МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД. Часть 1

ГОРБАЧЕВ
ВЛАДИМИР ИВАНОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
КАРПАЧЕВА ДЕНИСА ОЛЕГОВИЧА

Оглавление

Лекция 1 5
1. Основные уравнения из законов сохранения 5
2. Идеальная жидкость (газ) 5
3. Уравнение движения Эйлера 5
4. Уравнение идеальной жидкости в форме Громеки-Лэмба 6
5. Гидростатика. Уравнение равновесия. 7
6. Ограничение на массовые силы. 7
7. Однородная жидкость. 7
8. Равновесие в поле сил тяжести. 8
9. Барометрическая формула. 9
Лекция 2 10
1. Гидростатика. Действие жидкости на погруженное тело 10
2. Парадокс Жуковского. 11
3. Устойчивость жидкости в сосудах. 11
4. Гидродинамика 12
5. Интеграл Бернулли. 13
6. Выражение для функции давления 13
7. Задача об истечении жидкости из большого сосуда 14
8. Задача о том, почему самолёты летают 15
Лекция 3 16
1. Гипотеза плоских сечений. 16
2. Потенциальные течения. 17
3. Задача о движении сферы в жидкости. 18
4. Задача об обтекании сферы идеальной несжимаемой жидкостью. 20
Лекция 4 22
1. Задача о движении сферы в бесконечной идеальной жидкости. 22
2. Парадокс Даламбера. 23
3. Случай неустановившегося движения. 23
4. Вязкость жидкости 24
Лекция 5 26
1. Линейная вязкая жидкость 26
2. Уравнение Навье-Стокса для вязкой жидкости. 26
3. Вязкая, несжимаемая, однородная жидкость. 27

4. Начальные и граничные условия. 27
5. Течение Куэтта. 28
Лекция 6 30
1. Уравнение вязкой жидкости. 30
2. Течение Куэтта. 31
3. Плоская задача Пуазейля. 32
4. Классическая задача Пуазейля. 34
Лекция 7 35
1. Течение Пуазейля в цилиндрах с постоянным сечением. 35
2. Постановка задачи Пуазейля в полярных координатах. 36
3. Установившееся движение. 37
Лекция 8 39
1. Уравнение Рейнольдса. 39
2. Ламинарный пограничный слой. 39
3. Оценка слагаемых. 40
4. Уравнения Прандтля. 42
Лекция 9 44
1. Пограничный слой. 44
2. Задача Блазиуса. 45
Лекция 10 47
1. Газовая динамика. 47
2. Условия на поверхностях разрыва. 47
3. Действие законов на поверхности разрыва. 48
Лекция 11 52
1. Основные законы на поверхности разрыва. 52
2. Закон сохранения кинетической энергии. 52
3. Адиабатическое установившееся течение идеального совершенного газа. 53
4. Интеграл Бернулли. 54
Лекция 12 55
1. Идеальный совершенный газ. 55
2. Установившееся движение газа. 56
3. Сопло Лаваля. 58

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 1

1. Основные уравнения из законов сохранения

Вспомним основные уравнения, которые были выведены из законов сохранения.

- *Уравнение неразрывности (из закона сохранения массы):*
  $\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div\, \vec{u} = 0$, где ρ – непрерывная функция (1.1)
- *Уравнение движения (из закона сохранения импульса):*
  $div\, \underline{\sigma} \; + \; \rho\, \vec{F} = \rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \; \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho\, \vec{u}\, grad\, \vec{u}$, где $\underline{\sigma}$ – тензор 2 ранга (1.2)

Перепишем (1.1) и (1.2) в компонентном виде:

- *Уравнение неразрывности:*
  $\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_i u^i = 0$, где ∇_i – ковариантная производная (1.3)
- *Уравнение движения:*
  $\nabla_j \sigma^{ij} \; + \; \rho F^i = \; \rho \frac{du^i}{dt} = \; \rho \frac{\partial u^i}{\partial t} + \; \rho u^k \nabla_k u^i$ (1.4)

2. Идеальная жидкость (газ)

В идеальной жидкости вектор напряжения $\overrightarrow{P_n}$ перпендикулярен внутренней поверхности. Пусть $\vec{n}$ – единичный вектор нормали. Тогда

$\overrightarrow{P_n} \parallel \vec{n} \Rightarrow \; \overrightarrow{P_n}\, \vec{n}$ = -P (1.5)

Минус в (1.5), так как положительное давление приводит к сжатию среды. Выразим тензор напряжения в произвольной точке:

$\sigma^{ij} = \; -P g^{ij}$ (1.6)

Из (1.6), при соответствующих σ^{ij} и g^{ij}, получим соотношение (1.5). Проверим данный факт. По определению из теории напряжений имеем:

$$\overrightarrow{P_n}\, \vec{n} = \; \sigma^{ij} n_i n_j$$

Теперь подставим в полученное соотношение (1.6), учитывая, что $n_i n^i = 1$:

$\overrightarrow{P_n}\, \vec{n} = \; \sigma^{ij} n_i n^i$ = -P$g^{ij} n_i n^i = -$P$n_i n^i = -$P.

Таким образом, мы показали справедливость (1.6).

3. Уравнение движения Эйлера

При рассмотрении идеальной жидкости, уравнение неразрывности не изменится. Рассмотрим, как изменится уравнение движения. Вычислим div $\underline{\sigma}$.

$$div\, \underline{\sigma} = \; \vec{\nabla}\, \underline{\sigma} = \; \nabla_k \overrightarrow{e^k} \sigma^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \; \nabla_k g_i^k \sigma^{ij} \vec{e}_j = \; \nabla_k \sigma^{kj} \vec{e}_j$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$div\,\underline{\sigma} = \nabla_k \sigma^{kj}\vec{e}_j = -\nabla_k P g^{kj}\vec{e}_j = -\nabla_k P\overrightarrow{e^j} = -grad\,P$$

Перепишем (1.2), используя полученное соотношение, чтобы записать уравнение движения Эйлера:

$$-\frac{1}{\rho}grad\,P + \vec{F} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\,grad\,\vec{u} \qquad (1.7)$$

4. Уравнение идеальной жидкости в форме Громеки-Лэмба

Уравнение (1.7) можно также переписать, записав в другом виде второе слагаемое справа:

$$\vec{u}\,grad\,\vec{u} = \frac{1}{2}grad\,u^2 + 2\,\vec{\omega}\times\vec{u} \qquad (1.8)$$

Где $\vec{\omega}$ – вектор вихря, который можно записать в виде:

$\vec{\omega} = \frac{1}{2}rot\,\vec{u} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\varepsilon^{imn}\nabla_m u_n\overrightarrow{e^i}$, где g = det (g_{ij})

Докажем справедливость (1.8). Рассмотрим первое слагаемое в правой части:

$$\frac{1}{2}grad\,u^2 = \frac{1}{2}\nabla_k\left(u^j u_j\right)\vec{e}^k = \frac{1}{2}\left(\left(\nabla_k u^j\right)u_j + u^j\nabla_k u_j\right)\vec{e}^k = u^j\nabla_k u_j\vec{e}^k \qquad (1.8.1)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $u^j u_j = u^2$. Далее, продифференцировали ковариантным образом и привели подобные слагаемые.

Далее рассмотрим второе слагаемое (1.8):

$$2\,\vec{\omega}\times\vec{u} = 2\sqrt{g}\,\varepsilon_{kij}\omega^i u^j\vec{e}^k = 2\sqrt{g}\,\varepsilon_{kij}\left(\frac{1}{2\sqrt{g}}\varepsilon^{imn}\nabla_m u_n\right)u^j\overrightarrow{e^i}$$

Воспользуемся фактом из тензорного анализа, выполнив свёртку:

$\varepsilon_{kij}\varepsilon^{imn} = \varepsilon_{jki}\varepsilon^{imn} = (g_j^m g_k^n - g_k^m g_j^n)$, откуда непременно следует:

$$2\,\vec{\omega}\times\vec{u} = u^j\left(g_j^m g_k^n - g_k^m g_j^n\right)\nabla_m u_n\overrightarrow{e^k} = u^j(\nabla_j u_k - \nabla_k u_j)\overrightarrow{e^k} \qquad (1.8.2)$$

Сложим (1.8.1) и (1.8.2):

$$\frac{1}{2}grad\,u^2 + 2\,\vec{\omega}\times\vec{u} = u^j\nabla_j u_k\overrightarrow{e^k} = \vec{u}\,grad\,\vec{u}$$

Таким образом, справедливость выражения (1.8) доказана, и мы можем переписать (1.7) в другом виде:

$$-\frac{1}{\rho}grad\,P + \vec{F} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}grad\,u^2 + 2\,\vec{\omega}\times\vec{u} \qquad (1.9)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,div\,\vec{u} = 0 \qquad (1.10)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

5. Гидростатика. Уравнение равновесия.

В гидростатике полагается, что в любой точке движения нет, то есть: $\vec{u} \equiv \vec{0}$.

Используя этот факт в (1.10), получаем, что $div\,\vec{u} = 0$, откуда:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \rho = \rho(x_1, x_2, x_3)$$

Плотность – функция, зависящая от точки, в которой мы рассматриваем жидкость.

Уравнение Эйлера (1.9) в гидростатике принимает следующий вид:

$$-\frac{1}{\rho} grad\,P + \vec{F} = \vec{0} \qquad (1.11)$$

Рассмотрим случай, когда массовые силы отсутствуют или ими можно пренебречь. Тогда из (1.11) следует, что $grad\,P = 0 \;\Rightarrow P = const$ *(Закон Паскаля)*

6. Ограничение на массовые силы.

Рассмотрим, при каких массовых силах - $\vec{F}$ возможно равновесие. Перепишем (1.11):

$$\frac{1}{\rho} grad\,P = \vec{F} \qquad (1.12)$$

Возьмём rot от обеих частей выражения (1.12):

$$rot\,\vec{F} = rot\left(\frac{1}{\rho} grad\,P\right) = \frac{1}{\rho} rot\,grad\,P + grad\frac{1}{\rho} \times grad\,P$$

Причём, $\frac{1}{\rho} rot\,grad\,P = 0$. Воспользуемся (1.12) и снова вернёмся к соотношению:

$$rot\,\vec{F} = \rho\,grad\frac{1}{\rho} \times \vec{F}$$

Умножим полученное соотношение скалярно на $\vec{F}$:

$$\vec{F}\,rot\,\vec{F} = \rho\vec{F}\,(grad\frac{1}{\rho} \times \vec{F})$$

$$\vec{F} \perp \left(grad\frac{1}{\rho} \times \vec{F}\right) \Rightarrow \vec{F}\left(grad\frac{1}{\rho} \times \vec{F}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \vec{F}\,rot\,\vec{F} = 0$$

Получаем ограничение на массовые силы, при которых возможно равновесие:

$$\vec{F}\,rot\,\vec{F} = 0 \qquad (1.13)$$

7. Однородная жидкость.

Рассмотри случай, когда жидкость однородная и, следовательно, несжимаемая (из уравнения неразрывности). При этом предположении, получаем $\rho = const$. Используем этот факт, подставив в уравнение (1.12):

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\vec{F} = grad\,\frac{P}{\rho} \Rightarrow \exists U: \vec{F} = grad\,U$$

Делаем вывод: равновесие однородной жидкости возможно только в потенциальном поле сил. Используем это соотношение, чтобы переписать (1.12):

$$\rho\,grad\,U = grad\,P$$

В случае, когда жидкость однородна, данное соотношение очевидно. Однако оно справедливо для любой жидкости. Докажем это.

$$dU = \nabla_i U\,dx^i = grad\,\vec{U}\,d\vec{r} = \frac{1}{\rho}grad\,P\,d\vec{r} = \frac{1}{\rho}\nabla_i P\,dx^i = \frac{1}{\rho}dP$$

$$dU = \frac{1}{\rho}dP \qquad (1.14)$$

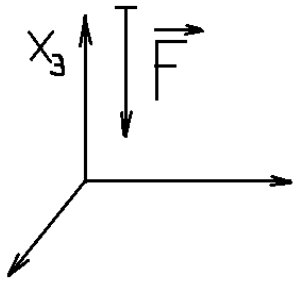
Уравнение состояния - $d(P,\rho,T) = 0$ и (1.14), позволяют сделать вывод:

$$P = P(U), \qquad \rho = \rho(U), \qquad T = T(U)$$

Тем самым, справедливость соотношения для любой жидкости доказана.

8. Равновесие в поле сил тяжести.

Пусть имеется система координат, представленная на (Рис.1.1). Пусть также сила $\vec{F}$ действует вдоль x_3:



(Рис.1.1)

$$\vec{F} = -g\vec{e}_3 \qquad (1.15)$$

Тогда $U = -gx_3 + const \Rightarrow P = P(x_3),\ \rho = \rho(x_3)$

В силу полученных зависимостей, существуют потенциальные поверхности:

Изобара – поверхность с постоянным давлением
Изостера – поверхность с постоянной плотностью
Изотерма – поверхность с постоянной температурой
Уравнение равновесия принимает вид: $\frac{dP}{dx_3} = -\rho g$

(1.16)

Из (1.16) $\Rightarrow P = -\int_{x_3^0}^{x_3}\rho(z)gdz + C,\ C = P(0) = P_0$, зависимостью

$g(z)$ пренебрегаем. Окончательно получаем:

$P - P_0 = -\int_{x_3^0}^{x_3}\gamma(z)dz$, где γ(z)-удельный вес жидкости (1.17)

Из (1.17) можно сделать вывод: разница между давлениями зависит от высоты столбца жидкости и плотности. В случае однородной жидкости, (1.17) разрешается в виде:

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$P - P_0 = -\rho g(x_3 - x_3^0)$ (1.18)

$P = -P_0 + \rho g h$, где P – давление на глубине h, а P_0 давление у поверхности.

Таким образом, давление на дно сосуда, при одинаковой высоте однородной жидкости, не зависит от формы сосуда.

9. Барометрическая формула.

Рассмотрим совершенный газ, то есть, газ, подчиняющийся соотношению Клапейрона:

$P = \rho RT$, где R – универсальная газовая постоянная (1.19)

Из (1.16) $\Longrightarrow dP = -\rho g dx_3$ (1.20)

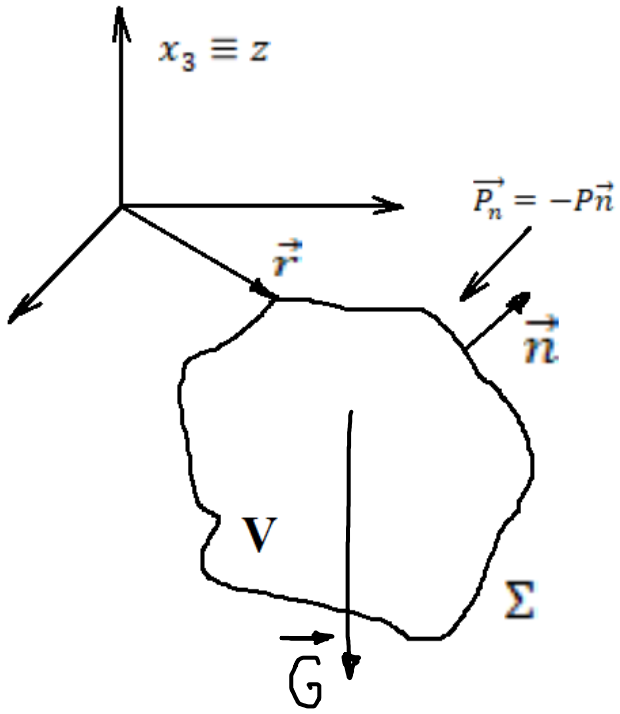
Из (1.19), (1.20) $\Longrightarrow \frac{dP}{P} = \frac{dx_3}{RT(x_3)}$ (1.21)

Из (1.21) $\Longrightarrow P = P_0 \exp\left(-\int_{x_3^0}^{x_3} \frac{g}{RT(z)} dz\right)$ – барометрическая формула.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 2

1. Гидростатика. Действие жидкости на погруженное тело.



(Рис. 2.1)

Рассмотрим тело, погруженное в идеальную жидкость (Рис. 2.1). Ранее, мы условились, что в идеальной жидкости давление на любую поверхность жидкости, действует против направления нормали к этой поверхности. Для того, чтобы найти результирующий вектор давления, действующий на тело $\vec{Q}$, необходимо проинтегрировать распределённое векторное давление $\vec{P_n} = -P\vec{n}$ по поверхности тела:

$$\vec{Q} = \int_\Sigma \vec{P_n}\, d\Sigma = -\int_\Sigma P\vec{n}\, d\Sigma \quad (2.1)$$

Соответствующее уравнение для момента M:

$$\vec{M} = \int_\Sigma P \times \vec{P_n}\, d\Sigma = -\int_\Sigma P\,(\vec{r} \times \vec{n}) d\Sigma \quad (2.2)$$

Представим, что весь объём тела заполнен жидкостью (газом), причём жидкость (газ) внутри тела, та (тот) же, что и снаружи. Пусть $\vec{G}$ – вес жидкости (газа) заполняющей тело. Тогда в формуле (2.1) мы можем перейти к интегралу по объёму тела:

$$\vec{Q} = -\int_\Sigma P\vec{n}\, d\Sigma = -\int_V grad\, P\, dV = -\int_V \rho\vec{F}\, dV = \int_V \rho g\, dV\vec{e}_3 = -\vec{G}$$

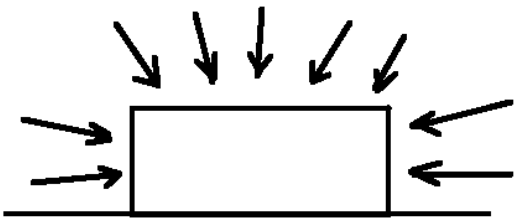
Из полученного соотношения мы можем сделать вывод: на тело, погруженное в жидкость (газ), будет действовать сила равная весу вытесненной жидкости (газа) этим телом – закон Архимеда.

Замечание: при выводе закона Архимеда мы использовали факт перехода к объёмному интегралу, следовательно, поверхность тела должна быть замкнутой, то есть тело должно быть погружено полностью. В противном случае, закон Архимеда может не действовать!

Пример:

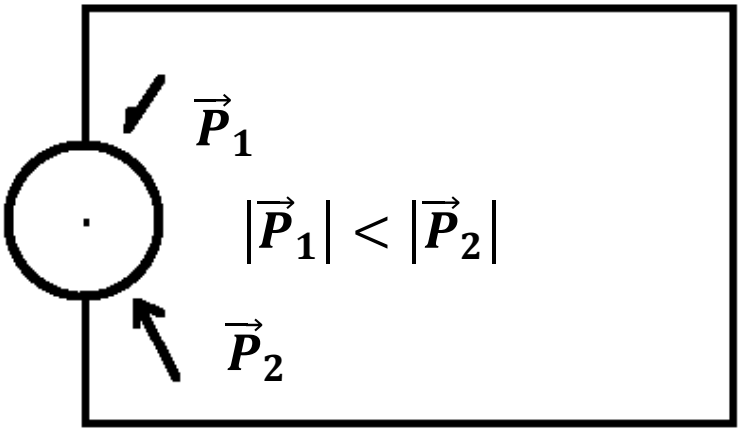
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пусть телом является брусок, грань которого прижата ко дну (Рис. 2.2). Тогда жидкость будет оказывать давление на брусок, прижимающие его на дно и никакой выталкивающей силы не будет.



(Рис. 2.2)

2. Парадокс Жуковского.



(Рис. 2.3)

Пусть имеется ёмкость с идеальной жидкостью, в которую погружена половина цилиндра. Цилиндр способен вращаться, а его ось лежит в плоскости одной из стенок ёмкости. Пусть данная конструкция находится в поле тяжести (Рис. 2.3).

Тогда, можно сделать предположение: цилиндр должен вращаться, так как присутствует разность давлений на его верхнюю и нижнюю часть. Однако, на практике такого не происходит, почему? В этом и состоит парадокс Жуковского.

Ответ на этот вопрос прост: цилиндр не вращается, так как погружен в идеальную жидкость, следовательно, как писалось ранее, давление со стороны жидкости будет направлено по нормали к поверхности цилиндра. Выходит, что крутящий момент отсутствует, так как в любой точки поверхности цилиндра, вектор давления со стороны жидкости проходит через ось цилиндра.

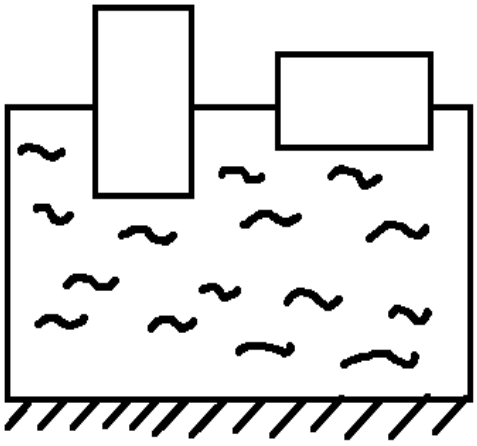
3. Устойчивость жидкости в сосудах.

Пусть у нас имеется ёмкость, в которую налиты ртуть и вода. Пусть между водой и ртутью имеется чёткая граница раздела двух сред. Пусть также конструкция находится в поле тяжести, причём вода находится под ртутью (Рис. 2.4).

При малейших возмущениях, система изменит свой вид: ртуть опуститься на дно, а вода поднимется на поверхность. Таким образом, система оказалось неустойчива. Однако если поменять воду и ртуть местами, то система, напротив, будет устойчива.

(Рис. 2.4)

То есть, равновесие тяжёлой жидкости устойчиво тогда и только тогда, когда плотность убывает с высотой (менее плотные слое находятся выше более плотных слоёв).



(Рис. 2.5)

Коснёмся вопроса остойчивости тел (устойчивости тел на поверхности жидкости).

Рассмотрим ситуацию, изображённую на (Рис. 2.5). Два деревянных бруска погружены в тяжёлую жидкость (жидкость, находящуюся в поле тяжести). Причём, один из бруска расположен горизонтально, относительно поверхности жидкости, а другой вертикально.

Нетрудно убедиться, что положение горизонтального бруска – устойчиво, а вертикального – нет. Данный вопрос в курсе – ознакомительный, он разобран подробнее в курсе теоретической механики.

4. Гидродинамика.

Для начала, рассмотрим случай, когда жидкость идеальная, движение установившееся, а массовые силы потенциальны, то есть:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0;\ \vec{F} = grad\ U \tag{2.3}$$

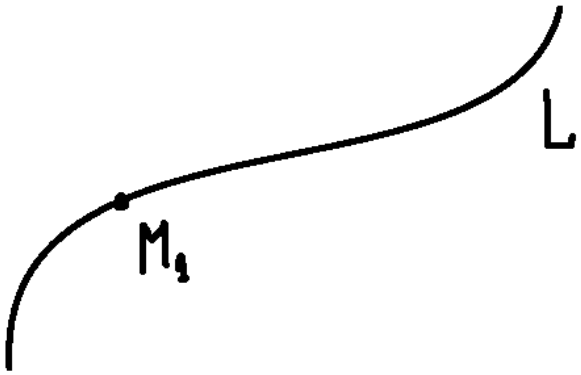
Также, нам понадобится уравнение движения в форме Громеки-Лэмба, выведенное на предыдущей лекции (1.9). При ограничениях (2.3), его можно переписать:

$$grad\left(\frac{v^2}{2} - U\right) + \frac{1}{\rho} grad\ P = -2\,\vec{\omega} \times \vec{u} \tag{2.4}$$

Рассмотрим произвольную линию в области течения – L. И введём естественную систему координат, связанную с длинной дуги - S, а начало отсчёта возьмём в заранее оговорённой точке - M_1 (Рис. 2.6). Вдоль этой линии меняется давление и плотность, то есть мы можем записать зависимости:

$$P = P(S, L);\ \rho = \rho(S, L) \tag{2.5}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ



(Рис. 2.6)

Из соотношений (2.5) можно однозначно найти $\rho = P(S, L)$.

Введём новую функцию давления – П таким образом (а – параметр интегрирования):

$$\Pi(p, L) = \int_{P_2(a,L)}^{P(s,\chi)} \frac{da}{\rho(a,L)} \qquad (2.6)$$

Соотношение (2.6) справедливо для любой выбранной линии. Если же продифференцировать соотношение (2.6) по S, то получаем:

$$\frac{d\Pi}{dS} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial S} \qquad (2.7)$$

Спроектируем векторное уравнение (2.4) на выбранную линию S скалярно умножив на $d\vec{S}$. В результате, получим соотношение:

$$d\vec{S}\, grad\left(\frac{v^2}{2} - U\right) + d\vec{S}\frac{1}{\rho} grad\, P = -2\,(\vec{\omega} \times \vec{u})d\vec{S} \qquad (2.8)$$

Учтём факт (докажите самостоятельно):

$$d\vec{S}\, grad\, \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial S}$$

$$\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{v^2}{2} - U + \Pi\right) = -2\,(\vec{\omega} \times \vec{u})d\vec{S} \qquad (2.9)$$

5. Интеграл Бернулли.

Если S – линия тока или вихревая линия, то слагаемое в правой части равно нулю, тогда для каждой такой линии существует – $i^* \equiv const$, при котором верно:

$$\frac{v^2}{2} - U + \Pi = i^*(L) \qquad (2.10)$$

Соотношение (2.10) носит название – интеграл Бернулли. Данное соотношение справедливо для установившегося движения жидкости (газа) в потенциальном поле сил. Причём, на каждой линии тока он принимает постоянное значение.

Возможна ситуация, когда интеграл Бернулли не зависит от выбора линии, например, когда дело касается вопросов гидростатики (скорость нулевая), или вектор вихря параллелен вектору скорости.

6. Выражение для функции давления.

Если жидкость тяжёлая и идеальная, то есть $\rho = const$, то соотношение (2.7) переписывается следующим образом:

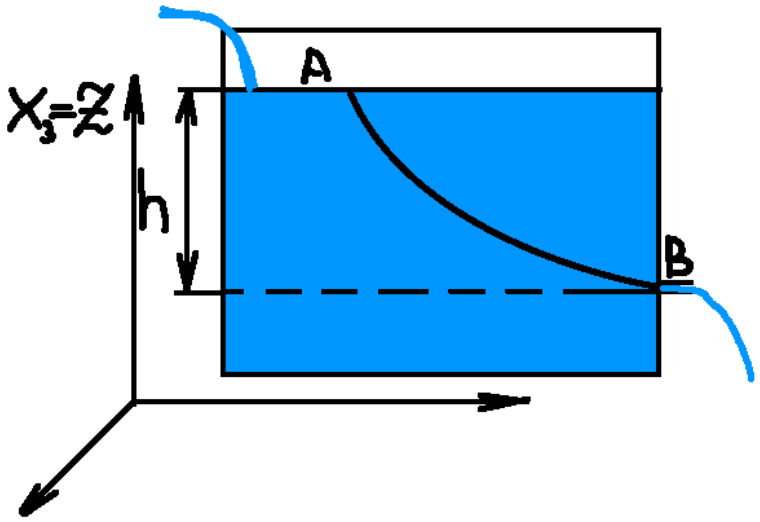
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\Pi = \frac{P}{\rho} + const$$

Если же жидкость совершенная ($p = \rho RT$), соотношение (2.7) переписывается в таком виде:

$$\Pi = RT \ln P + const$$

7. Задача об истечении жидкости из большого сосуда.



(Рис. 2.7)

Рассмотрим систему, состоящую из большого сосуда с налитой в него жидкостью с введённой в ней системой координат, изображённых на (Рис. 2.7). Мы хотим использовать интеграл Бернулли, поэтому необходимо, чтобы выполнялись условия его существования: установившееся течение, потенциальное поле сил тяжести, установившееся движение (для этого будем добавлять жидкость в систему). Рассмотрим линию тока – AB, проходящую через отверстие, находящееся на высоте – h. Используем интеграл Бернулли (2.10), чтобы найти скорость жидкости при выходе из отверстия сосуда. Для этого приравняем (2.10) в точках A и B:

$$\frac{v^2{}_{\text{B}}}{2} + \frac{P_{\text{B}}}{\rho} + gz_{\text{B}} = \frac{v^2{}_{\text{A}}}{2} + \frac{P_{\text{A}}}{\rho} + gz_{\text{A}} \qquad (2.11)$$

Выразим искомую v_B, учитывая, что $v_{\text{A}} = 0$:

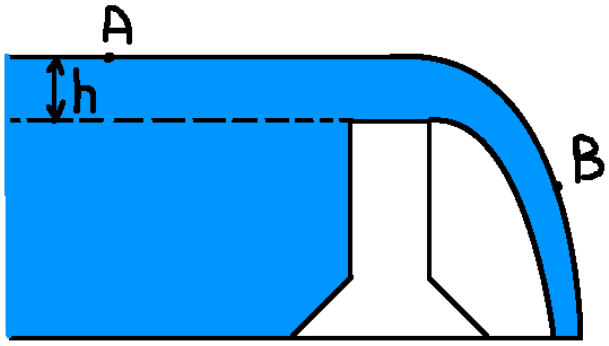
$$v_B = \sqrt{\frac{2(P_{\text{A}} - P_{\text{B}})}{\rho} + 2gh}$$

При равенстве давлений в точках A и B, получаем формулу Торричелли:

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

Дополнительное задание. Пусть имеется плотина, препятствующая течению жидкости. Предположим, что пошёл дождь и уровень жидкости поднялся на высоту h над плотиной (Рис. 2.8). Задача: доказать, что $v_B = \sqrt{2gh}$, если в точке A скорость нулевая, а A и B лежат на одной линии тока.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ



(Рис. 2.8)

8. Задача о том, почему самолёты летают.

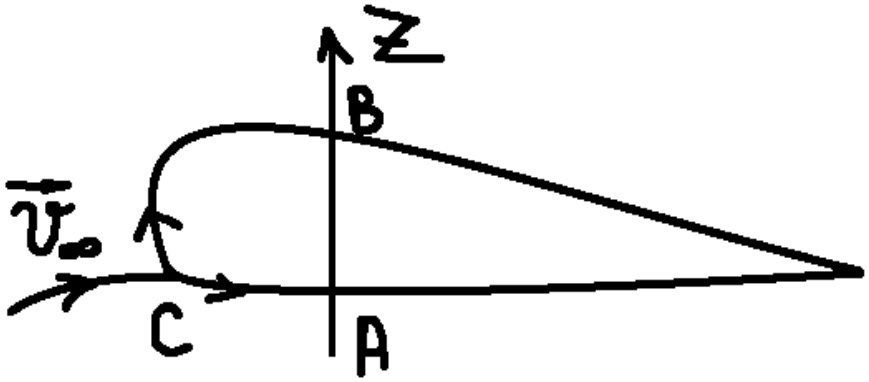
Рассмотрим крыло самолёта и линии тока потоков воздуха с скоростью v_∞ (Рис. 2.9). Проведём вертикальное сичение AB. Поток воздуха «ударяясь» о крыло самолёта разделяется на две линии тока: одна из них проходит через точку A, вторая через точку B. Для данных точек, так как они имеют общую линию тока и поток воздуха установившийся, справедливо (2.11). Далее:

$$(\cup\,\mathrm{AB} > \cup\,\mathrm{AC}) \wedge (2.11) \Longrightarrow (v_\mathrm{B} > v_\mathrm{A}) \Longrightarrow (v_\mathrm{B} > v_\infty > v_\mathrm{A})$$

Учитывая это и интеграл Бернулли, получаем соотношение:

$$\frac{{v^2}_\mathrm{B} - {v^2}_\mathrm{A}}{2} + g(z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}) = P_\mathrm{A} - P_\mathrm{B}$$

Разность давлений в правой части обеспечивает подъёмную силу.



(Рис. 2.9)

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 3

1. Гипотеза плоских сечений.

Согласно гипотезе плоских сечений, при течении жидкости в трубе с переменным сечением, мы предполагаем, что все основные параметры жидкости (давление, плотность, скорость) являются постоянными величинами по сечению и, в общем случае, переменными по длине трубки. Таким образом, задача сводится к одномерному случаю, Данное предположение справедливо, если труба, по которой течёт жидкость достаточно тонкая, то есть массовые силы влияют на систему несущественно.

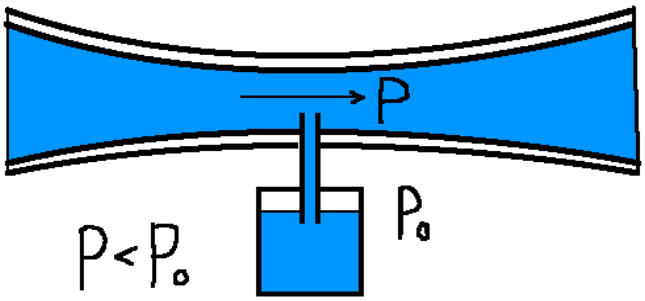
Также, из формулы $Fv = k_1$ (F - сечение трубы, v – скорость течения жидкости, k_1 – некая константа) следует, что скорость жидкости будет максимальна при минимальном сечении трубы.

Считаем, что течение установившееся и плотность – величина постоянная. В этом случае справедлив интеграл Бернулли, вдоль линии тока:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho_0} = k \;\Rightarrow\; \frac{{v^2}_{max}}{2} + \frac{P_{min}}{\rho_0} = k$$

Откуда следует, что при больших скоростях давление может быть очень малым, и, даже отрицательным. Однако для реальных жидкостей это не выполняется. Данное противоречие возникает из-за введённых нами допущений при выводе данной формулы. В случае реальной жидкости существует некое минимальное давление - P_d, определяемое экспериментально.

При давлениях много больше минимального все выведенные формулы остаются верными. Однако, при приближении к минимальному давлению, вследствие кавитации, данные соотношения становятся неверными. Для описания данных систем необходим совершенно другой подход.



(Рис. 3.1)

Устройство пульверизатора показано на (Рис. 3.1). Принцип работы заключается в том, что при давлении в трубе, меньшим, чем атмосферное, жидкость из ёмкости подсасывается в трубу.

Введём константы. Коэффициент давления (при установившемся течении):

$C_P = \frac{2\,(P_{\text{гст}} - P)}{\rho v_\infty^2}$, где v_∞ – скорость течения на бесконечности.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

При $P = P_d$, также существует $C_{P\,min}$: $C_{P\,min} = \frac{2\,(P_{\text{гст}} - P_d)}{\rho v_\infty^2} \equiv \varkappa$, $\varkappa -$ число кавитации.

2. Потенциальные течения.

Если вектор скорости можно выразить через скалярную величину, то мы имеем дело с потенциальными течениями: $\vec{v} = grad\,\varphi$. При этом существует первый интеграл уравнения движения (интеграл Коши-Лагранжа), при выполнении: потенциальности течения, движение – неустановившееся, массовые силы – потенциальные, жидкость баротропная:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{(grad\,\varphi)^2}{2} + \Pi - U = f(t) \tag{3.1}$$

Интеграл Коши-Лагранжа (3.1) с учётом подвижности системы координат ($f(t)$ внесём в П):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \vec{v}_{\text{пер}} - grad\,\varphi + \frac{(grad\,\varphi)^2}{2} + \Pi - U = 0 \tag{3.2}$$

Наличие потенциала гарантирует существование соотношения:

$$v_i = \nabla_i\varphi \tag{3.3}$$

Условия совместности, необходимые и достаточные для решения (3.3):

$$\nabla_i v_j = \nabla_j v_i \tag{3.4}$$

Потенциальное движение возможно лишь при отсутствии вихрей, и, напротив, из их отсутствия следует потенциальность движения. По теореме Лагранжа об отсутствии вихрей: если жидкость однородная и до какого-то времени в системе отсутствовали вихри, то и после они также будут отсутствовать.

Полная система уравнений для потенциальной системы (жидкость баротропная):

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + div\,grad\,\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \Delta\varphi = 0 \text{ (уравнение неразрывности)} \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{(grad\,\varphi)^2}{2} + \Pi - U = f(t) \text{ (интеграл Коши-Лагранжа)} \tag{3.6}$$

$$P = P(\rho) \text{ (условие баротропии)} \tag{3.7}$$

Будем рассматривать случаи, когда жидкость однородная, то есть $\rho = \rho_0 = const$, тогда можно написать:

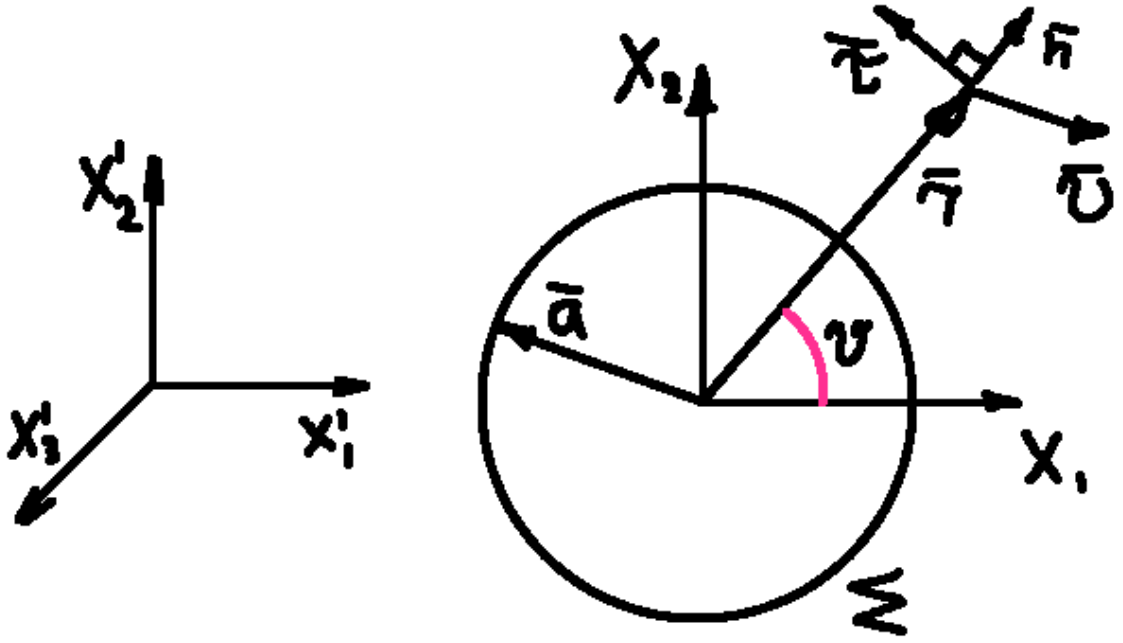
$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v}\,grad\,\rho, \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, grad\,\rho = 0 \;\Rightarrow\; \Delta\varphi = 0$$

Выходит, потенциал φ удовлетворяет требованию Лапласа.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{(grad\,\varphi)^2}{2} + \frac{P}{\rho_0} - U + const = 0$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

3. Задача о движении сферы в жидкости.



(Рис. 3.2)

Пусть имеется идеальная, несжимаемая, как правило однородная, жидкость. Рассмотрим в ней движение сферы. Зададим декартову система координат $Ox_1'x_2'x_3'$, относительно которой сфера жидкости двигается по Ox_1' (Рис. 3.2). Введём подвижную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, чтобы скорость сферы жидкости в ней была нулевая, а оси $Ox_1x_2x_3$ были параллельны осям $Ox_1'x_2'x_3'$,. Пусть радиус сферы – a, а радиус точки сферы и угол, относительно Ox_1 – r и ϑ соответственно. Мы рассматриваем движение лишь вдоль одной оси, но данная задача сводится к общему случаю поворотом системы координат.

$$r = \sqrt{x_i x_i} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \tag{3.8}$$

$$\cos\vartheta = \frac{x_1}{r} \tag{3.9}$$

Предполагаем, что вихрей не было, а, значит, по теореме Лагранжа их не будет и в дальнейшем рассмотрении данной системы, следовательно, движение – потенциальное.

$$\vec{v} = [v_1(x), v_2(x), v_3(x)] \tag{3.10}$$

Пусть $v_r = \vec{v}\,\vec{n}$, тогда:

$$v_r = grad\,\varphi\,\vec{n}]_{r=a} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = v\cos\vartheta \tag{3.11}$$

Аналогично,

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$v_\vartheta = \vec{v}\vec{\tau} = \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{r\,\partial\vartheta} \tag{3.12}$$

Рассмотрим бесконечно удалённую от О точку. Для неё будет справедливо следующее:

$$\varphi \xrightarrow[r\to\infty]{} 0;\ \frac{\partial\varphi}{\partial r} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \tag{3.13}$$

Таким образом, получили задачу для потенциала. Запишем её:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = v\cos\vartheta \\ \varphi \xrightarrow[r\to\infty]{} 0;\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial r} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \end{cases}$$

Получили полную постановку задачи Неймана для внешности сферы. Условию данной задачи удовлетворяет функция:

$$\varphi = A\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r}\right) = -A\frac{x_1}{r^3} = -A\frac{\cos\vartheta}{r^2} \tag{3.14}$$

В этом можно непосредственно убедиться, подставив данную функцию в соотношения.

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = \left.\frac{2A\cos\vartheta}{r^3}\right|_{r=a} = \frac{2A\cos\vartheta}{a^3} = v\ \cos\vartheta\ \Longrightarrow A = \frac{va^3}{2} \tag{3.15}$$

Окончательно, можем записать:

$$\varphi(x,t) = -\frac{a^3 v(t)\cos\vartheta}{2r^2} = -\frac{a^3 v(t) x_1}{2r^3} \tag{3.16}$$

Из интеграла Коши-Лагранжа (3.6), имеем следующее соотношение ($\vec{v}_{\text{пер}} = (v, 0{,}0)$):

$$P|_{r=a} = P_\infty - \left.\left(\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial\varphi}{x_1}v - \frac{\rho_0}{2}(grad\ \varphi)^2\right)\right|_{r=a} = P_\infty + \frac{\rho_0 v^2}{2}(3\cos\vartheta - 2) \tag{3.17}$$

Теперь можно выразить компоненты скорости и координаты. Выпишем, в частности, первую и вторую компоненты скорости:

$$v_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{a^3 v}{2r^3}(3\cos^2\vartheta - 1) \tag{3.18}$$

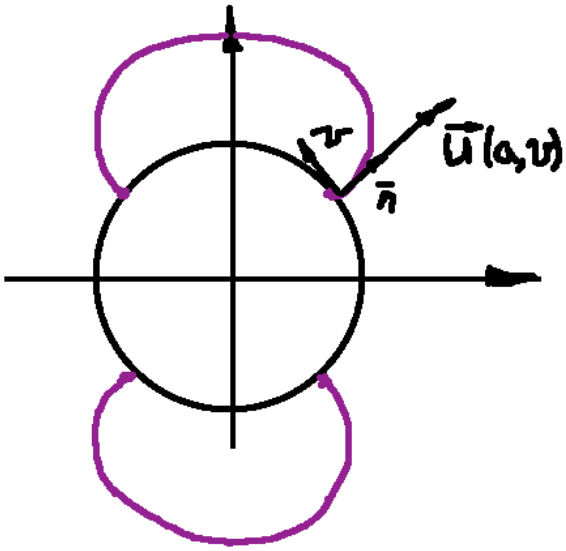
$$v_3 = \frac{3a^3 v}{2}\frac{x_3}{r^4}\cos\vartheta$$

Найдём радиальные зависимости скорости:

$$v_r(r,\vartheta) = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{a^3 v\cos\vartheta}{r^3} \tag{3.19}$$

$$v_\theta = \frac{\partial\varphi}{r\,\partial\vartheta} = \frac{a^3 v\sin\vartheta}{r^3} \tag{3.20}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ



(Рис. 3.3)

Рассмотрим выражения (3.19), (3.20) при $r = a$:

$$v_r(r,\vartheta) = v(t)\cos\vartheta\,, v_\theta = v\sin\vartheta$$

Согласно полученным выражениям, можно схематично изобразить линии тока, при вращении которых, можно получить поверхность тока (Рис. 3.3). Линии тока на рисунке изображены фиолетовым цветом.

4. Задача об обтекании сферы идеальной несжимаемой жидкостью.

Возьмём обозначения и систему координат из предыдущей задачи. Однако, потенциал будет иным – ψ. Пусть

$$\vec{w} = grad\,\psi \tag{3.21}$$

Тогда, в окрестности сферы, которую обтекает поток.

$$w_n = \vec{w}\vec{n}|_{r=a} = w_r|_{r=a} = \frac{\partial\psi}{\partial r}\Big|_{r=a} = 0 \tag{3.22}$$

Так как по направлению нормали нет проникновения жидкости во внутрь. На бесконечности имеем:

$$grad\,\psi \to -v\vec{e}_1 \tag{3.23}$$

$$\Delta\varphi = 0 \tag{3.24}$$

Напишем готовое решение для данной задачи.

$\psi = \varphi + \varphi_0$, где

$\varphi_0 = -vx_1 = -vr\cos\vartheta$; φ дано в (3.16).

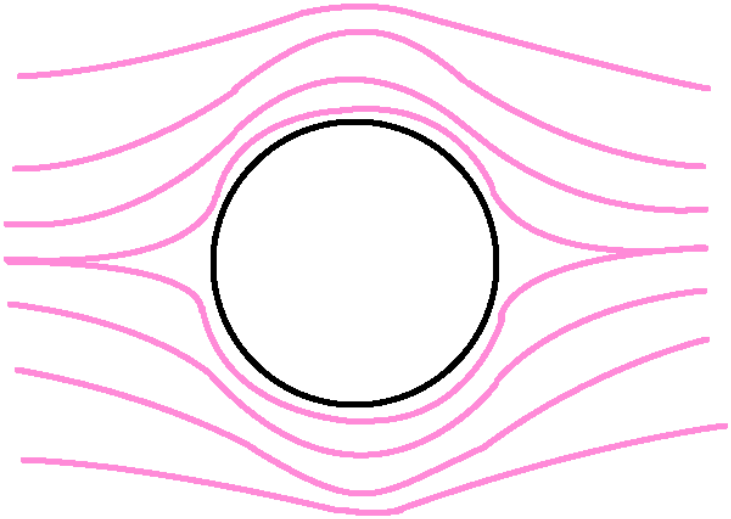
$$\psi = -\nabla\left(r + \frac{a^3}{2r^2}\right)\cos\vartheta \tag{3.25}$$

Выпишем радиальные компоненты скорости:

$$w_r = \frac{\partial\psi}{\partial r} = -v\,\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)\cos\psi \tag{3.26}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$w_\vartheta = \frac{\partial\psi}{r\,\partial\vartheta} = v\left(1+\frac{a^3}{2r^3}\right)\sin\psi \tag{3.27}$$



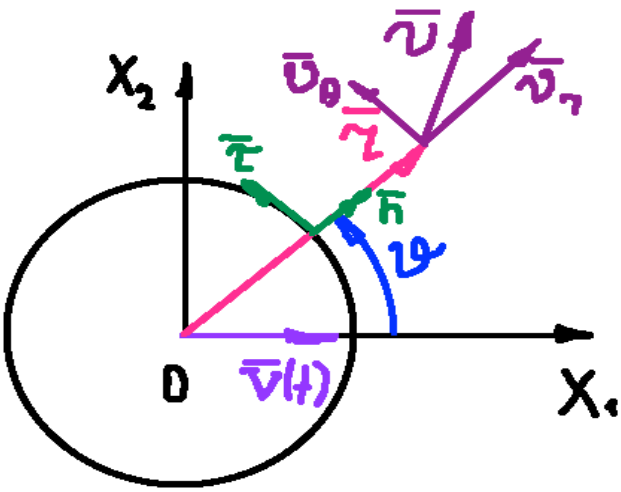
(Рис. 3.4)

Линии тока для данной задачи схематически изображены на (Рис. 3.4). Отметим, что (Рис. 3.3) и (Рис 3.4) выполнены для постоянной по времени скорости.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 4

1. Задача о движении сферы в бесконечной идеальной жидкости.



(Рис. 4.1)

Рассмотрим сферу, движущуюся со скоростью $\vec{v}$ в идеальной несжимаемой жидкости. Введём декартовую систему координат, связанную с центром сферы, так, чтобы выполнялось: $Ox_1 \parallel \vec{v}$ (Рис. 4.1). Также полезно ввести угол с осью $Ox_1 - \vartheta$ и радиус-вектор – r. Тогда, справедливы следующие соотношения:

$$r = \sqrt{x_i x_i} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$$

$$\cos\vartheta = \frac{x_1}{r} \qquad (3.8)$$

Будем представлять вектор скорости через радиальную и нормальную компоненты:

$$\vec{v} = v_r\vec{n} + v_\theta\vec{k}$$

Также, считаем, что жидкость баротропная и она подчиняется теореме Лагранжа, то есть вихри отсутствуют в рассматриваемый и последующие моменты. Тогда:

$$\vec{v} = garad\ \varphi$$

$div\ \vec{v} = 0 \ \Rightarrow\ \Delta\varphi = 0$, где Δ – оператор Лапласа (4.1)

Запишем условие непроницаемости га границе сферы:

$$grad\ \varphi\ \vec{n}]_{r=a} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = v\cos\vartheta \qquad (4.2)$$

Используем тот факт, что на бесконечности жидкость – покоится:

$$\varphi \xrightarrow[r\to\infty]{} 0;\ \frac{\partial\varphi}{\partial r} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \qquad (4.3)$$

В результате, получим решение в виде:

$$\varphi(x,t) = -\frac{a^3 v(t)\cos\vartheta}{2r^2} = -\frac{a^3 v(t) x_1}{2r^3} \qquad (4.4)$$

Взяв соответствующие производные, получим:

$$v_r(r,\vartheta) = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{a^3 v\cos\vartheta}{r^3}; \qquad v_\theta = \frac{\partial\varphi}{r\,\partial\vartheta} = \frac{a^3 v\sin\vartheta}{r^3} \qquad (4.5)$$

Мы можем записать функцию давления:

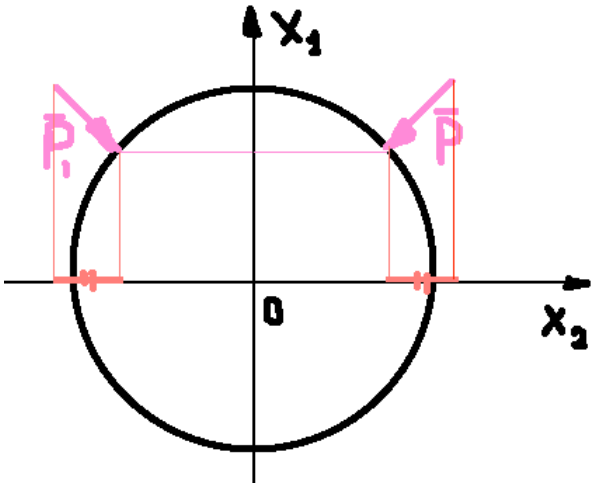
$$P(r,\vartheta,t) = P_\infty + \frac{a^3\cos\vartheta}{2r^2}\frac{dv}{dt} + \rho_0 v\frac{\partial\varphi}{x_1} - \frac{\rho_0}{2}(grad\ \varphi)^2$$

$$P(r,\vartheta,t) = P_\infty + \frac{a^3\cos\vartheta}{2r^2}\frac{dv}{dt} + \frac{\rho_0 a^6 v^2}{2r^6}\left(1 - \frac{3}{4}\ sin^2\vartheta\right) \tag{4.6}$$

Нас интересует давление, оказываемое на сферу:

$$P(a,\vartheta,t) = P_\infty + \frac{a\cos\vartheta}{2}\frac{dv}{dt} + \frac{\rho_0 v^2}{2}\left(1 - \frac{3}{4}\ sin^2\vartheta\right) \tag{4.7}$$

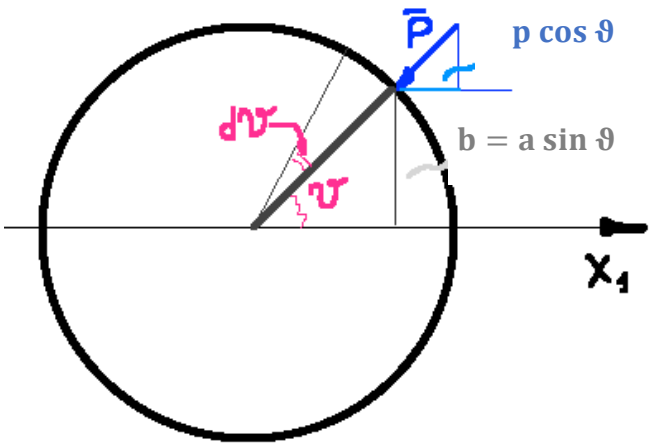
2. Парадокс Даламбера.



(Рис. 4.2)

Рассмотрим предыдущую задачу при условии, что скорость сферы – постоянна. Тогда, второе слагаемое в правой части (4.7) – отсутствует. Давление, со стороны жидкости, будет действовать перпендикулярно поверхности сферы. Возьмём произвольную ось, проходящую через центр сферы. Возьмём произвольную точку на поверхности сферы и найдём проекцию давления на выбранную ось. В силу изложенных выводов, найдётся точка, симметричная, относительно оси Ox_1 такая, что сумма проекций давления на исходную точку и симметричную ей – 0 (Рис. 4.2). В силу произвольности выбора точки, заключаем, что на сферу не действует давление со стороны жидкости. Сфера не испытывает лобовое сопротивление и подъёмную силу со стороны жидкости. В этом и состоит парадокс Даламбера. Данный факт верен для тел произвольной формы, если течение жидкости - безотрывно.

3. Случай неустановившегося движения.



(Рис. 4.3)

Пусть теперь имеется зависимость скорости от времени. Вычислим проекцию давления $-Q_1$ на Ox_1 (Рис. 4.3). Введём некоторые полезные обозначения:

$$dS = ad\vartheta;$$

$$d\Sigma = 2\pi a\sin\vartheta\ a\ d\vartheta = 2\pi a^2\sin\vartheta\ d\vartheta;$$

$$b = a\ \sin\vartheta.$$

Так как в данном случае второе слагаемое справа в (4.7) отлично от нуля, можем взять интеграл:

$$Q_1 = -\int\limits_{\Sigma} P\cos\vartheta\, d\Sigma = -\rho_0\pi a^3\frac{dv}{dt}\int\limits_0^{\pi} cos^{\,2}\vartheta\sin\vartheta\;\, d\vartheta = -\,\rho_0\pi a^3\frac{dv}{dt}\frac{1}{3}cos^{\,2}\vartheta\Big|_0^{\pi}$$

$Q_1 = -\frac{2}{3}\rho_0\pi a^3\frac{dv}{dt} = -\mu\frac{dv}{dt}$, где $\mu -$ присоединённая масса (4.8)

Пусть, в рамках этой задачи, скорость тела - $v(t)$, масса тела – m, а сила, действующая на тело - F_1. Тогда, с помощью второго закона Ньютона и (4.8) выразим скорость:

$$m\frac{dv}{dt} = F_1 + Q_1 \tag{4.9}$$

$$(m+\mu)\frac{dv}{dt} = F_1 \tag{4.10}$$

Таким образом, влияние жидкости равносильно тому, что мы добавляем присоединённую массу – μ.

Если шар неподвижен и обтекается несжимаемой жидкостью, то движение потенциально, а уравнения эквивалентны предыдущей задачи. Решение оператора Лапласа выражается с помощью выражения:

$$\psi = \varphi + \varphi_0 = -\frac{a^3 v\cos\vartheta}{2r^2} - vr\cos\vartheta$$

Формула для давления получается аналогичной (4.6).

4. Вязкость жидкости.

Заметим, что большинство парадоксов и эффектов, связанных с отсутствием подъёмной силы, связаны с отсутствием вязкости в жидкости. В реальности, учитываются напряжения не только от давления, но и вязкие напряжения (они зависят от скорости течения жидкости):

$$\sigma^{ij} = -Pg^{ij} + \tau^{ij}$$

Влияние вязкости мало при малых скоростях относительного движения тела и жидкости.

Пусть $\chi -$параметры, влияющие на давление (за исключением плотности и температуры). Тогда, мы можем написать:

$P = (\rho, T, \chi),\ \tau^{ij} = \tau^{ij}(e, T, \chi)$, где $e -$ тензор скоростей деформаций.

Если зависимость $\tau^{ij}(e) -$ линейна, то жидкость называют Ньютоновской. При этом, зависимость записывается в виде:

$$\sigma^{ij} = -Pg^{ij} + A^{ijkl}e_{kl} \tag{4.11}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$e_{kl} = \frac{1}{2}(\nabla_k v_e + \nabla_e v_k) \tag{4.12}$$

A^{ijkl} – тензор вязкости 4-го ранга и. в общем случае анизотропии, остаётся 21 компонента ввиду симметрии.

$$A^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) \tag{4.13}$$

$\mu -$ коэффициент кинематической вязкости, $\lambda -$ объёмной. Данные коэффициенты находятся экспериментально.

Вводится, также коэффициент динамической вязкости:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Запишем уравнение движения в общем случае:

$$\nabla_j \sigma^{ij} + \rho F^i = \rho \frac{dv^i}{dt} \tag{4.14}$$

Получаем систему 15 уравнений (4.11), (4.12), (4.14) с 17 неизвестными. Для нахождения оставшихся двух, необходимо использовать уравнение неразрывности и уравнение, определяющее тип жидкости (баротропность, не сжимаемость).

Из уравнения движения получаем:

$$-\nabla^i P + (\lambda + \mu)\nabla^i \nabla_k u^k + \mu \Delta v^i + \rho F^i = \rho \frac{dv^i}{dt} \tag{4.15}$$

В тензорной форме:

$$-grad\ P + (\lambda + \mu)\ grad\ div\ \vec{v} + \mu\ \Delta\vec{v} + \rho\vec{F} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{4.16}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 5

1. Линейная вязкая жидкость.

Зависимость напряжений в вязкой жидкости, как уже отмечалось ранее соотношением (4.11). Будем рассматривать случай анизотропных тел. В таких телах можно выделить два тензора, задающих базис в пространстве анизотропных тензоров:

$$\Lambda^{ijkl} = g^{ij}g^{kl}; \quad \Delta^{ijkl} = \frac{1}{2}\left(g^{ik}g^{il} + g^{il}g^{jk}\right)$$

Из этих соотношений можно записать (4.13).

Запишем полную систему уравнений для вязкой жидкости:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div\, \vec{u} = 0 \tag{5.1}$$

$$div\, \underline{\sigma} + \rho \vec{F} = \rho \frac{d\vec{u}}{dt} \tag{5.2}$$

$$\tau^{ij} = A^{ijkl}\mathrm{e}_{kl} = A^{ijkl}\nabla_k v_l \tag{5.3}$$

$$\sigma^{ij} = -Pg^{ij} + \left[\lambda g^{ij}g^{kl} + \mu(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk})\right] \times e_{kl} \tag{5.4}$$

$$e_{kl} = \frac{1}{2}(\nabla_k v_e + \nabla_e v_k) \tag{5.5}$$

Также, в эту систему включается уравнение, описывающее свойства жидкости как правило, это уравнение баротропии:

$$P = f(\rho) \tag{5.6}$$

Данная система уравнений является полной.

2. Уравнение Навье-Стокса для вязкой жидкости.

Запишем вывод из системы уравнений, полученной ранее, для вязкой баротропной жидкости в общем виде.

$$\begin{cases} -\nabla^i P + \nabla_i\left(A^{ijkl}v_{kl}\right) + \rho F^i = \rho \frac{dv^i}{dt} \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho\, div\, \vec{u} = 0 \\ P = f(\rho) \end{cases} \tag{5.7}$$

В случае несжимаемой жидкости, уравнение неразрывности записывается в ином виде.

В случае, когда жидкость несжимаемая и однородная, величины в первом уравнении (5.7) могут зависеть от координат и времени.

Необходимо преобразовать первое выражение в (5.7) выражение:

$$\nabla_j \sigma^{ij} = \nabla_j\left[(-P + \lambda\, div\, \vec{v})g^{ij} + 2\mu e^{ij}\right]$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Преобразуем следующее выражение:

$$\tau^{ij} = A^{ijkl}\mathrm{e}_{kl} = \left(\lambda g^{ij}g^{kl} + \mu(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk})\right)v_{k,l}$$

Вернёмся к предыдущему выражению:

$$\nabla_j\sigma^{ij} = -\nabla^i P + \lambda\,\nabla^i\nabla_k v^k + \mu\nabla_i\left(\nabla^i v^j + \nabla^j v^i\right) = -\nabla^i P + (\lambda+\mu)\,\nabla^i\nabla_k v^k + \mu\,\nabla_j\nabla^j v^i$$

С учётом этого уравнение движения записывается в виде:

$$-grad\,P + (\lambda+\mu)\,grad\,div\,\vec{v} + \mu\,\Delta\vec{v} + \rho\vec{F} = \rho\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (5.8)$$

К данному уравнение необходимо добавить уравнение неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,div\,\vec{u} = 0 \qquad (5.9)$$

А также добавить уравнение баротропии:

$$P = f(\rho) \qquad (5.10)$$

Важно различать неоднородную по плотности и неоднородную по вязкости жидкости.

3. Вязкая, несжимаемая, однородная жидкость.

Будем, как и в предыдущей задаче, исходить из системы (5.7). Данная система значительно упрощается в рассматриваемом случае:

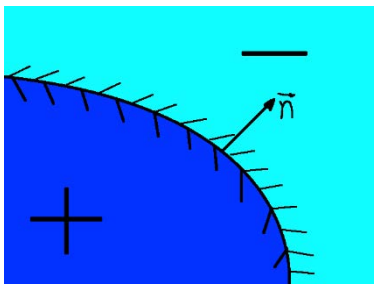
$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho_0}grad\,P + \frac{\mu}{\rho_0}\Delta\vec{v} + \vec{F} = \frac{d\vec{v}}{dt} \\ div\,\vec{v} = 0 \end{cases} \qquad (5.11)$$

4. Начальные и граничные условия.

Перове уравнение в (5.7) – параболического типа. Поэтому, в качестве начальных условий необходимы все искомые величины в начальный момент времени.

На границе необходимо выполнение следующих условий.

- Условие прилипания: $\vec{v}|_{\Sigma} = \vec{v}_{\text{пов}}$
- Условие контакта с атмосферой: $\sigma_{ij}n_j\big|_{\Sigma_{\text{св}}} = -P_{\text{атм}}n_i$
- Условие идеального контакта: $[\vec{v}]_{\Sigma_k} = 0;\quad [\sigma_{ij}]\,\vec{n}_j = 0$ (Рис. 5.1)



(Рис. 5.1)

На этом начальные и конечные условия исчерпываются.

Среднее гидростатическое напряжение $-\sigma = \frac{1}{3}\sigma_i^i$:

$$\sigma = \frac{1}{3}\left[(-P + \lambda\,div\,\vec{v})g_i^i + 2\mu e_i^i\right]$$

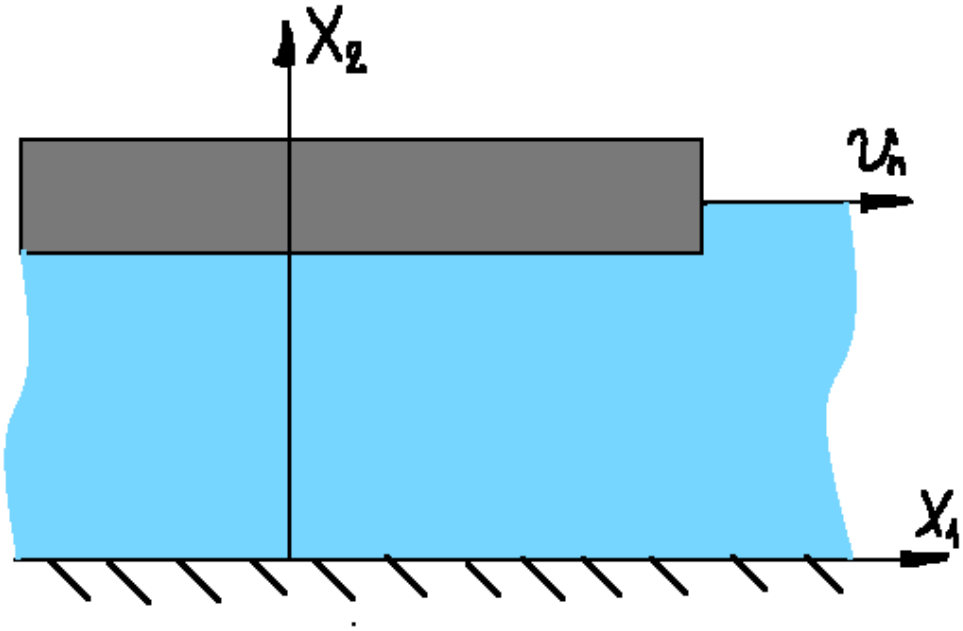
С учётом: $e_i^i = \nabla_1 v^1 + \nabla_2 v^2 + \nabla_3 v^3 = div\,\vec{v}$, получим:

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\sigma = -P + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) div\, \vec{v} \qquad (5.12)$$

5. Течение Куэтта.

Пусть вязкая жидкость течёт между двумя бесконечными плоскостями, причём, верхняя движется, а нижняя неподвижна. При этом на верхней плоскости происходит прилипание и жидкость приходит движение (Рис. 5.2).



(Рис. 5.2)

В начальный момент времени движение – неустановившееся, но в течении короткого времени движение в системе устанавливается. Предполагается, что массовые силы в системе отсутствуют, а жидкость – однородная ($\rho = \rho_0 = const$). Запишем условие прилипания:

$$\vec{v}|_{x_2=0} = 0; \quad \vec{v}|_{x_2=h} = (v_n\,, 0\,, 0) \qquad (5.13)$$

Примем, что жидкость однородная. Условие несжимаемости и неразрывности выполняются автоматически.

$$v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3} \equiv 0$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \rho_0\, div\, v + \vec{v}\, grad\, \rho_0 \equiv 0$$

Аксиоматическая гипотеза: предположим, что справедливо: $\vec{v} = (v_1(x_1),\ 0\,, 0)$

Из уравнения Навье-Стокса:

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$-P_{,1} + \mu\, v_{1,22} = 0; \quad P_{,2} = 0; \quad P_{,3} = 0 \;\Rightarrow\; P = P(x_1) \Rightarrow \frac{\partial P(x_1)}{\partial x_1} = \mu \frac{\partial^2 v(x_2)}{\partial x_2^2}$$

Последнее соотношение справедливо тогда и только тогда, когда:

$$\frac{\partial P(x_1)}{\partial x_1} = a = const; \quad \mu \frac{\partial^2 v_1(x_2)}{\partial x_2^2} = a = const \tag{5.14}$$

Из данного соотношения непременно следует:

$$P(x_1) = a x_1 + P_\infty, \qquad P \to P_\infty \text{ при } x_1 \to \infty \;\Rightarrow\; a = 0$$

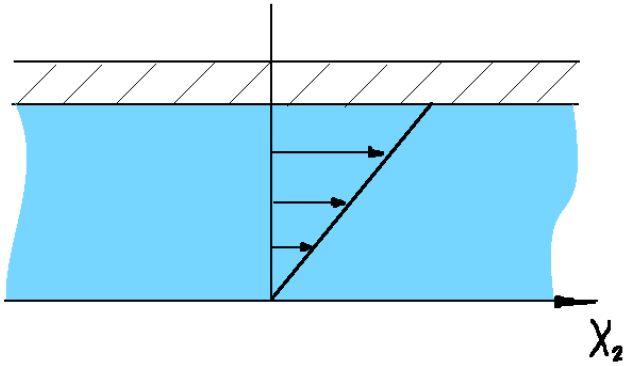
$$v_1 = c x_2 + b, \qquad v_1 = 0 \text{ при } x_2 = 0 \;\Rightarrow\; b = 0$$

Для второго соотношения получаем:

$$c = \frac{v_h}{h} \;\Rightarrow\; v_1(x_2) = \frac{v_h}{h} x_2$$

Схематично полученная зависимость изображена на (Рис. 5.3).

Проверим, является ли полученное течение безвихревым, для этого вычислим $rot\,\vec{v}$:



(Рис. 5.3)

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\,\vec{v} = \frac{1}{2} \in_{ijk}\, v_{k,j} \vec{e_i} = \frac{1}{2} \in_{i21}\, v_{1,2} \vec{e_i}$$
$$= \frac{1}{2} \in_{321} \frac{v_h}{h} \vec{e_3} = -\frac{v_h}{2h} \vec{e_3}$$

Нам необходимо рассчитать давление на верхнюю и нижнюю площадки. Для этого рассчитаем напряжения:

$$\sigma_{ij} = -P_\infty \delta_{ij} + \frac{2\mu v_n}{h} \Delta_{ij12}$$

Теперь мы можем рассчитать давление:

$$P_{i\,(n)} = \sigma_{ij} n_j = \sigma_{12} n_2 = \left(-P_\infty \delta_{i2} + \frac{2\mu v_n}{h} \delta_{i2}\right) n_2 \tag{5.15}$$

Для жидкости, примыкающей к верхней площадке:

$$P_1(h) = -\frac{2\mu v_n}{h}; \quad P_2 = P_\infty; \quad P_3 = 0$$

Для жидкости, примыкающей к нижней площадке:

$$P_1(h) = \frac{2\mu v_n}{h}; \quad P_2 = -P_\infty; \quad P_3 = 0$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 6

1. Уравнение вязкой жидкости.

Необходимо перейти к безразмерным координатам в уравнениях из предыдущей лекции (уравнение Навье-Стокса и уравнение неразрывности). Это необходимо для того, чтобы появилась возможность проводить эксперимент в малых масштабах (создавать модель) и использовать его результаты в реальных задачах, например, кораблестроение.

Имеем общее уравнение Навье-Стокса для однородной вязкой жидкости:

$$-\frac{1}{\rho_0} grad\, P + \frac{k + {}^{\mu}/_{3}}{\rho} grad\, div\, \vec{v} + \frac{\mu}{\rho_0}\Delta\vec{v} + \vec{F} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\,\vec{\nabla}\right)\vec{v}$$

Где введён модуль объёмной вязкости: $k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$

Уравнение неразрывности запишем в виде:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{u}) = 0$$

Также необходимо записать условие баротропии:

$$P = f(\rho)$$

Введём безразмерные характерные величины:

- L_0 – характерный размер
- v_0 – характерная скорость
- t_0 – характерное время
- P_0 – характерное давление
- ρ_0 –характерная плотность
- g_0 – характерное ускорение

Введём безразмерные переменные величины:

$$x^i = x^i_* v_0; \quad v^i = v^i_* v_0; \quad t = t_* t_0$$

$$P = P_* P_0; \quad \rho = \rho_* \rho_0; \quad g = g_* g_0; \quad F = g_0 F_*$$

Используем введённые обозначения (операторы с * предполагают его действие в безразмерных координатах):

$$\frac{1}{\rho_0} grad\, P = \frac{P_0}{\rho_0 L_0}\,\frac{1}{\rho_*} grad_*\, P_*$$

$$\frac{k + {}^{\mu}/_{3}}{\rho} grad\, div\, \vec{v} = \frac{\left(k + {}^{\mu}/_{3}\right) v_0}{\rho_0 L_0^2}\frac{1}{\rho_*}\; grad_*\, div_*\, \vec{v}_*$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\frac{\mu}{\rho_0}\Delta\vec{v} = \frac{\mu v_0}{\rho_0 L_0^2}\,\frac{1}{\rho_*}\Delta_*\vec{v}_*; \quad \left(\vec{v}\,\vec{\nabla}\right)\vec{v} = \frac{v_0^2}{L_0}\left(\vec{v}\,{}_*\vec{\nabla}_*\right)\vec{v}_*$$

$$\vec{F} = \vec{F}_* g_0; \quad \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \frac{v_0}{t_0}\,\frac{\partial\vec{v}_*}{\partial t_*}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\rho_0}{t_0}\,\frac{\partial\rho_*}{\partial t_*}; \quad div(\rho\vec{u}) = \frac{\rho_0 v_0}{L_0}\,div_*(\rho_*\vec{u}_*)$$

Перепишем уравнения в безразмерных величинах, предварительно поделив уравнение Навье-Стокса на $\frac{v_0^2}{L_0}$, а уравнение неразрывности на $\frac{\rho_0 v_0}{L_0}$:

$$-\frac{P_0}{\rho_0 v_0^2}\,\frac{1}{\rho_*}grad_*\,P_* + \frac{\mu\left(\varkappa + {}^1/_3\right)}{\rho_0 v_0 L_0}\frac{1}{\rho_*}\,grad_*\,div_*\,\vec{v}_* + \frac{\mu}{\rho_0 v_0 L_0}\,\frac{1}{\rho_*}\Delta_*\vec{v}_* + \frac{L_0}{v_0^2}\vec{F}_* g_0$$
$$= \frac{L_0}{v_0 t_0}\,\frac{\partial\vec{v}_*}{\partial t_*} + \left(\vec{v}\,{}_*\vec{\nabla}_*\right)\vec{v}_*; \quad \varkappa = \frac{k}{\mu}$$

$$\frac{L_0}{t_0 v_0}\,\frac{\partial\rho_*}{\partial t_*} + div_*(\rho_*\vec{u}_*) = 0$$

Введём:

$\frac{P_0}{\rho_0 v_0^2} = \frac{1}{M^2}$, где M – число Маха,

$\frac{\mu\left(\varkappa + {}^1/_3\right)}{\rho_0 v_0 L_0} = \frac{\varkappa + {}^1/_3}{Re}$, где Re – число Рейнольдса,

$\frac{g_0 L_0}{v_0^2} = \frac{1}{Fr}$, где Fr – число Фруда,

$\frac{t_0 v_0}{L_0} = \frac{1}{St}$, где St – число Струхаля

Используя данные числа перепишем соотношения:

$$\begin{cases} -\frac{1}{M^2}\,\frac{1}{\rho_*}grad_*\,P_* + \frac{\varkappa + {}^1/_3}{Re}\frac{1}{\rho_*}\,grad_*\,div_*\,\vec{v}_* + \frac{1}{Re}\,\frac{1}{\rho_*}\Delta_*\vec{v}_* + \frac{1}{Fr}\vec{F}_* = \frac{1}{St}\,\frac{\partial\vec{v}_*}{\partial t_*} + \left(\vec{v}\,{}_*\vec{\nabla}_*\right)\vec{v}_* \\ \frac{1}{St}\,\frac{\partial\rho_*}{\partial t_*} + div_*(\rho_*\vec{u}_*) = 0 \\ P_* = f(\rho_*) \end{cases}$$

2. Течение Куэтта.

Вернёмся к задаче из предыдущей лекции (Рис.5.2).

Были успешно получено формулы на основе кинематической гипотезы:

$$v_1(x_2) = \frac{v_h}{h}x_2, \quad P = P_\infty \tag{6.1}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\sigma_{ij} = -P_\infty \delta_{ij} + \frac{2\mu v_n}{h}\Delta_{ij12} \qquad (6.2)$$

Для жидкости, примыкающей к верхней площадке:

$$P_1(h) = -\frac{2\mu v_n}{h}; \quad P_2 = P_\infty; \quad P_3 = 0$$

Для жидкости, примыкающей к нижней площадке:

$$P_1(h) = \frac{2\mu v_n}{h}; \quad P_2 = -P_\infty; \quad P_3 = 0$$

Нетрудно обобщить данную задачу для неоднородной жидкости:

$$\mu = \mu(x_2); \quad \rho = \rho(x_2); \quad \lambda = \lambda(x_2)$$

Мы принимаем аксиоматическую гипотезу:

$$\vec{v} = (v_1(x_2), 0\,, 0)$$

Выражения для скорости и давления будут иметь следующий вид:

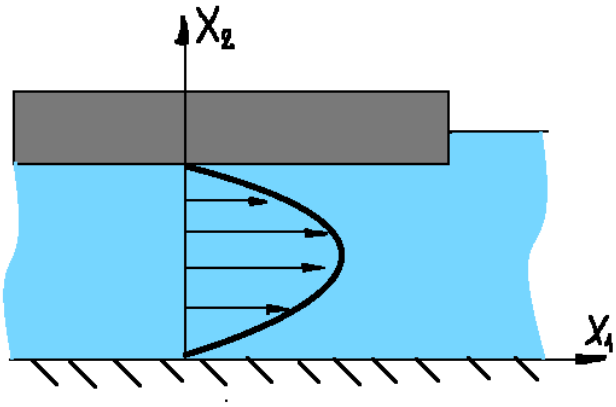
$$v_1(x_2) = \frac{v_h}{h\,\langle 1/\mu\rangle}\int_0^{x_2}\frac{dy}{\mu(y)}; \quad P = P_\infty$$

Где мы полагаем по определению:

$$\langle 1/\mu\rangle \equiv \frac{1}{h}\int_0^h \frac{dy}{\mu(y)}$$

3. Плоская задача Пуазейля.

В отличие от предыдущей задачи, движение жидкости вызвано перепадом давления. В данной задаче мы полагаем, что перепад давления постоянен (Рис. 6.1).



(Рис. 6.1)

Для этой задачи также справедливо соотношение:

$$\vec{v} = (v_1(x_2), 0\,, 0)$$

Необходимо проверить наличие следующих условий:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{u}) = 0$$

$$div\,\vec{u} = \left(\vec{v}\,{}_*\vec{\nabla}_*\right)\vec{v}_* = 0$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

Из этих условий и того факта, что течение установившееся, получаем из уравнения (5.8):

$$-P_{,i} + \delta_{i1}\,\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mu\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) = 0$$

Будем искать решение этого уравнения.

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mu\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right); \quad P_{,2} = 0; \quad P_{,3} = 0 \Rightarrow P = P(x_1)$$

Также получаем:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = I = const; \quad \frac{d}{dx_2}\left[\mu(x_2)\,\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right] = -I \tag{6.3}$$

Из этих уравнений получаем решение:

$$P = -Ix_1 + K,\ v_1(x_2) = -I\int_0^{x_2}\frac{y\,dy}{\mu(y)} + a\int_0^{x_2}\frac{dy}{\mu(y)} + b \tag{6.4}$$

Константы a и b находим из условия прилипания:

$$v_1(0) = v_1(h) = 0$$

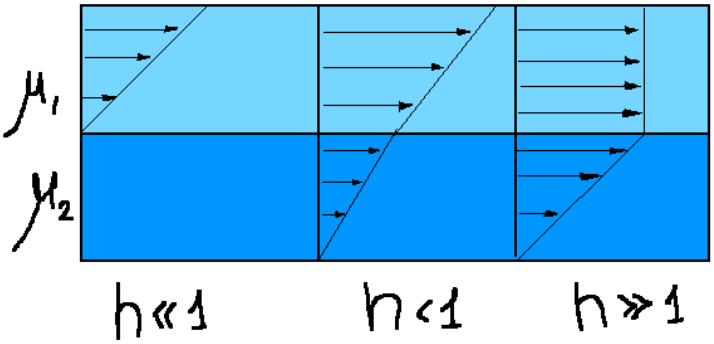
Получаем соотношение для $v_1(x_2)$:

$$v_1(x_2) = I\left[\frac{\langle y/\mu\rangle}{\langle 1/\mu\rangle}\int_0^{x_2}\frac{dy}{\mu(y)} - \int_0^{x_2}\frac{y\,dy}{\mu(y)}\right] \tag{6.5}$$

$$v_{max} = v_1(x_2^{max}),\ x_2^{max} = \frac{\langle y/\mu\rangle}{\langle 1/\mu\rangle} \tag{6.6}$$

Если жидкость однородная, то из (6.5) и (6.6) (Рис.6.1):

$$v_1(x_2) = I\frac{h}{2\mu}x_2(h - x_2),\ x_2^{max} = \frac{h}{2} \tag{6.7}$$



(Рис. 6.2)

Введём соотношение: ${}^{\mu_2}/_{\mu_1} = h$, тогда схематично профиль скоростей можно изобразить на (Рис. 6.2).

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

4. Классическая задача Пуазейля.

Рассмотрим поперечное сечение трубы, в которой имеется постоянный поток, в общем случае, меняющийся по времени (Рис. 6.3).

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = -I(t) \Rightarrow \; P = -I(t)x_3 + K(t) \tag{6.8}$$

Примем кинематическую гипотез - линии тока параллельны образующей:

$$v_3 = w\,(x_1, x_2, t); \quad v_1 = v_2 = 0 \tag{6.9}$$

На контуре Г выполняется следующее условие:

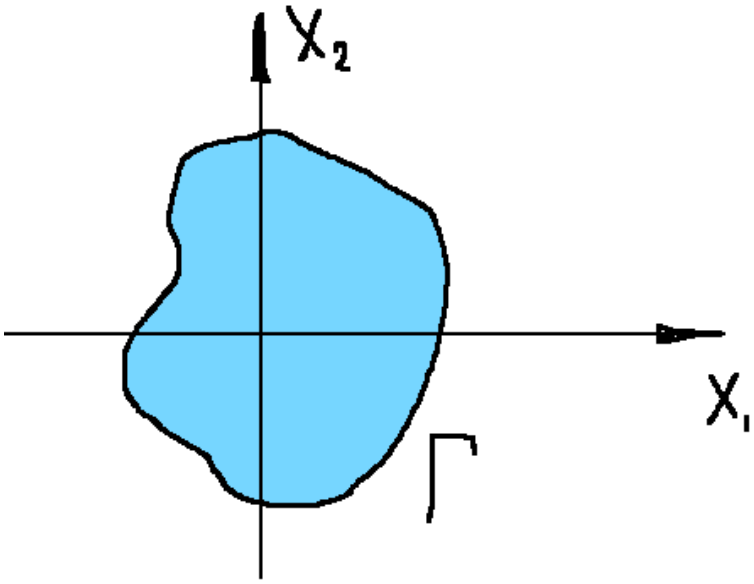
$$w|_\Gamma = w_0(y, t); \quad y \in \Gamma$$

Начальные условия:

$$w(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2)$$

Из (6.9) следует выполнение условия несжимаемости.

Пусть жидкость однородная, тогда уравнение неразрывности также выполнено.



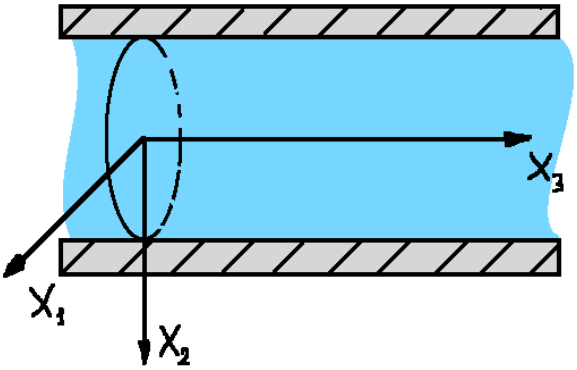
(Рис. 6.3)

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

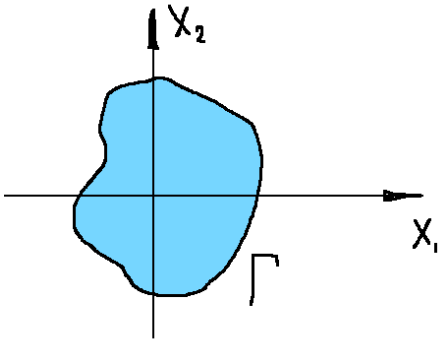
Лекция 7

1. Течение Пуазейля в цилиндрах с постоянным сечением.

Будем рассматривать течение вязкой с жидкости в трубе с постоянным сечением (Рис. 7.2). Введём систему координат (Рис. 7.1).



(Рис. 7.1)



(Рис. 7.2)

Будем полагать, что справедливо соотношение:

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = -I(t) \;\Rightarrow\; P = -I(t)x_3 + K(t) \tag{7.1}$$

Примем кинематическую гипотезу:

$$v_3 = w\,(x_1, x_2, t); \quad v_1 = v_2 = 0 \tag{7.2}$$

Из соотношения (7.2):

$$div\,\vec{v} = v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3} \equiv 0 \tag{7.3}$$

Уравнение неразрывности справедливо, следовательно:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \;\Rightarrow\; \rho = \rho(x_1, x_2)$$

Рассмотрим нелинейное слагаемое из уравнения Навье-Стокса:

$$v_k v_{i,k} = v_1 v_{i,1} + v_2 v_{i,2} + v_3 v_{i,3} \equiv 0$$

С учётом полученных соотношений, уравнение Навье-Стокса принимает вид:

$$P_{,i} + \left[A_{iJ3L}(x_1, x_2) v_{.L}\right]_{,J} = \delta_{i3}\,\rho(x_1, x_2)\frac{\partial w}{\partial t}; \;\; i = 1,2,3;\; J, L = 1,2 \tag{7.4}$$

$$A_{ijkl} = \lambda(x_1, x_2)\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu(x_1, x_2)\Delta_{ijkl} \tag{7.5}$$

$$\Delta_{ijkl} \equiv \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{7.6}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Так как жидкость анизотропная, (7.5) не обнуляется при $i = 3$. С учётом этого перепишем (7.4):

$$P_{,i} + \delta_{i3}\left[\mu w_{,J}\right]_{,J} = \delta_{i3}\,\rho\frac{\partial w}{\partial t} \tag{7.7}$$

$$P_{,1} = 0; \quad P_{,2} = 0 \;\Rightarrow P = P(x_3)$$

$$P = -I(t)x_3 + K(t)$$

Справедливо соотношение:

$$\left[\mu(x_1, x_2)w_{,J}\right]_{,J} + I(t) = \rho(x_1, x_2)\frac{\partial w}{\partial t} \tag{7.8}$$

Соотношение (7.8) – параболического типа необходимо ввести граничные условия.

Условие прилипания:

$$w|_{\Gamma} = w_0(y, t); \quad y \in \Gamma \tag{7.9}$$

Начальные условия:

$$w(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2) \tag{7.10}$$

2. Постановка задачи Пуазейля в полярных координатах.

Соотношения (7.8) - (7.10) задают полную постановку задачи. Перепишем их в полярных координатах, сделав соответствующие замены:

$$x_1 = r\cos\vartheta\,; \quad x_2 = r\sin\vartheta$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\vartheta = arctg\,\frac{x_2}{x_1}$$

Также, для перехода к полярным координатам, нам понадобятся соотношения:

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x_1} = \cos\vartheta\,;\ \frac{\partial r}{\partial x_2} = \sin\vartheta \\ \frac{\partial\vartheta}{\partial x_1} = -\frac{1}{r}\sin\vartheta\,;\ \frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{1}{r}\cos\vartheta \end{cases} \tag{7.11}$$

Также, в последующих преобразованиях потребуется:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1}$$

Перейдём к полярным координатам в данном соотношении (и аналогично для x_2):

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial w}{\partial r}\cos\vartheta - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\sin\vartheta \\ \frac{\partial w}{\partial x_2} = \frac{\partial w}{\partial r}\sin\vartheta + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\cos\vartheta \end{cases} \tag{7.12}$$

Окончательно, запишем уравнение (7.8) в полярных координатах:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\,\mu(r,\vartheta)\frac{\partial w}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left[\mu(r,\vartheta)\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\right] + I(t) = \rho(r,\vartheta)\frac{\partial w}{\partial t} \tag{7.13}$$

Запишем в полярных координатах граничные условия (7.9) и (7.10):

$$\begin{cases} w(\rho) = w_0(\rho,t) \\ w(r,\vartheta,0) = f(r,\vartheta) \end{cases} \tag{7.14}$$

Получили постановку задачи в полярных координатах.

3. Установившееся движение.

Поставим более простую задачу: будем считать, что течение установившееся, а жидкость однородная. Тогда частные производные по времени пропадают:

$$\frac{\partial w}{\partial t} \equiv 0; \quad I = const \tag{7.15}$$

Уравнение Навье-Стокса в данной постановке принимает вид:

$$\Delta w = -\frac{I}{\mu} \tag{7.16}$$

Получили классическое уравнение Пуассона. Также запишем граничные условия:

$$w|_\Gamma = w_0(y,t); \quad y \in \Gamma \tag{7.16}$$

Сделаем следующую замену:

$$w(x_1,x_2) = \psi(x_1,x_2) - \frac{I}{4\mu}(x_1^2 + x_2^2) \tag{7.17}$$

С учётом замены получаем:

$$\Delta\psi = 0; \quad \psi|_\Gamma = w_0(y) + \frac{I}{4\mu}(x_1^2 + x_2^2) \tag{7.18}$$

Рассмотрим цилиндрическую трубу радиуса – а. Будем полагать:

$$w_0(y) \equiv 0$$

Получаем соотношение из (7.18):

$$\begin{cases} \psi|_\Gamma = \frac{Ia}{4\mu} \\ \Delta\psi = 0 \end{cases} \Rightarrow w(x_1,x_2) = \frac{I}{4\mu}(a^2 - r^2) \tag{7.19}$$

Единственное решение, которое мы получим:

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\psi = \frac{Ia^2}{4\mu}$$

Это параболоид вращения с наибольшей скоростью в центре и с нулевой на границе.

Мы можем найти среднюю скорость при постоянном перепаде давления. Будем считать, что жидкость однородная, сечение – круговое и постоянное. Данный вопрос будет разобран на следующей лекции.

Лекция 8

1. Уравнение Рейнольдса.

Уравнение Рейнольдса получается из уравнения Навье-Стокса и имеет вид:

$$-\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{\tau_{ik}}-\rho\,\overline{v_i^* v_k^*}\right)+\rho\bar{F}_i=\frac{\partial \rho\bar{v}_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho\,\bar{v}_i\bar{v}_k\right) \tag{8.1}$$

Один из подходов к решению (8.1) – представить второе слагаемое через средние деформации:

$$\widetilde{\tau_{ik}}=\overline{\tau_{ik}}-\rho\,\overline{v_i^* v_k^*}=(\mu+\mu_1)\bar{e}_{ik}=(\mu+\mu_1)\frac{1}{2}\left(\bar{v}_{i,k}+\bar{v}_{k,i}\right)$$

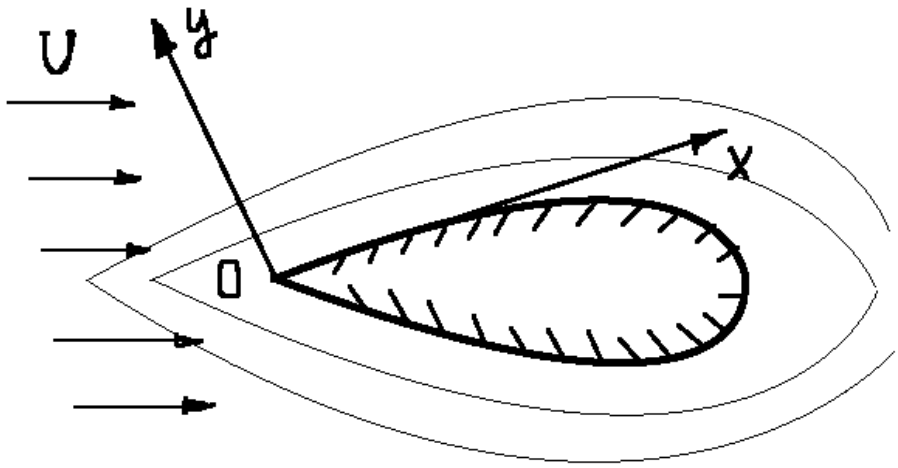
При раскрытии данного выражения, получим:

$$\tau_{ik}=\mu\bar{e}_{ik};\quad -\rho\,\overline{v_i^* v_k^*}=\mu_1\bar{e}_{ik}$$

Данное предположение основано на экспериментах.

2. Ламинарный пограничный слой.

Пусть имеется тело и набегающий на него поток (Рис. 8.1). Введём декартовую систему координат Oxy.



(Рис. 8.1)

Будем рассматривать вязкую, несжимаемую, однородную жидкость. При таких условиях, очевидно, уравнение неразрывности выполняется:

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\,div(\vec{u})=0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{v}\,grad\,\rho+\rho\,div\,\vec{v}=0$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Каждое из слагаемых, в силу условий, накладываемых на жидкость, равно нулю.

Рассмотрим уравнение прилипания, будем полагать, что $u = v_x, v = v_y$:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \tag{8.2}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \tag{8.3}$$

Нам также потребуется уравнение несжимаемости:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{8.4}$$

Получили полную систему уравнений.

Введём характерные величины:

$L -$ характерный размер по Ox (задан), $\delta -$ характерный размер по Oy (определяем),

$U -$ характерная скорость по Ox (задана), $V -$ характерная скорость по Oy (опр.),

$T -$ характерное время (определяем), П – характерное давление.

Оценим порядок величин в полученной системе:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = O\left(\frac{U}{L}\right); \quad \frac{\partial v}{\partial y} = O\left(\frac{V}{\delta}\right)$$

Из уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow O\left(\frac{U}{L}\right) = O\left(\frac{V}{\delta}\right) \Rightarrow \frac{U}{L} = \frac{V}{\delta}$$

$$V = \frac{U\delta}{L} = U\varepsilon \tag{8.5}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \ll 1 \tag{8.6}$$

$$v = O\left(\frac{U\delta}{L}\right) \tag{8.7}$$

3. Оценка слагаемых.

Рассмотрим уравнения (8.2) и (8.3) и оценим порядок слагаемых:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = O\left(U\frac{U}{L}\right) = O\left(\frac{U^2}{L}\right)$$

$$v\frac{\partial u}{\partial y} = O\left(\frac{U\delta}{L}\frac{U}{\delta}\right) = O\left(\frac{U^2}{L}\right)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = O\left(\frac{U}{T}\right) = O\left(\frac{U^2}{L}\right)$$

Из последнего соотношения непременно следует:

$$T = \frac{L}{U} \tag{8.8}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = O\left(\frac{\Pi}{\rho L}\right) = O\left(\frac{U^2}{L}\right)$$

Аналогично получим:

$$\Pi = \rho U^2 \tag{8.9}$$

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = O\left(\frac{\nu U}{L^2}\right) = O\left(\frac{U^2}{L}\frac{\nu}{UL}\right)$$

Используем соотношение:

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{\rho UL}{\mu}$$

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = O\left(\frac{U^2}{L}\frac{1}{Re}\right)$$

Продолжим оценивать порядок в соотношении (8.2):

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = O\left(\frac{\nu V}{\delta^2}\right) = O\left(\frac{U^2}{L}\frac{\nu L}{U\delta^2}\right) = O\left(\frac{U^2}{L}\frac{\nu}{UL}\frac{1}{\varepsilon^2}\right) = O\left(\frac{U^2}{L}\frac{1}{Re\,\varepsilon^2}\right)$$

Получаем:

$$Re\,\varepsilon^2 = 1 \implies \varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{1}{\sqrt{Re}} \tag{8.10}$$

Из (8.6) и (8.10) следует, что в (8.2) можно пренебречь слагаемым - $\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Будем оценивать порядок слагаемых в (8.3):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = O\left(\frac{V}{T}\right) = O\left(\frac{U\delta}{L}\frac{U}{L}\right) = O\left(\frac{U^2}{L}\varepsilon\right) = O\left(\frac{U^2}{L}\frac{1}{\sqrt{Re}}\right)$$

$$v\frac{\partial v}{\partial x} = O\left(U\frac{V}{L}\right) = O\left(\frac{U}{L}\frac{U\delta}{L}\right) = O\left(\frac{U^2}{L}\frac{1}{\sqrt{Re}}\right)$$

$$v\frac{\partial v}{\partial y} = O\left(U\varepsilon\,U\frac{\varepsilon}{\delta}\right) = O\left(\frac{U^2}{L}\varepsilon^3\right) = O\left(\frac{U^2}{L}\frac{1}{Re\sqrt{Re}}\right)$$

$$\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = O\left(\frac{V}{L^2}\frac{U\delta}{L}\right) = O\left(\frac{U^2}{L}\frac{1}{Re\sqrt{Re}}\right)$$

$$\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = O\left(\frac{1}{\delta^3}\frac{U\delta}{L}\right) = O\left(\frac{U^2}{L}\frac{1}{Re\sqrt{Re}}\right)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = O\left(\frac{\rho U^2}{\rho\delta}\right) = O\left(\frac{U^2}{L}\frac{1}{\varepsilon}\right) = O\left(\frac{U^2}{L}\sqrt{Re}\right)$$

Аналогично из (8.6) и (8.10) следует, что мы можем пренебречь в (8.3) всеми слагаемыми, кроме первого.

4. Уравнения Прандтля.

Тогда, из (8.2), (8.3) и (8.4) получим:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Данная система является уравнениями Прандтля.

Из второго уравнения системы следует: $P = P(x)$.

Воспользуемся тем фактом, что вдали от обтекаемого тела, жидкость подчиняется уравнению Эйлера:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x}$$

Подставим это уравнение в первое уравнение системы, чтобы исключить давление из системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Необходимо добавить начальные условия и граничные условия. Считаем, что U определено на бесконечности. Тогда, из системы необходимо найти продольную и поперечную составляющие скорости.

$$u(x, y, 0) = u_*(x, y)$$

$$v(x, 0, t) = u(x, 0, t) = 0$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$u(x, y, t) \to U(x, t), y \to \infty$$

$$u(x_0, y, t) = u_0(y, t)$$

Лекция 9

1. Пограничный слой.

На прошлой лекции из уравнений прилипания и несжимаемости была составлена система уравнений:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Далее мы использовали оценку отдельных слагаемы данного уравнения. После, пренебрегли малыми величинами вследствие оценки и получили систему уравнений Прандтля:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Воспользовались тем фактом, что вдали от обтекаемого тела, жидкость подчиняется уравнению Эйлера:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x}$$

Подставили это уравнение в первое уравнение системы, чтобы исключить давление из системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Для разрешения данной системы были добавлены граничные и начальные условия:

$$u(x, y, 0) = u_*(x, y)$$

$$v(x, 0, t) = u(x, 0, t) = 0$$

$$u(x, y, t) \to U(x, t), y \to \infty$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$u(x_0, y, t) = u_0(y, t)$$

Рассмотрим какой вид приобретут уравнения в стационарном случае (зависимость от времени отсутствует):

$$\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = U\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{9.1}$$

Введём функцию тока:

$$\psi: \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Тогда система уравнений примет иной вид (выполнение второго уравнения очевидно):

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \tag{9.2}$$

Справедливы соотношения:

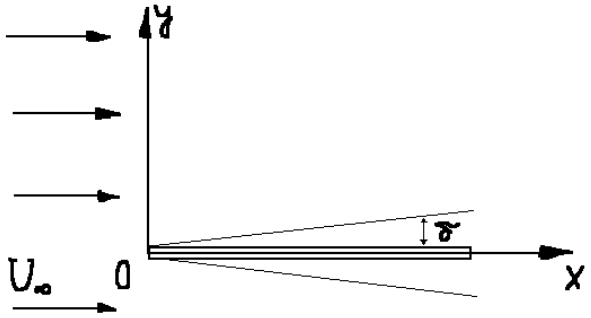
$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right|_{y=0} = 0; \quad \left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{y=0} = 0 \Rightarrow \psi(x, 0) = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \to U(x), \qquad y \to \infty$$

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right|_{x=0} = U_0(y)$$

2. Задача Блазиуса.

Пусть имеется бесконечно тонкая пластина, на которую набегает поток (Рис. 9.1). Будем полагать, что течение до рассмотрения и после – установившееся. Введём декартовую систему координат, согласно рисунку.



(Рис. 9.1)

Будем считать, что пограничный слой существует и справедлива оценка:

$$\delta = \sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}} \sim \sqrt{\nu t}$$

Тогда, обосновано предположение, что толщина пограничного слоя есть функция, зависящая от x, изображено на рисунке тонкой линией:

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \tag{9.3}$$

Введём безразмерную переменную:

$$\eta = \frac{y}{\delta} = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \tag{9.4}$$

Полученное выражение содержит отношение двух независимых переменных. Решение данного уравнения называется автомодельным решением. Для его поиска введём:

$$\psi = \sqrt{\nu x U_\infty} f(\eta) \tag{9.5}$$

Нас интересует выражение:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \sqrt{\nu x U_\infty}\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty \dot{f}(\eta) \tag{9.6}$$

Аналогично:

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}}\left(\eta \dot{f} - f\right) \tag{9.7}$$

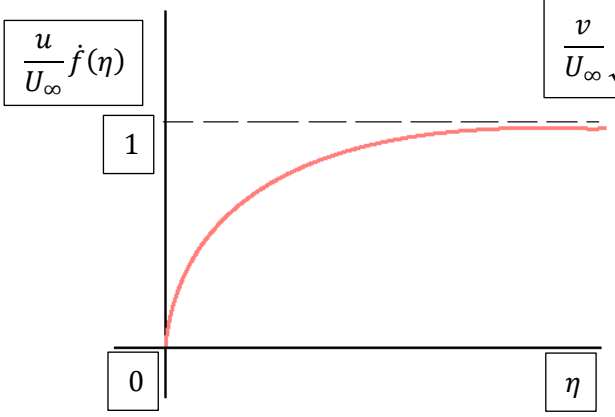
При вычислении последующих слагаемых получим выражение:

$$2\dddot{f} + f\ddot{f} = 0 \tag{9.8}$$

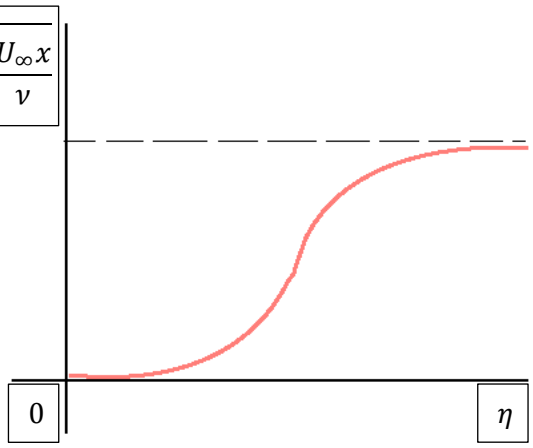
Данное уравнение не имеет аналитических решений. К нему необходимо добавить:

$$f(0) = 0;\ \ \dot{f}(0) = 0;\ \ \dot{f}(\eta) \to 1 \text{ при } \eta \to \infty$$

Качественно полученные зависимости для скоростей можно изобразить на (Рис. 9.2) и (Рис. 9.3).



(Рис. 9.2)



(Рис. 9.3)

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 10

1. Газовая динамика.

В предыдущих лекциях мы часто полагали, что жидкость несжимаема. Во многих задачах это допущение корректно, так как для сжатия жидкости требуется большое давление. Однако, для газов данное предположение не будет корректным, так как сжимаемость газа – одно из его основных свойств. Также в задачах с жидкостью мы не учитывали влияние температуры. В газах же придётся её учитывать.

Ещё одна отличительная способностью газовой динамики заключается в том, что многие параметры могут меняться скачкообразно. Если подобное случается на поверхности разрыва, то такие поверхности называют поверхностями сильного разрыва. Если данный факт справедлив только для производных величин, то поверхность называют поверхностью слабого разрыва.

2. Условия на поверхностях разрыва.

Условимся, что для каждого параметра можно ввести плотность. Тогда, элемент массы можно воспринимать так:

$$dm = \rho dV$$

Подобное представление справедливо и для других параметров системы. Из закона сохранения массы:

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{m}\int\limits_{V(t)} \rho dV = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d\rho}{dt} + \rho\, div\, \vec{v} = 0 \tag{10.1}$$

Из закона сохранения количества движения:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \rho\vec{v}\, dV = \int\limits_{V(t)} \rho\vec{F}\, dV + \int\limits_{\Sigma} \vec{P}^{(n)}\, d\Sigma \tag{10.2}$$

Из (10.2) получаем:

$$\frac{1}{\rho}\,\nabla_j\sigma^{ij} + F^i = \frac{du^i}{dt} \tag{10.3}$$

Из закона сохранения момента количества движения:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \vec{r}\times\rho\vec{v}\, dV = \int\limits_{V(t)} \vec{r}\times\rho\vec{F}\, dV + \int\limits_{\Sigma} \vec{r}\times\vec{P}^{(n)}\, d\Sigma \tag{10.4}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Из (10.4), (10.1) и (10.3) получим симметрию тензора напряжений:

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ji} \tag{10.5}$$

Первое начало термодинамики:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\left(U + \frac{\vec{v}^2}{2}\right)dV = \int\limits_V \rho\left(\vec{F}\vec{v} + w\right)dV + \int\limits_V \left(\vec{P}^{(n)}\vec{v} - q^{(n)}\right)d\Sigma \tag{10.6}$$

Закон изменения энтропии:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \rho S\, dV = \int\limits_{V(t)} \rho\frac{w}{T}dV - \int\limits_{\Sigma} \frac{q^{(n)}}{T}d\Sigma + \int\limits_{V(t)} \left(\frac{W^*}{T} - \frac{qT_i}{T^2}\right)dV \tag{10.7}$$

Таким образом, мы вспомнили основные законы, которые будут использоваться в дальнейшем.

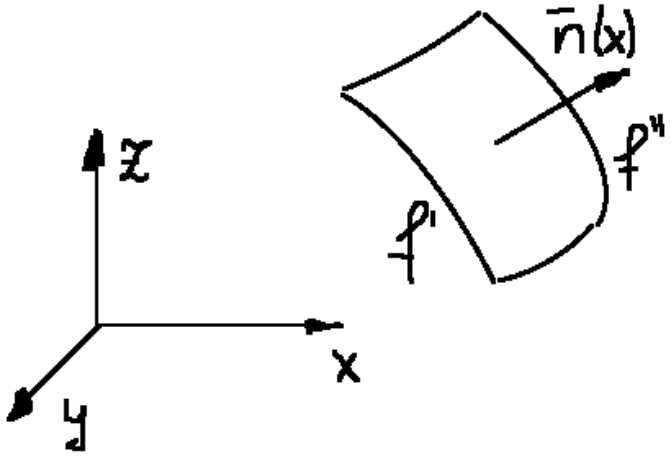
3. Действие законов на поверхности разрыва.

Заметим, что все законы имеют общий вид:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \rho a\, dV = \int\limits_{V(t)} \rho A\, dV + \int\limits_{\Sigma} B^{(n)}d\Sigma + \int\limits_{V(t)} C\, dV \tag{10.7}$$

Причём, величины в слагаемых имеют общее значение:

$A -$ источник a; $B^{(n)} -$ поток a; $C -$ производство a



(Рис. 10.1)

Пусть имеется поверхность разрыва (Рис. 10.1). Выберем на ней направление нормали $\vec{n}$. Условимся обозначать величины с двумя штрихами, если они находятся со стороны нормали, в противном случае - одним штрихом.

Рассмотрим величину f. Пусть уравнение поверхности задаётся:

$$\vec{r} = r(\alpha^1, \alpha^2, t)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$x_i = x_i(\alpha^1, \alpha^2, t)$$

Или неявно:

$$g(x_1, x_2, x_3, t) = 0$$

Тогда справедливо соотношение:

$$\vec{n} = \frac{grad\ g}{|grad\ g|}$$

Пусть D – скорость поверхности в рассматриваемой точке по направлению нормали. Откуда: $\vec{D} = D\vec{n}$.

В процессе движения поверхность остаётся неразрывна, следовательно:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \vec{D}\ grad\ g = 0$$

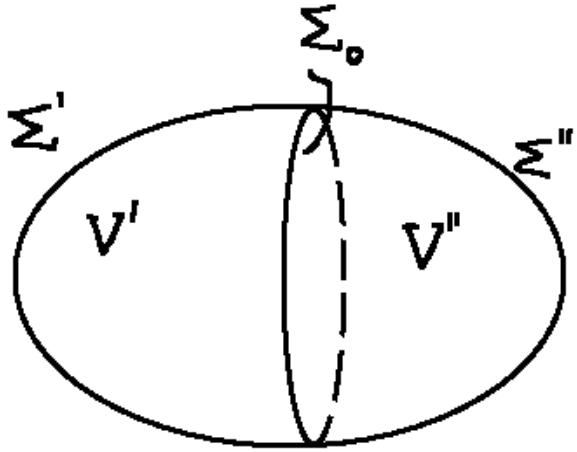
$$\frac{\partial g/\partial t}{|grad\ g|} + \vec{D}\,\vec{n} = 0$$

$$\frac{\partial g/\partial t}{|grad\ g|} = -\vec{D}\vec{n} = -D$$

Будем преобразовывать слагаемые в (10.7):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} f(x,t)\,dV = \int\limits_{V} \frac{\partial f}{\partial t}\,dV + \int\limits_{\Sigma} f v_{(n)}\ d\Sigma \qquad (10.8)$$

Рассмотрим замкнутую поверхность – Σ и её поверхность разрыва – Σ_0 (Рис. 10.2).



(Рис. 10.2)

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Рассмотрим части объёмов разделённые поверхностью разрыва:

$$V': \quad \frac{d}{dt}\int\limits_{V'} f\,dV = \int\limits_{V'} \frac{\partial f}{\partial t}\,dV + \int\limits_{\Sigma'} f v'_{(n)}\,d\Sigma + \int\limits_{\Sigma_0} f' D\,d\Sigma \tag{10.9}$$

$$V'': \quad \frac{d}{dt}\int\limits_{V''} f\,dV = \int\limits_{V''} \frac{\partial f}{\partial t}\,dV + \int\limits_{\Sigma''} f v''_{(n)}\,d\Sigma - \int\limits_{\Sigma_0} f'' D\,d\Sigma \tag{10.10}$$

Очевидно соотношение между нормалями на поверхности:

$$\vec{n}' = -\vec{n}"$$

Также очевидно:

$$V = V' \cap V" \to 0: \quad \Sigma' \to \Sigma_0, \Sigma" \to \Sigma_0$$

Тогда (10.9) можно переписать:

$$\int\limits_{\Sigma'} f v'_{(n)}\,d\Sigma \to \int\limits_{\Sigma_0} f' v'_{(n)}\,d\Sigma \tag{10.11}$$

$$\int\limits_{\Sigma"} f v"_{(n)}\,d\Sigma \to \int\limits_{\Sigma_0} f" v"_{(n)}\,d\Sigma \tag{10.12}$$

Окончательно получим:

$$\lim_{V\to 0}\frac{d}{dt}\int\limits_{V} f\,dV = \lim_{V\to 0}\int\limits_{V} \frac{\partial f}{\partial t}\,dV - \int\limits_{\Sigma_0} f'\left(v'_{(n)} - D\right)d\Sigma + \int\limits_{\Sigma_0} f"\left(v"_{(n)} - D\right)d\Sigma \tag{10.13}$$

Проведём аналогичные рассуждения для правой части (10.7):

$$\lim_{V\to 0}\frac{d}{dt}\int\limits_{V} f\,dV = \lim_{V\to 0}\int\limits_{V} \rho A\,dV + \int\limits_{\Sigma_0}\left(B"_{(n)} - B'_{(n)}\right)d\Sigma + \lim_{V\to 0}\int\limits_{V} C\,dV \tag{10.14}$$

Так как величины в интегралах по объёму ограничены, при $\lim\limits_{V\to 0}$ интегралы обнуляются. Получаем условие на поверхности разрыва:

$$\int\limits_{\Sigma_0}\{f"\,(v"_n - D) - f'\,(v'_n - D)\}\,d\Sigma = \int\limits_{\Sigma}\left(B"_{(n)} - B'_{(n)}\right)d\Sigma \tag{10.15}$$

Введём обозначение: скачок величины q - $[q]$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Из (10.15) получаем условие для f на поверхности разрыва:

$$f''\,(v''_n - D) - f'\,(v'_n - D) = B''_{(n)} - B'_{(n)} \tag{10.16}$$

Или, с учётом введённых обозначений:

$$[f v_n] - [f]D = [B_n] \tag{10.17}$$

Подставим величины:

$$f = \rho; B = 0: \quad \rho''\,(v''_n - D) = \rho'\,(v'_n - D) \;\Rightarrow\; [\rho v_n] - [\rho]D = 0 \tag{10.18}$$

Для закона сохранения количества движения:

$$f = \rho\vec{v};\; B_{(n)} = \overrightarrow{P_n} = \sigma_{ij} n_j \vec{e_i}: \quad \rho'[v_i](v'_n - D) = [\sigma_{ij}]n_j \tag{10.19}$$

Для закона сохранения энергии:

$$f = U;\; B_n = -q_{(n)}: \quad \rho'[U](v'_n - D) = -[q_i]n_i \tag{10.20}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 11

1. Основные законы на поверхности разрыва.

На прошлой лекции мы заметили, что все основные законы имеют общий вид:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \rho a\, dV = \int\limits_{V(t)} \rho A\, dV + \int\limits_{\Sigma} B^{(n)} d\Sigma + \int\limits_{V(t)} C\, dV$$

Причём, величины в слагаемых имеют общее значение:

$A -$ источник a; $B^{(n)} -$ поток a; $C -$ производство a

После преобразования данного закона, учитывая его действие на поверхности разрыва, получили соотношение:

$$[f v_n] - [f]D = [B_n]$$

Этот вывод мы начали применять для основных законов, используя соответствующие замены. В результате, были получены соотношения:

$$f = \rho; B = 0: \quad \rho''\,(v''_n - D) = \rho'\,(v'_n - D) \;\Rightarrow\; [\rho v_n] - [\rho]D = 0$$

$$f = \rho\vec{v};\; B_{(n)} = \overrightarrow{P_n} = \sigma_{ij} n_j \vec{e_i}: \quad \rho'[v_i](v'_n - D) = [\sigma_{ij}]n_j$$

$$f = U;\; B_n = -q_{(n)}: \quad \rho'[U](v'_n - D) = -[q_i]n_i$$

Однако, мы получили не все законы. Рассмотрим те, которые ещё не разобрали.

Для полной энергии (первое начало термодинамики):

$$f = \rho\left(U + \frac{\vec{v}^2}{2}\right);\; B_n = -q_{(n)}: \quad \rho'\left[U + \frac{\vec{v}^2}{2}\right](v'_n - D) = [\sigma_{ij} v_j - q_i]n_i \tag{11.1}$$

Для закона сохранения энтропии (второе начало термодинамики):

$$f = \rho S;\; B_n = -\frac{q_{(n)}}{T}: \quad \rho'[S]\left(v'_{(n)} - D\right) = -\left[\frac{q_i}{T}\right]n_i \tag{11.2}$$

2. Закон сохранения кинетической энергии.

Имеем уравнение движения:

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla_i \vec{P}^i + \rho\vec{F}; \quad \vec{P}^i = \sigma^{ij}\vec{e}_j \tag{11.3}$$

Умножим (11.3) на $d\vec{r} = \vec{v}dt$ и проинтегрируем по произвольному объёму:

$$\int\limits_V \rho\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}\, dt\, dV = \int\limits_V \rho\vec{F}\vec{v}\, dt\, dV + \int\limits_V \left(\nabla_i \vec{P}^i\right)\vec{v}\, dt\, dV \tag{11.4}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Будем преобразовывать слагаемые в (11.4).

$$\int\limits_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}\,dt\,dV = \int\limits_M \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}\,dt\,dm = \int\limits_M \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v}\vec{v})\,dt\,dm = d\int\limits_V \rho\frac{v^2}{2}\,dV = dK$$

$K -$ кинетическая энергия, определяемая соотношением:

$$K \equiv \int\limits_V \frac{\rho v^2}{2}\,dV \tag{11.5}$$

Следующее слагаемое связано с массовыми силами:

$$\int\limits_V \rho\vec{F}\vec{v}\,dt\,dV = \int\limits_V \rho\vec{F}\,d\vec{r}\,dV = \delta A_1^{(e)} \tag{11.6}$$

$\delta A^{(e)} -$ элементарная работа внешних сил на элементарном перемещении в объёме – V.

Преобразуем последнее слагаемое:

$$\int\limits_V \left(\nabla_i\vec{P}^i\right)\vec{v}\,dt\,dV = \int\limits_V \left[\nabla_i\left(\vec{P}^i\vec{v}\right) - \vec{P}^i\nabla_i\vec{v}\right]dt\,dV = \int\limits_\Sigma \vec{P}^i\vec{v}n_i\,dt\,d\Sigma - \int\limits_V \sigma^{ij}\nabla_i v_j\,dt\,dV$$
$$= \delta A_{\text{пов}}^{(i)} + \delta A_2^{(e)}$$

Где $\delta A_2^{(e)} = \int_V \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij}\,dV$

Окончательно получаем выражение из (11.4):

$$dK = \delta A^{(e)} + \delta A_{\text{пов}}^{(i)}$$

3. Адиабатическое установившееся течение идеального совершенного газа.
Рассматриваемое движение исключает приток тепла извне и внутренний приток тепла, при котором энтропия постоянна. В данном случае, учитывая, что газ совершенный, нетрудно установить соотношение для его давления:

$$\begin{cases} P = P_0 e^{(S-S_0)/C_V}\left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma & (11.7) \\ P = \rho RT & (11.8) \end{cases}$$

Где $\gamma = \frac{C_P}{C_V} > 0$

Тогда из данного соотношения можно получить соотношение для температуры:

$$RT = \frac{P_0}{\rho}e^{(S-S_0)/C_V}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \tag{11.9}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Формула Майера:

$$C_P - C_V = R$$

Справедливо соотношение:

$$\Pi = \int_{P_0}^{P} \frac{dP}{\rho(P)} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho} = C_P T \tag{11.10}$$

Формула следует из (11.7) и преобразования с использованием (11.8):

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho} = \frac{C_P}{C_V\left({C_P}/{C_V} - 1\right)}\frac{P}{\rho} = \frac{C_P}{R\rho}P = \frac{C_P}{R\rho}\,\rho RT = C_P T$$

4. Интеграл Бернулли.

Течение установившееся, следовательно справедлив интеграл Бернулли:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho} = i^* \equiv const \tag{11.11}$$

Или с учётом (11.10):

$$\frac{v^2}{2} + C_P T = i^* \equiv const$$

Из данных соотношений можно сделать вывод:

Если $v -$ растёт, то $P, \rho, T -$ убывают. Справедливо и обратное утверждение

v может убывать до нуля. Точка, в которой $v = 0$ называется точкой торможения. Параметры торможения обозначаются со звездой. При этом, справедливо следующее:

$$C_P T^* = i^* \tag{11.12}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P^*}{\rho^*} = i^* \tag{11.13}$$

Если $P = 0$, то $v = v_{max}$. И справедливо:

$$\frac{v^{*2}}{2} = i^* \tag{11.14}$$

Сравнивая (11.14) с (11.11) получаем следующее соотношение:

$$v_{max} = \sqrt{2C_P T^*} \tag{11.15}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 12

1. Идеальный совершенный газ.

Утверждение, что газ идеальный, равносильно выполнению соотношения:

$$\sigma^{ij} = -Pg^{ij}$$

Аналогично, утверждение, что газ совершенный, равносильно выполнению соотношения:

$$P = \rho RT \tag{12.1}$$

Первый закон термодинамики представляется следующим образом:

$$dU = \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij} + TdS \tag{12.2}$$

В случае совершенного идеального газа (12.2) принимает вид:

$$dU = -Pg^{ij} de_{ij} dt + TdS = -P\nabla_i v^i dt + TdS = -P\, div\, \vec{v} + TdS$$

Из уравнения неразрывности:

$$div\, \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

Тогда, уравнение идеального газа можно переписать, с учётом уравнения неразрывности:

$$dU = \frac{P}{\rho} d\rho + TdS \tag{12.3}$$

Откуда следует:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial U}{\partial S} dS \tag{12.4}$$

Сравнивая (12.3) и (12.4), получим:

$$\frac{P}{\rho} = \frac{\partial U}{\partial \rho}; \quad T = \frac{\partial U}{\partial S} \tag{12.5}$$

В полученных соотношениях используем (12.1):

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = RT = R\frac{\partial U}{\partial S}$$

Можем получить уравнение для внутренней энергии:

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} - R\frac{\partial U}{\partial S} = 0 \tag{12.6}$$

Примем и проверим следующее решение для U:

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$U(\rho, S) = C_V \rho_0 T_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} e^{\frac{S-S_0}{C_V}} + const \tag{12.7}$$

Проверка осуществляется непосредственной подстановкой (12.7) в (12.6).

Из (12.5) и (12.7) получим зависимости для давления и температуры:

$$P = P_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} e^{\frac{S-S_0}{C_V}} \tag{12.8}$$

$$T = T_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} e^{\frac{S-S_0}{C_V}} \tag{12.9}$$

$C_V -$ теплоёмкость при постоянном объёме, $C_P -$ теплоёмкость при постоянном давлении, $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$. Также, напомним, что справедлива формула Майера:

$$C_P - C_V = R \tag{12.10}$$

Используя (12.8) и (12.9), перепишем (12.7):

$$U = C_V T + const \tag{12.11}$$

2. Установившееся движение газа.

Рассмотрим установившееся движение газа. Массовыми силами пренебрежём. Газ идеальный, следовательно справедлив закон Бернулли. Напомним, что справедливо соотношение:

$$\Pi = \int_{P_0}^{P} \frac{dP}{\rho(P)}$$

Для нахождения П используем (12.8) и окончательно получим:

$$\Pi = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho} = C_P T \tag{12.12}$$

Запишем интеграл Бернулли вдоль линии тока:

$$\frac{v^2}{2} + \Pi = i^* \tag{12.13}$$

Используем (12.12):

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho} = i^* \tag{12.14}$$

$$\frac{v^2}{2} + C_P T = i^* \tag{12.15}$$

Напомним вывод, полученный ранее:

Если $v -$ растёт, то $P, \rho, T -$ убывают. Справедливо и обратное утверждение.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

v может убывать до нуля. Точка, в которой $v = 0$ называется точкой торможения. Параметры торможения обозначаются со звездой.

$$C_P T^* = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P^*}{\rho^*} = i^* \tag{12.16}$$

Если $P = 0$, то $v = v_{max}$. И справедливо:

$$\frac{v^{*2}}{2} = i^* \tag{12.17}$$

Из данных соотношений получаем следующее соотношение:

$$v_{max} = \sqrt{2C_P T^*} \tag{12.18}$$

Местная скорость звука определяется соотношением:

$$a = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$$

Из (12.8) следует, что местная скорость звука всегда определена. Найдём её в данном случае:

$$a = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\gamma\frac{P}{\rho}} = \sqrt{\gamma R T} \tag{12.19}$$

Для скорости звука торможения из (12.19):

$$a^* = \sqrt{\gamma R T^*} \tag{12.20}$$

Заметим, что возможна ситуация, когда $v = a$, тогда $v = v_{\text{кр}}, a = a_{\text{кр}}$.

Запишем (12.14) в виде:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} = i^* \tag{12.21}$$

$$\frac{v_{\text{кр}}^2}{2} + \frac{v_{\text{кр}}^2}{\gamma-1} = i^* \;\Rightarrow\; i^* = \frac{a_*^2}{\gamma-1} = \frac{v_{max}^2}{2} \tag{12.22}$$

Откуда:

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}a^* = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}v_{max} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}2C_P T_*} \tag{12.23}$$

Пример:

Положим $T = 288\ K = 15°C;\ \gamma = 1{,}4$. Тогда, получим:

$$a_* = 340\frac{\text{м}}{\text{с}};\quad v_{max} = 756\frac{\text{м}}{\text{с}};\quad v_{\text{кр}} = 310\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

3. Сопло Лаваля.

Число Маха определяется следующим образом:

$$M = \frac{v}{a}$$

Введём ещё одно безразмерное число:

$$\lambda = \frac{v}{v_{\text{кр}}}$$

Выразим формулы для давления, плотности и температуры через введённые числа:

$$P = P^*\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = P^*\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{12.24}$$

$$\rho = \rho^*\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = P^*\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \tag{12.25}$$

$$P = T^*\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{1} = T^*\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1} \tag{12.26}$$

Полагают при $v < a$ – скорость дозвуковой, в противном случае, сверхзвуковой.

Запишем уравнение Эйлера в форме Громэки-Лэмба в случае установившегося движения:

$$-\frac{1}{\rho}grad\ P = \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{2}grad\ v^2 - 2\vec{w}\times\vec{v} = \frac{1}{2}grad\ v^2 - 2\vec{w}\times\vec{v}$$

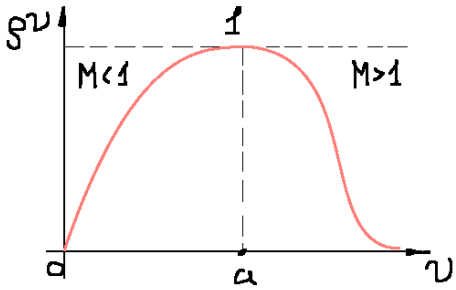
Спроектируем это на линию тока и получим:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial l} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial l}$$

$$vdv = -\frac{\partial P}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\rho}$$

Окончательно получим:

$$d(\rho u) = \rho(1 - M^2)dv \tag{11.27}$$



(Рис. 12.1)

На основе анализа (11.27) получаем схематичную зависимость (Рис. 12.1).

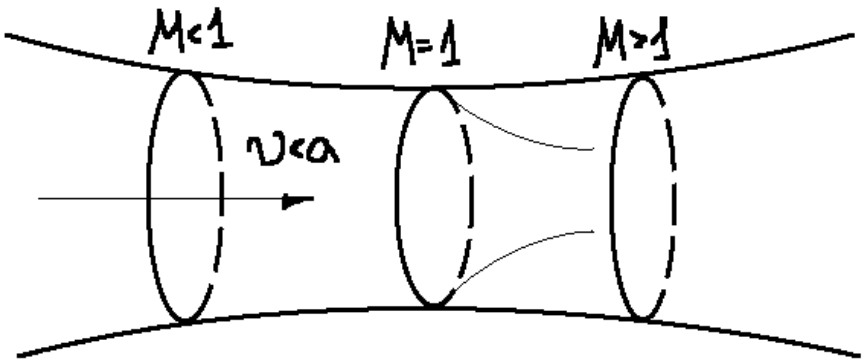
Рассмотрим трубку тока и поток газа в ней (Рис. 12.2). Положим $v < a$. Предположим, что справедлив закон сохранения массы: $F_1\rho_1 v_1 = F_2\rho_2 v_2$. При этом

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

допущении:

$$F = \frac{const}{\rho v} \tag{11.28}$$

При сужении сечения скорость будет падать, но ρu будет возрастать. Тогда при увеличении сечения, при анализе (11.27) и (11.28), скорость может достигать сверхзвуковой. Такое устройство имеет название сопло Лаваля. С помощью него скорость потока может достигать до 10 махов.



(Рис. 12.2)

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ