \varnothing$, то есть $I_x \in K_{N+1}$. Очевидно, что $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$ (даже монотонно стремятся). Поэтому $\exists l > N+1 : I_x \notin K_l \Rightarrow \exists m \geqslant N+1 : I_x \in K_m$, но $I_x \notin K_{m+1}$. Отсюда

1) $\mu(I_x) \leqslant \alpha_m = \sup\limits_{I \in K_M} \mu(I)$

2) $I_x \cap I_m \neq \varnothing$ (иначе мы бы оказались в K_{m+1}), а в то же время $\mu(I_n) > \dfrac{\alpha_m}{2}$

Тогда $\exists z \in I_x \cap I_m$. Пусть c_m – середина I_m. Тогда для произвольного $y \in I_x$ имеем



$|y - c_m| \leqslant |y - z| + |z - c_m| \leqslant \mu(I_x) + \dfrac{\mu(I_m)}{2} \leqslant 2\mu(I_m) + \dfrac{\mu(I_m)}{2} = \dfrac{5}{2}\mu(I_m)$. Отсюда, если $5I_m$ - отрезок с центром c_m, имеющий длину в 5 раз больше, чем I_m, то $I_x \subseteq 5I_m$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда $E \setminus \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n \subseteq \bigcup\limits_{m=N+1}^{\infty} 5I_m \Rightarrow \mu^*(E \setminus \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}) \leqslant \sum\limits_{m=N+1}^{\infty} \mu(5I_m) = 5 \sum\limits_{m=N+1}^{\infty} \mu(I_m) < \gamma$. Так как $\gamma > 0$ произвольное, отсюда вытекает утверждение теоремы. ■

Следствие 5.1. *В условиях теоремы Витали $\exists$ конечный набор попарно непересекающихся отрезков $\{I_n\}_{n=1}^N : \sum\limits_{n=1}^{N} \mu(I_n) > \dfrac{\mu^*(E)}{2}$.*

5.4. Теорема о структуре открытых множеств

Теорема 5.4. *Пусть G – открытое множество в $\mathbb{R}^1$. Тогда $G = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n)$ (один или два интервала могут иметь бесконечные концы).*

Доказательство. Введём на G отношение $x \sim y \Leftrightarrow \exists (a,b) \subset G : x, y \in (a,b)$

1) Рефлексивность вытекает из того, что G – открыто.
2) Симметричность очевидна.
3) $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow \exists (a,b), (c,d) \subset G : x, y \in (a,b); y, z \in (c,d) \Rightarrow (a,b) \cap (c,d) \neq \varnothing \Rightarrow$
$\Rightarrow (a,b) \cap (c,d) = (min(a,c), max(b,d)) \subset G$ и $x, z \in (min(a,c), max(b,d)) \Rightarrow$
$\Rightarrow x \sim z$.

Поэтому $G = \bigsqcup\limits_{\alpha \in A} K_\alpha$. Положим $\forall \alpha\ a_\alpha = \inf\{x \in K_\alpha\}$, $b_\alpha = \sup\{x \in K_\alpha\}$.
Проверим, что $K_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha)$. Действительно, если $x \in (a_\alpha, b_\alpha)$, то $\exists y, z \in (a_\alpha, b_\alpha) \cap K_\alpha$: $y \sim x$ и $y < x < z \Rightarrow x \sim y \Rightarrow x \in K_\alpha$. Если $x \in (-\infty, a_\alpha) \cup (b_\alpha, +\infty)$, то $x \notin K_\alpha$ по определению a_α и b_α.
Проверим, что $a_\alpha \notin K_\alpha (a_\alpha \neq -\infty)$. Для b_α аналогично. Пусть $a_\alpha \in K_\alpha$. Тогда рассмотрим $l = a_\alpha + \varepsilon$, где $\varepsilon < (b_\alpha - a_\alpha)$. по предположению $a_\alpha \sim l \Rightarrow \exists (\gamma, \delta) \subset G$: $a_\alpha, l \in (\gamma, \delta) \Rightarrow \gamma < a_\alpha$ и $q = \dfrac{a_\alpha + \gamma}{2} \in (\gamma, \delta)$ и $q = \dfrac{a_\alpha + \gamma}{2} < a_\alpha$ и $q \sim a_\alpha \Rightarrow q \in K_\alpha$ – противоречие с тем, что a_α – точная нижняя грань. Значит $a_\alpha \notin K_\alpha$.
Так как в любом интервале есть рациональное число, то число классов K_α не более, чем счётно. ■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 6

Измеримые функции

6.1. Измеримое пространство. Измеримая функция

Опр. 6.1. Измеримым пространством будем называть тройку (X, M, μ), где M - σ-алгебра с единицей X, а μ - σ-аддитивная мера. Если μ – конечна, то пространство будем называть конечным, если μ – σ-конечна, то σ-конечным.

Опр. 6.2. Пусть (X, M, μ) - измеримое пространство (ИП), $E \in M$ и $f : E \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, тогда она называется измеримой на E (на (E, $M \cap E$, μ)) $\Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}^1 \ f^{-1}((c, +\infty]) \in M \ (M \cap E)$. (Где $f^{-1}((c, +\infty]) \equiv \{x \in E : f(x) \in (c, +\infty])$.

Замечание 6.1. Поскольку если (X, M, μ) ИП и $E \in M$, то (E, $M \cap E$, μ) также ИП, в определении 6.2 можно считать, что f задана на X.

Замечание 6.2. Если $f(x)$ определена на открытом или замкнутом подмножестве $A \subseteq \mathbb{R}^1$ и f непрерывна на A, тогда f измерима на $(A, M \cap A, \mu)$, где M – классическая лебеговская σ-алгебра, μ – классическая мера Лебега.
(Это следует из того, что $\forall c \ f^{-1}((c, +\infty]) = f^{-1}((c, +\infty)) = A \cap B$, где B - открыто. А все открытые множества измеримы относительно классической меры Лебега /см теорему 5.4/).

Опр. 6.3. Пусть (X, M, μ) – ИП и $E \in M$. Тогда будем говорить, что некоторое свойство * выполнено почти всюду на E (п. в. на E) $\Leftrightarrow \exists E_0 \in M, E_0 \subseteq E, \mu(E \setminus E_0) = 0$ и * выполнено на E_0.
Функции f(x) и g(x), совпадающие п. в. на $E \in M$ будем называть эквивалентными на E.

Здесь и далее (X, M, μ) – ИП, а f измерима на X $\Leftrightarrow$ f измерима на (X, M, μ).

Лемма 6.1. *Пусть f(x) измерима на (X, M, μ). Тогда множества $f^{-1}(\{+\infty\})$, $f^{-1}(\{-\infty\})$, $f^{-1}(\mathbb{R}^1)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^1 \ f^{-1}((a, b)) \in M$.*

Доказательство.
1) $f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f^{-1}((n, +\infty]) \in M$ (Каждое из $f^{-1}((n, +\infty]) \in M$ по определению, а значит и $f^{-1}((n, +\infty]) \in M$, т.к. M – σ-алгебра).
2) $f^{-1}(\{-\infty\}) = X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f^{-1}((-n, +\infty]) \in M$.
3) $f^{-1}(\mathbb{R}^1) = X \setminus (f^{-1}(\{+\infty\}) \cup f^{-1}(\{-\infty\}))$.
4) $\forall b \in \mathbb{R}^1 \ f^{-1}([b, +\infty]) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f^{-1}((b - \frac{1}{n}, +\infty)) \in M$, а значит $f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((a, +\infty]) \setminus f^{-1}([b, +\infty]) \in M$. ■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 6.1. *Пусть функция f(x) измерима и конечна на X ($f : X \to \mathbb{R}^1$). Тогда $\forall$ борелевского множества $B \subseteq \mathbb{R}^1$ $f^{-1}(B) \in M$.*

Доказательство. Рассмотрим $\Sigma = \{A \subseteq \mathbb{R}^1 : f^{-1}(A) \in M\}$. По лемме $\mathbb{R}^1 \in \Sigma$. Если $A, C \in \Sigma$, то $f^{-1}(A \cap C) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(C) \in M$ и, аналогично, $f^{-1}(A \triangle C) = f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(C) \in M$. То есть $A \cap C, A \triangle C \in \Sigma$, а значит Σ – алгебра.
Если $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \Sigma$, то $f^{-1}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i) \in M$, тогда Σ – σ-алгебра. Кроме того, согласно лемме 6.1 любой $(a, b) \in \Sigma \Leftrightarrow$ (т.к. Σ – σ-алгебра и по теореме 5.4) $\Leftrightarrow$ любое открытое множество $G \in \Sigma$. Следовательно Σ – σ-алгебра, содержащая все открытые множества, а борелевская – σ-алгебра, содержащая все открытые, а значит $B \subseteq \Sigma$. ■

Лемма 6.2. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на X. Тогда измеримы множества $A = \{x \in X : f(x) > g(x)\}$ и $B = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$.*

Доказательство. Пусть Q - все рациональные числа на $\mathbb{R}^1$.
Тогда $A = \bigcup\limits_{r \in Q} f^{-1}((r, +\infty]) \cap g^{-1})([-\infty, r) \in M$. (Измеримость $f^{-1}((r, +\infty])$ требуется в определении, а $g^{-1})([-\infty, r) = X \setminus g^{-1})([r, \infty))$.
$B = X \setminus (\{f > g\} \cup \{g > f\}) \in M$. ■

Теорема 6.2. *Пусть f(x) измерима на X, открытое множество $G \subseteq \mathbb{R}^1$, $f : X \to G$, и $\varphi(t) \in C(G)$. Тогда $\varphi(f(x))$ измерима на X.*

Доказательство. Пусть $c \in \mathbb{R}^1$ и $B_c = \varphi^{-1}((c, +\infty)) = \{t \in G : \varphi(t) > c\}$. Тогда в силу непрерывности φ, B_c – открытое. В частности, B_c – борелевское. Но $(\varphi(f))^{-1}((c, +\infty]) = (\varphi(f))^{-1}((c, +\infty)) = \{x \in X : f(x) \in B_c\} = f^{-1}(B_c) \in M$ - по теореме 6.1. ■

Следствие 6.1. *Пусть $f(x)$ измерима и конечна на X. Тогда измеримы функции: $a * f(x)$ $\forall a \in \mathbb{R}^1$, $f^2(x)$, $f(x) + a$ $\forall a \in \mathbb{R}^1$ и, если $x \neq 0$ на X, то $\dfrac{1}{f(x)}$.*
(Доказательство очевидно, просто нужно подобрать подходящие φ: умножение, возведение в квадрат и т.д. соответственно).

Следствие 6.2. *Если f(x) и g(x) измеримы на X и конечны, то:*
1) *f(x) + g(x) – измерима на X*
2) *f(x)g(x) – измерима на X*
3) *если g(x) не обращается в 0, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ – измерима на X.*

Доказательство. 1) Пусть $c \in \mathbb{R}^1$, тогда $\{x \in X : f(x) + g(x) > c\} = \{x \in X : f(x) > c - g(x)\}$. f(x) - измерима, c - g(x) - измерима (по следствию 6.1). А значит и множество измеримо (по лемме 6.2).

2)$f(x)g(x) = \dfrac{1}{4} * ((f(x)+g(x))^2 - (f(x)-g(x))^2)$.

3) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)$. ■

Замечание 6.3. Условие конечности функций f и g можно изменить на:

1) Определить операции с точками $\pm\infty$.
   Например,
   - a + ∞ = $+\infty$
   - a - ∞ = -∞
   - a > 0 $a * (\pm\infty) = \pm\infty$
   - a < 0 $a * (\pm\infty) = \mp\infty$
2) Если мера μ – полна, то можно потребовать конечности f(x) и g(x) почти всюду на X. В этом случае не важно, как определены операции на множестве меры 0.

6.2. Измеримость пределов и точных граней последовательности функций. Измеримость производной функции

Теорема 6.3. *Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых функций на X. Тогда измеримы на X следующие функции:*
$\varphi(x) = \sup\limits_n f_n(x)$; $\psi(x) = \inf\limits_n f_n(x)$; $h(x) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$; $g(x) = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$. *Кроме того, функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ измерима на множестве своего существования.*

Доказательство. Если $c \in \mathbb{R}^1$, то
$\{x \in X : \varphi(x) > c\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) > c\} \in M$
$\{x \in X : \psi(x) > c\} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) > c + \dfrac{1}{m}\} \in M$.
$h(x) = \inf\limits_{n\geqslant 1} \sup\limits_{k\geqslant n} f_k(x)$ – измерима. Аналогично для g(x). (т.к. взятие верхней или нижней грани от последовательности измеримых функций не нарушает измеримости).
Если $E = \{x \in X : \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\} = \{x \in X : h(x) = g(x)\} \in M$ (согласно лемме 6.2).
Кроме того, на E f(x) = h(x) – измерима на E. ■

Теорема 6.4. *Пусть $f(x) \in C((a,b))$, где $(a,b) \subset \mathbb{R}^1$. Тогда её производная измерима относительно классической меры Лебега на множестве своего существования.*

Доказательство. Введём функции $\bar{f}' = \overline{\lim\limits_{h\to 0}} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$\underline{f}' = \underline{\lim\limits_{h\to 0}} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $x \in (a,b)$

Тогда $\forall c \in \mathbb{R}^1$ $\{x \in (a,b) : \bar{f}'(x) > c\} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{0<|h|<\frac{1}{n}} \{x \in (a,b) : x + h \in (a,b)$ и

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} > c + \dfrac{1}{m}\}$. Обозначим
$E_{c,h,m} = \{x \in (a,b) : x+h \in (a,b)$ и $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} > c + \dfrac{1}{m}\}$. И отметим, что т.к. $f(x) \in C((a,b))$ $\forall c,h,m$ $E_{c,h,m}$ – открыто. Значит $\bigcup\limits_{0<|h|<\frac{1}{n}} E_{c,h,m}$ – открыто. Далее производятся счётные операции объединения и пересечения, а значит $\{x \in (a,b) : \bar{f}'(x) > c\} \in M$. Аналогично проверяется измеримость $\underline{f}'$. Если $A = \{x \in (a,b) : \exists f'(x)\} = \{x \in (a,b) : \bar{f}'(x) = \underline{f}'(x)\}$ – измеримо по лемме 6.2.
На A $f'(x) = \bar{f}'(x)$.
(Здесь под существованием производной мы понимали существование любой производной, в том числе $+\infty$ и $-\infty$. Но т.к. мы доказали, что если функция измерима, то измеримо и множество, на котором она конечна, а значит можно модифицировать теорему так, что конечная производная измерима на множестве своего существования). ■

6.3. Сходимость по мере и её свойства

(X, M, μ) – измеримое пространство.

Опр. 6.4. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и f(x) измеримы и конечны на X. Тогда говорят, что $f_n(x)$ сходится по мере на X к $f(x)$ ($f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ или $f_n \overset{\mu,X}{\Rightarrow} f$) тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \lim\limits_{n\to\infty} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0$ ($\forall \varepsilon > 0$ $\gamma > 0$ $\exists N : \forall n \geqslant N$ $\mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} < \gamma$).

Утв. 6.1. *Предел по мере единственен с точностью до эквивалентности. То есть, если $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$ и $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} g$, то f эквивалентна g.*

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество
$E_k = \{x \in X : |f(x) - g(x)| > \dfrac{1}{k}\} \subseteq (\forall n) \subseteq \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \dfrac{1}{2k}\} \cup$
$\cup \{x \in X : |f_n(x) - g(x)| > \dfrac{1}{2k}\}$. (Это вытекает из того, что в противном случае и $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2k}$ и $|f_n(x) - g(x)| \leqslant \dfrac{1}{2k}$, а значит по неравенству треугольника $|f(x) - g(x)| \leqslant \dfrac{1}{k}$). ■

Теорема 6.5. *Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $f(x)$, $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $g(x)$ – измеримы и конечны на X, $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$, $g_n \overset{\mu}{\Rightarrow} g$. Тогда $f_n(x) + g_n(x) \overset{\mu}{\Rightarrow} f(x) + g(x)$.*

Доказательство. Заметим, что $\forall \varepsilon > 0$
$E_{f+g,\varepsilon,n} = \{x \in X : |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| > \varepsilon\} \subseteq$
$\subseteq \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \dfrac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x \in X : |g_n(x) - g(x)| > \dfrac{\varepsilon}{2}\}$.
(Пусть $E_{f,\frac{\varepsilon}{2},n} = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \dfrac{\varepsilon}{2}\}$ и $E_{g,\frac{\varepsilon}{2},n} = \{x \in X : |g_n(x) - g(x)| > \dfrac{\varepsilon}{2}\}$)

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\Rightarrow \mu(E_{f+g,\varepsilon,n}) \leqslant \mu(E_{f,\frac{\varepsilon}{2},n}) + \mu(E_{g,\frac{\varepsilon}{2},n})$.
Имееем $\mu(E_{f,\frac{\varepsilon}{2},n}) \to 0$ и $\mu(E_{g,\frac{\varepsilon}{2},n}) \to 0$ при $n \to \infty$, а значит $\mu(E_{f+g,\varepsilon,n}) \to 0$ при $n \to \infty$. ■

Пример

$f_n(x) = x + \dfrac{1}{n},\ x \in \mathbb{R}^1$. Тогда $x + \dfrac{1}{n}$ равномерно на $\mathbb{R}^1$ сходится к f(x) = x $\Rightarrow$ тем более $f_n(x) \overset{\mu,\mathbb{R}^1}{\Rightarrow} x$, где μ – классическая мера Лебега.
$f_n^2(x) = x^2 + \dfrac{2x}{n} + \dfrac{1}{n^2}$, при этом $f^2(x) = x^2$. Значит $f_n^2(x) - f^2(x) = \dfrac{2x}{n} + \dfrac{1}{n^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu\{x \in \mathbb{R}^1 : |f_n^2(x) - f^2(x)| > 1\} = \infty \quad \forall n$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 7

Сходимость почти всюду

7.1. Теорема о сходимости последовательности композиций непрерывной функции и членов сходящейся последовательности

Теорема 7.1. *Пусть (X, M, μ) – конечное измеримое пространство ($\mu(X) < \infty$), $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, f(x) – измеримы и конечны на (X, M, μ). Пусть также открытое $G \subseteq \mathbb{R}^1$, $g(t) \in C(G)$ и $\forall n$ $f_n : X \to G$ и $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$. Тогда $g(f_n) \overset{\mu}{\Rightarrow} g(f)$.*

<u>*Доказательство.*</u> Согласно теореме 5.4 $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n, \beta_n) \Rightarrow \exists$ последовательность компактов $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots \subset G : G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$.
Рассмотрим $E_n = f^{-1}(K_n) \quad n = 1, 2, \ldots$ Тогда $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, причём $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \Rightarrow \mu(X \setminus E_n) \to 0$ при $n \to \infty$ (теорема о непрерывности меры). Пусть заданы произвольные $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$. Выберем $n_0 : \mu(X \setminus E_{n_0}) < \dfrac{\gamma}{2}$. Рассмотрим расстояние $d = dist(K_{n_0}, \mathbb{R}^1 \setminus G) = \inf\limits_{x \in K_{n_0}, y \in \mathbb{R}^1 \setminus G} |x - y| = \min\limits_{x \in K_{n_0}, y \in \mathbb{R}^1 \setminus G} |x - y| > 0$. (Рассматриваем функцию на компакте, равную этому расстоянию. Ясно, что функция непрерывна, а значит достигает своего минимума).
Введём множество $K' = \{y \in \mathbb{R}^1 : dist(y, K_{n_0}) \leqslant \dfrac{d}{2}\}$ – замкнуто, ограничено $\Rightarrow K'$ – компакт. Кроме того, $K' \subset G$ (т.к. мы отступаем от K_{n_0} не больше, чем на $\dfrac{d}{2}$, а d – расстояние до $\mathbb{R}^1 \setminus G$).
По условию $g(t)$ – непрерывна на G, значит $g(t)$ – непрерывна на K', тогда $\exists \delta > 0 : z, y \in K'$ и $|z - y| \leqslant \delta \Rightarrow |g(z) - g(y)| < \varepsilon$. По условию $\exists N : \forall n \geqslant N$, если $A_n = \{x \in X : |f_n - f(x)| > min(\dfrac{d}{2}, \delta)\}$, то $\mu(A_n) < \dfrac{\gamma}{2}$. Предположим, что $n \geqslant N$ и $x \notin A_n \cup (X \setminus E_n)$. Тогда

1) $f(x) \in K_{n_0} \subseteq K'$;
2) $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{d}{2}$, а значит $f_n(x) \in K'$;
3) $|f_n(x) - f(x| \leqslant \delta)$, а значит $|g(f_n)(x) - g(f)(x)| < \varepsilon$.

Следовательно, $F_{n,\varepsilon} = \{x \in X : |g(f_n)(x) - g(f)(x)| > \varepsilon\} \subset A_n \cup (X \setminus E_{n_0})$,
а $\mu(F_{n,\varepsilon}) \leqslant \mu(A_n) + \mu(X \setminus E_{n_0}) < \dfrac{\gamma}{2} + \dfrac{\gamma}{2} = \gamma$. ■

Следствие 7.1. *Пусть (X, M, μ) – конечное измеримое пространство, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $f(x)$ измерима и конечна на (X, M, μ) и $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$. Тогда $f_n^2 \overset{\mu}{\Rightarrow} f^2$. Если, вдобавок, $f_n(x)$ и $f(x)$ не обращаются в 0 на X, то $\dfrac{1}{f_n} \overset{\mu}{\Rightarrow} \dfrac{1}{f}$.*

Следствие 7.2. *Пусть (X, M, μ) – конечное измеримое пространство, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $f(x)$, $g(x)$ – измеримы и конечны на (X, M, μ) и $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$, $g_n \overset{\mu}{\Rightarrow} g$. Тогда $f_n g_n \overset{\mu}{\Rightarrow} fg$. Если, вдобавок, ни одна из $g_n(x)$ и $g(x)$ не обращается в 0 на X, то $\dfrac{f_n}{g_n} \overset{\mu}{\Rightarrow} \dfrac{f}{g}$.*

Доказательство. $f_n g_n = \frac{1}{4}((f_n + g_n)^2 - (f_n - g_n)^2) \overset{\mu}{\Rightarrow} \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$.
Кроме того, $\dfrac{f_n}{g} = f_n * \dfrac{1}{g_n} \overset{\mu}{\Rightarrow} \dfrac{f}{g}$. ■

7.2. Фундаментальные по мере последовательности и критерий Коши

Опр. 7.1. Пусть (X, M, μ) – ИП, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – измеримы и конечны на (X, M, μ). Тогда эта последовательность называется *фундаментальной по мере* $\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0,\ \forall \gamma > 0\ \exists N : \forall n, m > N\ \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) < \gamma$.

Теорема 7.2. *(Критерий Коши)*
Последовательность измеримых и конечных на ИП функций $f_n(x)_{n=1}^{\infty}$ сходится по мере к измеримой и конечной $f(x)$ $\Leftrightarrow$ эта последовательность фундаментальна.

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Пусть $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$. Тогда $\forall \varepsilon > 0, \gamma > 0\ \exists N : \forall n \geqslant N$
$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \dfrac{\varepsilon}{2}\}) < \dfrac{\gamma}{2}$. Предположим, что $m, n \geqslant N$, тогда $\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \subset \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \dfrac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x \in X : |f_m(x) - f(x)| > \dfrac{\varepsilon}{2}\}$.
Значит $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \leqslant \dfrac{\gamma}{2} + \dfrac{\gamma}{2} = \gamma$
$(\Leftarrow)$ Пусть $f_n(x)_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная по мере.
Тогда $\forall i\ \exists n_i : \forall m, n \geqslant n_i \quad \mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| > 2^{-i}\}) < 2^{-i}$
Введём обозначения : $\forall N \geqslant n_i$ обозначим
$B_{i,N} = \{x \in X : |f_N(x) - f_{n_i}(x)| > 2^{-i}\}$ $(\mu(B_{i,N}) < 2^{-i}\ \forall N \geqslant n_i)$.
$A_i = \{x \in X : |f_{n_i}(x) - f_{n_{i+1}}(x)| > 2^{-i}\} = B_{i,n_{i+1}}$.
Построим множество $A = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=j}^{\infty} A_i$. Имеем $\forall j \geqslant 1$
$\mu(\bigcup\limits_{i=j}^{\infty} A_i) \leqslant \sum\limits_{i=j}^{\infty} \mu(A_i) < \sum\limits_{i=j}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-j+1}$. По теореме о непрерывности меры $\mu(A) =$
$= \lim\limits_{j\to\infty} \mu(\bigcup\limits_{i=j}^{\infty} A_i) = 0$. Пусть $x \in X \setminus A \Rightarrow \exists j : x \notin \bigcup\limits_{i=j}^{\infty} A_i$. Тогда, если $k \geqslant l \geqslant j$, то $|f_{n_l}(x) - f_{n_k}(x)| \leqslant |f_{n_l}(x) - f_{n_{l+1}}(x)| + |f_{n_{l+1}}(x) - f_{n_{l+2}}(x)| + \ldots + |f_{n_{k-1}}(x) - f_{n_k}(x)| <$
$< 2^{-l} + 2^{-l-1} + \ldots + 2^{k-1} < 2^{-l+1}$. Тогда числовая последовательность $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна, а значит $\forall x \in X \setminus A\ \exists$ конечный предел $\lim\limits_{i\to\infty} f_{n_i}(x)$. Обозначим $\lim\limits_{i\to\infty} f_{n_i}(x) = f(x)$. При этом $f(x)$ измерима и конечна на $X \setminus A$. Доопределив $f(x) = 0$ при $x \in A$ получим функцию измеримую и конечную на X. Проверим, что $f_n(x) \overset{\mu}{\Rightarrow} f(x)$. Пусть заданы $\varepsilon > 0, \gamma > 0$. Зафиксируем $j : 2^{-j} < \dfrac{1}{4} min(\varepsilon, \gamma)$. Предположим,

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

что $x \notin \bigcup\limits_{i=j}^{\infty} A_i$. Тогда по доказанному выше $\forall k > j \;\; |f_{n_k}(x) - f_{n_j}(x)| < 2^{-j+1}$. Переходя к пределу при $k \to \infty \Rightarrow |f(x) - f_{n_j}(x)| \leqslant 2^{-j+1} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Затем по построению последовательности n_j $\forall N \geqslant n_j$ $\mu(B_{j,N}) < 2^{-j} < \dfrac{\gamma}{4}$, если $x \notin B_{j,N}$, то $|f_N(x) - f_j(x)| \leqslant 2^{-j} < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Пусть $N \geqslant n_j$, $x \notin B_{j,N} \cup \bigcup\limits_{i=j}^{\infty} A_i$. Тогда $|f_N(x) - f(x)| \leqslant |f_N(x) - f_{n_j}(x)| + |f_{n_j}(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4} + \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Следовательно, $\{x \in X : |f_N(x) - f(x)| > \varepsilon\} \subset B_{i,N} \cup (\bigcup\limits_{i=j}^{\infty} A_i)$ $\Rightarrow \mu(\{x \in X : |f_N(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \leqslant \mu(B_{i,N}) + \mu(\bigcup\limits_{i=j}^{\infty} A_i) < 2^{-j} + 2^{-j+1} < \dfrac{\gamma}{4} + \dfrac{\gamma}{2} < \gamma$. ■

7.3. Сходимость почти всюду и её связь со сходимостью по мере

Далее в этом параграфе считаем, что (X, M, μ) – ИП, $f_n(x)_{n=1}^{\infty}$, $f(x)$ измеримы и конечны на (X, M, μ).

Опр. 7.2. $f_n \overset{\text{п.в.}}{\to} f \Leftrightarrow \exists E \in M : \mu(X \setminus E) = 0$ и $\forall x \in E$ $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$.

Лемма 7.1. *Если* $\forall k, m \in \mathbb{N}$ *множество* $F_{k,m} = \{x \in X : |f_k(x) - f(x)| > \dfrac{1}{m}\}$, *то* $\{x \notin X : f_n(x) \nrightarrow f(x)\} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} F_{k,n}$

Доказательство. В $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} F_{k,n}$ входят те x : $\exists m \geqslant 1 : \forall n \geqslant 1 \quad \exists k \geqslant n : |f_k(x) - f(x)| > \dfrac{1}{m}$. Это и означает отсутствие сходимости. ■

Теорема 7.3. *Пусть* $\mu(X) < \infty$. *Тогда* $f_n(x) \overset{\text{п.в.}}{\to} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\mu(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. По лемме 7.1 $f_n(x) \overset{\text{п.в.}}{\to} f(x) \Leftrightarrow \mu(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} F_{k,n}) = 0 \Leftrightarrow \forall m$ $\mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} F_{k,n}) = 0$. Множества $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} F_{k,n}$ вложены друг в друга, а значит $\mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} F_{k,n}) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} F_{k,n})$ (по теореме о непрерывности меры). $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} F_{k,n} = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} \{x \in X : |f_k(x) - f(x)| > \dfrac{1}{m}\}$. Что эквивалентно утверждению теоремы. ■

Следствие 7.3. *Если* $\mu(X) < \infty$ *и* $f_n(x) \overset{n.e.}{\to} f$, *то* $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$.

Пример Если $f_n(x) = X_{(-n,n)}(x), \quad n = 1, 2, \ldots$, где $X_{(-n,n)}(x)$ – индикаторные функции (на интервале равны 1, вне интервала – 0).
То $f_n(x) \to 1$ всюду на $\mathbb{R}^1$, но $f_n \overset{\mu, \mathbb{R}^1}{\nRightarrow} 1$ (потому что каждый раз мера множества, где $|f_n(x) - 1| > \dfrac{1}{2}$, бесконечна, поэтому сходимости по мере нет).

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 7.4. *(Пример Рисса)*
$\exists$ последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ измеримых относительно классической меры Лебега μ и конечных на [0, 1] : $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} 0$, но $f_n(x)$ расходится $\forall x \in [0,1]$.

Доказательство. Пусть l = 0, 1, 2, ... , k = 0, 1, 2, ..., $2^l - 1$ и функция $\psi_{l,k}(x) = X_{[\frac{k}{2^l}, \frac{k+1}{2^l}]}(x)$. Тогда любое $\forall n \leqslant N$ можно однозначно представить в виде $n = 2^l + k$, при этом $n \to \infty \Leftrightarrow l \to \infty$. Поэтому $\forall n$ $\mu(x \in [0,1] : |f_n(x) - 0| > 0) = 2^{-l} \to 0$ при $n \to \infty$, а значит $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$. В то же время, $\forall x \in [0,1] \exists$ бесконечно много членов числовой последовательности $f_n(x) = 0$ и бесконечно много членов $f_n(x) = 1$, значит сходимости нет ни в одной точке. ■

Теорема 7.5. *(Теорема Рисса)*
Пусть $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$, тогда существует подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} : f_{n_k}(x) \overset{\text{п.в. на } X}{\to} f(x)$

Доказательство. Пусть $\mu(X) < \infty$.
Тогда рассмотрим $n_i : \mu(x \in X : |f_{n_i}(x) - f(x)| > 2^{-i}) < 2^{-i}$, где i = 1, 2, ... (считаем, что n_i монотонно возрастают). Проверим, что $f_{n_i}(x) \overset{\text{п.в.}}{\to} f(x)$. Пусть заданы $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$. Тогда если $2^{-i} < \dfrac{1}{2} min(\varepsilon, \gamma)$, то
$\mu(\bigcup\limits_{j=i}^{\infty} \{x \in X : |f_{n_j}(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \leqslant \mu(\bigcup\limits_{j=i}^{\infty} \{x \in X : |f_{n_j}(x) - f(x)| > 2^{-j}\}) \leqslant$
$\leqslant \sum\limits_{j=i}^{\infty} \mu(\{x \in X : |f_{n_j}(x) - f(x)| > 2^{-i}\}) \leqslant \sum\limits_{j=i}^{\infty} 2^{-j} = 2^{i-1} < \gamma$. Согласно критерию теоремы 7.3, это означает, что подпоследовательность $f_{n_i}(x) \overset{\text{п.в.}}{\to} f(x)$.
Пусть теперь $X = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, где $\mu(B_k) < \infty$ $\forall k$. Раз $f_n \overset{\mu, X}{\Rightarrow} f$, то $\forall k$ $f_n \overset{\mu, B_k}{\Rightarrow} f$ ($f_0 = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$). По доказанному $\exists$ последовательность $\{f_{1,n(1)}\}_{n(1)=1}^{\infty}$ – подпоследовательность $f_0 : f_{1,n(1)} \overset{\text{п.в. на } B_1}{\to} f$. Затем, т.к. $f_{1,n(1)} \overset{\mu, B_2}{\Rightarrow} f$, то $\exists$ последовательность $\{f_{2,n(2)}\}_{n(2)=1}^{\infty}$, которая является подпоследовательностью п-ти $\{f_{1,n(1)}\}_{n(1)=1}^{\infty}$: $f_{2,n(2)} \overset{\text{п.в. на } B_2}{\to} f(x)$ и т.д. Взяв диагональную последовательность $\{f_{i,i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ получим, что она $\forall k$ сходится почти всюду на B_k. Если $A_k \subset B_k$ это множество, где сходимости нет, то $\mu(A_k) = 0 \Rightarrow \mu(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) = 0$, а на $X \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ есть сходимость. ■

Теорема 7.6. *(Егорова)*
Пусть $\mu(X) < \infty$ и $f_n(x) \overset{\text{п.в.}}{\to} f(x)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists E_\varepsilon \in M : \mu(X \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$, а на множестве $X \setminus E_\varepsilon$ $f_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$.

Доказательство. Согласно теореме 7.3
$\forall i$ $\exists n_i : \mu(\bigcup\limits_{n=n_i}^{\infty} \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \dfrac{1}{i}\}) < \dfrac{\varepsilon}{2^{i+1}}$, где i = 1, 2, ...
Если $E_\varepsilon = \bigcup\limits_{1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=n_i}^{\infty} \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \dfrac{1}{i}\}$, то $\mu(E_\varepsilon) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \varepsilon$. Пусть задано некоторое $\gamma > 0$, тогда $\exists m : \dfrac{1}{m} < \gamma$. Если $x \in X \setminus E_\varepsilon \Rightarrow$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\Rightarrow x \notin \bigcup\limits_{n=n_m}^{\infty} \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \dfrac{1}{m}\} \Rightarrow$ при $n \geqslant n_m \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{1}{m} < \gamma$. Это и означает равномерную сходимость на $X \setminus E_\varepsilon$ (потому что номер не зависит от x, а зависит только от заданного γ). ■

Пример $f_n(x) = X_{(-n,n)}(x) \overset{\text{п.в. на } \mathbb{R}^1}{\to} 1$, но нельзя предъявить множество конечной меры на $\mathbb{R}^1$ такое, что вне этого множества сходимость будет равномерной.

Теорема 7.7. *(Лузина)*
Пусть $f(x)$ измерима на [a, b] $\subset \mathbb{R}^1$ относительно классической меры Лебега и конечна на (п.в.) на [a,b]. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists g_\varepsilon(x) \in C([a,b])$ такая, что $\mu(\{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 8

Интеграл Лебега

8.1. Интеграл Лебега для простых функций

Далее в этом параграфе считаем, что (X, M, μ) – ИП.

Опр. 8.1. Пусть функция $f : X \to R$, тогда она называется простой $\Leftrightarrow$ она измерима, принимает конечное число значений и любое ненулевое значение принимается на множестве конечной меры

$$\Updownarrow$$

$f(x) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} a_l * X_{F_l}(x)$, где $\forall l\ F_l \in M$ и $F_{l_1} \cap F_{l_2} = \varnothing$ при $l_1 \neq l_2$ и, если $a_l \neq 0$, то $\mu(F_l) < \infty$.

Замечание 8.1. Если $f(x)$ – простая, то её можно представить в виде $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k X_{E_k}(x)$, где $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$, $\forall k\ E_k \in M$ и $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k = X$, причём если $c_k \neq 0$, то $\mu(E_k) < \infty$.

Опр. 8.2. Пусть $f(x)$ – простая. Тогда положим
$(L) \int\limits_x f(x) d\mu = \int\limits_x f(x) d\mu = \sum\limits_{l=1}^{r} a_l * \mu(F_l)$, где формально считаем, что $0 * \infty = 0$.

Рассмотрим на примере такой функции на [0, 1].

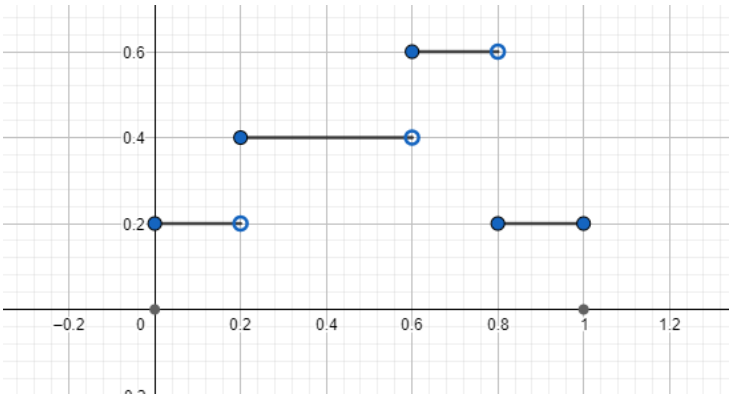


Рис. 8.1. Пример простой функции

В случае интеграла Римана предлагается разбивать отрезок [0, 1] на интервалы, на каждом из них брать какое-то значение функции, умножать на длину интервала, всё складывать и устремлять длину интервалов к 0.
А в случае интеграла Лебега мы рассматриваем все значения, принимаемые функцией. Умножаем каждое значение на меру своего прообраза и складываем.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Утв. 8.1. *Определение интеграла Лебега для простых функций корректно, то есть не зависит от способа представления функции.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ – простая и имеется представление $f(x)\sum\limits_{l=1}^{r} a_i X_{F_l}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k X_{E_k}(x)$, где $F_l, E_k \in M$ и $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$, $\bigsqcup\limits_{l=1}^{r} F_l = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k = X$ и ненулевые значения принимаются на множествах конечной меры. Заметим, что тогда любое a_l равно некоторому c_k. Тогда обозначим $\Gamma_k = \{l \in [1,r] : a_l = c_k\}$. При этом
$\bigsqcup\limits_{l\in\Gamma_k} E_k \bigcup\limits_{k=1}^{l} \Gamma_k = [1,r] \cap \mathbb{Z}$. Поэтому
$\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\mu(E_k) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l\in\Gamma_k} \mu(F_l) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l\in\Gamma_k} a_l\mu(F_l) = \sum\limits_{l=1}^{r} a_l\mu(F_l)$ ■

Теорема 8.1. *Пусть $f(x), g(x)$ – простые и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$. Тогда $\alpha f(x)+\beta g(x)$ – простая и $\int\limits_x (\alpha f(x) + \beta g(x))d\mu = \int\limits_x \alpha f(x) + \int\limits_x \beta g(x)d\mu$.*

Доказательство. Пусть $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k X_{E_k}(x)$, $g(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} d_j X_{S_i}(x)$, где все $E_k, S_i \in M$, $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} S_i = X$ и любое ненулевое значение принимается на множестве конечной меры. Тогда $\alpha f(x) + \beta g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} (\alpha c_k + \beta d_j) X_{E_k\cap S_j}(x)$. Ясно, что функция принимает конечное число значений, каждое значение принимается на некотором измеримом множестве. Также $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n}\bigsqcup\limits_{j=1}^{m} E_k \cap F_j = X$. Значит она простая. В силу того, что определение корректно $\int\limits_x (\alpha f(x) + \beta g(x))d\mu = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} (\alpha c_k + \beta d_j)\mu(E_k \cap S_j) =$
$= \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \sum\limits_{j=1}^{m} \mu(E_k \cap S_j) + \beta \sum\limits_{j=1}^{m} d_j \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(E_k \cap S_j) =$
(E_k и S_j в объединении дают X, тогда $\sum\limits_{j=1}^{m} \mu(E_k \cap S_j) = \mu(E_k)$, а $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(E_k \cap S_j) = \mu(S_j)$)
$= \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\mu(E_k) + \beta \sum\limits_{j=1}^{m} d_j\mu(S_j) = \alpha \int\limits_x f(x)d\mu + \beta \int\limits_x g(x)d\mu.$ ■

Утв. 8.2. *Если f(x) – простая и $f(x) \geqslant 0$, то $\int\limits_x f(x)d\mu > 0$.*

Утв. 8.3. *Если $f(x)$ и $g(x)$ – простые и $\forall x \in X$ $f(x) \geqslant g(x)$, то $\int\limits_x f(x)d\mu \geqslant \int\limits_x g(x)d\mu$.*
(Рассмотрим интеграл разности, воспользуемся теоремой 8.1 и утв. 8.2).

Утв. 8.4. *Если $f(x)$ – простая, то $|f(x)|$ – простая.*
Кроме того, $|\int\limits_x f(x)d\mu| \leqslant \int\limits_x f(x)d\mu$.
(1. Если исходная функция принимала конечное число значений, то после взятия модуля число значений может только уменьшиться.
2. $|\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\mu(E_k)| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k\mu(E_k)|$)

Утв. 8.5. *Если $\mu(X) < \infty$, то $f(x) \equiv c$ простая и $\int\limits_x f(x)d\mu = c\mu(x)$.*

Опр. 8.3. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность функций на X. Тогда скажем, что она монотонно неубывает на X ($f_n(x) \uparrow$) $\Leftrightarrow \forall x \in X\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.

Теорема 8.2. *Пусть $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $g(x)$ – простые неотрицательные функции на X. $g_n(x) \uparrow$ на X и $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) \geqslant g(x) \forall x \in X$. Тогда $\int\limits_x g(x)d\mu \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_x g_n(x)d\mu$ (справа возможна бесконечность).*

<u>*Доказательство*</u>. Пусть $g(x) = \sum\limits_{r=1}^{s} a_r X_{E_r}(x)$, где все $E_r \in M, E_{r_1} \cap E_{r_2} = \varnothing$ при $r_1 \neq r_2$ и $0 < a_1 < \ldots < a_s$. Обозначим $F = \bigsqcup\limits_{r=1}^{s} E_r \Rightarrow \mu(F) < \infty$. Теперь $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall n$ определим множества $F_n(\varepsilon) = \{x \in F : g_n(x) < g(x) - \varepsilon\}$. Так как $g_n(x) \uparrow$ имеем $F \supseteq F_1(\varepsilon) \supseteq F_2(\varepsilon) \supseteq \ldots$ При этом, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) \geqslant g(x) \Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n(\varepsilon) = \varnothing$. Тогда по теореме о непрерывности меры $\mu(F_n(\varepsilon)) \to 0$ при $n \to \infty$. Заметим, что если $X = A \cup B$, причём $A, B \in M$ и $h(x)$ простая на X, тогда $h(x)$ простая и на A, и на B и $h(x) = h(x)X_A(x) + h(x)X_B(x) \Rightarrow \int\limits_x h(x)d\mu = \int\limits_x h(x)X_A(x)d\mu + \int\limits_x h(x)X_B(x)d\mu = \int\limits_A h(x)d\mu + \int\limits_B h(x)d\mu$. Тогда $\forall n$ имеем

$\int\limits_x g(x)d\mu = \int\limits_F g(x)d\mu = \int\limits_{F_n(\varepsilon)} g(x)d\mu + \int\limits_{F\setminus F_n(\varepsilon)} g(x)d\mu =$

(На $F_n(\varepsilon)$ $g(x)$ не превосходит своего максимального значения a_s, на $F \setminus F_n(\varepsilon)$ $g(x) \leqslant g_n(x) + \varepsilon$

$= \int\limits_{F_n(\varepsilon)} a_s d\mu + \int\limits_{F\setminus F_n(\varepsilon)} g_n(x)d\mu + \int\limits_{F\setminus F_n(\varepsilon)} \varepsilon d\mu = a_s\mu(F_n(\varepsilon)) + \int\limits_X g_n(x)d\mu -$

$- \int\limits_{X\setminus(F\setminus F_n(\varepsilon))} g_n(x)d\mu + \varepsilon\mu(F\setminus F_n(\varepsilon)) \leqslant$ (т.к. $g_n(x) > 0$) $\leqslant a_s\mu(F_n(\varepsilon)) + \int\limits_X g_n(x)d\mu + \varepsilon\mu(F)$.

При $n \to \infty$ $\int\limits_X g(x)d\mu \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)d\mu + \varepsilon\mu(F)$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольное, получаем требуемое утверждение. ■

8.2. Определения и свойства интеграла Лебега

Опр. 8.4. Пусть $f(x)$ измерима и неотрицательна на X. Тогда обозначим $Q_f = \{$простые $\varphi(x) : 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)\ \forall x \in X\}$.

Замечание 8.2. Всегда $0 \in Q_f \Rightarrow Q_f \neq \varnothing$.

Опр. 8.5. Пусть $f(x)$ измерима и неотрицательна на X. Тогда полагаем $(L)\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu \overset{def}{=} \sup\limits_{\varphi\in Q_f} \int\limits_X \varphi(x)d\mu$. При этом будем говорить, что $f(x) \in L(X)$ (интегрируема по Лебегу на X) $\Leftrightarrow \int\limits_X f(x)d\mu < \infty$

Если f(x) измерима на X, то определим функции $f_+(x) = max(f(x), 0), f_-(x) = -min(f(x), 0)$. При этом $f(x) = f_+(x) - f_-(x)\ \forall x \in X$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Опр. 8.6. Пусть f(x) измерима на X. Тогда скажем, что

$$f(x) \in L(X) \Leftrightarrow \begin{cases} f_+(x) \in L(X) \\ f_-(x) \in L(X) \end{cases}$$

Если это выполнено, то полагаем, что

$(L)\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_X f_+(x)d\mu - \int\limits_X f_-(x)d\mu.$

Утв. 8.6. *Для простых функций определения 8.5 - 8.6 дают то же значение, что и определение 8.2.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для f(x) – простая и неотрицательная. Заметим, что $f(x) \in Q_f \Rightarrow \sup\limits_{\varphi \in Q_f} \int\limits_X \varphi(x)d\mu \geqslant \int\limits_X f(x)d\mu$ (В смысле определения 8.2).

С другой стороны, если $\varphi(x) \in Q_f \Rightarrow \int\limits_X \varphi(x)d\mu \leqslant \int\limits_X f(x)d\mu \Rightarrow \sup\limits_{\varphi(x) \in Q_f} \int\limits_X \varphi(x)d\mu \leqslant \int\limits_X f(x)d\mu$. Таким образом, верхняя грань совпадает со значением интеграла. ■

Утв. 8.7. *Пусть f(x) измерима и неотрицательна на X, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – простые неотрицательные функции на X и $f_n(x) \uparrow f(x)$ на X. Тогда $\int\limits_X f(x)d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu$.*

Доказательство. 1) По условию $\forall n \quad f_n(x) \in Q_f$ (т.к. $f_n(x) \uparrow f(x)$, значит каждая из этих функций меньше либо равна f(x)). Значит $\int\limits_X f(x)d\mu \geqslant \int\limits_X f_n(x)d\mu \Rightarrow \int\limits_X f(x)d\mu \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu$

2) Предположим, что некоторая $\varphi(x) \in Q_f$. Тогда по условию $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \geqslant \varphi(x)$, поэтому по теореме 8.2 $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu \geqslant \int\limits_X \varphi(x)d\mu$. Переходя к $\sup\limits_{\varphi(x) \in Q_f}$, получим требуемое утверждение. ■

Лемма 8.1. *Пусть f(x) – неотрицательна и измерима на X. Тогда $\exists$ последовательность простых неотрицательных функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} : f_n(x) \uparrow f(x)$ на X.*

Доказательство. Пусть $X = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$, где все $B_j \in M$ и $\mu(B_j) < \infty$. $\forall n$ определим

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{, при } x \notin \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} B_j \\ 2^n & \text{, при } x \in \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} B_j \text{ и } f(x) \geqslant 2^n \\ \dfrac{k-1}{2^n} & \text{, при } x \in \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} B_j \text{ и } \dfrac{k-1}{2^n} \leqslant f(x) < \dfrac{k}{2^n}, \quad k = 1, \ldots, 2^{2n} \end{cases}$$

Ясно, что эта функция простая, т.к. принимает конечное число значений при каждом n, и каждое значение принимается на измеримом множестве.

1) Проверим, что $f_n(x) \uparrow$ на X.

- Если $f_n(x) = 0$, то очевидно, $f_{n+1}(x) \geqslant 0 = f_n(x)$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

- Пусть $f_n(x) = 2^n \Rightarrow x \in \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} B_j \subseteq \bigsqcup\limits_{j=1}^{n+1} B_j$ и $f(x) \geqslant 2^n$.
  Тогда $f_{n+1}(x) \in \{2^n, 2^n + \frac{1}{2^{n+1}}, \ldots, 2^{n+1}\} \geqslant f_n(x)$
- Если $f_n(x) = \dfrac{k-1}{2^n}, k \in \{1, 2, \ldots, 2^{2n}\} \Rightarrow X \in \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} B_j \subseteq \bigsqcup\limits_{j=1}^{n+1} B_j$ и
  $\dfrac{2k-2}{2^{n+1}} = \dfrac{k-1}{2^n} \leqslant f(x) < \dfrac{k}{2^n} = \dfrac{2k}{2^{n+1}}$, тогда $f(x) \in \{\dfrac{k-1}{2^n}, \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\} \geqslant f_n(x)$.

2) Проверим, что $f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in X$.
Если $f(x) < \infty$, то т.к. $\exists n_0 : x \in \bigsqcup\limits_{j=1}^{n_0} B_j$ и $f(x) \leqslant 2^{n_0}$, при всех
$n \geqslant n_0 \quad 0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Тогда $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$
Если $f(x) = \infty$, тогда $\exists n_0 : x \in \bigsqcup\limits_{j=1}^{n_0} B_j$ и $f_n(x) = 2^n \to \infty$ при $n \to \infty$. ■

Теорема 8.3. *Пусть f(x) и g(x) – измеримы и неотрицательны на X. Тогда* $\int\limits_X (f(x) + g(x))d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu + \int\limits_X g(x)d\mu$
(Считаем, что $\infty + \infty = \infty, \infty + a = \infty$*).*

Доказательство. Согласно лемме 8.1, существуют последовательности $f_n(x) \uparrow f(x)$ и $g_(x) \uparrow g(x)$ на X. При этом $(f_n(x) + g_n(x)) \uparrow (f(x) + g(x))$. Согласно утверждению 8.7, $\int\limits_X (f(x) + g(x))d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X (f_n(x) + g_n(x))d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu + \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)d\mu =$
$= \int\limits_X f(x)d\mu + \int\limits_X g(x)d\mu$. ■

Следствие 8.1. *Если* $f(x)$ *измерима и неотрицательна на X, а* $X = A \sqcup B$*, где* $A, B \in M$*, то* $\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_A f(x)d\mu + \int\limits_B f(x)d\mu$.
(Это вытекает из равенства $f(x) = f(x) * X_A(x) + f(x) * X_B(x)$ *и того, что согласно определениям 8.2 и 8.5,* $\int\limits_X f(x)X_A(x)d\mu = \int\limits_A f(x)d\mu$*).*

Лекция 9

Интеграл Лебега. Часть 2

Утв. 9.1. *Пусть функция f(x) измерима на (X, M, μ).*
Тогда $f(x) \in L(X) \Leftrightarrow |f(x)| \in L(X)$.

Доказательство. $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, где $f_+(x) = max(f(x), 0)$, $f_-(x) = -min(f(x), 0)$.

Тогда по определению $f(x) \in L(X) \Leftrightarrow \begin{cases} f_-(x) \in L(X) \\ f_+(x) \in L(X) \end{cases}$

При этом $\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_X f_+(x)d\mu - \int\limits_X f_+(x)d\mu$

Заметим, что $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$. Тогда по теореме 8.3

$\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_X f_+(x)d\mu + \int\limits_X f_-(x)d\mu$. Отсюда $|f(x)| \in L(X) \Leftrightarrow \begin{cases} f_-(x) \in L(X) \\ f_+(x) \in L(X) \end{cases}$ ■

Утв. 9.2. *Если f(x) и g(x) измеримы и неотрицательны на X и f(x) интегрируема на X, а $g(x) \leqslant f(x) \quad x\forall \in X \Rightarrow g(x) \in L(X)$ и $\int\limits_X g(x)d\mu \leqslant \int\limits_X f(x)d\mu$*

Доказательство. Если Q_f – множество простых неотрицательных $\varphi(x)$: $\varphi(x) \leqslant f(x) \quad \forall x \in X$, то $Q_g \subseteq Q_f \Rightarrow \int\limits_X g(x)d\mu = \sup\limits_{\varphi \in Q_g} \int\limits_X \varphi(x)d\mu \leqslant \sup\limits_{\varphi \in Q_f} \int\limits_X \varphi(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu < \infty$. ■

9.1. Теоремы о линейности интеграла Лебега

Теорема 9.1. *а) Если $\mu(X) = 0$ и $f(x)$ измерима на $X \Rightarrow f(x) \in L(X)$ и $\int\limits_X f(x)d\mu = 0$.*
б) Если $f(x), g(x)$ измеримы на X, $f(x) \in L(X)$ и $g(x) = f(x)$ почти всюду на X. Тогда $g(x) \in L(X)$ и $\int\limits_X g(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu$.
в) Если $f(x) \in L(X)$, то $\mu(\{x \in X : f(x) = \infty\}) = 0$.

Доказательство. а) Достаточно проверить для неотрицательных f(x) (т.к. $f(x)$ разбивается на f_+ и f_-, и если мы докажем, что их интегралы оба нули, то и f интегрируема и её интеграл равен 0).
$\forall \varphi(x) \in Q_f \quad \int\limits_X \varphi(x)d\mu = 0$, т.к. $\mu(X) = 0 \Rightarrow \int\limits_X f(x)d\mu = 0$.
б) Если $f(x) = g(x)$ почти всюду на X, то $f_+(x) = g_+(x)$ и $f_-(x) = g_-(x)$ почти всюду на X. Тогда рассмотреть только неотрицательные f(x) и g(x). Пусть $E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. Тогда $\mu(X \setminus E) = 0$ по условию. $\int\limits_X g(x)d\mu = \int\limits_E g(x)d\mu + \int\limits_{X \setminus E} g(x)d\mu$. И $\int\limits_{X \setminus E} g(x)d\mu = 0$ (см пункт а).

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\int\limits_E g(x)d\mu = \int\limits_E f(x)d\mu = \int\limits_E f(x)d\mu + \int\limits_{X\setminus E} f(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu < \infty$
в) Достаточно рассмотреть неотрицательную f(x).
Обозначим $A = \{x \in X : f(x) < \infty\}$. Предположим, что $\mu(A) > 0$. Пусть $X = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, где $\forall n\ B_n \in M$ и $\mu(B_n) < \infty$. Тогда $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}(A \cap B_n)$ и т.к. $\mu(A) > 0$ $\exists n_0 : \mu(A \cap B_n) > 0$. При этом $\mu(A \cap B_n) \leqslant \mu(B_{n_0}) < \infty$. Рассмотрим $\forall m \geqslant 1$ функции $h_m(x) = m * X_{A\cap B_{n_0}}(x) \in Q_f$. Тогда $\int\limits_X f(x)d\mu \geqslant \int\limits_x h_m(x)d\mu = m * \mu(A \cap B_{n_0}) \to \infty$ – противоречие, т.к. $\int\limits_X f(x)d\mu < \infty$. ■

Теорема 9.2. *Пусть f(x)$\in L(X)$ и задано $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha f(x) \in L(X)$ и $\int\limits_X \alpha f(x)d\mu = \alpha \int\limits_X f(x)d\mu$.*

Доказательство. Пусть $\alpha = 0$, тогда $\alpha f(x) = 0$ (считаем, что $0 * \infty = 0$). При этом $\int\limits_X 0f(x)d\mu = 0\int\limits_X f(x)d\mu$.
Рассмотрим $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$ аналогично).
Тогда $(\alpha f)_+(x) = \alpha f_+(x)$ и $(\alpha f)_-(x) = \alpha f_-(x)$. Поэтому достаточно рассмотреть случай когда $f(x) \geqslant 0$. Отметим, что $h(x)$ – простая $\in Q_f \Leftrightarrow \alpha h(x) \in Q_{\alpha f}$. Поэтому $\int\limits_X f(x)d\mu = \sup\limits_{h\in Q_f}\int\limits_X h(x)d\mu = \sup\limits_{\alpha h\in Q_{\alpha f}}\int\limits_X h(x)d\mu = \dfrac{1}{\alpha}\sup\limits_{\alpha h\in Q_{\alpha f}}\int\limits_X \alpha h(x)d\mu = \dfrac{1}{\alpha}\int\limits_X \alpha f(x)d\mu$. ■

Теорема 9.3. *Пусть f(x) и g(x) $\in L(X)$. Тогда $f(x)+g(x) \in L(X)$ и $\int\limits_X f(x)+g(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu + \int\limits_X g(x)d\mu$.*

Доказательство. Так как $|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|\ \forall x \in L(X)$ и согласно утв. 9.1 $|f(x)|, |g(x)| \in L(X)$ и согласно теореме 8.3 $|f(x)| + |g(x)| \in L(X)$, тогда по утв. 9.2 $|f(x) + g(x)| \in L(X) \Rightarrow f(x) + g(x) \in L(X)$.
Предположим, что $f(x) \geqslant 0$, а $g(x) \leqslant 0$ на X.
Введём множества $E_+ = \{x \in X : f(x) + g(x) \geqslant 0\} \in M$
$E_- = \{x \in X : f(x) + g(x) < 0\} \in M$
Тогда $X = E_- \sqcup E_+$. При этом $(f + g)_+(x) = (f(x) + g(x))X_{E_+}(x)$
и $(f + g)_-(x) = -(f(x) + g(x))X_{E_-}(x)$.
На множестве E_+ функции f(x), f(x) + g(x) - g(x) неотрицательны. Причём $f(x) = f(x) + g(x) + (-g(x))$. По теореме 8.3
$\int\limits_{E_+} f(x)d\mu = \int\limits_{E_+}(f + g)(x)d\mu + \int\limits_{E_+}(-g)(x)d\mu = \int\limits_X (f + g)_+(x)d\mu - \int\limits_{E_+} g(x)d\mu$ (1)
(т.к. $g(x)$ интегрируема, можно вынести минус).
На множестве E_- функции $-(f(x) + g(x)), -g(x), f(x)$ неотрицательны. Поэтому $\int\limits_{E_-} -g(x)d\mu = \int\limits_{E_-} -(f + g)(x)d\mu + \int\limits_{E_-} f(x)d\mu = \int\limits_X (f + g)_-(x)d\mu + \int\limits_{E_-} f(x)d\mu$ (2).
$\int\limits_X (f + g)(x)d\mu = \int\limits_X (f + g)_+(x)d\mu + \int\limits_X (f + g)_-(x)d\mu =$ (из (1) и (2)) $=$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$= \int\limits_{E_+} f(x)d\mu + \int\limits_{E_+} g(x)d\mu + \int\limits_{E_-} f(x)d\mu + \int\limits_{E_-} g(x)d\mu = (\int\limits_{E_+} f(x)d\mu + \int\limits_{E_-} f(x)d\mu) + (\int\limits_{E_+} g(x)d\mu + \int\limits_{E_-} g(x)d\mu) =$ (т.к. $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \leqslant 0$ на X и $X = E_- \sqcup E_+$) $= \int\limits_X f(x)d\mu + \int\limits_X g(x)d\mu$.
В общем случае $f(x)+g(x) = f_+(x)+g_+(x)-(f_-(x)+g_-(x))$. Имеем $f_+(x)+g_+(x) \geqslant 0$ а $-(f_-(x)+g_-(x)) \leqslant 0$.
По доказанному $\int\limits_X (f+g)(x)d\mu = \int (f_+ + g_+)(x)d\mu + \int\limits_X -(f_- + g_-)(x)d\mu =$
$= \int\limits_X f_+(x)d\mu + \int\limits_X g_+(x)d\mu - \int\limits_X f_-(x)d\mu - \int\limits_X g_-(x)d\mu = \int\limits_x f(x)d\mu + \int\limits_X g(x)d\mu$. ■

Следствие 9.1. *Если f(x) и g(x)* $\in L(X)$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то* $\alpha f(x) + \beta g(x) \in L(X)$ *и* $\int\limits_X (\alpha f + \beta g)(x)d\mu = \alpha \int\limits_X f(x)d\mu + \beta \int\limits_X g(x)d\mu$.

Следствие 9.2. *Если* $f(x), g(x) \in L(X)$ *и* $f(x) \geqslant g(x) \quad \forall x \in X$, *то* $\int\limits_X f(x)d\mu \geqslant \int\limits_X g(x)d\mu$

Доказательство. Имеем $f(x) - g(x) \geqslant 0$ и $\in L(X)$.
Тогда $0 \leqslant \int\limits_X (f-g)(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu - \int\limits_X g(x)d\mu$ ■

Утв. 9.3. *Если* $f(x) \in L(X)$, $g(x)$ *измерима на X и* $|g(x)| \leqslant |f(x)|$ *п.в. на X, тогда* $g(x) \in L(X)$.

Доказательство. Пусть $E = \{x \in X : |g(x)| \leqslant |f(x)|\}$. Тогда
1) $\mu(X \setminus E) = 0 \Rightarrow g(x) \in L(X \setminus E)$ и $\int\limits_{X \setminus E} g(x)d\mu = 0$
2) $|g(x)| \in L(E)$ (т.к. $|g(x)| \leqslant |f(x)|$, а f - интегрируема) $\Rightarrow g(x) \in L(E)$

Тогда $g(x) \in L(X)$ ■

Замечание 9.1. Если $f(x) \in L(X)$, то $|\int\limits_X f(x)d\mu| \leqslant \int\limits_X |f(x)|d\mu$. Это так, поскольку
$|\int\limits_X f(x)d\mu| = |\int\limits_X f_+(x)d\mu - \int\limits_X f_-(x)d\mu|$
$\int\limits_X |f(x)|d\mu = \int\limits_X f_+(x)d\mu + \int\limits_X f_-(x)d\mu$.

Замечание 9.2. Если $\mu(X) < \infty$, $f(x)$ измерима на X и $|f(x)| \leqslant C \quad \forall x \in X$, то $f(x) \in L(X)$ и $\int\limits_X |f(x)|d\mu \leqslant C\mu(X)$.

9.2. Предельный переход под знаком интеграла Лебега

(X, M, μ) – измеримое пространство.

Теорема 9.4. *(Беппо-Леви)*
Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *измеримые неотрицательные функции на X и* $f_n(x) \uparrow f(x)$ *на X. Тогда* $\int\limits_X f(x)d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu$. *(Допускаются бесконечные значения).*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство. $f(x)$ – предел измеримых функций, значит она измерима. Ясно, что $f(x)$ неотрицательна.
Рассмотрим $g_1(x) = f_1(x),\ g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \quad n = 2, 3, \ldots$
При этом $\infty - a = \infty, \infty - \infty = 0$. Тогда все $g_n(x)$ измеримы и неотрицательны на X. $\forall n$ построим по лемме 8.1 последовательность простых неотрицательных $\psi_{n,k}(x) \uparrow g_n(x)$ на X. Введём функции $F_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} \psi_{n,k}(x)$ $k = 1, 2, \ldots$. Тогда все $F_k(x)$ измеримы, неотрицательны и являются простыми функциями.
1) Докажем, что $F_k(x)$ монотонно возрастают. $F_{k+1}(x) - F_k(x) = \psi_{k+1,k+1}(x) + \sum\limits_{n=1}^{k}(\psi_{n,k+1} - \psi_{n,k}) > 0$ ($\psi_{k+1,k+1}(x)$ неотрицательна и т.к. $\psi_{n,k}(x) \uparrow g_n(x)$, то $\psi_{n,k+1}(x) - \psi_{n,k}(x) > 0) \Rightarrow F_n(x) \uparrow$ на X.
2) $\forall$ фиксированного k $F_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} \psi_{n,k}(x) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{k} g_n(x) = f_k(x) \leqslant f(x)$.
3) $\forall$ фикс. N $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(x) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \psi_{n,k}(x) =$ (т.к. мы ограничили количество слагаемых, и оно не зависит от k, можем поменять местами знаки предела и суммы) $= \sum\limits_{n=1}^{N} g_n(x) = f_N(x) \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} F_k(x) \geqslant \lim\limits_{N\to\infty} f_N(x) = f(x)$
Значит $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(x) = f(x)$.
Согласно утв. 8.7 $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_X F_k(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu$.
Так как $F_k(x) \leqslant f_k(x) \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_X f_k(x)d\mu \geqslant \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_X F_k(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu$. А с другой стороны, так как $f_k(x) \leqslant f(x) \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_X f_k(x)d\mu \leqslant \int\limits_X f(x)d\mu$.
Значит $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_X f_k(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu$. ■

Следствие 9.3. *Пусть задана* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset L(X)$ *и* $f_n(x) \uparrow f(x)$ *на X. Пусть, кроме того* $\exists C > 0 : \forall n \int\limits_X f_n(x)d\mu \leqslant C$. *Тогда* $f(x) \in L(X)$ *и* $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_X f_k(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu$

Доказательство. Рассмотрим функции $g_n(x) = f_n(x) - f_1(x),\ n = 1, 2, \ldots$ Тогда $\forall n\ g_n(x) \in L(X),\ g_n(x) \geqslant 0$ на X и $g_n(x) \uparrow f(x) - f_1(x)$. По теореме 9.4
$\int\limits_X (f(x) - f_1(x))d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu + \int\limits_X f_1(x)d\mu \leqslant C - \int\limits_X f_1(x)d\mu < \infty$.
Значит $f(x) - f_1(x) \in L(X) \Rightarrow f(x) \in L(X)$.
Тогда $\int\limits_X (f(x) - f_1(x))d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu - \int\limits_X f_1(x)d\mu \Rightarrow \int\limits_X f(x)d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu$. ■

Следствие 9.4. *Пусть* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *измеримы и неотрицательны на X.*
Тогда $\int\limits_X \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu$ *(допускаются бесконечные значения).*

Доказательство. Пусть $g_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} f_n(x) \uparrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ по теоремам 9.4 и 8.3 $\int\limits_X \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X \sum\limits_{n=1}^{k} f_n(x)d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu$ ■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 9.5. *(Теорема Фату)*
Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *измеримы и неотрицательны на* X, μ *– полна. И* $f_n(x) \to f(x)$ *при* $n \to \infty$ *почти всюду на* X *и* $f(x) \geqslant 0$ *на* X. *Тогда* $\int\limits_X f(x)d\mu \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu$.

Доказательство. $\forall k$ рассмотрим $\varphi_k(x) = \inf\limits_{n\geqslant k} f_n(x)$. Тогда $\varphi_k(x) \uparrow$ на X и $\varphi_k(x) \to f(x)$ почти всюду, т.е. на измеримом $E : \mu(X \setminus E) = 0$.
Тогда $\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_E f(x)d\mu = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_E \varphi_k(x)d\mu$ $\qquad (\star)$
Но $\forall k\ \varphi_k(x) \geqslant f_k(x)$, выберем последовательность $\{k_i\}_{i=1}^{\infty} : \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu = \lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_E f_{k_i}(x)d\mu$
$(\star) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X \varphi_n(x)d\mu = \lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_X \varphi_{k_i}(x)d\mu \leqslant \lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_X f_{n_i}(x)d\mu = \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu$ ■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 10

Интеграл Лебега. Часть 3

Пример Рассмотрим $f_n(x) = n * X_{(0,\frac{1}{n})}(x)$. Тогда $\forall x \in [0,1]$ $f_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Но $\forall n \int\limits_{[0,1]} f_n(x)d\mu = 1 \neq \int\limits_{[0,1]} 0\ d\mu$. Так что знак неравенства в теореме Фату нельзя заменить на равенство.

10.1. Теорема Лебега

Теорема 10.1. *(Лебега)*
Пусть $F(x) \in L(X), F(x) \geqslant 0$ на X, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ на X – измеримые функции такие, что $\forall n\ \forall x \in X\quad |f_n(x)| \leqslant F(x)$. Далее пусть μ – полна и $f_n(x) \overset{n.e.}{\to} f(x)$. Тогда $f(x) \in L(X)$ и, кроме того $\int\limits_X f(x)d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu$

Доказательство. Заметим, что $|f(x)| \leqslant F(x)$ п.в. тогда $f(x) \in L(X)$ (по утв. 9.3).
Далее пусть $E = \{x \in X \mid f_n(x) \to f(x)\}$. Тогда $\mu(X \setminus E) = 0$, следовательно $\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_E f(x)d\mu$.
Рассмотрим последовательности
$0 \leqslant F(x) + f_n(x)$
$0 \leqslant F(x) - f_n(x)$
При $n \to \infty$
$F(x) + f_n(x) \to F(x) + f(x)$ и $F(x) - f_n(x) \to F(x) - f(x)$ на E.
Тогда по теореме Фату (9.5)
$\int\limits_E (F(x)+f(x))d\mu \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_E (F(x)+f_n(x))d\mu$. Раскроем по линейности и сократим слева и справа $\int\limits_E F(x)d\mu$. Тогда $\int\limits_E f(x)d\mu \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)d\mu$.
$\int\limits_E (F(x) - f(x))d\mu \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_E (F(x) - f_n(x))d\mu$
$\int\limits_E F(x)d\mu - \int\limits_E f(x)d\mu \leqslant \int\limits_E F(x)d\mu + \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_E (-f_n)(x)d\mu$
$\int\limits_E F(x)d\mu - \int\limits_E f(x)d\mu \leqslant \int\limits_E F(x)d\mu - \varlimsup\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)d\mu$
Тогда $\int\limits_E f(x)d\mu \geqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)d\mu$
Имеем $\int\limits_E f(x)d\mu \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)d\mu$, и в то же время $\int\limits_E f(x)d\mu \geqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)d\mu$.
Это возможно в единственном случае, когда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)d\mu = \int\limits_E f(x)d\mu$
и т.к. $\mu(X \setminus E) = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu$ и $\int\limits_E f(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu$. ■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

10.2. Некоторые свойства интеграла Лебега

(X, M, μ) - измеримое пространство

Теорема 10.2. *Пусть $f(x)$ интегрируема на X и $X = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где все $A_n \in M$. Тогда $\forall n\ f(x) \in L(A_n)$ и $\int\limits_X f(x)d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f(x)d\mu$*

<u>*Доказательство.*</u> Так как $\forall n \quad |f(x)X_{A_n}(x)| \leqslant |f(x)| \in L(X)$,
тогда $f(x)X_{A_n}(x) \in L(X) \Leftrightarrow f(x) \in L(A_n)$
Далее, пусть $F_M(x) = \sum\limits_{k=1}^{M} f(x)X_{A_k}(x)$. Тогда $|F_M(x)| = |f(x)X_{\bigsqcup\limits_{k=1}^{M} A_k}(x)| \leqslant |f(x)|$ и $\forall x \in X \quad F_M(x) \to f(x)$ при $M \to \infty$ (так как рано или поздно каждая точка попадает в конечное объединение).
По теореме Лебега $\int\limits_X f(x)d\mu = \lim\limits_{M\to\infty} \int\limits_X F_M(x)d\mu = \lim\limits_{M\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_X X_{A_k}(x)f(x)d\mu =$
$= \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f(x)d\mu$

■

Теорема 10.3. *(об абсолютной непрерывности интеграла Лебега)*
Пусть $f(x) \in L(X)$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, что если $A \subset X, A \in M$ и $\mu(A) < \delta$, то $|\int\limits_A f(x)d\mu| < \varepsilon$.

<u>*Доказательство.*</u> Так как $|\int\limits_A f(x)d\mu| \leqslant \int\limits_A |f|(x)d\mu$, достаточно утверждать для $f(x) \geqslant 0$
Так как $f(x) \in L(X)$, $\exists$ простая $h(x) \in Q_f$ такая, что
$\int\limits_X f(x)d\mu - \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \int\limits_X h(x)d\mu \leqslant \int\limits_X f(x)d\mu$
(Так как f(x) неотрицательна, существует верхняя грань по всем интегралам от простых функций из Q_f. Значит найдётся какая-то $h(x)$, которая с точностью $\dfrac{\varepsilon}{2}$ реализует этот интеграл).
Так как $h(x)$ – простая и неотрицательная, существует следующее представление:
$h(x) = \sum\limits_{l=1}^{r} a_l X_{E_l}(x)$, где $0 < a_1 < ... < a_r$, $\forall l\ E_l \in M$ и $E_l \cap E_j = \varnothing$.
Тогда пусть $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2a_r}$
Пусть $A \in M$ и $\mu(A) < \delta$, тогда
$\int\limits_A f(x)d\mu \leqslant \int\limits_A f(x) - h(x)d\mu + \int\limits_A h(x)d\mu \leqslant$
(т.к. f(x)-h(x) неотрицательна, то при замене $\int\limits_A f(x) - h(x)d\mu$ на $\int\limits_X f(x) - h(x)d\mu$ всё только увеличится)
$\leqslant \int\limits_X f(x) - h(x)d\mu + \int\limits_X X_A(x)h(x)d\mu < \dfrac{\varepsilon}{2} + \int\limits_X \sum\limits_{l=1}^{r} a_l X_{A\cap E_l}(x)d\mu =$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$= \frac{\varepsilon}{2} + \sum\limits_{l=1}^{r} a_l\, \mu(A \cap E_l) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + a_r \sum\limits_{l=1}^{r} \mu(A \cap E_l) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + a_r \mu(A) \leqslant$

(т.к. E_i не пересекаются, $\sum\limits_{l=1}^{r} \mu(A \cap E_l) \leqslant \mu(A)$)

$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + a_r \frac{\varepsilon}{2a_r} = \varepsilon.$ ■

10.3. Неравенство Чебышёва и критерий интегрируемости по Лебегу

Теорема 10.4. *(неравенство Чебышева)*
Пусть $f(x) \in L(X)$, $\lambda > 0$ и $E_\lambda = \{x \in X : |f(x)| > \lambda\}$. Тогда $\mu(E_\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda} \int\limits_X |f(x)| d\mu$.

Доказательство. Имеем $\int\limits_X |f(x)| d\mu \geqslant \int\limits_{E_\lambda} |f(x)| d\mu \geqslant \int\limits_{E_\lambda} \lambda d\mu = \lambda \mu(E_\lambda)$. ■

Следствие 10.1. *Если $f(x) \in L(X)$, $f(x) \geqslant 0$ на X и $\int\limits_X f(x) d\mu = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду на X.*

Доказательство. Заметим, что по неравенству Чебышёва
$\forall n \quad \mu(\{x \in X : f(x) < \frac{1}{n}\}) \leqslant n \int\limits_X f(x) d\mu = 0.$
Но $\{x \in X : f(x) > 0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) < \frac{1}{n}\}$.
Следовательно $\mu(\{x \in X : f(x) > 0\}) = 0$. ■

Обозначение. Если $f(x)$ измерима на X, то $\forall k \geqslant 1$ пусть $F_k = \{x \in X : |f(x)| \geqslant k\}$

Теорема 10.5. *(критерий интегрируемости по Лебегу на множестве конечной меры)*
Пусть $\mu(X) < \infty$, $f(x)$ измерима на X, тогда $f(x) \in L(X) \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(F_n)$ сходится.

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} X_{F_k}(x)$. Выясним, в каком соотношении находится эта функция с f(x).
Заметим, что если $X : k \leqslant |f(x)| < k+1$, то $x \in F_1, ..., F_k$, но $x \notin F_{k+1}$, следовательно $h(x) = k$.
Если $|f(x)| = \infty$, то $\forall k \quad x \in F_k$, значит $h(x) = \infty$.
Поэтому $\forall x \in X$ справедливо $h(x) \leqslant |f(x)| \leqslant h(x) + 1$. Так как мера X конечна, то $1 \in L(X)$, значит $f(x) \in L(X) \Leftrightarrow h(x) \in L(X)$, но по следствию (9.4) из теоремы Беппо-Леви
$\int\limits_X h(x) d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_X X_{F_k}(x) d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(F_k).$ ■

10.4. Сравнение интегралов Римана и Лебега

Теорема 10.6. *Пусть задано натуральное $n \geqslant 1$, $B = \prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j] \subset \mathbb{R}^n$, μ – классическая мера Лебега на подмножествах $[a, b]$, f(x) интегрируема по Риману на $[a, b]$. Тогда $f(x) \in L([a, b], M, \mu)$ и*
$(L) \int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu = (R) \int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu$

Доказательство. Пусть r – натуральное число, $s \in \{1, 2, ..., n\}$, $k \in \{0, 1, ..., 2^r\}$. Рассмотрим точки $X_s(k) = a_s + \dfrac{b_s - a_s}{2^r}k$ (равномерное разбиение отрезка $[a_s, b_s]$). Затем, пусть при $1 \leqslant k < 2^r$ $\quad \Delta_s(k) = [X_s(k-1), X_s(k))$ и $\Delta_s(2^r) = [X_s(2^r-1), X_s(2^r)]$ ($[a_s, b_s] = \bigsqcup\limits_{k=1}^{2^r} \Delta_s(k)$).
Затем, если $\overline{k} = (k_1, .., k_n)$, где все $k_i \in [1, 2^r]$, то определим множество
$E_{\overline{k}} = \prod_{s=1}^{n} \Delta_s(k_s)$.
При этом весь $[a, b] = \bigsqcup\limits_{k_1=1}^{2^r} \dots \bigsqcup\limits_{k_n=1}^{2^r} E_{\overline{k}}$. Пусть $\forall \overline{k} \quad M_{\overline{k}} = \sup\limits_{x \in E_{\overline{k}}} f(x)$ и $m_{\overline{k}} = \inf\limits_{x \in E_{\overline{k}}} f(x)$.
Определим функции

$$\left.\begin{aligned} \overline{f}(x) &= \sum_{k_1=1}^{2^r} \dots \sum_{k_n=1}^{2^r} M_{\overline{k}}\, X_{E_{\overline{k}}}(x) \\ \underline{f}(x) &= \sum_{k_1=1}^{2^r} \dots \sum_{k_n=1}^{2^r} m_{\overline{k}} X_{E_{\overline{k}}}(x) \end{aligned}\right\} \text{ простые}$$

(простые, так как принимают конечное число значений, и каждое из значений принимается на n-мерных промежутках).

Тогда $(L) \int\limits_{[a,b]} \overline{f_r}(x)d\mu = \sum\limits_{k_1=1}^{2^r} \dots \sum\limits_{k_n=1}^{2^r} M_{\overline{k}} * \prod_{s=1}^{n} \dfrac{b_s - a_s}{2^r}$
аналогично $(L) \int\limits_{[a,b]} \underline{f_r}(x)d\mu = \sum\limits_{k_1=1}^{2^r} \dots \sum\limits_{k_n=1}^{2^r} m_{\overline{k}} * \prod_{s=1}^{n} \dfrac{b_s - a_s}{2^r}$
И то, и другое – суммы Дарбу для интеграла Римана, и при измельчении разбиения обе суммы сходятся к $(R) \int\limits_{[a,b]} f(x)dx = I$

Имеем $\forall r$ и $\forall x \in [a, b] \quad \overline{f}_{r+1}(x) \leqslant \overline{f}_r(x)$ и $\underline{f}_{r+1}(x) \geqslant \underline{f}_r(x)$ (Так как у нас разбиение по степеням двойки, то каждое последующее разбиение получается из предыдущего разбиением всех промежутков на 2. Тогда неравенство следует из поведения верхней и нижней грани)

Кроме того $\forall r$ и $\forall x \in [a, b] \quad \underline{f}_r(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}_r(x)$.
Поэтому $\forall x \in [a, b] \quad \overline{f}_r(x) \downarrow \overline{f}(x) \geqslant f(x)$ и $\underline{f}_r \uparrow \underline{f}(x) \leqslant f(x)$. Функции $\overline{f}(x)$ и $\underline{f}(x)$ измеримы по Лебегу как пределы измеримых функций. По теореме Беппо-Леви (9.4)
$(L) \int\limits_{[a,b]} \overline{f}(x)d\mu = \lim\limits_{r\to\infty} (L) \int\limits_{[a,b]} \overline{f}_r(x)d\mu = I$ и
$(L) \int\limits_{[a,b]} \underline{f}(x)d\mu = \lim\limits_{r\to\infty} (L) \int\limits_{[a,b]} \underline{f}_r(x)d\mu = I$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Отсюда $(L)\int\limits_{[a,b]}(\overline{f}(x)-\underline{f}(x))d\mu=0$, а $\overline{f}(x)-\underline{f}(x)\geqslant 0$ значит по неравенству Чебышёва п.в. на $[a,b]$ $\overline{f}(x)=\underline{f}(x)$, а т.к. $\underline{f}_r(x)\leqslant f(x)\leqslant\overline{f}_r(x)$, то $f(x)=\overline{f}(x)$ почти всюду. Так как мера Лебега полна, то
$f(x)\in L([a,b])$ и $\int\limits_{[a,b]}f(x)d\mu=\int\limits_{[a,b]}\overline{f}(x)d\mu=I=(R)\int\limits_{[a,b]}f(x)dx.$ ■

Теорема 10.7. *Пусть $f(x)\geqslant 0$ на $(a,b]$ и $f(x)\in R((a_+,b])$. Тогда $f(x)\in L((a,b))$ относительно классической меры Лебега и*
$(L)\int\limits_{(a,b)}f(x)d\mu=(R)\int\limits_{a_+}^{b}f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}(R)\int\limits_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx$

Доказательство. Пусть $n_0:\dfrac{1}{n_0}<b-a$. Тогда при $n\geqslant n_0$ определим $f_n(x)=f(x)X_{(a+\frac{1}{n},b)}(x)$. Заметим, что $f(x)X_{(a+\frac{1}{n},b)}(x)\in R([a+\varepsilon,b])\Rightarrow f_n\in L((a,b))$ и $(L)\int\limits_{[a,b]}f_n(x)d\mu=(R)\int\limits_{a+\frac{1}{n}}^{b}f(x)dx$. Отметим, что так как $f(x)\geqslant 0$, $f_n(x)\uparrow f(x)$ на (a,b). Кроме того, $\int\limits_{(a,b)}f_n(x)d\mu\leqslant(R)\int\limits_{a+}^{b}f(x)dx=C$. Тогда по следствию (9.3) из теоремы Беппо-Леви
$(L)\int\limits_{(a,b)}f(x)d\mu=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{(a,b)}f_n(x)d\mu=(R)\int\limits_{a+}^{b}f(x)dx.$ ■

10.5. Заряды

Опр. 10.1. Пусть M – σ-алгебра, функция $\varphi:M\to\mathbb{R}$ называется зарядом $\Leftrightarrow$ $\forall A,A_1,...,A_n,...\in M:A=\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, имеем $\varphi(A)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(A_n)$

Опр. 10.2. Пусть M – σ-алгебра, φ – заряд на M и $A\in M$. Тогда A называется положительным(отрицательным) относительно $\varphi\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\forall B\in M:B\subseteq A$ имеем $\varphi(B)\geqslant 0$ $(\varphi(B)\leqslant 0)$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 11

Теорема Радона-Никодима

11.1. Разложение Хана

Лемма 11.1. *Пусть M – σ-алгебра, φ– заряд на M и $B_1 \in M$, $\varphi(B_1) < 0$ (напомним, что это не означает, что B_1 отрицательно).*
Тогда $\exists B_0 \in M : B_0 \subseteq B_1$ и B_0 отрицательно, $\varphi(B_0) \leqslant \varphi(B_1)$.

Доказательство. $\forall C \in M$ введём величину $\gamma(C) = \sup\limits_{A \in M, A \subseteq C} \varphi(A)$ ($\gamma(C)$ неотрицательна, так как можно рассмотреть пустое множество).

Рассмотрим $\gamma(B_1)$. Если $\gamma(B_1) = 0$, то B_1 - само отрицательно.

Предположим, что $\gamma(B_1) = \infty$. Тогда выберем множество $A_1 \in M, A \subseteq B_1 : \varphi(A_1) > 1$ и положим $B_2 = B_1 \setminus A_1 \in M$. При этом $\varphi(B_2) = \varphi(B_1) - \varphi(A_1) < \varphi(B_1)$. Рассмотрим $\gamma(B_2)$, если $\gamma(B_2) = \infty$, повторим процесс, то есть выберем $A_2 \in M$, $A_2 \subseteq M : \varphi(A_2) > 1$ и положим $B_3 = B_2 \setminus A_2$. Продолжая процесс, либо на некотором шаге окажется $\gamma(B_{i_0}) < \infty$, либо построим последовательность попарно непересекающихся $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset M : \varphi(A_i) > 1 \Rightarrow \varphi(\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i) = \infty$ – противоречие, т.к. φ конечна на M.
Следовательно $\exists i_0 : \gamma(B_{i_0}) < \infty$. Не ограничивая общности, считаем, что $i_0 = 1$. Тогда выберем $A_1 \in M, A_1 \subset B_1 : \varphi(A_1) > \dfrac{\gamma(B_1)}{2}$ и положим $B_2 = B_1 \setminus A_1$, тогда $\varphi(B_2) < \varphi(B_1)$ и $\gamma(B_2) < \dfrac{\gamma(B_1)}{2}$. Если $\gamma(B_2) = 0$, то полагаем $B_0 = B_2$ и лемма доказана. В противном случае, выберем $A_2 \in M, a_2 \subset B_2 : \varphi(A_2) > \dfrac{\gamma(B_2)}{2}$ и положим $B_3 = B_2 \setminus A_2$, при этом $\varphi(B_3) < \varphi(B_2) < \varphi(B_1)$ и $\varphi(B_3) < \dfrac{\gamma(B_2)}{2} < \dfrac{\gamma(B_1)}{4}$ и т.д. В результате либо на некотором шаге $\gamma(B_{i_0}) = 0$ и тогда $B_0 = B_{i_0}$, либо получим последовательность $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots :\ \forall i \varphi(B_i), \varphi(B_1)$ и $\gamma(B_i) \leqslant \dfrac{\gamma(B_1)}{2^{i-1}}$. Пусть $B_0 = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i \in M$, кроме того, согласно замечанию к теореме о непрерывности меры 4.4 (не требуется неотрицательность) $\varphi(B_0) = \lim\limits_{i \to \infty} \varphi(B_i) \leqslant \varphi(B_1)$. Кроме того, если $A \in M$ и $A \subset B_0$, то $A \subset B_i\ \forall i$, значит $\varphi(A) \leqslant \gamma(B_i) \leqslant \dfrac{\gamma(B_1)}{2^{i-1}}$, а т.к. i произвольное, то $\varphi(A) \leqslant 0$. ■

Теорема 11.1. *(о разложении Хана)*
Пусть M – σ-алгебра с единицей X, φ – заряд на X. Тогда $\exists X_+, X_- \in M : X = X_- \sqcup X_+$, причем X_+ – положительно, а X_- – отрицательно относительно φ.

Доказательство. Заметим, что если $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in M : \forall i\ A_i$ – отрицательно относительно φ, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ также отрицательно относительно φ.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Действительно, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1) \sqcup (A_3 \setminus (A_2 \cup A_1)) \ldots = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ ★
при этом $\forall i$ B_i отрицательно как подмножество отрицательного A_i. Поэтому, если некоторое $C \in M$ и $C \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, то $C = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} (C \cap B_i)$, значит $\varphi(c) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varphi(C \cap B_i) \leqslant 0$ (т.к. все B_i отрицательны).

Пусть $\alpha = \inf\limits_{\text{отриц.} A \in M} \varphi(A)$, если $\alpha = 0$, то $X_+ = X, X_- = \varnothing$.
Пусть $\alpha < 0$, тогда рассмотрим последовательность отрицательных $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset M$ таких, что $\varphi(A_i) \to \alpha$. Положим тогда $X_- = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ – отрицательно и $\varphi(X_-) \leqslant \varphi(A_i)$ $\forall i$ (из разложения ★), значит $\varphi(X_-) \leqslant \alpha$, но т.к. $\alpha = \inf\limits_{\text{отриц.} A \in M} \varphi(A)$, то $\varphi(X_-) = \alpha$.

Теперь пусть $X_+ = X \setminus X_-$. Предположим, что X_+ не является положительным. Тогда $\exists B_1 \in M,\ B_1 \subset X_+$:
$phi(B_1) < 0$. Согласно лемме найдётся множество $B_0 \in M : B_0 \subseteq B_1 \subseteq X_+ : \varphi(B_0) < 0$ и B_0 отрицательно. Тогда $\tilde{X} = X_- \sqcup B_0$ – отрицательно и $\varphi(\tilde{X}) = \varphi(X_-) + \varphi(B_0) < \alpha$ – противоречие с определением α. ■

Разложение $X = X_+ \sqcup X_-$ называется разложением Хана относительно заряда φ

Пример Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 0 & x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ -1 & x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Тогда $\forall A \subseteq [0,1]$ измеримого относительно классической меры Лебега положим $\varphi(A) = \int\limits_A f(x) d\mu$. Из свойств интеграла Лебега вытекает, что φ – заряд на классической Лебеговской σ-алгебре подмножеств $[0,1]$. При этом легко видеть, что $\forall \gamma \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ разложение $[0,1] = [0,\gamma] \sqcup (\gamma, 1]$ является разложением Хана.

Утв. 11.1. *Пусть M – σ-алгебра с единицей X, φ – заряд на M и $X = X_+ \sqcup X_- = Y_+ \sqcup Y_-$ – два разложения Хана относительно φ. Тогда $\forall A \in M$ $\varphi(A \cap X_+) = \varphi(A \cap Y_+)$ и $\varphi(A \cap X_-) = \varphi(A \cap Y_-)$*

Доказательство. Заметим, что если $A \in M$, то $A \cap (X_+ \setminus Y_+) \subset X_+$ и $A \cap (X_+ \setminus Y_+) \subset Y_-$, тогда $\varphi(A \cap (X_+ \setminus Y_+)) = 0$,
но $A \cap X_+ = A \cap (X_+ \cap Y_+) \sqcup A \cap (X_+ \setminus Y_+) \Rightarrow \varphi(A \cap X_+) = \varphi(A \cap (X_+ \cap Y_+))$
Аналогично, т.к. X_+ и Y_+ равноправны, $\varphi(A \cap Y_+) = \varphi(A \cap (X_+ \cap Y_+))$.
Для $A \cap X_-$ аналогично. ■

Опр. 11.1. Если M – σ-алгебра с единицей X, φ – заряд на M, то взяв произвольное разложение Хана $X = X_+ \sqcup X_-$ определим функции $\forall A \in M$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\varphi_+(A) = \varphi(A \cap X_+)$ и
$\varphi_-(A) = \varphi(A \cap X_-)$
это σ-аддитивные неотрицательные функции, т.е. σ-аддитивные меры на M. При этом $\varphi(A) = \varphi_+(A) - \varphi_-(A)$ – разложение Жордана.

11.2. Теорема Радона-Никодима

Опр. 11.2. Пусть (X, M, μ) измеримое пространство, φ – заряд на M.
Тогда φ называется **абсолютно непрерывной** относительно μ $\Leftrightarrow$ из того, что $A \in M$ и $\mu(A) = 0$ следует, что $\varphi(A) = 0$.

Лемма 11.2. *Пусть (X, M, μ) – конечное измеримое пространство,*
$\varphi \not\equiv 0$ – σ-аддитивная мера на M абсолютно непрерывная относительно μ.
Тогда найдутся такие $B_0 \in M$ и $n_0 \in \mathbb{N}$, что
1) $\mu(B_0) > 0$
2) B_0 – положительно относительно $\varphi - \dfrac{1}{n_0}\mu$

<u>*Доказательство.*</u> $\forall n \in \mathbb{N}$ напишем разложение Хана $X = X_{+,n} \sqcup X_{-,n}$,
так как $\forall n\ \forall A \quad (\varphi - \dfrac{1}{n+1}\mu)(A) \geqslant (\varphi - \dfrac{1}{n}\mu)(A)$, то можно считать, что
$X_{+,n+1} \supseteq X_{+,n}$, тогда $X_{-,n+1} \subseteq X_{-,n}$. Положим $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_{-,n} \in M$.
Тогда C – отрицательно относительно $\varphi - \dfrac{1}{n}\mu \quad \forall n$, следовательно $(\varphi - \dfrac{1}{n}\mu)(C) \leqslant 0 \Leftrightarrow$ $\varphi(C) \leqslant \dfrac{1}{n}\mu(C)$. Так как φ – мера и правая часть стремится к 0, то $\varphi(C) = 0$.
Но $X \setminus C = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} X_{+,n} \Rightarrow \mu(X \setminus C) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(X_{+,n})$. Кроме того, $\varphi(X) = \varphi(X \setminus C) + \varphi(C) = \varphi(X \setminus C)$. $\varphi \not\equiv 0$, значит $\varphi(X) > 0$, значит и $\varphi(X \setminus C) > 0$. Но, т.к. φ абсолютно непрерывна относительно μ, тогда $\mu(X \setminus C) > 0$, а значит $\exists n_0 : \mu(X_{+,n_0}) > 0$. Положим $B_0 = X_{+,n_0}$. ■

Теорема 11.2. *(Радона-Никодима)*
Пусть (X, M, μ) – σ-конечное измеримое пространство, φ– заряд на M, абсолютно непрерывный относительно μ.
Тогда $\exists f(x) \in L(X, M, \mu) \equiv L(X) : \forall A \in M\ \varphi(A) = \int\limits_A f(x)d\mu$.
При этом если $g(x) \in L(X) : \forall A \in M\ \varphi(A) = \int\limits_A g(x)d\mu$, то $f(x) = g(x)$ п.в. на X.

<u>*Доказательство.*</u> Пусть $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ – разложение Жордана. Тогда, если
$X = X_+ \sqcup X_-$ - некоторое разложение Хана, то $\varphi_+(A) = \varphi(A \cap X_+) \quad \forall A \in M$. Поэтому, если $A \in M$ и $\mu(A) = 0$, то $\mu(A \cap X_+) = 0$, тогда $\varphi(A \cap X_+) = 0$ (т.к. φ абс. непр. относительно μ). И так как $\varphi(A \cap X_+) = \varphi_+(A)$, значит φ_+ абсолютно непрерывна относительно μ. Аналогично для φ_-.

Таким образом теорему достаточно доказать для случая, когда φ – σ-аддитивная конечная мера.

1)Пусть вначале $\mu(X) < \infty$.

Введём множество функций $F = \{\text{неотр.} f(x) \in L(X) : \forall A \in M \int\limits_A f(x)d\mu \leqslant \varphi(A)\}$

$F \neq \varnothing$, т.к. $0 \in F$.

Пусть также $S = \sup\limits_{f \in F} \int\limits_X f(x)d\mu \leqslant \varphi(X) < \infty$. Проверим, что если $f_1, ..., f_n \in F$, то $g_n(x) = max(f_1(x), ..., f_n(x)) \in F$. Рассмотрим множества

$E_1 = \{x \in X : f_1(x) \geqslant max(f_2(x), \ldots, f_n(x))\}$

$E_2 = \{x \in X : f_2(x) > f_1(x) \text{ и } f_2(x) \geqslant max(f_3(x), \ldots, f_n(x))\}$

...

$E_n = \{x \in X : f_n(x) > max(f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x))\}$ Тогда все $E_n \in M$ и $X = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k$.

При этом $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) X_{E_k}(x)$. Если $A \in M$, то $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} (A \cap E_k)$. Кроме того $|g(x)| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) \Rightarrow g(x) \in L(X)$.

Тогда $\int\limits_A g(x)d\mu = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{A \cap E_k} f_k(x)d\mu \leqslant$ (т.к. каждая из $f_k \in F$) $\leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi(A \cap E_k) = \varphi(A)$, значит $g(x) \in F$.

Выберем последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \ : \int\limits_X f_n(x)d\mu \to S$.

$\forall n$ определим $g_n(x) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} f_k(x) \in F$. Имеем

1)g_n монотонно неубывают на X

2)$\forall n \ \forall x \in X \quad g_n(x) \geqslant f_n(x)$

Обозначим $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} g_n(x)$. Так как по теореме Беппо-Леви 9.4) $\int\limits_X f(x)d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_X g_n(x)d\mu < \infty$, значит $f(x) \in L(X)$.

Кроме того $\forall A \in M \int\limits_A f(x)d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_A g_n(x)d\mu \leqslant \varphi(A) \Rightarrow f(x) \in F$. Затем $\forall n \int\limits_X f_n(x)d\mu \leqslant \int\limits_X g_n(x)d\mu \leqslant \int\limits_X f(x)d\mu$. Так как $\int\limits_X f_n(x)d\mu \to S = \sup\limits_{h \in F} \int\limits_X h(x)d\mu$, то $\int\limits_X f(x)d\mu = S$.

Рассмотрим меру: $\forall A \in M$ определим $\lambda(A) = \varphi(A) - \int\limits_A f(x)d\mu$ – σ-аддитивная мера. Предположим, что $\lambda \not\equiv 0$. Тогда т.к. λ абс. непрерывна относительно μ, по лемме $\exists B_0 \in M$ и $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:

1)B_0 положительно относительно $\lambda - \frac{1}{n_0}\mu$

2) $\mu(B_0) > 0$

Определим функцию $h(x) = f(x) + \dfrac{1}{n_0} X_{B_0}(x)$. Проверим, что $h(x) \in F$. Интегрируемость и неотрицательность очевидны.

Пусть $A \in M$, тогда

$$\int\limits_A h(x)d\mu = \int\limits_{A \setminus B_0} h(x)d\mu + \int\limits_{A \cap B_0} h(x)d\mu = \int\limits_{a \setminus B_0} f(x)d\mu + \int\limits_{A \cap B_0} f(x)d\mu + \frac{1}{n_0}\mu(A \cap B_0) \qquad (\bigstar)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Так как B_0 положительно относительно $\lambda - \frac{1}{n_0}\mu$, то
$(\lambda - \frac{1}{n_0}\mu)(A \cap B_0) > 0$
$\varphi(A \cap B_0) - \int\limits_{A \cap B_0} f(x)d\mu - \frac{1}{n_0}\mu(A \cap B_0) > 0$
Тогда $(\bigstar) \leqslant \varphi(A \setminus B_0) + \varphi(A \cap B_0) = \varphi(A)$, значит $h(x) \in F$. Но $\int\limits_X h(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu + \frac{1}{n_0}\mu(B_0) = S + \frac{1}{n_0}\mu(B_0) > S$ – противоречие. Значит $\lambda \equiv 0$.

2) Пусть теперь $\mu(X) = \infty$.

Тогда т.к. $\mu-\sigma$-конечна, то $X = \bigsqcup\limits_{l=1}^{\infty} X_l : \forall l\ X_l \in M$ и $\mu(X_l) < \infty$. Тогда $\forall l\ \varphi$ – абс. непр. относительно μ мера на $(X_l, M \cap X_l, \mu)$. По доказанному $\exists f_l \in L(X_l) : \forall C \in M \cap X_l$ $\varphi(C) = \int\limits_C f_l(x)d\mu$. Считаем, что $f_l(x) = 0$ при $x \notin X_l$ и определим $f(x) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} f_l(x)$. Тогда $f(x)$ измерима и неотрицательна на X.
Имеем $\int\limits_X f(x)d\mu = \sum\limits_{l=1}^{\infty} \int\limits_{X_l} f_l(x)d\mu = \sum\limits_{l=1}^{\infty} \varphi(X_l) = \varphi(X) < \infty$, значит
$f \in L(X)$. Для произвольного $A \in M$ $A = \bigsqcup\limits_{l=1}^{\infty}(A \cap X_l)$, значит $\int\limits_A f(x)d\mu = \sum\limits_{l=1}^{\infty} \int\limits_{A \cap X_l} f_l(x)d\mu = \sum\limits_{l=1}^{\infty} \varphi(A \cap X_l) = \varphi(A)$.
Существование доказано.

Единственность.

Предположим, что $g(x) \in L(X) : \forall A \in M\ \varphi(A) = \int\limits_A g(x)d\mu$
Рассмотрим множество $E_+ = \{x \in X : f(x) > g(x)\} \in M$. Тогда $\int\limits_{E_+} (f(x) - g(x))d\mu = \int\limits_{E_+} f(x)d\mu - \int\limits_{E_+} g(x)d\mu = \varphi(E_+) - \varphi(E_+) = 0$
Но $(f(x) - g(x)) > 0$ на E_+. Тогда $\mu(E_+) = 0$
Аналогично $\mu(\{x \in X : g(x) > f(x)\}) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$ почти всюду на X.

■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

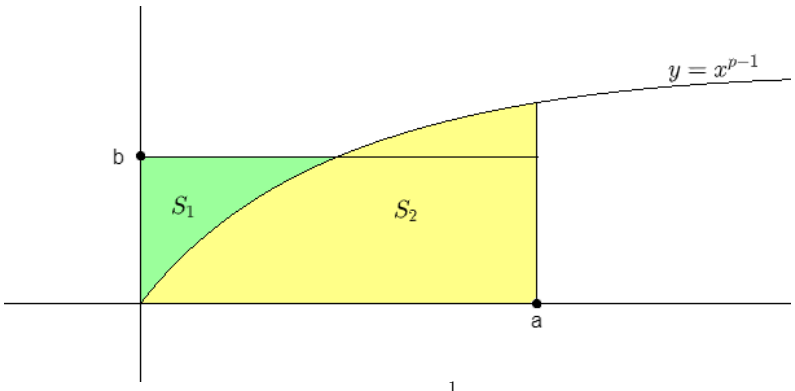
Лекция 12

Пространство Lp

12.1. Неравентсво Гёльдера

Лемма 12.1. *Пусть* $1 < p < \infty,\ q = \dfrac{p}{p-1}\ (\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1)$.
Тогда $\forall a, b \geqslant 0$ *справедливо неравенство*
$ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$

Доказательство. Если $a = 0$ или $b = 0$ очевидно. Пусть $a > 0,\ b > 0$.



$y = x^{p-1} \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{p-1}} \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{\frac{q}{q-1}-1}} \Leftrightarrow x = y^{q-1}$
$ab \leqslant S_1 + S_2 = \int\limits_0^b x^{p-1}dx + \int\limits_0^b y^{q-1}dy = \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ ■

Теорема 12.1. *(Неравенство Гёльдера)*
Пусть (X, M, μ) *– измеримое пространство,* $1 < p < \infty$, $q = \dfrac{p}{p-1}$,
$|f(x)|^p, |g(x)|^q \in L(X)$. *Тогда* $f(x)g(x) \in L(X)$ *и*
$\int\limits_X |f(x)g(x)|d\mu \leqslant (\int\limits_X |f(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int\limits_X |g(x)|^q d\mu)^{\frac{1}{q}}$

Доказательство. Обозначим $A = (\int\limits_X |f(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}},\ B = (\int\limits_X |g(x)|^q d\mu)^{\frac{1}{q}}$. Если, например, $A = 0$, то $f(x) = 0$ п.в. на X, тогда $f(x)g(x) = 0$ п.в. на X и $\int\limits_X |f(x)g(x)|d\mu = 0$. Аналогично если $B = 0$.
Пусть $A > 0, B > 0$. Рассмотрим $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{A}$ и $\psi(x) = \dfrac{g(x)}{B}$.
Имеем $\int\limits_X |\varphi(x)|^p d\mu = \dfrac{1}{A^p} \int\limits_X |f(x)|^p d\mu = 1$. Аналогично $\int\limits_X |\psi(x)|^q d\mu = 1$.
По лемме $\forall x \in X$ верно $|\varphi(x)\psi(x)| \leqslant \dfrac{|\varphi(x)|^p}{p} + \dfrac{|\psi(x)|^q}{q}$.
Тогда $\int\limits_X |\varphi(x)\psi(x)|d\mu \leqslant \dfrac{1}{p} \int\limits_X |\varphi(x)|^p d\mu + \dfrac{1}{q} \int\limits_X |\psi(x)|^q d\mu = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
В то же время $\int\limits_X |\varphi(x)\psi(x)|d\mu = \dfrac{1}{AB} \int\limits_X |f(x)g(x)|d\mu$. ■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

12.2. Неравенство Минковского

Теорема 12.2. *(Неравенство Минковского)*
Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $f(x), g(x)$ *измеримы на* (X, M, μ) *– измеримое пространство.* $|f(x)|^p, |g(x)|^p \in L(X)$.
Тогда $|f(x)+g(x)|^p \in L(X)$ *и справедливо неравенство*
$(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\int\limits_X |f(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int\limits_X |g(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$.

Доказательство. При $p = 1$ очевидно. Пусть $1 < p < \infty$, определим $q = \dfrac{p}{p-1}$. Заметим, что $\forall a, b \quad |a+b|^p \leqslant ||a|+|b||^p \leqslant (2max(|a|,|b|)^p \leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p)$, тогда $|f(x)+g(x)|^p \in L(X)$.

Если $\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p d\mu = 0$, очевидно. Пусть $A = \int\limits_X |f(x)+g(x)|^p d\mu > 0$.
Рассмотрим
$A = \int\limits_X |f(x)+g(x)|^p d\mu \leqslant \int\limits_X |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} d\mu + \int\limits_X |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} d\mu \leqslant$
(по неравенству Гёльдера)
$\leqslant (\int\limits_X |f(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p d\mu)^{\frac{p-1}{p}} + (\int\limits_X |g(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p d\mu)^{\frac{p-1}{p}} =$
$= A^{\frac{p-1}{p}} (\int\limits_X |f(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} + A^{\frac{p-1}{p}} (\int\limits_X |g(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$
Деля обе части на $A^{\frac{p-1}{p}}$, получаем
$A^{\frac{1}{p}} \leqslant (\int\limits_X |f(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int\limits_X |g(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$. ■

Пример Пусть $X = \mathbb{N}, M$ – все его подмножества, $\mu(\{k\}) = 1$
Неравенство Гёльдера $1 < p < \infty$, $q = \dfrac{p}{p-1}$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leqslant (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|^q)^{\frac{1}{q}}$
Неравенство Минковского
$(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n+b_n|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|^p)^{\frac{1}{p}}$

12.3. Пространство L_p

Опр. 12.1. Линейным нормированным пространством называется пара $(L, || \, ||)$, где L– линейное пространство над полем K ($K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{C}$), а функция $|| \, || : L \to [0, \infty)$ называется нормой и удовлетворяет условиям:
1)$||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2)$||\alpha x|| = |\alpha| ||x|| \; \forall \alpha \in K, \forall x \in L$
3)$||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \; \forall x, y \in L$.

Опр. 12.2. Пусть $1 \leqslant p < \infty$, (X, M, μ) – измеримое пространство,
тогда множество $\hat{L}_p(X) = \{$измеримых на X $f(x) : \int\limits_X |f(x)| d\mu < \infty\}$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пусть также $J_0(X) = \{$измеримых на X $f(x) = 0$ п.в. на X $\}$
Тогда положим $L_p(X) = \hat{L}p(X)/J_0(X)$ (отождествим функции, которые почти всюду совпадают)
Введем норму на $L_p(X)$ $||f||_p = (\int\limits_X |f(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$
При этом $(L_p(X), || \ ||_p)$ – ЛНП.

В дальнейшем будем обозначать это пространство просто $L_p(X)$.

$\hat{L}_\infty(X) = \{$измеримых на X $f(x) : \operatorname{esc\,sup}\limits_{x\in X}|f(x)| = \inf\{c \in \mathbb{R}^1 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > c\}) = 0\}\}$ (это те функции, которые после изменения их значения на множестве нулевой меры стали ограниченными)
$L_\infty(X) = \hat{L}_\infty(X)/J_0(X)$
$||f(x)||_\infty = \operatorname{esc\,sup}\limits_{x\in X}|f(x)|$

Утв. 12.1. *Пусть $\mu(X) < \infty$ и $1 \leqslant p < r < \infty$, а $f(x) \in L_r(X)$.*
Тогда $f(x) \in L_p(X)$ и $||f||_p \leqslant ||f||_r C$ (константа зависит от $\mu(X), p, r$).

Доказательство. Оценим $\int\limits_X |f(x)|^p d\mu = \int\limits_X |f(x)|^p \cdot 1 d\mu$
$\dfrac{r}{p} > 1$, применим неравенство Гёльдера
$\int\limits_X |f(x)|^p d\mu = \int\limits_X |f(x)|^p \cdot 1 d\mu \leqslant (\int\limits_X |f(x)|^r d\mu)^{\frac{p}{r}} (\int\limits_X 1 d\mu)^{\frac{r-p}{r}} \Rightarrow ||f||_p \leqslant ||f||_r \cdot (\mu(X))^{\frac{r-p}{rp}}$

■

Теорема 12.3. *Пусть (X, M, μ) – измеримое пространство, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, тогда $L_p(X)$ – полное, то есть любая фундаментальная последовательность имеет в нём предел (по норме L_p).*

Доказательство. Пусть вначале $1 \leqslant p < \infty$. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ – фундаментальная последовательность в $L_p(X)$ (т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n, m > N \quad ||f_n - f_m||_p < \varepsilon$)
Тогда:

1) $\exists C > 0 : ||f_n||_p \leqslant C \quad \forall n$
2) Можно выделить монотонно возрастающую последовательность $n_k : \forall m, l \geqslant n_k$ имеем $||f_m - f_l||_{L_p(X)} < \dfrac{1}{2^k}$

$\exists$ разложение $X = \bigsqcup\limits_{r=1}^\infty X_r$, где все $X_r \in M$ и $\mu(X_r) < \infty$. (Если $\mu(X) < \infty$, то $X_1 = X$, а остальные пусты)
Тогда заметим, что $\forall r \quad \forall m, l > n_k \quad ||f_m - f_l||_{L_p(X_r)} < \dfrac{1}{2^k}$. Тогда согласно предыдущему утверждению $\forall r \quad \forall m, l \geqslant n_k \quad ||f_m - f_l||_{L_1(X_r)} \leqslant C(r, p) \cdot \dfrac{1}{2^k}$ (C зависит от r, p)
Для $x \in X_r$ рассмотрим функцию $\varphi_r(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum\limits_{k=1}^\infty |f_{n_k+1}(x) - f_{n_k}(x)|$.
При этом $\int\limits_{X_r} \varphi_r(x) d\mu = \int\limits_{X_r} |f_{n_1}(x)| d\mu + \sum\limits_{k=1}^\infty \int\limits_{X_r} |f_{n_k+1}(x) - f_{n_k}(x)| d\mu =$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$= ||f_{n_1}||_{L_1(X_r)} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} ||f_{n_k+1}(x) - f_{n_k}(x)||_{L_1(X_r)} \leqslant C(r,p)(||f_{n_1}||_{L_p(X)} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}) < \infty$
Поэтому $\varphi(x) \in L(X_r) \Rightarrow \varphi(x)$ конечна почти всюду на X_r. Но тогда ряд $f_{n_1}(x) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(f_{n_k+1}(x) - f_{n_k}(x))$ сходится почти всюду к некоторой измеримой $\psi_r(x)$.
$f_{n_1}(x) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(f_{n_k+1}(x) - f_{n_k}(x)) = \lim\limits_{s\to\infty}(f_{n_1}(x) + \sum\limits_{k=1}^{s-1}(f_{n_k+1}(x) - f_{n_k}(x))) = \lim\limits_{s\to\infty} f_{n_s}(x)$
Таким образом $\forall r$ последовательность $f_{n_k}(x)$ п.в. на X_r сходится к некоторой $\psi_r(x)$.
Пусть $E_r \subset X_r$ – множество, где есть сходимость $\Rightarrow E_r \in M$. Определим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \psi_r(x), & x \in E_r, r = 1, 2, \ldots \\ 0, & x \notin \bigsqcup\limits_{r=1}^{\infty} E_r \end{cases} \quad \text{– измеримая функция}$$

и $f_{n_k} \to f(x)$ на $\bigsqcup\limits_{r=1}^{\infty} E_r$, а $\mu(X \setminus \bigsqcup\limits_{r=1}^{\infty} E_r) = \sum\limits_{r=1}^{\infty} \mu(X_r \setminus E_r) = 0$.
Тогда $|f_{n_k}(x)|^p \to |f(x)|^p$ п.в. на X.
По теореме Фату (9.5) $\int\limits_X |f(x)|^p d\mu \leqslant \varliminf\limits_{k\to\infty} \int\limits_X |f_{n_k}|^p d\mu \leqslant C \Rightarrow f(x) \in L_p(X)$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$, подберем k так, чтобы $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$ и пусть $n \geqslant n_k$. Тогда для $l \geqslant k$ имеем $||f_n - f_{n_l}||_p < \frac{1}{2^k}$. Но $|f_n(x) - f_{n_l}(x)|^p$ при $l \to \infty$ и фикс. n сходится к $|f_n(x) - f(x)|^p$.
По теореме Фату $\int\limits_X |f_n(x) - f(x)|^p d\mu \leqslant \varliminf\limits_{l\to\infty} \int\limits_X |f_n(x) - f_{n_l}(x)|^p d\mu \leqslant \frac{1}{2^{kp}} < \varepsilon$ – есть сходимость.

Пусть $p = \infty$. Рассмотрим множество
$E_{m,n} = \{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| > ||f_m(x) - f_n(x)||_\infty\}$
По определению нормы $||\ ||_\infty \quad \mu(E_{m,n}) = 0 \quad \forall m, n$
Определим множество $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_{m,n} \Rightarrow \mu(E) = 0$. Если $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна в $L_\infty(X)$, то на $X \setminus E$ эта последовательность равномерно фундаментальна $\Rightarrow$ на $X \setminus E \quad \exists$ равномерный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, обозначим его $f(x)$ - ограничена на $X \setminus E$. Доопределяя $f(x) = 0$ на E, получим $f_n \to f$ в $L_\infty(X)$. ■

Теорема 12.4. *Пусть (X, M, μ) – измеримое пространство, $1 \leqslant p < \infty$, $f(x)$ измерима на (X, M, μ), а $F_f(y) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > y\}), y \geqslant 0$.*
Тогда $\int\limits_X |f(x)|^p d\mu = p \int\limits_{(0,\infty)} y^{p-1} F_f(y) d\mu_y$, где μ_y – классическая мера Лебега на подмножествах $[0, \infty)$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $f(x) \geqslant 0$.
Пусть вначале $f(x)$ – простая неотрицательная функция. Тогда её можно представить в виде: $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k X_{E_k}(x)$, где $0 = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_n$, все $E_k \in M$ и $E_{k_1} \cap E_{k_2} = \varnothing$ при $k_1 \neq k_2$ и $\mu(E_k) < \infty \ \forall k$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда $f(x)^p = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^p X_{E_k}(x)$ и $\int\limits_X (f(x))^p d\mu = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^p \mu(E_k)$ ★

Имеем

$$F_f(y) = \begin{cases} \sum\limits_{r=1}^{n} \mu(E_r), & c_0 \leqslant y \leqslant c_1 \\ \sum\limits_{r=2}^{n} \mu(E_r), & c_1 \leqslant y \leqslant c_2 \\ \quad \dots & \\ \mu(E_n) & c_{n-1}, \leqslant y \leqslant c_n \\ 0, & \text{при } y \geqslant c_n \end{cases}$$

Отсюда $p \int\limits_{(0,\infty)} y^{p-1} F_f(y) d\mu_y = \sum\limits_{k=1}^{n} p \int\limits_{(c_{k-1},c_k)} y^{p-1} \sum\limits_{r=k}^{n} \mu(E_r) d\mu_y =$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{r=k}^{n} \mu(E_r) \cdot p \int\limits_{(c_{k-1},c_k)} y^{p-1} d\mu_y = \sum\limits_{k=1}^{n} (c_k^p - c_{k-1}^p) \sum\limits_{r=k}^{n} \mu(E_r) =$

$= \sum\limits_{r=1}^{n} \mu(E_r) \cdot \sum\limits_{k=1}^{r} (c_k^p - c_{k-1}^p) = \sum\limits_{r=1}^{n} c_r^p \mu(E_r)$

Сравнивая полученное с (★), убеждаемся, что для простых функций данная теорема справедлива.

Пусть теперь $f(x)$ – произвольная измеримая неотрицательная функция. Построим неубывающую последовательность неотрицательных $f_n(x) \uparrow f(x)$ на X. Заметим, что при этом $\forall y \geqslant 0$ $\{x \in X : f(x) > y\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) > y\}$ и множества справа образуют <u>расширяющуюся</u> последовательность. Тогда по теореме о непрерывности меры (4.4) и замечанию к ней

$F_f(y) = \mu(\{x \in X : f(x) > y\}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : f_n(x) > y\}) = \lim\limits_{n\to\infty} F_{f_n}(y)$

То есть функции $F_{f_n}(y) \uparrow F(y)$ на $(0, \infty)$.

Тогда по доказанному $\int\limits_X (f_n(x))^p d\mu = p \int\limits_{(0,\infty)} y^{p-1} F_{f_n}(y) d\mu_y$.

По теореме Беппо-Леви (9.4) $\int\limits_X (f_n(x))^p d\mu \to \int\limits_X (f(x))^p d\mu$ и

$p \int\limits_{(0,\infty)} y^{p-1} F_{f_n}(y) d\mu_y \to p \int\limits_{(0,\infty)} y^{p-1} F_f(y) d\mu_y$. ■

Лекция 13

Абсолютно непрерывные функции

13.1. Всюду плотное в линейном нормированном пространстве множество

Опр. 13.1. Пусть $(L, || \, ||)$– линейное нормированное пространство, $M \subset L$. Тогда M – **всюду плотно** в $(L, || \, ||) \Leftrightarrow \ \forall x \in L$ и $\forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in M : ||x - y|| < \varepsilon$.

Теорема 13.1. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$, $L_p([a, b])$ *с классической мерой Лебега. Тогда следующие множества всюду плотны в* $L_p([a, b])$*:*
а) $C([a, b])$
б) многочлены в) многочлены с рациональными коэф.

Доказательство. а) Если промежуток $\{\alpha, \beta\} \subset [a, b]$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ непрерывная $f_\varepsilon(x)$: $||X_{\{\alpha,\beta\}}(x) - f_\varepsilon(x)||_p < \varepsilon$. Пусть $n : \dfrac{2}{n} < \beta - \alpha$, тогда положим

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, \alpha] \cup [\beta, b] \\ 1, & x \in [\alpha + \dfrac{1}{n}, \beta - \dfrac{1}{n}] \\ \text{линейна и непрерывна на} & [\alpha, \alpha + \dfrac{1}{n}] \cup [\beta - \dfrac{1}{n}, \beta] \end{cases}$$

Тогда $||X_{\{\alpha,\beta\}}(x) - f_n||_p \leqslant (\dfrac{2}{n})^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$ для достаточно большого n. Таким образом, непрерывные функции всюду плотны в множестве характеристических функций промежутков. Если $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \{\alpha_k, \beta_k\} \subseteq [a, b]$, то из рассуждений выше следует, что и $X_E(x)$ можно сколь угодно хорошо приблизить непрерывными.

Пусть теперь A измеримо относительно классической меры Лебега, $A \subseteq [a, b]$, тогда по определению измеримости $\forall \varepsilon > 0 \ \exists E = E_\varepsilon = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \{\alpha_k, \beta_l\} : \mu(A \triangle E) < \varepsilon$. Тогда $||X_A(x) - X_E(x)||_p = (\int\limits_{(A \triangle E)} 1 d\mu)^{\frac{1}{p}} = \mu(A \triangle E)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$. Отсюда непрерывные функции всюду плотны в множестве $X_A(x), A$ – измеримо относительно классической меры Лебега, тогда если $h(x)$ – простая, то есть $h(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_{E_k}(x)$, где $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k = [a, b], E_k$– измеримо, то её можно сколь угодно хорошо приблизить в L_p непрерывной функцией.

Пусть теперь $f(x) \in L_p([a, b]), f(x) \geqslant 0$, тогда $\exists$ последовательность простых неотрицательных функций $h_n(x) \uparrow f(x)$ на [a,b]. Отсюда :
1) $|f(x) - h_n(x)|^p \to 0 \quad \forall x \in [a, b]$ при $n \to \infty$
2) $|f(x) - h_n(x)|^p \leqslant |f(x)|^p \quad \forall n, \ \forall x \in [a, b]$.
По теореме Лебега $\int\limits_{[a,b]} |f(x) - h_n(x)|^p d\mu \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно простыми функциями можно сколь угодно хорошо приблизить неотрицательную $f(x) \in$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$L_p([a,b])$, но т.к. если $f(x) \in L_p([a,b])$, то $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ – неотрицательные функции из $L_p([a,b])$
Таким образом непрерывные функции всюду плотны в $L_p([a,b])$

б) По теореме Вейерштрасса $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall f(x) \in C([a,b])$ $\exists$ многочлен $P(x) = P_\varepsilon(x)$: $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in [a,b]$, тогда $||f - P||_p = (\int\limits_{[a,b]} |f(x)P(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon(b-a)^{\frac{1}{p}}$, значит многочленом можно сколь угодно хорошо приблизить в $L_p([a,b])$ любую непрерывную функцию. Из этого и из утверждения пункта а следует утверждение пункта б.

в)Аналогично, т.к. произвольный многочлен можно сколь угодно хорошо приблизить многочленом с рациональными коэффициентами.

■

Утв. 13.1. *Если $1 \leqslant p < \infty$, то в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ всюду плотно множество финитных непрерывных функций, то есть непрерывных функций, обращающихся в 0 вне некоторого отрезка.*

Доказательство. Пусть дано $\varepsilon > 0$ и $f(x) \in L_p(\mathbb{R})$, рассмотрим функции
$f_N(x) = f(x)X_{[-N,N]}(x)$. Тогда 1) $f(x) - f_N(x) \to 0 \forall x \in \mathbb{R}$
2) $|f(x) - f_N(x)|^p \leqslant |f(x)|^p \in L(\mathbb{R})$
По теореме Лебега $(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x) - f_N(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \to 0$, то есть при $n \geqslant N_0$ $||f - f_n||_{L_p(\mathbb{R})} < \dfrac{\varepsilon}{3}$

Зафиксируем N_0. По теореме $\exists g(x) \in C([-N_0, N_0])$: $||f(x) - g(x)||_{L_p([-N_0,N_0])} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Если продолжить $g(x)$ нулём вне $[-N_0, N_0]$, тогда $||f_{N_0}(x) - g(x)||_{L_p(\mathbb{R})} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Рассмотрим функции

$$h_k(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [-N_0, N_0] \\ 0, & x \notin [-N_0 - \dfrac{1}{k}, N_0 + \dfrac{1}{k}] \\ \text{линейна и непрерывна на} & [-N_0 - \dfrac{1}{k}, -N_0] \cup [N_0, N_0 + \dfrac{1}{k}] \end{cases}$$

Тогда $h_k(x)$ – финитная непрерывная функция, кроме того
$\exists k_0 : ||g(x) - h_{k_0}(x)||_{L_p(\mathbb{R})} < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Значит

$$||f(x) - h_{k_0}(x)||_{L_p(\mathbb{R})} \leqslant ||f(x) - f_{N_0}||_{L_p(\mathbb{R})} + ||f_{N_0} - g(x)||_{L_p(\mathbb{R})} + ||g(x) - h_{k_0}(x)||_{L_p(\mathbb{R})} < \varepsilon. \blacksquare$$

13.2. Вариационная сумма функции. Функция ограниченной вариации

Пусть $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$ и есть $f : [a,b] \to \mathbb{R}^1$.

Опр. 13.2. Разбиением T отрезка $[a,b]$ назовём конечную систему точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Вариационной суммой функции f по разбиению T назовём

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

величину $V_T(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$
Скажем, что $f(x) \in V([a,b])$ (f является функцией ограниченной вариации на $[a,b]$) $\Leftrightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sup\limits_T V_T(f) < \infty$ ($\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ называется вариацией от a до b функции f)

Замечание 13.1. Если $f(x) \in V([a,b])$, то $f(x)$ ограничена на $[a,b]$

Замечание 13.2. Если $f(x)$ монотонна на $[a,b]$, то $f(x)$ является функцией ограниченной вариации ($f(x) \in V([a,b])$) и $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = |f(a) - f(b)|$.

Теорема 13.2. *Пусть $f(x), g(x) \in V([a,b])$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$.*
Тогда $\alpha f(x) + \beta g(x) \in V([a,b])$ и $\overset{b}{\underset{a}{V}}(\alpha f + \beta g) \leqslant |\alpha| \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + |\beta| \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$

Доказательство. $\forall [c,d] \subset [a,b]$ имеем
$(\alpha f + \beta g)(d) - (\alpha f + \beta g)(c) \leqslant |\alpha||f(d) - f(c)| + |\beta||g(d) - g(c)|$. Применяя к произвольной вариационной сумме получим утверждение. ■

Теорема 13.3. *Пусть $f(x) \in V([a,b])$ и $c \in (a,b)$.*
Тогда $f(x) \in V([a,c]) \cap V([c,b])$ и $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$

Доказательство. Рассмотрим разбиение T_1 отрезка $[a,c]$ и T_2 отрезка $[c,b]$. Тогда $T = T_1 \cup T_2$ – разбиение $[a,b]$. При этом $V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) = V_T(f) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$. Тогда $\sup\limits_{T_1} V_{T_1}(f) + \sup\limits_{T_2} V_{T_2}(f) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \Rightarrow f(x) \in V([a,c]) \cap V([c,b])$ и $\overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$. Осталось показать обратное неравенство.

Пусть T – произвольное разбиение $[a,b]$. Добавляя к нему точку c (если это необходимо), получим разбиение $\widetilde{T}$ отрезка $[a,b]$, причём $\widetilde{T} = T_1 \cup T_2$, где T_1 – разбиение $[a,c]$, T_2 – разбиение $[c,b]$. Тогда $V_T(f) \leqslant V_{\widetilde{T}} = V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leqslant \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$
Переходя слева к $\sup\limits_T$, получим $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \leqslant \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$. ■

Теорема 13.4. *Пусть $f(x) \in V([a,b])$, тогда справедливо представление $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – монотонно неубывающие функции на $[a,b]$. При этом можно считать, что $f_1(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$ при $x \in [a,b]$*

Доказательство. Из теоремы следует, что $f_1(x)$ монотонно неубывает на $[a,b]$. Пусть $a \leqslant x < y \leqslant b$. Тогда т.к. $f_2(x) = f_1(x) - f(x)$, то $f_2(y) - f_2(x) = f_1(y) - f_1(x) - (f(y) - f(x)) = \overset{y}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{x}{\underset{a}{V}}(f) - (f(y) - f(x)) = \overset{y}{\underset{x}{V}}(f) - (f(y) - f(x)) \geqslant 0$, откуда следует утверждение. ■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

13.3. Абсолютно непрерывные на отрезке функции

Опр. 13.3. $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$, $f:[a,b] \to \mathbb{R}^1$. Назовём систему интервалов $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{\infty} \subset [a,b]$ **допустимой** $\Leftrightarrow (a_i,b_i) \cap (a_j,b_j) = \varnothing$ при $i \neq j$.
Скажем что $f(x) \in AC([a,b])$ или $f(x)$ **абсолютно непрерывна** на $[a,b]$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, что для любой допустимой системы $\omega = \{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ с $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) < \delta$ имеем $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |f(a_i) - f(b_i)| < \varepsilon$

Замечание 13.3. Если $f(x) \in AC([a,b])$, то $f(x) \in C([a,b])$

Теорема 13.5. *Пусть $f(x), g(x) \in AC([a,b])$. Тогда*
1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha f(x) + \beta g(x) \in AC([a,b])$
2) $f(x)g(x) \in AC([a,b])$
3) Если $g(x)$ не обращается в 0 на $[a,b]$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)} \in AC([a,b])$

Доказательство. 1) $\forall$ допустимой системы Ω
$\sum\limits_{i=1}^{\infty} |(\alpha f + \beta g)(b_i) - (\alpha f + \beta g)(a_i)| \leqslant |\alpha| \sum\limits_{i=1}^{\infty} |f(b_i) - f(a_i)| + |\beta| \sum\limits_{i=1}^{\infty} |g(b_i) - g(a_i)|$, отсюда вытекает утверждение

2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |f(b_i)g(b_i) - f(a_i)g(a_i)| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} |f(b_i)||g(b_i) - g(a_i)| + \sum\limits_{i=1}^{\infty} |g(a_i)||f(b_i) - f(a_i)| \leqslant$
$\leqslant \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| \sum\limits_{i=1}^{\infty} |g(b_i) - g(a_i)| + \max\limits_{x\in[a,b]} |g(x)| \sum\limits_{i=1}^{\infty} |f(b_i) - f(a_i)|$

3) Так как $g(x)$ не обращается в 0 и $g(x) \in C([a,b])$,
то $\exists C > 0 : |g(x)| > C \quad \forall x \in [a,b]$.
Тогда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\dfrac{1}{g(b_i)} - \dfrac{1}{g(a_i)}| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{|g(b_i) - g(a_i)|}{|g(b_i)||g(a_i)|} \leqslant \dfrac{1}{C^2} \sum\limits_{i=1}^{\infty} |g(b_i) - g(a_i)|$,
значит $\dfrac{1}{g(x)} \in AC([a,b])$. Затем используем пункт 2. ■

Теорема 13.6. *Пусть $f(x) \in AC([a,b])$, $g(y) \in AC([\alpha,\beta])$, $g(y)$ монотонная на $[\alpha,\beta]$ и $g:[\alpha,\beta] \to [a,b]$.*
Тогда $f(g)(y) \in AC([\alpha,\beta])$.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$, подберём $\delta > 0$ так, что для любой допустимой системы $\Omega = \{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{\infty} \subset [a,b]$ с общей суммой длин $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) < \delta$ имеем
$\sum\limits_{i=1}^{\infty} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.
Затем подберём $\gamma > 0$ так, что $\forall$ допустимой системы $\Sigma = \{(\alpha_i,\beta_i)\}_{i=1}^{\infty} \subset [a,b]$ с суммой длин $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\beta_i - \alpha_i) < \gamma$ имеем $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |g(\beta_i) - g(\alpha_i)| < \delta$ (1)
Для определённости будем считать, что $g(y)$ не убывает на $[\alpha,\beta]$. Тогда если Σ –

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

допустимая система с условием (1), то $\{(g(\alpha_i), g(\beta_i))\}_{ß=1}^{\infty}$ – также допустимая система в $[a, b]$, причём $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(g(\beta_i) - g(\alpha_i)) < \delta$, но тогда
$\sum\limits_{i=1}^{\infty} |f(g)(\beta_i) - f(g)(\alpha_i)| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |f(g(\beta_i)) - f(g(\alpha_i))| < \varepsilon \Rightarrow$ утверждение теоремы.
(монотонность нужна для того, чтобы допустимая система перешла в допустимую).

■

Теорема 13.7. *Если $f(x) \in AC([a, b])$, то $f(x) \in V([a, b])$*

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ таково, что для любой допустимой системы $\Omega = \{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{\infty} \subset [a, b]$ с суммой длин $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$ имеем $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |f(b_i) - f(a_i)| < 1$. Затем фиксируем натуральное k : $\dfrac{b-a}{k} < \delta$. Рассмотрим точки $y_n = a + \dfrac{b-a}{k}n$, $n = 0, 1, \ldots, k$.
Пусть теперь T – произвольное разбиение $[a, b]$. Добавим к T точки $\{y_n\}_{n=0}^{k}$ получим разбиение $T_1 = \{z_l\}_{l=0}^{N}$. Пусть $z_{l_n} = y_n$, $n = 0, 1, \ldots, k$.
Тогда $V_T(f) \leqslant V_{T_1}(f) = \sum\limits_{l=1}^{N} |f(z_l) - f(z_{l-1})| = \sum\limits_{n=1}^{k} \sum\limits_{l=l_{n-1}+1}^{l_n} |f(z_l) - f(z_{l-1})| \qquad (\bigstar)$
Точки $z_{l_{n-1}}, z_{l_{n-1}+1}, z_{l_n}$ - разбиение отрезка $[a + \dfrac{b-a}{k}(n-1), a + \dfrac{b-a}{k}n]$,
тогда $\sum\limits_{l=l_{n-1}+1}^{l_n} (z_l - z_{l-1}) = \dfrac{b-a}{k} < \delta$
Значит $(\bigstar) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{k} 1 = k$. Тогда $\forall T\ V_T(f) \leqslant k \Rightarrow$ утверждение теоремы. ■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 14

N-свойство Лузина

14.1. Теорема об абсолютной непрерывности вариации абсолютно непрерывной функции

Теорема 14.1. *Пусть* $f(x) \in AC([a,b])$ *и* $f_1(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$, *тогда* $f_1(x) \in AC([a,b])$

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$, тогда подберём $\delta > 0 : \forall$ допустимой системы $\Omega = \{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{\infty} \subset [a,b]$ с суммой длин $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) < \delta$ имеем $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |f(b_i) - f(a_i)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Пусть теперь дана такая допустимая система Ω. Рассмотрим $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |f_1(b_i) - f_1(a_i)| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \overset{b_i}{\underset{a_i}{V}}(f)$.

$\forall i$ подберём разбиение T_i отрезка $[a_i, b_i]$ такое, что вариация $\overset{b_i}{\underset{a_i}{V}}(f) < V_{T_i}(f) + \dfrac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. Пусть $T_i = \{a_i = z_{i,0} < z_{i,1} < \ldots < z_{i,n_i} = b_i\}$. Тогда заметим, что система интервалов $\{(z_{i,n-1}, z_{i,n})\}_{i=1,n=1}^{\infty,n_i}$ – допустимая и $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{n_i}(z_{i,n} - z_{i,n-1}) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) < \delta$. Но тогда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \overset{b_i}{\underset{a_i}{V}}(f) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \sum\limits_{i=1}^{\infty} V_{T_i}(f) = \dfrac{\varepsilon}{2} + \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{n_i} |f(z_{i,n}) - f(z_{i,n-1})| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

■

Следствие 14.1. *Если* $f(x) \in AC([a,b])$, *то её можно представить в виде* $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, *где* $f_1(x), f_2(x)$ *– монотонно неубывающие функции из* $AC([a,b])$

Доказательство. Если $f_1(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$, то по теореме $f_1(x) \in AC([a,b])$ и она, очевидно, неубывающая. Согласно теореме (13.4) функция $f_2(x) = f_1(x) - f(x)$ неубывающая, а по теореме (13.5) $\quad f_2(x) \in AC([a,b])$ ■

Заметим, что неубывающие можно заменить на строго возрастающие, т.к. к каждой функции можно прибавить функцию $f(x) = x$.

Мы выяснили, что любая абсолютно непрерывная функция, кроме того что является непрерывной, обязательно ещё и является функцией ограниченной вариации. Хватит ли этого, чтобы полностью описать класс абсолютно непрерывных функций? Оказывается, нет. Есть ещё одно важное свойство.

14.2. N-свойство Лузина

Опр. 14.1. Пусть $f(x) \in C([a,b])$. Тогда скажем, что f обладает $N-$свойством Лузина на $[a,b] \quad (f(x) \in N([a,b])) \Leftrightarrow \forall$ измеримого относительно классической меры

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лебега μ множество $E \subset [a,b], \mu(E) = 0$ имеем $\mu(f(E))$ ($f(E)$ измеримо и имеет меру 0).

Лемма 14.1. *Пусть M – классическая Лебеговская σ-алгебра подмножеств $[a,b]$ и $E \in M$. Тогда справедливы представления:*

1) $E = (\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n) \setminus P_1$, *где все G_n открыты на $[a,b]$, упорядочены ($G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots$),* $P_1 \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n, P_1 \in M$ *и* $\mu(P_1) = 0$
   (то есть любое измеримое множество можно представить как пересечение последовательности вложенных открытых множеств без некоторого множества меры 0)
2) $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n \cup P_2$, *где все F_n замкнуты, $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots$, а $P_2 \in M$ и $\mu(P_2) = 0$*

<u>*Доказательство.*</u> 1) По определению классической меры Лебега $\forall k\ \exists$ множество $E_k = \bigcup\limits_{r=1}^{\infty} \{\alpha_{k_r}, \beta_{k_r}\} \subseteq [a,b]$ такое, что $E \subseteq E_k$ и $\mu(E_k \setminus E) < \dfrac{1}{k}$.
$\forall$ фиксированного r найдем интервал $(a_{k_r}, b_{k_r}) \supset \{\alpha_{k_r}, \beta_{k_r}\}$ и при этом $\mu((a_{k_r}, b_{k_r}) \setminus \{\alpha_{k_r}, \beta_{k_r}\}) < \dfrac{1}{2^r k}$. Тогда $E'_k = \bigcup\limits_{r=1}^{\infty} (a_{k_r}, b_{k_r}) \supset E_k \supseteq E$ и кроме того
$\mu(E'_k \setminus E) \leqslant \mu(E'_k \setminus E_k) + \mu(E_k \setminus E) \leqslant \sum\limits_{r=1}^{\infty} \mu((a_{k_r}, b_{k_r}) \setminus \{\alpha_{k_r}, \beta_{k_r}\}) + \dfrac{1}{k} < \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k} = \dfrac{2}{k}$.
Кроме того E'_k – открыто, тогда если $\forall n\ G_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} E'_k$, то G_n открыто, $G_n \supset E$ и $\mu(G_n \setminus E) < \dfrac{2}{n}$. Имеем $G_1 \supset G_2 \supset \ldots$ и если $P_1 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n \setminus E$, то
$\mu(P_1) < \mu(G_n \setminus E) < \dfrac{2}{n} \quad (\forall n)$, а значит $\mu(P_1) = 0$

2) Если $E \in M$, то $[a,b] \setminus E \in M$, а значит $[a,b] \setminus E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n \setminus P'$, где выполнены все условия из пункта 1. Тогда $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [a,b] \setminus G_n \cup P'$. ■

Теорема 14.2. *Пусть $f(x) \in C([a,b])$, тогда эквивалентны следующие утверждения*

1) $f \in N([a,b])$
2) $\forall$ *измеримого относительно классической меры Лебега $E \subseteq [a,b]$*
   $f(E)$ измеримо относительно классической меры Лебега

<u>*Доказательство.*</u> ($1 \Rightarrow 2$) Пусть $f \in N([a,b])$ и $E \in M$ – классическая Лебеговская σ-алгебра. Тогда по лемме $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i \cup P$, где замкнутые $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots$, а $\mu(P) = 0$. Отсюда $f(E) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} f(F_i) \cup f(P)$. Так как f непрерывна на $[a,b]$, а F_i замкнуты, то $\forall i\ f(F_i)$ замкнуто и значит $f(F_i) \in M$, а $f(P) \in M$ т.к. $f \in N([a,b])$ (напомним, что N-свойство Лузина заключается в том, что множество нулевой меры переходит в измеримое множество нулевой меры). Следовательно получаем, что $f(E) \in M$

($2 \Rightarrow 1$) Предположим, что f не обладает N-свойством. Тогда найдётся множество $E \in M, \mu(E) = 0$ такое, что либо $f(E)$ неизмеримо, либо измеримо, но $\mu(f(E)) > 0$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

В первом случае доказывать нечего, а во втором найдём неизмеримое $B \subset f(E)$ (мы уже знаем, что в любом множестве положительной меры есть неизмеримое подмножество). Определим $A = \{x \in E : f(x) \in B\} = E \cap f^{-1}(B)$. Тогда $A \subset E$, откуда вытекает, что $A \in M$ и $\mu(A) = 0$, а $f(A) = B$ - неизмеримо. ■

Теорема 14.3. *Пусть $f(x) \in AC([a,b])$, тогда $f(x) \in N([a,b])$.*

Доказательство. Пусть $E \subset [a,b]$, $E \in M$–классическая Лебеговская σ-алгебра и $\mu(E) = 0$. Надо проверить, что $f(E)$ измеримо и имеет меру 0. По заданному $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ из определения абсолютной непрерывности $f(x)$. Согласно лемме найдётся открытое $G \supset E : \mu(G) < \delta$. По теореме о структуре открытого множества на прямой $G = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$. Рассмотрим $m_n = \min\limits_{x\in[a_n,b_n]} f(x) = f(x_n)$, $M_n = \max\limits_{x\in[a_n,b_n]} f(x) = f(y_n)$. Заметим, что
1) $f((a_n, b_n)) \subset [m_n, M_n]$ и
2) интервал $(min(x_n, y_n), max(x_n, y_n)) \subseteq (a_n, b_n)$.
Обозначим $c_n = min(x_n, y_n)$, $d_n = max(x_n, y_n)$.
Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(d_n - c_n) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) = \mu(G) < \delta$. Тогда по определению абсолютной непрерывности $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(d_n) - f(c_n)| < \varepsilon$, но $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(d_n) - f(c_n)| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(M_n - m_n)$. Из 1) $f(E) \subset f(G) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f((a_n, b_n))$, но тогда
$\mu^*(f(E)) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(f((a_n, b_n))) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty}(M_n - m_n) < \varepsilon$. В силу произвольности ε $f(E) \in M$ и $\mu(f(E)) = 0$. ■

14.3. Индикатриса Банаха

Опр. 14.2. Пусть $f(x) \in C([a,b])$, $M = \max\limits_{[a,b]} f(x), m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$. Тогда для $y \in [m, M]$ определим **индикатрису Банаха**: $N(y)$ = числу решений уравнения $f(x) = y$ на $[a,b]$

Теорема 14.4. *Пусть $f(x) \in C([a,b])$ и $f(x) \in V([a,b])$, тогда её индикатриса Банаха измерима относительно классической меры Лебега на $[m, M]$, более того $N(y) \in L([m, M])$ и $\int\limits_{[m,M]} N(y) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)d\mu$*
(на самом деле можно доказать равенство).

Доказательство. Положим $\forall r \in \mathbb{N}$ $x_{r,k} = a + \dfrac{b-a}{2^r}k$, $k = 0, \ldots, 2^r$ (разбиение отрезка). Затем пусть $\Delta_{r,k} = [x_{r,k-1}, x_{r,k}), k = 1, \ldots, 2^r - 1$ $\Delta_{r,2^r} = [x_{r,2^r-1}, x_{r,2^r}]$. Пусть $m_{r,k} = \inf\limits_{x\in\Delta_{r,k}}$; $M_{r,k} = \sup\limits_{x\in\Delta_{r,k}}$, а функция

$$L_{r,k}(y) = \begin{cases} 1, & \text{уравнение f(x) = y имеет корень на } \Delta_{r,k} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Ясно, что $L_{r,k}(y) = X_{\{m_{r,k}, M_{r,k}\}}(y)$ отсюда $\int\limits_{[m,M]} L_{r,k}(y)d\mu = M_{r,k} - m_{r,k}$.

Определим функции $N_r(y) = \sum\limits_{k=1}^{2^r} L_{r,k}(y)$ (измеримость и интегрируемость по Лебегу очевидны), тогда $\int\limits_{[m,M]} N_r(y)d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(M_{r,k} - m_{r,k}) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$
(на каждом отрезке можно выбрать точки, где достигаются $M_{r,k}, m_{r,k}$ и, рассмотрев соответствующее разбиение, можем реализовать конечную сумму).
Кроме того, по выбору $x_{r,k}$ функции $N_r(y)$ монотонно неубывают на $[m, M]$
(при переходе от r к $r+1$ каждый полуинтервал (отрезок) Δ дробится на 2, в результате количество отрезков, в которых есть решения уравнения может только возрасти).
Проверим, что $\forall y\ N_r(y) \to N(y)$ при $r \to \infty$.

Если $N(y) < \infty$, то при достаточно больших r все решения уравнения $f(x) = y$ попадут в разные $\Delta_{r,k}$, а тогда $N_r(y) = N(y)$ при таких r.

Если же $N(y) = \infty$, то $\forall$ фиксированного K можно найти K различных решений $f(x) = y$ и r : эти K решений попадут в разные $\Delta_{r,k} \Rightarrow N_r(y) \geqslant K$, то есть $N_r(y) \to \infty$ при $r \to \infty$. Тогда $N(y)$ измерима как предел измеримых $N_r(y)$ и по теореме Беппо-Леви (9.4) $\int\limits_{[m,M]} N(y)d\mu = \lim\limits_{[m,M]} N_r(y) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty$. Тем самым индикатриса Банаха интегрируемая функция. ■

14.4. Теорема Банаха-Зарецкого

Теорема 14.5. *(Банаха-Зарецкого)*

$$f(x) \in AC([a,b]) \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1) f(x) \in C([a,b]) \\ 2) f(x) \in V([a,b]) \\ 3) f(x) \in N([a,b]) \end{array}$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Уже доказано.

($\Leftarrow$) Предположим, что $f(x) \notin AC([a,b])$. Тогда $\exists \varepsilon_0 > 0$ и набор $\Omega_n : \forall n\ \Omega_n = \{(a_{n,k}, b_{n,k})\}_{k=1}^{\infty}$ – допустимая система интервалов таких, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_{n,k} - a_{n,k}) < \dfrac{1}{2^n}$, в то же время $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f(b_{n,k}) - f(a_{n,k})| > \varepsilon_0$.
Введём множества $E_n = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_{n,k}, b_{n,k})$ $\quad (\mu(E_n) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_{n,k} - a_{n,k}) < \dfrac{1}{2^n})$ и
$E = \bigcap\limits_{r=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=r}^{\infty} E_n$, т.к. $\forall r\ \mu(\bigcup\limits_{n=r}^{\infty} E_n) \leqslant \sum\limits_{n=r}^{\infty} \mu(E_n) \leqslant \sum\limits_{n=r}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^r}$ и $\bigcup\limits_{n=r}^{\infty} E_n \supseteq \bigcup\limits_{n=r+1}^{\infty} E_n$, то по теореме о непрерывности меры $\mu(E) = \lim\limits_{r\to\infty} \mu(\bigcup\limits_{n=r}^{\infty} E_n) = 0$
Так как $f \in N([a,b])$, то $f(E)$ измеримо и $\mu(f(E)) = 0$. $\forall n, k$ рассмотрим функции

$$L_{n,k}(y) = \begin{cases} 1, & \text{уравнение f(x) = y имеет корень на } (a_{n,k}, b_{n,k}) \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Если при этом $m_{n,k} = \inf\limits_{x\in(a_{n,k},b_{n,k})} f(x),\ M_{n,k} = \sup\limits_{x\in(a_{n,k},b_{n,k})} f(x)$, то $L_{n,k}(y) = X_{\{m_{n,k},M_{n,k}\}}(y)$

Пусть $N_n(y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} L_{n,k}(y) \leqslant$ (Заметим, что в силу того, что эти системы допустимые, то это количество интервалов, в которых есть решение уравнения $f(x) = y$, тогда) $\leqslant N(y) \in L([m, M])$ (по предыдущей теореме).

$\forall n\ N_n(y)$ принимает только целые неотрицательные значения. Докажем, что для почти всех $y \in [m, M]\ N_n(y) \to 0$ при $n \to \infty$. Если это не так, то найдется последовательность $n_l \to \infty : N_{n_l}(y) \geqslant 1$. То есть уравнение $f(x) = y$ имеет решения на любом E_{n_l}. Возможны 2 случая:

1) $N(y) = \infty$

2) $N(y) < \infty$ – тогда решений $f(x) = y$ лишь конечное число, а тогда $\exists x_0 : f(x_0) = y$ принадлежащее бесконечно многим из E_{n_l}. Но тогда $x_0 \in E$, тогда $y \in F(E)$.

Мы доказали, что множество $\{y \in [m, M] : N_n(y) \nrightarrow 0\} \subset \{y : N(y) = \infty\} \cup f(E)$. (Обозначим $\{y : N(y) = \infty\} = A$).

Поскольку $N(y) \in L([m, M]),\ \mu(A) = 0$ и по доказанному $\mu(f(E)) = 0$, следовательно почти всюду $N_n(y) \to 0$ при $n \to \infty$. Вместе с условием, что $N_n(y) \leqslant N(y) \in L$, то по теореме Лебега $\int\limits_{[m,M]} N_n(y)d\mu \to 0$ при $n \to \infty$. В то же время,

$\int\limits_{[m,M]} N_n(y)d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{[m,M]} L_{n,k}(y)d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(M_{n,k} - m_{n,k}) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} |f(b_{n,k}) - f(a_{n,k})| > \varepsilon_0$ – противоречие, то есть $f(x) \in AC([a, b])$. ■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 15

Интеграл Лебега с переменным верхним пределом

15.1. Теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега с переменным верхним пределом

Теорема 15.1. *Пусть $f(t) \in L(a,b)$ относительно классической меры Лебега μ. Определим функцию $F(x) = \int\limits_{[a,x]} f(t)d\mu$ при $x \in [a,b]$. Тогда $F(x) \in AC([a,b])$*

Доказательство. По теореме об абсолютной непрерывности интеграла Лебега $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: если $A \in M$ – Лебеговская σ-алгебра и $\mu(A) < \delta$, то $\int\limits_A |f(t)|d\mu < \varepsilon$.

Теперь, если $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ – допустимая система интервалов из $[a,b]$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \delta$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|F(b_n) - F(a_n)| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}|\int\limits_{(a_n,b_n)} f(t)d\mu| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{(a_n,b_n)}|f(t)|d\mu = \int\limits_{\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)}|f(t)|d\mu \quad \bigstar$

Учитывая, что если $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$, то $\mu(A) < \delta$, тогда $\bigstar < \varepsilon$. То есть $F(x) \in AC([a,b])$. ■

15.2. Теорема о существовании у интеграла Лебега с переменным верхним пределом производной на почти всех точках отрезка. Обратная теорема

В рамках этого параграфа μ – классическая мера Лебега, M – соответствующая σ-алгебра.

Лемма 15.1. *Пусть $f(t) \in L([a,b])$, $F(x) = \int\limits_{[a,x]} f(t)d\mu$ и*
$K(f,x) = \overline{\lim\limits_{h\to 0}}|\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}|$ *при $x \in (a,b)$.*
Определим для $\lambda > 0$ множества $E_\lambda = \{x \in [a,b] : K(f,x) > \lambda\}$.
Тогда $E_\lambda \in M$ и $\mu(E_\lambda) \leqslant \dfrac{2}{\lambda}||f||_1 \quad (||f||_1 = \int\limits_{[a,b]}|f(t)|d\mu)$

Доказательство. Имеем при $\forall \lambda > 0$
$E_\lambda = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{0<|h|<\frac{1}{n}}\{x \in (a,b) : x+h \in (a,b)$ и $\left|\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}\right| > \lambda + \dfrac{1}{m}\}$ (Обозначим $G_{h,m} = \{x \in (a,b) : x+h \in (a,b)$ и $\left|\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}\right| > \lambda + \dfrac{1}{m}\}$). Тогда все $G_{h,m}$ открыты, т.к. F непрерывна, а тогда $\bigcup\limits_{0<|h|<\frac{1}{n}} G_{h,m}$ – открыто $\Rightarrow \in M \Rightarrow E_\lambda \in M$.

Если $x \in E_\lambda$, то существует последовательность точек $\{h_n = h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:
1)$h_n \to 0$ при $n \to \infty$ и

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2) $\left|\dfrac{F(x+h_n)-F(x)}{h_n}\right| > \lambda$.

То есть с любой точкой $x \in E_\lambda$ можно связать систему отрезков $\{[x, x+h_n]\}_{n=1}^{\infty}$ со свойствами 1) и 2). Но тогда E_λ оказывается покрыто системой невырожденных отрезков $\{[x, x+h_n]\}_{x\in E_\lambda, n=1}^{,\infty}$ в смысле Витали (напомним, что это означает, что любая точка $\forall\varepsilon > 0$ оказывается покрыта отрезком длины меньше ε). По следствию из теоремы Витали (5.3) найдётся конечная система отрезков

$\{I_l = [x_l, x_l + h_l]\}_{l=1}^{\infty} : I_{l_1} \cap I_{l_2} = \varnothing$ и $\mu(E_\lambda) \leqslant 2\sum\limits_{l=1}^{\infty} \mu(I_l)$

При этом $2\sum\limits_{l=1}^{\infty} \mu(I_l) = 2\sum\limits_{l=1}^{\infty} |h_l| \leqslant$ (из св-ва 2) $\leqslant \dfrac{2}{\lambda}\sum\limits_{l=1}^{\infty} |F(x_l+h_l) - F(x_l)| \leqslant$

$\leqslant \dfrac{2}{\lambda}\sum\limits_{l=1}^{N} |\int\limits_{[x_l, x_l+h_l]} |f(t)|d\mu| = \dfrac{2}{\lambda}\sum\limits_{l=1}^{N}\int\limits_{I_l} |f(t)|d\mu \leqslant$ (т.к. I_l попарно не пересекаются) $\leqslant$

$\leqslant \dfrac{2}{\lambda}\int\limits_{[a,b]} |f(t)|d\mu$. ■

Теорема 15.2. *Пусть $f(t) \in L([a,b])$, а $F(x) = \int\limits_{[a,x]} f(t)d\mu$ при $x \in [a,b]$.*
Тогда почти всюду (относительно класс. меры Лебега) на $[a,b]$ $\exists\ F'(x) = f(x)$

<u>*Доказательство*</u>. По теореме () $\forall n \geqslant 1 \quad \exists f_n(x) \in C([a,b]) : ||f(x) - f_n(x)||_1 < \dfrac{1}{n^4}$.
Обозначим $f(x) - f_n(x) = \psi_n(x)$ и пусть $\Psi_n(x) = \int\limits_{[a,x]} \psi(t)d\mu$.

Введём множества $A_n = \{x \in (a,b) : |\psi_n(x)| > \dfrac{1}{n^2}\}$, $B_n = \{x \in (a,b) : K(\psi_n, x) > \dfrac{1}{n^2}\}$.

По неравенству Чебышёва $\mu(A_n) \leqslant \dfrac{1}{\frac{1}{n^2}}||\psi_n(x)||_1 < n^2\dfrac{1}{n^4} = \dfrac{1}{n^2}$

По лемме $\mu(B_n) \leqslant \dfrac{2}{\frac{1}{n^2}}||\psi_n(x)||_1 < \dfrac{2}{n^2}$

Тогда положим множество $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}(A_n \cup B_n)$. Так как $\forall k \geqslant 1$

$\mu(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}(A_n \cup B_n)) \leqslant \sum\limits_{n=k}^{\infty}(\mu(A_n) + \mu(B_n)) < \dfrac{3}{n^2} \to 0$ при $k \to \infty$, то $\mu(A) = 0$

Пусть $x \in (a,b) \setminus A$ и задано $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists k_0 : x \notin \bigcup\limits_{n=k_0}^{\infty}(A_n \cup B_n)$. Поэтому можно фиксировать $n \geqslant k_0 : \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{\varepsilon}{4}$. При этом :

1) Так как $x \notin A_n$, то $|\psi_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{\varepsilon}{4}$

2) Так как $x \notin B_n$, то $\overline{\lim\limits_{h\to 0}}\left|\dfrac{\Psi_n(x+h) - \Psi_n(x)}{h}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2} \Rightarrow \exists h_0 >: \forall h : 0 < |h| < h_0$ имеем $\left|\dfrac{\Psi_n(x+h) - \Psi_n(x)}{h}\right| \leqslant \dfrac{2}{n^2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

3) Так как $f_n(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $\exists h_1 > 0$: при $0 < |h| < h_0$ имеем $\left|\dfrac{1}{h}\int\limits_{[x,x+h]} f_n(t)d\mu - f(x)\right| < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда, если $0 < |h| < min(h_0, h_1)$, то $\left|\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| = \left|\dfrac{1}{h}\int\limits_{[x,x+h]}(f(t)-f(x))d\mu\right| =$
$= \left|\dfrac{1}{h}\int\limits_{[x,x+h]}(f(t)-f_n(t))d\mu + \dfrac{1}{h}\int\limits_{[x,x+h]} f_n(t)d\mu - f_n(x) + f_n(x) - f(x)\right| \leqslant$
$\leqslant \left|\dfrac{1}{h}\int\limits_{[x,x+h]}(f(t)-f_n(t))d\mu\right| + \left|\dfrac{1}{h}\int\limits_{[x,x+h]} f_n(t)d\mu - f_n(x)\right| + |f_n(x)-f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{4} + \dfrac{\varepsilon}{4} =$
ε ■

Теорема 15.3. *Пусть $F(x) \in AC([a,b])$. Тогда почти всюду $\exists F'(x), F'(x) \in L([a,b])$ и $\forall x \in [a,b] \quad F(x) = F(a) + \int\limits_{[a,x]} F'(x)d\mu$*

Доказательство. Так как любая абсолютно непрерывная функция представима в виде разности двух монотонных абсолютно непрерывных функций, не ограничивая общности, можно считать, что $F(x)$ не убывает на $[a,b]$. Пусть $\widetilde{S} = \{[\alpha,\beta) \subset [a,b]$, включая $\varnothing\}$. Определим на $\widetilde{S}$ меру $\widetilde{m} : \widetilde{m}([\alpha,\beta]) = F(\beta) - F(\alpha)$ По теореме, доказанной ранее, тогда $\widetilde{m}$ можно продолжить до меры ν заданной на σ-алгебре M_ν (мера Лебега-Стилтьеса). Проверим: 1) если $M-$ Лебеговская σ-алгебра, то $M \subseteq M_\nu$ 2) ν абсолютно непрерывна относительно μ на M.

Так как F непрерывна, то $\nu(\{\alpha\}) = 0$, тогда все промежутки $\{\alpha,\beta\} \subset [a,b]$ принадлежат M_ν и их меры $\nu([\alpha,\beta]) = \nu((\alpha,\beta)) = \nu((\alpha,\beta]) = \nu([\alpha,\beta)) = F(\beta) - F(\alpha)$. Пусть теперь $E \in M$ и $\mu(E) = 0$. Тогда по доказанному ранее $\forall\delta > 0\ \exists$ открытое $G_\delta \subset [a,b] : 1)\ E \subset G_\delta,\ 2)\ \mu(G_\delta) < \delta$.
Пусть задано некоторое $\varepsilon > 0$. Возьмём $\delta > 0$ из определения абсолютной непрерывности F и найдём G_δ, удовлетворяющее условиям выше. Если $G_\delta = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$, то $\mu(G_\delta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \delta$. Тогда, так как $E \in G_\delta$, $\nu^*(E) \leqslant \nu(G_\delta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu((a_n,b_n)) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(F(b_n) - F(a_n)) < \varepsilon$. Ввиду произвольности ε, тогда $E \in M_\nu$ и $\nu(E) = 0$.

По теореме о структуре измеримого по Лебегу множества (5.2), если $A \in M$, то $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \setminus E$, где все $A_{i,j} \in R(S)$ - минимальное кольцо, содержащее S - полукольцо промежутков, а $\mu(E) = 0$. У нас $S \subset M_\nu \Rightarrow R(S) \subset M_\nu \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \in M_\nu$. Кроме того, по доказанному $E \in M_\nu \Rightarrow A \in M_\nu$

Таким образом, на M, кроме меры μ задана мера ν абсолютно непрерывная относительно μ. По теореме Радона-Никодима (11.2)
$\exists f(x) \in L_\mu([a,b]) : \forall A \in M\ \mu(A) = \int\limits_A f(x)d\mu$.
В частности, $\nu([a,x]) = \int\limits_{[a,x]} f(t)d\mu\ \forall x \in [a,b]$
Но $\nu([a,x]) = F(x) - F(a)$, тогда $F(x) = F(a) + \int\limits_{[a,x]} f(t)d\mu$. По предыдущей теореме $\exists F'(x) = f(x)$. ■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Опр. 15.1. Пусть $E \in M$ – Лебеговская σ-алгебра на $[a,b]$ и $x \in E$. Тогда назовём x точкой плотности $E \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mu(E \cap [x, x+h])}{|h|} = 1$

Теорема 15.4. *Почти все точки измеримого множества $E \in M$ являются его точками плотности.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x) = \int\limits_{[a,x]} X_E(t)d\mu$. Тогда для почти всех $x \in E \quad \exists F'(x) = 1$ (на этом множестве совпадает с характеристической функцией)
$\Leftrightarrow \ \exists \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \int\limits_{[x,x+h]} X_E(t)d\mu = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mu(E \cap [x, x+h])}{|h|}$ ■

15.3. Теоремы об интегрировании по частям и замене переменной в интеграле Лебега

Теорема 15.5. *(интегрирование по частям в интеграле Лебега)*
Пусть $f(x), g(x) \in AC([a,b])$.
Тогда $\int\limits_{[a,b]} F(x)G'(x)d\mu = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int\limits_{[a,b]} F'(x)G(x)d\mu$.

Доказательство. Заметим, что $F'(x)G(x) \in L([a,b])$, т.к. $F'(x) \in L([a,b])$, а $G(x)$ ограниченная измеримая. Аналогично $G'(x)F(x) \in L([a,b])$
По теореме (13.5) $F(x)G(x) \in AC([a,b])$, тогда по теореме (15.3)
$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int\limits_{[a,b]} (F(x)G(x))'d\mu = \int\limits_{[a,b]} F'(x)G(x)d\mu + \int\limits_{[a,b]} F(x)G'(x)d\mu$ ■

Теорема 15.6. *(Замена переменной в интеграле Лебега)*
Пусть $f(t) \in L([a,b])$ (мера Лебега классическая), $G(y) \in AC([\alpha,\beta])$, $G(y)$ строго монотонна на $[\alpha,\beta]$, $G(\alpha) = a, G(\beta) = b$ и $G^{-1}(t) \in AC([a,b])$.
Тогда справедливо $\int\limits_{[a,b]} f(t)d\mu = \int\limits_{[\alpha,\beta]} f(G(y))G'(y)d\mu$

Доказательство. Введём функцию $F(x) = \int\limits_{[a,x]} f(t)d\mu$, $F(x) \in AC([a,b])$. По теореме (13.6) из условий теоремы следует, что композиция $H(y) = F(G(y))$ ввиду монотонности G абсолютно непрерывна на $[\alpha,\beta]$. Поэтому по доказанному выше

$$\int\limits_{[a,b]} f(t)d\mu = F(b) - F(a) = F(G(\beta)) - F(G(\alpha)) = H(\beta) - H(\alpha) = \int\limits_{[\alpha,\beta]} H'(y)d\mu \qquad (\star)$$

Заметим, что если $y \in [\alpha,\beta]$ таково, что 1) $\exists G'(y)$ и 2) $\exists F'(G(y)) = f(G(y))$, то в этом случае $H'(y) = f(G(y)) \cdot G'(y)$

Пусть множество $C = \{y \in [\alpha,\beta] : \nexists G'(y)\}$, т.к. $G(y) \in AC([\alpha,\beta])$, то $\mu(C) = 0$. Положим $A = \{t \in [a,b] :$ либо не существует $F'(t)$, либо $F'(t) \neq f(t)\}$. Тогда $\mu(A) = 0$. Определим $D = G^{-1}(A)$. По условию $G^{-1}(t) \in AC([a,b])$, тогда $G^{-1}(t) \in N([a,b])$ и тогда $\mu(D) = 0$. Но если $y \notin C \cup D$, то выполнены 1) и 2). А значит почти всюду $\exists H'(y) = f(G(y)) \cdot G'(y)$. Тогда $(\star) = \int\limits_{[\alpha,\beta]} f(G(y)) \cdot G'(y)d\mu$ ■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 16

Прямые произведения мер

16.1. Прямое произведение полуколец

Опр. 16.1. Пусть S_1 и S_2 полукольца, тогда назовём их прямым произведением совокупность множеств $S = \{A_1 \times A_2, \text{где } A_1 \in S_1, A_2 \in S_2\}$

Теорема 16.1. *Если S_1, S_2 – полукольца, то S – полукольцо.*

Доказательство. 1) $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$

2) Пусть $A = A_1 \times A_2$ и $B = B_1 \times B_2 \in S$. Тогда $A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$. Так как S_1, S_2 полукольца, то $(A_1 \cap B_1) \in S_1,\ (A_2 \cap B_2) \in S_2$, а значит $A \cap B \in S$

3) Пусть $A = A_1 \times A_2 \in S$, $B = B_1 \times B_2 \in S$ и $B \subset A$. Надо показать, что при помощи конечного числа элементов S можем построить дополнение меньшего множества до большего множества.

Отсюда видно, что $B_1 \subseteq A_1$ и $B_2 \subseteq A_2$. По определению полукольца, тогда $\exists C_1, \ldots, C_n \in S_1 : A_1 = B_1 \sqcup (\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} C_i)$ и аналогично

$\exists D_1, \ldots, D_n \in S_2 : A_2 = B_2 \sqcup (\bigsqcup\limits_{j=1}^{m} D_j)$. Поэтому $A = A_1 \times A_2 = (B_1 \sqcup (\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} C_i)) \times$
$\times (B_2 \sqcup (\bigsqcup\limits_{j=1}^{n} D_j)) = (B_1 \times B_2) \sqcup (\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} (C_i \times B_2)) \sqcup (\bigsqcup\limits_{j=1}^{m} (B_1 \times D_j)) \sqcup (\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} (C_i \times D_j))$

Заметим, что $B_1 \times B_2 = B$, а всё остальное – элементы S.

■

Теорема 16.2. *Пусть m_1, m_2 – меры на полукольцах S_1, S_2 соответственно, а $S = S_1 \times S_2$. Определим для $A \in S$ функцию $m(A) = m(A_1 \times A_2) \overset{\text{по опр.}}{=} m_1(A_1) \cdot m_2(A_2)$. Тогда m – мера на S.*

Доказательство. Пусть $A_1 \times A_2 = A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{l} A_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{l} (A_1(k) \times A_2(k))$,
где $A_1(k) \in S_1,\ A_2(k) \in S_2$

Согласно лемме из теории меры (??) $\exists$ конечные наборы множеств $\{C_i\}_{i=1}^{N} \subset S_1$:

1)$C_i \cap C_i' = \varnothing$ при $i \neq i'$

2)$\forall$ натурального k от 1 до l $\exists \Gamma_1(k) \subset [1, N] \cap \mathbb{Z} : A_1(k) = \bigsqcup\limits_{i \in \Gamma_1(k)}^{C_i}$

3) $\forall i\ \exists k : i \in \Gamma_1(k)$

и $\{D_i\}_{j=1}^{M} \subset S_2$:

1)$D_j \cap D_j' = \varnothing$ при $j \neq j'$

2)$\forall$ натурального k от 1 до l $\exists \Gamma_2(k) \subset [1, M] \cap \mathbb{Z} : A_2(k) = \bigsqcup\limits_{j \in \Gamma_2(k)}^{D_j}$

3) $\forall j\ \exists k : j \in \Gamma_2(k)$

Тогда: 1)$\forall i\ C_i \subset A_1$, 2) $\forall x \in A_1\ \exists i : x \in C_i$ и т.к. C_i попарно не пересекаются, тогда

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$A_1 = \bigsqcup\limits_{i=1}^{N} C_i$. Аналогично $A_2 = \bigsqcup\limits_{j=1}^{M} D_j$. Рассмотрим $\sum\limits_{k=1}^{l} \mu(A(k)) =$

$$= \sum_{k=1}^{l} m_1(A_1(k)) \cdot m_2(A_2(k))) = \sum_{k=1}^{l} (\sum_{i\in\Gamma_1(k)} m_1(C_i))(\sum_{j\in\Gamma_2(k)} m_2(D_j)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{l} \sum_{i\in\Gamma_1(k)} \sum_{j\in\Gamma_2(k)} m_1(C_i) \cdot m_2(D_j) \qquad (\star)$$

$\forall$ пары (i,j) $\begin{matrix} 1 \leqslant i \leqslant N \\ 1 \leqslant j \leqslant M \end{matrix}$ $\exists$ единственное k : $\begin{cases} i \in \Gamma_1(k) \\ j \in \Gamma_2(k) \end{cases}$

(двух таких не может быть, иначе было бы непустое пересечение между соответствующими $A(k)$, существование следует из того, что иначе в $A_1 \times A_2$ образуется "дырка").
Тогда $(\star) = \sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{j=1}^{M} m_1(C_i) \cdot m_2(D_j) = (\sum\limits_{i=1}^{N} m_1(C_i)) \cdot (\sum\limits_{j=1}^{M} m_2(D_j)) = m_1(A_1) \cdot m_2(A_2) = m(A)$. ■

Теорема 16.3. *Пусть S_1, S_2 – полукольца, m_1, m_2 – σ-аддитивные меры на S_1, S_2 соответственно и $m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1) \cdot m_2(A_2) \quad \forall A = A_1 \times A_2 \in S$*
Тогда m–σ-аддитивная мера на S.

Доказательство. Пусть $A = A_1 \times A_2 = A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A(k) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} (A_1(k) \times A_2(k))$, где $A_1(k) \in S_1,\ A_2(k) \in S_2$. Заметим, что $S_1 \cap A_1$ - полукольцо с единицей A_1. Поэтому m_1 можно продолжить по Лебегу до σ-аддитивной меры μ_1 заданной на каком-то M_1. Аналогично m_2 можно продолжить по Лебегу до μ_2.
$\forall k$ рассмотрим функции $f_k(x_1) = m_2(A_2(k)) \cdot X_{A_1(k)}(x_1)$ при $x_1 \in A_1$. Понятно, что это простая функция. Заметим, что $\forall x \in A_1 \bigsqcup\limits_{k:x_1\in A_1(k)} A_2(k) = A_2$. Отсюда $m_2(A_2) = \sum\limits_{k:x_1\in A_1(k)} m(A_2(k))$. Следовательно $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x_1) = \sum\limits_{k:x_1\in A_1(k)} m_2(A_2(k)) = m_2(A_2)$.
Значит $\int\limits_{A_1} \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x_1) d\mu_1 = m_2(A_2) \cdot m_1(A_1) = m(A)$.
Согласно следствию из теоремы Беппо-Леви (9.4), так как f_k простые и неотрицательные, то $\int\limits_{A_1} \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x_1) d\mu_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_1} f_k(x_1) d\mu_1 = \sum_{k=1}^{\infty} m_2(A_2(k)) \cdot m_1(A_1(k)) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A(k))$. ■

16.2. Прямое произведение мер

Опр. 16.2. Пусть (X_1, M_1, μ_1) и (X_2, M_2, μ_2) – конечные измеримые пространства. Тогда **прямым произведением мер** μ_1 и μ_2 называется мера $\mu_1 \times \mu_2$ являющаяся продолжением по Лебегу меры m, заданной на полукольце $S = M_1 \times M_2$ формулой $m(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$
Аналогично определяется прямое произведение мер для σ-конечных измеримых пространств.

Опр. 16.3. Пусть $X = X_1 \times X_2$ и $E \subset X$, тогда $\forall x_1 \in X_1$ сечение $E(x_1) = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in E\}$

Теорема 16.4. *Пусть (X_1, M_1, μ_1) и (X_2, M_2, μ_2) – $-\sigma$-конечные измеримые пространства. $(X_1 \times X_2, M, \mu_1 \times \mu_2)$ – измеримое пространство, построенное согласно определению 16.2. Пусть также μ_1, μ_2 – полные меры (любое подмножество множества меры 0 измеримо и имеет меру 0). Множество $E \in M$ и $\mu(E) < \infty$. Тогда:*

1) *Для почти всех $x_1 \in X_1$ сечение $E(x_1) \in M_2$.*
2) *$\mu_2(E(x_1)) \in L_{\mu_1}(X_1)$*
3) *$\mu(E) = \int\limits_{X_1} \mu_2(E(x_1))d\mu_1$*

<u>*Доказательство.*</u> Пусть $S = M_1 \times M_2$, тогда для $E \in S$ утверждение очевидно. Так как обе части равенства линейны по дизъюнктным объединениям, теорема справедлива и $\forall A \in R(S)$.
Предположим, что утверждение доказано для множеств $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$:
$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \quad (A_i \in M)$, множество $B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i,\ \mu(B) < \infty$. Проверим, что результат теоремы справедлив и для множества B. Имеем $\forall x_1 \in X_1$ сечение $B(x_1) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i(x_1)$, причём $A_1(x_1) \subseteq A_2(x_1) \subseteq \ldots$ Так как почти все сечения произвольного $A_i(x_1) \in M_2$, то для почти всех $x_1 \in X_1$ $B(x_1) \in M_2$. Затем, $\mu_2(B(x_1)) = \lim\limits_{i\to\infty} \mu_(A_i(x_1))$ (по теореме о непрерывности меры) и аналогично $\mu(B) = \lim\limits_{i\to\infty} \mu(A_i)$. Используя теорему Беппо-Леви $\mu(B) = \lim\limits_{i\to\infty} \mu(A_i) = \lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_{X_1} \mu_2(A_i(x_1))d\mu_1 = \int\limits_{X_1} \mu_2(B(x_1))d\mu_1$, $\mu(B) < \infty \Rightarrow \mu_2(B(x_1)) \in L_{\mu_1}(x_1)$.

Аналогично проверяется, что если утверждение теоремы верно для $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} : A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ и $\mu(A_1) < \infty$ и $B = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, то утверждение теоремы выполнено и для B.

Пусть теперь $E \in M$ и $\mu(E) < \infty$. Тогда по теореме о структуре измеримого по Лебегу множества справедливо представление $E = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \setminus E_0$, где
1) все $A_{i,j} \in R(S)$
2) $\forall i\ A_{i,1} \subseteq A_{i,2} \subseteq \ldots$
3) Если $B_i = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$, то $\mu(B_1) < \infty$ и кроме того $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$
4) $E_0 \in M$ и $\mu(E_0) = 0$

Пусть вначале $E \in M$ и $\mu(E) = 0$, тогда $E = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \setminus E_0$, где 1) – 4)
Обозначим $F(E) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$. Тогда 1) $\mu(F(E)) = 0$ и по доказанному ранее для $F(E)$ теорема выполняется (для $A_{i,j} \in R(S)$ выполнено, а дальше есть две цепочки вложенных множеств - расширяющаяся и сужающаяся), то есть $0 = \mu(F(E)) = \int\limits_{X_1} \mu_2(F(E)(x_1))d\mu_1 \Rightarrow$ (по следствию из неравенства Чебышёва) $\Rightarrow \mu_2(F(E)(x_1)) = 0$ для почти всех $x_1 \in X_1$. Тогда в силу полноты меры μ_2, так как сечение $E(x_1) \subset F(E)(x_1)$ для почти всех $x_1 \in X_1$ $E(x_1) \in M_2$ и $\mu_2(E(x_1)) = 0$. Так как μ_1 тоже полна,

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

то $\mu_2(E(x_1)) \in L_{\mu_1}(X_1)$ и кроме того $\int\limits_{X_1} \mu_2(E(x_1))d\mu_1 = \mu(E)$.
То есть для произвольного E нулевой меры утверждение доказано.

Для произвольно $E \in M, \mu(E) < \infty$ снова напишем представление $E = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \setminus E_0 \quad (\mu(E_0) = 0)$. Для $F(E)$ теорема выполняется, для E_0 тоже выполняется, отсюда (в силу линейности интеграла и меры) выполнено и для E. ■

16.3. Две теоремы Фубини

Теорема 16.5. *(Теорема Фубини)*
Пусть (X_1, M_1, μ_1) и (X_2, M_2, μ_2) – σ-конечные измеримые пространства, μ_1, μ_2 полны, $(X_1 \times X_2, M, \mu_1 \times \mu_2)$ и $f(x_1, x_2)$ измерима на $(X_1 \times X_2, M, \mu_1 \times \mu_2)$ и $f(x_1, x_2) \geqslant 0$ $\forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. Тогда

1) *Для почти всех $x_1 \in X_1 \quad f(x_1, x_2) = \varphi_{x_1}(x_2)$ μ_2-измерима*
2) *$\Phi(x_1) = \int\limits_{X_2} \varphi_{x_1}(x_2)d\mu_2$ – μ_1-измеримая функция*
3) *$\int\limits_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)d\mu = \int\limits_{X_1} \Phi(x_1)d\mu_1 = \int\limits_{X_1} (\int\limits_{X_2} f(x_1, x_2)d\mu_2)d\mu_1$.*

(Разумеется можно поменять ролями μ_1 и μ_2)

<u>*Доказательство.*</u> Заметим, что в предыдущей теореме $m_2(E(x_1)) = \int\limits_{X_2} X_{E_1(x_1)}(x_2)d\mu_2$. Тогда она принимает вид $\int\limits_X X_E(x)d\mu = \mu(E) = \int\limits_{X_1} \int\limits_{X_2} X_{E(x_1)}(x_2)d\mu_2 \, d\mu_1$. Это верно $\forall E \in M, \mu(E) < \infty$. Тогда в силу линейности аналогичное утверждение справедливо и для любой простой функции $h(x) = \sum_{i=1}^n c_1 X_{E_i}(x_1, x_2)$. Для $f(x_1, x_2)$ можно построить последовательность простых неотрицательных $h_n(x_1, x_2) \uparrow f(x_1, x_2)$ на $X_1 \times X_2$. Тогда для h_n теорема верна. Тогда $\forall$ фикс. x_1
$\varphi_{x_1}(x_2) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x_1, x_2) \Rightarrow \varphi_{x_1}(x_2) - \mu_2$-измерима. $\Phi(x_1) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{X_2} h_n(x_1, x_2)d\mu_2 =$ (по теореме Беппо-Леви) $= \int\limits_{X_2} \varphi_{x_1}(x_2)d\mu_2$. Ещё раз применив теорему Беппо-Леви в обеих частях, получим, что

$$\int\limits_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{X_1 \times X_2} h_n(x_1, x_2)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{X_1} (\int\limits_{X_2} h_n(x_1, x_2)d\mu_2)d\mu_1 = \int\limits_{X_1} \int\limits_{X_2} \varphi_{x_1}(x_2)d\mu_2 \, d\mu_1.$$

■

Подчеркнём, что в этом утверждении возможны бесконечности, и суть теоремы состоит в том, что если функция измерима и неотрицательна, то не важно, как мы будем брать интеграл - сразу по мере, являющейся прямым произведением или последовательно. Если отказаться от условия неотрицательности, то это уже неверно.

Теорема 16.6. *(Теорема Фубини)*
Пусть (X_1, M_1, μ_1) и (X_2, M_2, μ_2) – σ-конечные измеримые пространства, $(X_1 \times X_2, M, \mu_1 \times \mu_2)$– измеримое пространство, μ_1, μ_2 полны и $f(x_1, x_2) \in L_\mu(X_1 \times X_2)$. Тогда верно

1) Для почти всех $x_1 \in X_1$ $\varphi_{x_1}(x_2) \in L_{\mu_2}(X_2)$
2) $\int\limits_{X_2} \varphi_{x_1}(x_2) d\mu_2 \in L_{\mu_1}(X_1)$
3) $\int\limits_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d\mu = \int\limits_{X_1} (\int\limits_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2) d\mu_1.$

Доказательство. Если $f(x_1, x_2) = f_+(x_1, x_2) - f_-(x_1, x_2)$, где $f_+(x_1, x_2) = max(f(x_1, x_2), 0)$, то, так как $f(x_1, x_2) \in L_\mu(X_1 \times X_2) \Rightarrow f_+, f_- \in L_\mu(X_1 \times X_2)$ и неотрицательны. Тогда для f_+ по предыдущей теореме: 1) Для почти всех $x_1 \in X_1$ $\varphi_{x_1}(x_2)$ измерима относительно μ_2
2) $\int\limits_{X_2} \varphi_{x_1}(x_2) d\mu_2 - \mu_1$-измерима
3) $\int\limits_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d\mu = \int\limits_{X_1} (\int\limits_{X_2} \varphi_{x_1}(x_2) d\mu_2) d\mu_1$
Так как слева конечная величина, то $\int\limits_{X_2} \varphi_{x_1}(x_2) d\mu_2 \in L_{\mu_1}(X_1)$, тогда $\varphi_{x_1}(x_2)$ конечна почти всюду , то есть почти всюду (относительно x_1) $\varphi_{x_1}(x_2) \in L_{\mu_1}(X_2)$.

Аналогично проверяется для $f_-(x_1, x_2)$, а тогда утверждение справедливо и для $f(x_1, x_2)$. ■

Замечание 16.1. Напомним, что если $E \in M$ и $f(x) \in L(E)$,
то $\int\limits_E f(x) d\mu = \int\limits_X f(x) X_E d\mu$. Поэтому теорему Фубини можно использовать и для $f(x) \in L_\mu(E)$, где $E \in M$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ