МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МЕХАНИКА КОМПОЗИТОВ. ЧАСТЬ 2

ГОРБАЧЕВ
ВЛАДИМР ИВАНОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

Оглавление

Лекция 1. Новый метод решения уравнений с переменными коэффициентами. Уравнения эллиптического типа. 4

1.1 Уравнение эллиптического типа 4

1.2 Интегральная формула. 5

1.3 Представление решения исходного уравнения в виде ряда по производным от решения сопутствующего уравнения. Структурные функции. 6

1.4 Рекуррентные уравнения для структурных функций. 7

1.5 Проблема выбора сопутствующих коэффициентов. 10

1.6 Бесконечный в плане, неоднородный по толщине слой. 10

Лекция 2. Продолжение. Уравнения гиперболического типа. 12

2.1 Интегральная формула. 13

2.2 Коэффициенты сопутствующего гиперболического уравнения. 14

Лекция 3. Продолжение. Уравнения гиперболического типа. 15

3.1 Случаи аналитического интегрирования структурных уравнений. 15

3.2 Случай зависимости коэффициентов от одной пространственной координаты. 15

Лекция 4. Случай зависимости коэффициентов уравнения только от одной координаты, или от времени. Дифференциальные уравнения второго порядка самого общего вида. 17

4.1 Случай зависимости исходных коэффициентов только от времени. 17

4.2 Дифференциальные уравнения общего вида. 18

Лекция 5. Связанная задача термоупругости композитов для неоднородного стержня с переменным сечением. Постановка задачи. Интегральная формула. 20

5.1 Исходная и сопутствующая задачи. 20

5.2 Интегральные формулы представления решения исходной задачи через решение сопутствующей задачи. 21

Лекция 6. Продолжение. Связанная задача термоупругости. О скорости распространения тепла в стержне. Случаи конечной и бесконечной скорости. 23

6.1 Представление в виде рядов. Структурные функции. 23

6.2 Формулы для напряжения, количества движения, потока тепла и энтропии. 25

6.3 Основные и дополнительные эффективные коэффициенты. 26
6.4 Обобщенное уравнение распространения тепла в однородном стержне. . . 27
6.5 Предельная скорость распространения тепла. 27

Лекция 7. Метод получения интегральных формул для решения обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Интегральная формула для фундаментальной функции. 29
7.1 Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. 29
7.2 Методы решения фундаментального уравнения 34

Лекция 8. Инженерная теория сопротивления стержней из композиционных материалов (сопромат для композитов). Уравнения Журавского. 40
8.1 Связи между внешними и внутренними силами в стержне. 40

Лекция 9.Продолжение сопромата для композитов. Кинематические гипотезы Китхгофа-Лява, Тимошенко, Рейснера (2 типа). 45
9.1 Гипотеза плоских сечений. 45

Лекция 10.Продолжение сопромата для композитов. Уравнения для статически определимых и статически неопределимых стержней с переменными характеристиками по длине стержня. 49
10.1 Дифференциальные уравнения для перемещений осевой линии. 49

Лекция 11.Сопромат для композитов (продолжение). Случай неоднородного сечения стержня. 51
11.1 Теория стержня неоднородного в поперечном сечении. Исходные посылки для построения инженерной теории изгиба неоднородного стержня. . . . 51

Лекция 12.Сопромат для композитов (продолжение). Определяющие соотношения теории Бернулли-Эйлера. 53
12.1 Определяющие соотношения теории балки Бернулли-Эйлера. 53
12.2 Обращение определяющих соотношений теории балки Бернулли-Эйлера. 54

Лекция 13.Сопромат для композитов (продолжение). Случай слоистого стержня. 55
13.1 Кинематическая гипотеза при изгибе неоднородного стержня. 55

Лекция 14.Сопромат для композитов (продолжение). Случай стержня из композиционного материала. 59
14.1 Дифференциальные уравнения изогнутой оси неоднородного стержня. . 59

Лекция 15.Сопромат для композитов (продолжение). Случай произвольно неоднородного стержня. Теория композитных пластин. 63
15.1 Решение вспомогательных задач в поперечном сечении. 63
15.2 Решение конкретных задач об изгибе слоистого стержня. 68
Список литературы 69

Лекция 1. Новый метод решения уравнений с переменными коэффициентами. Уравнения эллиптического типа.

1.1 . Уравнение эллиптического типа

$$\boldsymbol{L(u) + X(x) = 0\,; \qquad L(u) \equiv \left[C_{ij}(x)\, u_{,j}\right]_{,i}\,; \qquad x(x_1, x_2, x_2) \in V} \tag{1.1}$$

Уравнение (1.1) назовём исходным уравнением. Коэффициенты $C_{ij}(x)$ — кусочно-гладкие функции. Матрица $[C_{ij}]$ — симметричная и положительно определённая в каждой точке гладкости коэффициентов. Уравнение (1.1) понимается в обобщенном смысле, либо в классическом смысле в областях непрерывности коэффициентов, а на поверхностях разрыва выполняются условия идеального контакта. **В зависимости от физического смысла коэффициентов уравнение (1.1) является уравнением стационарного распределения температуры, диффузии, электростатики, магнитостатики. Искомая величина $\mathbf{u(x)}$ может быть как скалярной так и векторной функцией с компонентами $\mathbf{u_1, u_2, u_3}$, при этом каждый из коэффициентов $\mathbf{C_{ij}}$ является матрицей $\mathbf{\underset{\sim}{C}_{ij}}$ вида:**

$$\underset{\sim}{C}_{ij} = [C_{kilj}] = \begin{bmatrix} C_{1i1j} & C_{1i2j} & C_{1i3j} \\ C_{2i1j} & C_{2i2j} & C_{2i3j} \\ C_{3i1j} & C_{3i2j} & C_{3i3j} \end{bmatrix}$$

В этом случае $\underset{\sim}{C}_{ij} = \underset{\sim}{C}^T_{ji}$. Здесь верхний индекс T означает транспонирование.

Наряду с исходным уравнением (1.1) с переменными коэффициентами в области V рассмотрим уравнение того же типа, что и исходное, но с постоянными коэффициентами

$$\begin{gathered} \boldsymbol{L^o(v(x)) + X(x) = 0\,; \qquad L^o(v(x)) \equiv C^o_{ij}\, v_{,ij}(x)\,;} \\ \boldsymbol{C^o_{ij} = const.\,; \qquad x(x_1, x_2, x_2) \in V} \end{gathered} \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) будем называть сопутствующим уравнением. Соответственно L^o — сопутствующий оператор, C^o_{ij} — сопутствующие коэффициенты.

Объёмные нагрузки в исходном и сопутствующем уравнениях одинаковы. Если рассматривается краевая задача, то граничные условия в исходной и

сопутствующей задачах также одинаковы

$$\begin{gathered} C_{ij}(y)u_j(y)n_i = C^o_{ij}v_j(y)n_i = P^0(y)\,, \quad y \in \Sigma_p\,; \\ u(y) = v(y) = u^0(y)\,, \quad y \in \Sigma_u\,; \qquad \Sigma_p \cup \Sigma_u = \Sigma \end{gathered} \tag{1.3}$$

Коэффициенты C^o_{ij} сопутствующего уравнения (1.2), в общем случае, являются любыми физически допустимыми величинами и пока никак не связаны с коэффициентами $C_{ij}(x)$ исходного уравнения.

Пусть далее $\mathbf{G}(\mathbf{x},\xi)$ — функция Грина исходной краевой задачи. То есть, она удовлетворяет неоднородному уравнению и однородным граничным условиям

$$\begin{gathered} \left[C_{ij}(x)\,G_{,j}(x,\xi)\right]_{,i} = -\delta(x-\xi)\,; \\ G(y,\xi) = 0\,, \quad y \in \Sigma_u\,; \qquad C_{ij}(y)G_{,j}(y,\xi)n_i = 0\,, \quad y \in \Sigma_p \end{gathered} \tag{1.4}$$

где $\delta(x-\xi) = \delta(x_1-\xi_1)\delta(x_2-\xi_2)\delta(x_3-\xi_3)$ — дельта-функция Дирака.

1.2 Интегральная формула.

Используя функцию Грина $G(x,\xi)$ представим решение $u(x)$ исходной задачи через решение $v(x)$ сопутствующей задачи в виде следующей интегральной формулы:

$$\boxed{u(x) = v(x) + \int\limits_V G_{|i}(x,\xi)\Big[C^o_{ij} - C_{ij}(\xi)\Big]\,v_{|j}(\xi)\,dV_\xi} \tag{1.5}$$

Довольно просто можно вывести формулу (1.5) из известной формулы Грина, которая в свою очередь выводится из теоремы взаимности Бетти

$$u(x) = \int\limits_V G(x,\xi)X(\xi)dV_\xi + \int\limits_{\Sigma_p} G(x,\xi)P^0(\xi)d\Sigma_\xi - \int\limits_{\Sigma_u} C_{kl}(\xi)G_{|l}(\xi,x)n_k u^0(\xi)d\Sigma_\xi$$

В формуле Грина присутствую только входные данные и функция Грина, а в новой формуле — только сопутствующее решение и функция Грина, и никаких исходных данных. Следовательно, для того, чтобы выражение (1.5) удовлетворяло исходному уравнению с переменными коэффициентами достаточно, чтобы $\mathrm{G}(\mathrm{x},\xi)$ было бы любым фундаментальным решением исходного уравнения (1.1).

Не представляет труда получить из формулы (1.4) интегральную формулу для случая, когда u и v — векторы, а C_{ij} — матрицы вида $\underset{\sim}{C}_{ij} = [C_{kilj}]$ — компоненты тензора модулей упругости. В этом случае функция $G(x,\xi)$ Грина переходит в тензор Грина второго ранга $\underset{\sim}{G}(x,\xi)$. В векторном виде интегральная формула мало чем отличается от формулы (1.4), тем не менее, приведем ее здесь

$$\vec{u}(x) = \vec{v}(x) + \int\limits_V \underset{\sim}{G}_{|i}(x,\xi)\,\left[\underset{\sim}{C}^o_{ij} - \underset{\sim}{C}_{ij}(\xi)\right]\vec{v}_{|j}(\xi)\,dV_\xi\,;$$

$$\underset{\sim}{G} \equiv \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix}$$

В компонентной записи эта формула принимает вид:

$$u_k(x) = v_k(x) + \int\limits_V G_{km|i}(x,\xi)[C^o_{minj} - C_{minj}(\xi)]\, v_{n|j}(\xi)\, dV_\xi \tag{1.6}$$

Интегральная формула (1.6) представления решения статической задачи теории упругости для неоднородного анизотропного тела была впервые получена в 1991 году в работе [1].

1.3 Представление решения исходного уравнения в виде ряда по производным от решения сопутствующего уравнения. Структурные функции.

Для того, чтобы продвинуться дальше предположим, что функция $v(x)$ — гладкая функция в области V и разложим её в трёхмерный ряд Тейлора в окрестности точки ξ, так чтобы значение $v(\xi)$ выражалось через $v(x)$ и все её производные в точке x

$$v(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_{(n)i_1\dots i_n}(\xi,x) v_{,i_1\dots i_n}(x)\,,$$

$$\Pi_{(n)i_1\dots i_n}(\xi,x) \equiv \begin{cases} 0\,, & \text{при } n<0 \\ 1\,, & \text{при } n=0 \\ \frac{1}{n!}\left(\xi_{i_1}-x_{i_1}\right)\dots\left(\xi_{i_n}-x_{i_n}\right)\,, & \text{при } n>0 \end{cases}$$

После подстановки ряда Тейлора в интегральную формулу (1.4), получим разложение решения исходной задачи в ряд по всевозможным производным от решения сопутствующей задачи

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} N_{(n)i_1\dots i_n}(x)\, v_{,i_1\dots i_n} \tag{1.7}$$

где

$$N_{(n)i_1\dots i_n}(x) \equiv \delta_{n0} + \int\limits_V G_{|i}(x,\xi)\Big(C^o_{ii_n} - C_{ii_n}(\xi)\Big)\, \Pi_{(n-1)i_1\dots i_{n-1}}(\xi,x) dV_\xi \tag{1.8}$$

Здесь $\delta_{n0}=1$ при $n=0$, а при всех остальных случаях $\delta_{n0}=0$. Функция $N_{(0)}\equiv 1$.

Все остальные N-функции являются непрерывными функциями своих переменных. При $n<0$ полагаем, что N-функции тождественно равны нулю. N-функции зависят от того, каковы функции, определяющие зависимость коэффициентов от координат. Условно будем называть N-функции структурными функциями. Если коэффициенты исходного уравнения как-то стремятся к коэффициентам сопутствующего уравнения, то все структурные функции, кроме $N_{(0)}$, стремятся к нулю. **Если коэффициенты исходного уравнения являются периодическими функциями координат, то и структурные функции, вдали от границы тела, также будут периодическими**

функциями координат с теми же периодами. Вблизи границы тела имеется пограничный слой [2, стр. 36], [3, стр. 68], в котором структурные функции изменяются от своих периодических значений к граничным [4]. Толщина пограничного слоя порядка характерного размера ячейки периодичности и стремится к нулю с дроблением структуры.

1.4 Рекуррентные уравнения для структурных функций.

Чтобы найти уравнения для структурных функций, прежде всего, найдём $L(u)$, где u представлено рядом (1.7). Соберём коэффициенты при одинаковых производных от $v(x)$. В результате вместо исходного уравнения (1.1) получим уравнение бесконечного порядка относительно $v(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\Big[C_{ij}N_{(n)i_1\ldots i_n,j}+C_{ii_n}N_{(n-1)i_1\ldots i_{n-1}}\Big]_{,i}+ \\ +C_{i_nj}N_{(n-1)i_1\ldots i_{n-1},j}+C_{i_ni_{n-1}}N_{(n-2)i_1\ldots i_{n-2}}\Big\}v_{,i_1\ldots i_n}+X(x)=0 \tag{1.9}$$

Но функция $v(x)$ удовлетворяет сопутствующему уравнению (1.3), которое можно записать в виде

$$C^o_{i_2i_1}\,v_{,i_1i_2}+X(x)=0$$

По этой причине в бесконечной сумме (1.9) коэффициент при $v_{,i_1i_2}$ следует положить равным коэффициенту $C^o_{i_2i_1}$. Остальные же коэффициенты необходимо положить равными нулю. В результате получаем систему рекуррентных уравнений для структурных функций

$$\begin{aligned}
&\Big[C_{ij}N_{(1)i_1,j}+C_{ii_1}\Big]_{,i}=0\,;\\
&\Big[C_{ij}N_{(2)i_1i_2,j}+C_{ii_2}N_{(1)i_1}\Big]_{,i}+C_{i_2j}N_{(1)i_1,j}+C_{i_2i_1}=C^o_{i_2i_1}\,,\ \text{а при } n>2\\
&\Big[C_{ij}N_{(n)i_1\ldots i_n,j}+C_{ii_n}N_{(n-1)i_1\ldots i_{n-1}}\Big]_{,i}+C_{i_nj}N_{(n-1)i_1\ldots i_{n-1},j}+C_{i_ni_{n-1}}N_{(n-2)i_1\ldots i_{n-2}}=0
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Все эти уравнения имеют одинаковый вид:

$$\Big[C_{ij}(x)N_{(n)i_1\ldots i_n,j}(x)\Big]_{,i}=Q_{(n)i_1\ldots i_n}(x)\,, \tag{1.11}$$

где функция $Q_{(n)}$ при $n>2$ зависит от структурных функций из двух предыдущих рекурсий, то есть от $N_{(n-1)}$ и $N_{(n-2)}$.

Рассмотрим случай, когда все исходные коэффициенты предполагаются периодическими функциями с прямоугольной ячейкой периодичности Ω. Предположим, что область V состоит из большого числа одинаковых ячеек периодичности. **В этом случае структурные функции вдали от границы области будут периодическими функциями в каждой внутренней ячейке.**

Ниже приведены результаты решения первого из структурных уравнений (1.11) методом конечных элементов для случая бесконечного квадратного стержня, армированного квадратным волокном. Принято $C_{ij}(x_1, x_2) = \mu(x_1, x_2)\delta_{ij}$ — изотропный материал. В этом случае уравнение (1.11) принимает вид:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Big[\mu(x_1, x_2)\Big(N_{(1)i_1,i}(x_1, x_2) + \delta_{ii_1}\Big)\Big]_{,i} = 0\,, \quad N_{(1)i_1}\big|_{\Sigma} = 0 \;\Rightarrow\; N_{(1)3} \equiv 0} \\ \boldsymbol{N_{(1)1} = N_{(1)2} = N(x_1, x_2):} \quad \boxed{\boldsymbol{\Big[\mu\Big(N_{,1} + 1\Big)\Big]_{,1} + \Big(\mu N_{,2}\Big)_{,2} = 0}}\end{gathered} \tag{1.12}$$

Дробление структуры (волокнистый композит)

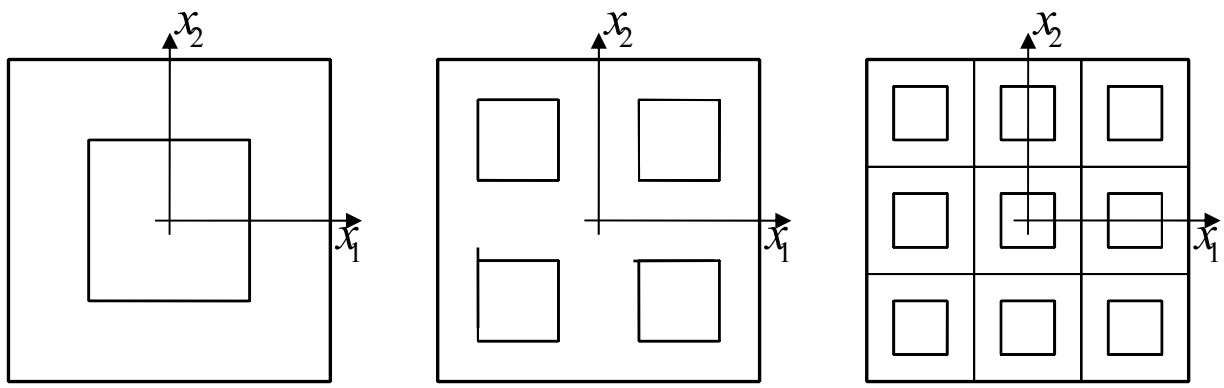
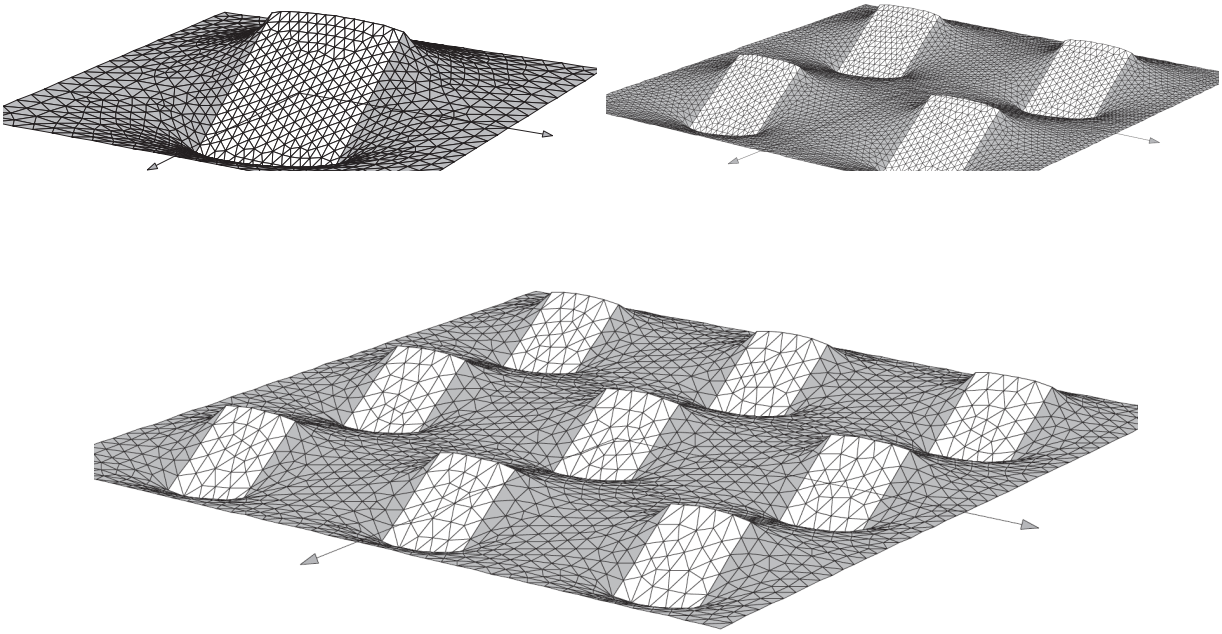
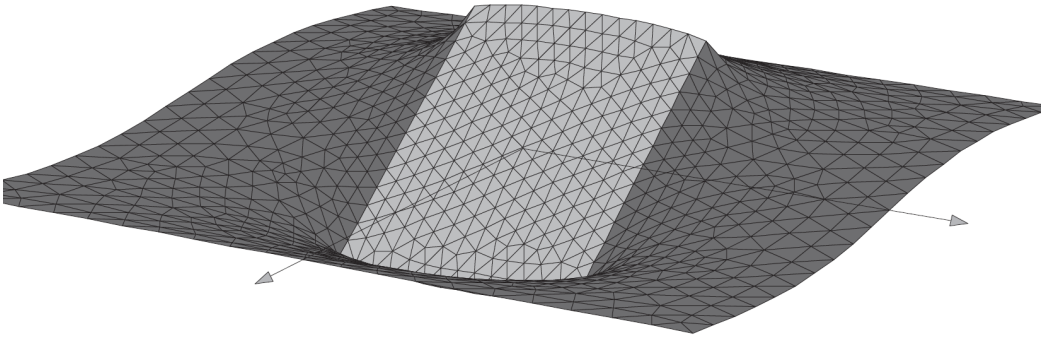


Рис. 1.1:

Поверхность функции $\mathbf{N(x_1, x_2)}$ при 1,4 и 9 включениях, $\mu_a/\mu_m = 10, v_a = v_m = 1/2$



Ниже на отдельном нижнем рисунке изображена функция $\mathbf{N(x_1, x_2)}$ в средней ячейке области составленной из 9 одинаковых квадратных ячеек с квадратными инородными включениями. Явно видна её периодичность по каждой из координат.



1.5 Проблема выбора сопутствующих коэффициентов.

В интегральную формулу и в рекуррентные уравнения входят постоянные сопутствующие коэффициенты C^o_{ij}. **Вообще это любые физически допустимые величины.** Свяжем выбор C^o_{ij} с характером зависимости исходных коэффициентов от координат.

Пусть **коэффициенты $C_{ij}(x)$ являются периодическими кусочно-гладкими функциями координат с прямоугольной ячейкой периодичности Ω**. В этом случае в рекуррентных уравнениях (1.10) коэффициенты в квадратных скобках являются непрерывными периодическими функциями координат. Усредним второе уравнение (1.10) в какой либо ячейке Ω и получим, **с необходимостью**, выражения для сопутствующих коэффициентов $C^o_{i_2 i_1}$ через структурные функции

$$\boldsymbol{C^o_{i_2 i_1} = \left\langle C_{i_2 j} N_{(1)i_1,j} + C_{i_2 i_1} \right\rangle_\Omega} \tag{1.13}$$

В общем случае непериодической зависимости исходных коэффициентов усреднение в формуле (1.13) проводится по всей пространственной области V. **В периодическом случае среднее по объёму V с дроблением структуры стремится к среднему по ячейке периодичности Ω.**

$$\boldsymbol{C^o_{i_2 i_1} = \left\langle C_{i_2 j} N_{(1)i_1,j} + C_{i_2 i_1} \right\rangle_V \xrightarrow[\text{структуры}]{\text{с дроблением}} \left\langle C_{i_2 j} N_{(1)i_1,j} + C_{i_2 i_1} \right\rangle_\Omega} \tag{1.14}$$

1.6 Бесконечный в плане, неоднородный по толщине слой.

Пусть коэффициенты C_{ij} зависят только от одной пространственной координаты, например от x_3. Предположим, что пространственная область V представляет собой бесконечный в плане слой $-\infty \leqslant x_1, x_2 \leqslant +\infty$, а $0 \leqslant x_3 \leqslant h$. В этом случае все структурные функции будут функциями только координаты x_3. Структурные уравнения, при этом, становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями, вид которых вытекает из общих уравнений (1.10) и (1.11):

$$\boldsymbol{\left[C_{33}(x_3) N'_{(n)}(x_3)\right]' = Q_{(n)}(x_3)\,, \qquad N'_{(n)}(x_3) = C^{-1}_{33}(x_3)\left[\int\limits_0^{x_3} Q_{(n)}(y)dy + K_{1(n)}\right],} \tag{1.15}$$

$$\boldsymbol{N_{(n)}(x_3) = \int\limits_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y)\left[\int\limits_0^{y} Q_{(n)}(z)dz\right]dy + \int\limits_0^{x_3} C^{-1}_{33}(y)dy\, K_{1(n)} + K_{2(n)}\,, \quad n > 0}$$

где $K_{1(n)}$ и $K_{2(n)}$ — константы интегрирования, а

$$\boldsymbol{Q_{(0)} = 0\,, \quad Q_{(1)} = -\left(C_{3i_1}\right)'}$$
$$\boldsymbol{Q_{(2)} = C^o_{i_2 i_1} - \left[\left(C_{3i_2} N_{(1)i_1}\right)' + C_{i_2 3} N'_{(1)i_1} + C_{i_2 i_1}\right],}$$
$$\boldsymbol{Q_{(n)} = -\left[\left(C_{3i_n} N_{(n-1)i_1\ldots i_{n-1}}\right)' + C_{i_n 3} N'_{(n-1)i_1\ldots i_{n-1}} + C_{i_n i_{n-1}} N_{(n-2)i_1\ldots i_{n-2}}\right],\ n > 2\,,}$$

В случае первой краевой исходной задачи структурные функции принимают нулевые значения на границах слоя, т.е. при $x_3 = 0$ и $x_3 = h$. В этом случае $\left\langle N'_{(n)} \right\rangle_{x_3} = 0$ и константы $K_{1(n)}$, $K_{2(n)}$ легко определяются. После этого однозначно находятся структурные функции любого индекса, в частности

$$\boldsymbol{N_{(1)i_1}(x_3) = -\int\limits_0^{x_3} \left[C_{33}^{-1}(y) \left\langle C_{33}^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle C_{33}^{-1} C_{3i_1} \right\rangle - C_{33}^{-1}(y) C_{3i_1}(y) \right] dy\,,} \tag{1.16}$$

и по формуле (1.13) — сопутствующие коэффициенты

$$\boldsymbol{C_{ij}^o = \left\langle C_{ij} \right\rangle + \left\langle C_{i3} C_{33}^{-1} \right\rangle \left\langle C_{33}^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle C_{33}^{-1} C_{3j} \right\rangle - \left\langle C_{i3} C_{33}^{-1} C_{3j} \right\rangle} \tag{1.17}$$

В изотропном случае $\boldsymbol{C_{ij}(x_3) = \mu(x_3)\delta_{ij}}$ из трёх структурных функций остаётся только одна ненулевая

$$\boldsymbol{N_{(1)1} = N_{(1)2} \equiv 0\,, \qquad N_{(1)3}(x_3) = x_3 - \frac{1}{\left\langle 1/\mu \right\rangle} \int\limits_0^{x_3} \frac{dy}{\mu(y)}} \tag{1.18}$$

Соответственно $\boldsymbol{C_{11}^o = C_{22}^o =< \mu >}$, $\boldsymbol{C_{33}^o = 1/ < 1/\mu >}$. Все остальные коэффициенты равны нулю, то есть матрица C_{11}^o остаётся диагональной

$$\boldsymbol{C_{ij}^o =< \mu > (\delta_{ij} - \delta_{i3}\delta_{3j}) + \frac{1}{\left\langle 1/\mu \right\rangle} \delta_{i3}\delta_{3j}} \tag{1.19}$$

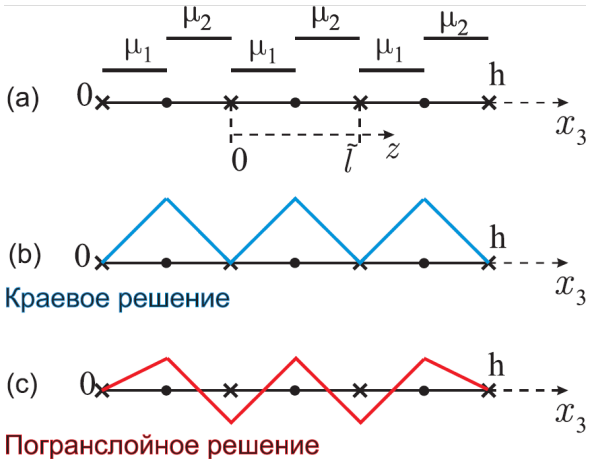


Рис. 1.2: (a) — $\mu(x_3)$; (b) и (c) — $N_{(1)3}(x_3)$

На рисунке 1.2 представлены: схематичный график зависимости коэффициента $\mu(x_3)$ от координаты x_3 по толщине плиты, составленной из трёх двухслойных ячеек периодичности — рис. 1.2(a). На рис. 1.2(b) представлен схематичный график функции $N_{(1)3}(x_3)$ в случае краевого решения, расчитанный по формуле (1.18). На рисунке 1.2(c) представлено погранслойное решение, в котором во внутренней ячейке находится периодическое нормированное решение уравнения (1.15), а в ячейках, примыкающих к границе оно обращается в нуль на границе. Слои в ячейке изотропные и одинаковой толщины. Отношение коэффициентов $\mu_2/\mu_1 = 2$. Крестиками помечены границы ячеек периодичности, а черным кружочками — границы раздела слоев в ячейках.

Лекция 2.Уравнения эллиптического типа (продолжение). Уравнения гиперболического типа. Динамические задачи.

Рассмотрим уравнения гиперболического типа. Запишем их также в операторной форме

$$\boldsymbol{L(u(x,t)) + X(x,t) = 0\,,} \tag{2.1}$$

где L — линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, зависящими от координат и времени:

$$\boldsymbol{L(u(x,t)) \equiv \left[C_{ij}(x,t)\,u_{,j}\right]_{,i} - \left[\varrho(x,t)\,\dot{u}\right]^{\cdot}\,,} \tag{2.2}$$

где t - время; одна или две точки над символом обозначают, соответственно, первую или вторую производную по времени; коэффициенты $\boldsymbol{C_{ij}(x,t)}$ и $\boldsymbol{\rho(x,t)}$ являются кусочно-гладкими функциями координат и времени. Функции $C_{ij}(x,t)$ — симметричные, положительно определённые, а плотность $\rho(x,t) > 0$ в каждой точке и в каждый момент времени. Искомая величина $u(x,t)$ может быть как скалярной так и векторной функцией. Как и прежде, уравнение (2.1) будем называть исходным уравнением.

Наряду с уравнением (2.1), в той же области V, рассматривается уравнение с постоянными коэффициентами $\boldsymbol{C^o_{ij} = C^o_{ji} = const.;\ C^o_{ij}\gamma_i\gamma_j > 0\,,,\ \rho^o = const. > 0}$

$$\boldsymbol{L^o(v(x,t)) + X(x,t) = 0\,;\qquad L^o(v(x,t)) \equiv C^o_{ij}\,v_{,ij} - \rho^o\,\ddot{v}} \tag{2.3}$$

Коэффициенты C^o_{ij}, ρ^o сопутствующего уравнения (2.3), в общем случае, являются любыми физически допустимыми величинами и никак не связаны с коэффициентами уравнения (2.3) исходной задачи.

Перепишем исходный и сопутствующий операторы следующим образом:

$$\boldsymbol{L(u) = \left[C_{ij}\,u_{,j}\right]_{,i} + \left[C_{44}\,\dot{u}\right]^{\cdot}\,,\quad L^o(v) = C^o_{ij}\,v_{,ij} + C^o_{44}\,\ddot{v}\,,} \tag{2.4}$$

где $C_{44}(x,t) = -\varrho(x,t)$, $C^o_{44} = -\varrho^o$. Теперь, если принять время за четвертую координату, положив $t \equiv x_4$, тогда исходный и сопутствующий операторы можно записать в более компактной форме:

$$\boldsymbol{L(u(x)) = \left[C_{ij}(x)\,u_{,j}\right]_{,i}\,;\qquad L^o(v(x)) = C^o_{ij}\,v_{,ij}} \tag{2.5}$$

Гиперболический оператор в 4-мерной нотации (2.5) имеет одинаковый вид с эллиптическим оператором (1.1). В эллиптическом операторе индексы принимают значения 1, 2, 3, а в гиперболическом индексы изменяются от 1 до 4. Операторы (2.1) при 4-мерной нотации гораздо шире, так как включают гораздо большее количество слагаемых. Если расписать исходный оператор (2.5) в 3-мерной нотации, то получим:

$$L(u) = \left[C_{ij}(x,t)\, u_{,j}\right]_{,i} + \left[C_{i4}(x,t)\, \dot{u}\right]_{,i} + \left[C_{4j}(x,t)\, u_{,j}\right]^{\cdot} + \left[C_{44}(x,t)\, \dot{u}\right]^{\cdot} \qquad (2.6)$$

2.1 Интегральная формула.

Интегральная формула представления решения исходного гиперболического уравнения через решение сопутствующего уравнения в 4-мерной нотации выглядит точно также, как и в эллиптическом случае, то есть

$$u(x) = v(x) + \int\limits_{V^+} G_{|i}(x,\xi)\Big[C^o_{ij} - C_{ij}(\xi)\Big]\, v_{|j}(\xi)\, dV^+_\xi\,; \quad i,j = 1,2,3,4 \qquad (2.7)$$

Здесь $G(x,\xi)$ — фундаментальное решение исходного гиперболического уравнения, записанного в 4мерной нотации. Через V^+ обозначена расширенная область интегрирования $V^+ \equiv V \cup (0,t)$. Интегральная формула (2.7) в 3-мерной нотации имеет существенно более громоздкий вид:

$$u(x,t) = v(x,t) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V G_{|i}(x,\xi,t,\tau)\,[C^o_{ij} - C_{ij}(\xi,\tau)]\, v_{|l}(\xi,\tau)\, dV_\xi +$$

$$- \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \dot{G}_\tau(x,\xi,t,\tau)\big[\rho^o - \rho(\xi,\tau)\big]\dot{v}_\tau(\xi,\tau)\, dV_\xi\,; \quad i,j = 1,2,3$$

Далее, как и прежде, предполагаем решение сопутствующего уравнения гладким. Разлагаем его в 4-мерный ряд Тейлора в окрестности точки $\xi \in V^+$. Подставляем этот ряд в интегральную формулу (2.7) и получаем разложение решения исходной задачи в ряд по всевозможным производным от решения сопутствующей задачи

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} N_{(n)i_1\ldots i_n}(x)\, v_{,i_1\ldots i_n}\,; \quad \forall\, i_1,\ldots,i_n = 1,2,3,4 \qquad (2.8)$$

где $N_{(0)} \equiv 1$, а при $n > 0$

$$N_{(n)i_1\cdots i_n}(x) \equiv \int\limits_{V^+} \Big[C^o_{ii_n} - C_{ii_n}(\xi)\Big]\, \Pi_{(n-1)i_1\cdots i_{n-1}}(\xi,x) dV^+ \qquad (2.9)$$

Формально ряд (2.8) ничем не отличается от ряда (1.7) для эллиптических уравнений, однако следует иметь в виду, что в нём, кроме производных по координатам, имеются ещё и производные по времени.

Перевод ряда (2.8) в 4-мерной нотации в ряд 3-мерной нотации основан на другом правиле суммирования, согласно которому это будет двойной ряд по производным от $v(x,t)$ порядка p по времени и порядка q по координатам, причём p+q=n. В итоге, вместо ряда (2.8), в 3-мерной нотации получаем:

$$\boldsymbol{u(x,t) = \sum_{p+q=0}^{\infty} N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}(x,t)\,\frac{\partial^p v_{,i_1\ldots i_q}}{\partial t^p}; \quad p=0,1,2,\ldots;\ q=0,1,2,\ldots\,,} \tag{2.10}$$

где новые структурные функции можно выразить через старые и наоборот.

Уравнения для структурных функций в 4-мерной нотации получаем по той же схеме, что и в эллиптическом случае. Они имеют вид (1.10), только все индексы, кроме n разумеется, принимают значения 1,2,3,4

$$\begin{aligned}
&\Big[C_{ij}N_{(1)i_1,j} + C_{ii_1}\Big]_{,i} = 0\,,\\
&\Big[C_{ij}N_{(2)i_1i_2,j} + C_{ii_2}N_{(1)i_1}\Big]_{,i} + C_{i_2j}N_{(1)i_1,j} + C_{i_2i_1} = C^o_{i_2i_1}\,,\\
&\Big[C_{ij}N_{(n)i_1\ldots i_n,j} + C_{ii_n}N_{(n-1)i_1\ldots i_{n-1}}\Big]_{,i} + C_{i_nj}N_{(n-1)i_1\ldots i_{n-1},j} + C_{i_ni_{n-1}}N_{(n-2)i_1\ldots i_{n-2}} = 0\,,\ n>2
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Также как и в эллиптическом случае уравнения (2.11) имеют одинаковый вид (индексы $i_1\ldots i_n$ опущены):

$$\boldsymbol{\Big[C_{ij}N_{(n),j}\Big]_{,i} = Q_{(n)}\,,} \tag{2.12}$$

где

$$\begin{aligned}
&Q_{(0)} = 0\,, \quad Q_{(1)i_1} = -C_{ii_1,i}\,,\\
&Q_{(2)i_1i_2} = C^o_{i_2i_1} - \Big[\big(C_{ii_2}N_{(1)i_1}\big)_{,i} + C_{i_2j}N_{(1)i_1,j} + C_{i_2i_1}\Big]\,,\\
&Q_{(n)i_1\ldots i_n} = -\Big[\big(C_{ii_n}N_{(n-1)i_1\ldots i_{n-1}}\big)_{,i} + C_{i_nj}N_{(n-1)i_1\ldots i_{n-1},j} + C_{i_ni_{n-1}}N_{(n-2)i_1\ldots i_{n-2}}\Big]\,,\ \text{при}\ \ n>2
\end{aligned}$$

2.2 Коэффициенты сопутствующего гиперболического уравнения.

Аналогично эллиптическому случаю выбираются и коэффициенты сопутствующего уравнения в периодическом случае

$$\boldsymbol{C^o_{i_2i_1} = \big\langle C_{i_2j}N_{(1)i_1,j} + C_{i_2i_1}\big\rangle_V\,; \quad j,i_1,i_2 = 1,2,3,4} \tag{2.13}$$

В общем случае непериодической зависимости исходных коэффициентов усреднение в формулах (2.13) проводится по всей пространственной области V. При этом усредненные величины будут функциями времени. Для того чтобы сделать их константами, необходимо провести дополнительно осреднение по времени на всем промежутке $0 \leqslant t < \infty$. Либо, как предложено в работе [5], выбрать их в начальный момент времени, то есть при $x_4 \equiv t = 0$. Есть и другие способы осреднения по времени [6, стр. 247]

Лекция 3.Уравнения гиперболического типа (продолжение).

3.1 Случаи аналитического интегрирования структурных уравнений.

Рассмотрим два частных случая, когда структурные уравнения (2.11) интегрируются аналитически.

3.2 Случай зависимости коэффициентов от одной пространственной координаты.

Пусть коэффициенты C_{ij} зависят только от одной пространственной координаты, например от x_3. Предположим, что пространственная область V представляет собой бесконечный в плане слой $-\infty \leqslant x_1, x_2 \leqslant +\infty$, а $0 \leqslant x_3 \leqslant h$. В этом случае все структурные функции будут функциями только координаты x_3. Структурные уравнения, при этом, становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями следующего вида, которые следуют из общих уравнений (2.12):

$$\begin{gathered}\Big[C_{33}(x_3)N'_{(n)}(x_3)\Big]' = Q_{(n)}(x_3)\,, \qquad N'_{(n)}(x_3) = C_{33}^{-1}(x_3)\Big[\int\limits_0^{x_3} Q_{(n)}(y)dy + K_{1(n)}\Big]\,, \\ N_{(n)}(x_3) = \int\limits_0^{x_3} C_{33}^{-1}(y)\Big[\int\limits_0^{y} Q_{(n)}(z)dz\Big]dy + \int\limits_0^{x_3} C_{33}^{-1}(y)dy\, K_{1(n)} + K_{2(n)}\,, \quad n > 0\,,\end{gathered} \tag{3.1}$$

где $K_{1(n)}$ и $K_{2(n)}$ — константы интегрирования, а

$$\begin{aligned}&Q_{(0)} = 0\,, \quad Q_{(1)} = -\big(C_{3i_1}\big)' \\ &Q_{(2)} = C^o_{i_2 i_1} - \Big[\big(C_{3i_2}N_{(1)i_1}\big)' + C_{i_2 3}N'_{(1)i_1} + C_{i_2 i_1}\Big]\,, \\ &Q_{(n)} = -\Big[\big(C_{3i_n}N_{(n-1)i_1\ldots i_{n-1}}\big)' + C_{i_n 3}N'_{(n-1)i_1\ldots i_{n-1}} + C_{i_n i_{n-1}}N_{(n-2)i_1\ldots i_{n-2}}\Big]\,,\ n > 2\,,\end{aligned}$$

причем

$$\boldsymbol{C^o_{ij} = \big\langle C_{i3}N'_{(1)j} + C_{ij}\big\rangle \equiv \frac{1}{h}\int\limits_0^h \big(C_{i3}N'_{(1)j} + C_{ij}\big)dx_3} \tag{3.2}$$

Индексы, как принято в четырехмерной нотации, принимают значения 1,2,3,4. Угловые скобки означают среднее значение по толщине слоя.

Константы интегрирования $K_{1(n)}$ и $K_{2(n)}$ находятся из граничных условий, налагаемых на решение исходного уравнения. В частности, в первой краевой задаче на границе слоя должны совпадать значения исходного и сопутствующего решений. В этом случае на структурные функции накладываются следующие условия

$$\boldsymbol{N_{(n)}(0) = N_{(n)}(h) = 0\,, \quad \text{при } n > 0} \tag{3.3}$$

Удовлетворяя этим условиям, находим явные выражения для структурных функций

$$\boldsymbol{N_{(n)}(x_3) = \left[\int\limits_0^{x_3} C_{33}^{-1}(y)\int\limits_0^{y} Q_{(n)}(z)dzdy - \frac{\left\langle C_{33}^{-1}\int\limits_0^{y} Q_{(n)}(z)dz\right\rangle}{h\left\langle C_{33}^{-1}\right\rangle}\int\limits_0^{x_3} C_{33}^{-1}dy\right]} \tag{3.4}$$

Теперь по формулам (3.2) можно найти коэффициенты сопутствующего уравнения

$$\boldsymbol{C_{ij}^o = \langle C_{ij}\rangle + \langle C_{i3}C_{33}^{-1}\rangle\langle C_{33}^{-1}\rangle^{-1}\langle C_{33}^{-1}C_{3j}\rangle - \langle C_{i3}C_{33}^{-1}C_{3j}\rangle\,; \quad i,j = 1,2,3,4} \tag{3.5}$$

Если в формуле (3.2) возвратиться к 3-мерной нотации, выражение для сопутствующих коэффициентов C_{ij}^o остаётся таким же как и в эллиптическом случае (1.17), а формула для плотности ϱ^o будет следующей:

$$\boldsymbol{\varrho^o = -C_{44}^o = \langle\varrho\rangle - \langle C_{43}C_{33}^{-1}\rangle\langle C_{33}^{-1}\rangle^{-1}\langle C_{33}^{-1}C_{34}\rangle + \langle C_{43}C_{33}^{-1}C_{34}\rangle} \tag{3.6}$$

Если учесть, что $C_{34} = 0$ и $C_{43} = 0$, тогда сопутствующий коэффициент

$$\boldsymbol{\varrho^o = \langle\varrho\rangle}$$

То есть, плотность ϱ^o совпадает с эффективной плотностью и определяется только функциональной зависимостью исходной плотности от координаты x_3. **Если же в исходном уравнении (2.6) присутствуют, оба коэффициента $C_{34}(x_3)$ и $C_{43}(x_3)$ то, в соответствии с формулой (3.6), эффективная плотность будет зависеть и от $C_{33}(x_3)$.** При этом эффективные коэффициенты C_{34}^o и C_{43}^o также отличны от нуля и определяются по формулам:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C_{i4}^o} &\boldsymbol{= \langle C_{i4}\rangle + \langle C_{i3}C_{33}^{-1}\rangle\langle C_{33}^{-1}\rangle^{-1}\langle C_{33}^{-1}C_{34}\rangle - \langle C_{i3}C_{33}^{-1}C_{34}\rangle\,,}\\ \boldsymbol{C_{4i}^o} &\boldsymbol{= \langle C_{4i}\rangle + \langle C_{43}C_{33}^{-1}\rangle\langle C_{33}^{-1}\rangle^{-1}\langle C_{33}^{-1}C_{3i}\rangle - \langle C_{43}C_{33}^{-1}C_{3i}\rangle}\end{aligned} \tag{3.7}$$

Лекция 4.Случай зависимости коэффициентов уравнения только от одной координаты, или от времени. Дифференциальные уравнения второго порядка самого общего вида.

4.1 Случай зависимости исходных коэффициентов только от времени.

В этом случае все структурные функции будут также функциями только координаты $x_4 \equiv t$. Далее точка в формулах означает производную по t. Структурные уравнения (2.12), при этом, становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\boldsymbol{\Big[C_{44}\dot{N}_{(n)}\Big]^{\cdot} = Q_{(n)}(t)\,, \quad C_{44}\dot{N}_{(n)} = \int\limits_0^t Q_{(n)}(\tau)d\tau + K_{1(n)}\,, \quad n = 1, 2, ...} \tag{4.1}$$

где $K_{1(n)}$ — константы после однократного интегрирования, а

$$Q_{(0)} = 0\,, \qquad Q_{(1)} = -\big(C_{4i_1}\big)^{\cdot}\,,$$
$$Q_{(2)} = C^o_{i_2 i_1} - \Big[\big(C_{4i_2}N_{(1)i_1}\big)^{\cdot} + C_{i_2 4}\dot{N}_{(1)i_1} + C_{i_2 i_1}\Big]\,,$$
$$Q_{(n)} = -\Big[\big(C_{4i_n}N_{(n-1)i_1\ldots i_{n-1}}\big)^{\cdot} + C_{i_n 4}\dot{N}_{(n-1)i_1\ldots i_{n-1}} + C_{i_n i_{n-1}}N_{(n-2)i_1\ldots i_{n-2}}\Big]\,,\ n > 2\,,$$

причем

$$\boldsymbol{C^o_{i_2 i_1} = \big\langle C_{i_2 4}\dot{N}_{(1)i_1} + C_{i_2 i_1}\big\rangle} \tag{4.2}$$

Здесь угловые скобки подразумевают среднее по времени.

При $C_{44}(t) \equiv -\varrho(t) \neq 0$ уравнения (4.1) по форме полностью аналогичны уравнениям (3.1), поэтому их общее решение дается теми же формулами с соответствующими изменениями

$$\boldsymbol{N_{(n)}(t) = \left[\int\limits_0^t C^{-1}_{44}(\tau)\int\limits_0^\tau Q_{(n)}(\vartheta)d\vartheta + \int\limits_0^t C^{-1}_{44}(\tau)d\tau\ K_{1(n)} + K_{2(n)}\right]\,,} \tag{4.3}$$

Константы $K_{1(n)}$ и $K_{2(n)}$ находятся из начальных условий, налагаемых на решение исходного уравнения, то есть

$$N_{(n)}(0) = 0\,,\ \dot{N}_{(n)}(0) = 0\,, \quad \text{при } n > 0 \tag{4.4}$$

Отсюда и из формулы (4.3) следует, что константы интегрирования равны нулю, а

$$N_{(n)}(t) = \int\limits_0^t C_{44}^{-1}(\tau)\Big[\int\limits_0^\tau Q_{(n)}(\vartheta)d\vartheta\Big]d\tau\,, \quad \text{при } n > 0 \tag{4.5}$$

В частности при n=1 по этой формуле находим

$$N_{(1)i_1}(t) = \int\limits_0^t C_{44}^{-1}(\tau)\Big[\int\limits_0^\tau Q_{(1)i_1}(\vartheta)d\vartheta\Big]d\tau = \int\limits_0^t C_{44}^{-1}(\tau)\big[C_{4i_1}(\tau) - C_{4i_1}(0)\big]d\tau \tag{4.6}$$

Следовательно

$$C_{ij}^o = \Big\langle C_{ij} + C_{i4}C_{44}^{-1}\big(C_{4j} - C_{4j}(0)\big)\Big\rangle\,; \quad i,j = 1,2,3,4 \tag{4.7}$$

4.2 Дифференциальные уравнения общего вида.

В области V, ограниченной поверхностью Σ, рассматривается исходное линейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных общего вида с переменными коэффициентами, зависящими от координат и времени

$$L(u) + X(x,t) = 0\,, \tag{4.8}$$

где L — линейный дифференциальный оператор:

$$\begin{gathered} L(u) = \big[C_{ij}(x,t)\,u_{,j}\big]_{,i} + \big[C_{i4}(x,t)\,\dot{u}\big]_{,i} + \big[C_{4i}(x,t)\,u_{,i}\big]^{\cdot} + \big[C_{44}(x,t)\,\dot{u}\big]^{\cdot} + \\ + D_{ij}(x,t)u_{,ij} + D_{4j}(x,t)\dot{u}_{,j} + D_{i4}(x,t)\dot{u}_{,i} + D_{44}(x,t)\ddot{u} + \\ + \big[a_i(x,t)u\big]_{,i} + \big[a_4(x,t)u\big]^{\cdot} + b_i(x,t)u_{,i} + b_4(x,t)\dot{u} + e(x,t)u \end{gathered} \tag{4.9}$$

Коэффициенты исходного уравнения являются кусочно гладкими функциями.

Сопутствующее уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$\begin{gathered} L^o(v) + X(x,t) = 0\,; \\ L^o(v) = (C_{ij}^o + D_{ij}^o)\,v_{,ij} + \big(C_{i4}^o + C_{4i}^o\big)\,\dot{v}_{,i} + (C_{44}^o + D_{44}^o)\,\ddot{v} + \\ \big(a_i^o + b_i^o\big)v_{,i} + \big(a_4^o + b_4^o\big)\dot{v} + e^o\,v \end{gathered} \tag{4.10}$$

В 4-мерной нотации операторы записываются гораздо короче

$$\begin{gathered} L(u) = \big[C_{ij}\,u_{,j}\big]_{,i} + D_{ij}u_{,ij} + \big[a_i u\big]_{,i} + b_i u_{,i} + eu\,, \\ L^o(v) = (C_{ij}^o + D_{ij}^o)\,v_{,ij} + \big(a_i^o + b_i^o\big)v_{,i} + e^o\,v \end{gathered} \tag{4.11}$$

Пусть $G(x,\xi)$ какое либо фундаментальное решение исходного уравнения, такое что

$$\boldsymbol{L(G)+\delta(x-\xi)=0\,,\qquad \delta(x-\xi)=\delta(x_1-\xi_1)\delta(x_2-\xi_2)\delta(x_3-\xi_3)\delta(x_4-\xi_4)} \quad (4.12)$$

Интегральная формула, представляющее решение исходного уравнения с переменными коэффициентами через решение сопутствующего уравнения с постоянными коэффициентами в 4-мерной нотации будет следующей[?, ?]:

$$\boldsymbol{u(x)=v(x)+\int\limits_{V^+}\Big[\big(C^o_{ij}-C_{ij}(x)\big)\,v_{,j}(\xi)+\big(a^o_i-a_i(x)\big)v(\xi)\Big]\,G_{|i}(x,\xi)dV^+_\xi-}$$

$$\boldsymbol{-\int\limits_{V^+}\Big[\big(D^o_{ij}-D_{ij}(\xi)\big)v_{,ij}(\xi)+\big(b^o_i-b_i(\xi)\big)\,v_{,i}(\xi)+\big(e^o-e(\xi)\big)v(\xi)\Big]\,G(x,\xi)dV^+_\xi}$$

Лекция 5.Связанная задача термоупругости композитов для неоднородного стержня с переменным сечением. Постановка задачи. Интегральная формула.

5.1 Исходная и сопутствующая задачи.

Рассмотрим неоднородный по длине упругий стержень с переменным поперечным сечением. Будем предполагать, что центры тяжести всех поперечных сечений расположены на прямой линии, которую примем за ось координат x. Будем предполагать также, что все искомые величины равномерно распределены по сечению, зависят от координаты x, $0 \leqslant x \leqslant L$, и времени $t \geqslant 0$.

Уравнения связанной задачи термоупругости в одномерном случае для неоднородного стержня с постоянным по длине сечением состоят из уравнения движения, соотношения Дюгамеля–Неймана и выражения для продольной деформации:

$$\sigma' + X = \varrho \ddot{u}\,, \quad \sigma = E\varepsilon - \beta\vartheta\,, \quad \varepsilon = \frac{du}{dx}\,. \tag{5.1}$$

Здесь штрих обозначает производную по координате x, а точка над символом — производную по времени; u — продольное перемещение поперечного сечения; ε — продольная деформация; σ — продольное напряжение; E — модуль Юнга; β — коэффициент связности; $\vartheta = T(x,t) - T_0$ — разность температур текущего и начального состояний (отклонение от начального состояния); ϱ — плотность материала; $X(x,t)$ — распределенная вдоль оси стержня нагрузка.

Тепловая часть уравнений термоупругости состоит из уравнения баланса энтропии, закона теплопроводности Фурье для медленных термодинамических процессов и из выражения для энтропии при $|\vartheta/T_0| \ll 1$:

$$T\dot{S} = -q' + w\,, \quad q = -\lambda T'\,, \quad S = \beta\varepsilon + C_\varepsilon \frac{\vartheta}{T_0}\,, \tag{5.2}$$

где q — плотность теплового потока, $w(x,t)$ — плотность источников или стоков тепла, S — плотность энтропии, λ — коэффициент теплопроводности, C_ε — удельная теплоемкость при постоянной деформации.

Коэффициенты E, β, λ, ϱ, C_ε в уравнениях (5.1)–(5.7) являются интегрируемыми функциями продольной координаты x. При переменном сечении все пять коэффициентов умножаются на площадь поперечного сечения $F(x)$.

В случае малого относительного отклонения температуры от естественного состояния, т.е. при $|T - T_0|/T_0 = |\vartheta|/T_0 \ll 1$, уравнения (5.1), (5.2) можно записать в виде связанной системы *линейных* уравнений термоупругости относительно компонент вектора перемещений и отклонения температуры от начального значения [16, с. 76]:

$$\begin{cases} \big(Eu' - \beta\vartheta\big)' - \varrho\ddot{u} + X(x,t) = 0 \\ \big(\lambda\vartheta'\big)' - C_\varepsilon\dot{\vartheta} - T_0\beta\dot{u}' + w(x,t) = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

Чтобы выделить единственное решение системы уравнений (5.3), необходимо добавить граничные и начальные условия для искомых величин $u(x,t)$, $\vartheta(x,t)$. Примем их в виде

$$\begin{aligned} &u(x,t)\big|_{x=0,\,x=L} = u_{0,\,L}(t)\,,\ \vartheta(x,t)\big|_{x=0,\,x=L} = \vartheta_{0,\,L}(t)\,, \\ &u(x,0) = f(x)\,,\ \dot{u}(x,0) = g(x)\,,\ \vartheta(x,0) = h(x). \end{aligned} \tag{5.4}$$

В случае постоянных термомеханических характеристик и постоянного по длине сечения вместо уравнений (5.3) имеем

$$\begin{cases} E^o v'' - \beta^o\psi' - \varrho^o\ddot{v} + X(x,t) = 0\,, \\ \lambda^o\psi'' - C^o_\varepsilon\dot{\psi} - T_0\beta^o\dot{v}' + w(x,t) = 0\,, \end{cases} \tag{5.5}$$

где v и $\psi = T^o(x,t) - T_0$ перемещения и относительная разность температур в однородном стержне при тех же самых входных данных, что и в исходной задаче. Задачу для стержня с теми же входными данными, что и в исходной задаче, но из материала с постоянными механическими характеристиками будем называть сопутствующей задачей. В сопутствующие уравнения входят постоянные коэффициенты E^o, ϱ^o, β^o, λ^o и C^o_ε. Пока они — произвольные положительные величины. Позже увяжем их с коэффициентами исходных уравнений.

5.2 Интегральные формулы представления решения исходной задачи через решение сопутствующей задачи.

В работе [12] получены интегральные формулы, представляющие решение исходной трехмерной неоднородной задачи термоупругости через решение сопутствующей задачи термоупругости для однородного тела. Из этих общих формул следуют формулы в одномерном по координате случае:

$$u(x,t) = v(x,t) - \int\limits_0^t \int\limits_0^l \big[E(\xi) - E^o\big] U_1^{|}(x,\xi,t-\tau) v^{|}(\xi,\tau) d\xi d\tau -$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^t\int_0^l \big[\varrho(\xi)-\varrho^o\big]U_1(x,\xi,t-\tau)\ddot{v}(\xi,\tau)d\xi d\tau+\\
&+\int_0^t\int_0^l \big[\lambda(\xi)-\lambda^o\big]\Theta_1^{|}(x,\xi,t-\tau)\psi^{|}(\xi,\tau)d\xi d\tau+\\
&+\int_0^t\int_0^l \big[C_\varepsilon(\xi)-C_\varepsilon^o\big]\Theta_1(x,\xi,t-\tau)\dot{\psi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+\\
&+\int_0^t\int_V \big[\beta(\xi)-\beta^o\big]\big[U_1^{|}(x,\xi,t-\tau)\psi(\xi,\tau)+T_0\Theta_1(x,\xi,t-\tau)\dot{v}^{|}(\xi,\tau)\big]d\xi d\tau\,, \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vartheta(x,t)=\psi(x,t)&-\int_0^t\int_0^l \big[E(\xi)-E^o\big]U_2^{|}(x,\xi,t-\tau)v^{|}(\xi,\tau)d\xi d\tau-\\
&-\int_0^t\int_0^l \big[\varrho(\xi)-\varrho^o\big]U_2(x,\xi,t-\tau)\ddot{v}(\xi,\tau)d\xi d\tau+\\
&+\int_0^t\int_0^l \big[\lambda(\xi)-\lambda^o\big]\Theta_2^{|}(x,\xi,t-\tau)\psi^{|}(\xi,\tau)d\xi d\tau+\\
&+\int_0^t\int_0^l \big[C_\varepsilon(\xi)-C_\varepsilon^o\big]\Theta_2(x,\xi,t-\tau)\dot{\psi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+\\
&+\int_0^t\int_0^l \big[\beta(\xi)-\beta^o\big]\big[U_2^{|}(x,\xi,t-\tau)\psi(\xi,\tau)+T_0\Theta_2(x,\xi,t-\tau)\dot{v}^{|}(\xi,\tau)\big]d\xi d\tau\,. \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

В интегральных представлениях (5.6), (5.7) явно не присутствуют входные данные задачи, поэтому эти формулы справедливы при любых входных данных. Вертикальная черта означает производную по переменной ξ. Непосредственной проверкой можно убедиться, что выражения (5.6), (5.7) удовлетворяют исходным уравнениям (5.3), если имеют место сопутствующие уравнения (5.5), а функции Грина $U_I(x,\xi,t-\tau)$, $\Theta_I(x,\xi,t-\tau)$, $(I=1,2)$, удовлетворяют следующим уравнениям:

$$
\begin{cases}
\big(EU_I'\big)'-\varrho\ddot{U}_I-\big(\beta\dot{\Theta}_I\big)'=-\delta_{I1}\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)\,,\\
\big(\lambda\Theta_I'\big)'-C_\varepsilon\dot{\Theta}_I-T_0\beta U_I'=-\delta_{I2}\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)
\end{cases}
$$

и нулевым граничным и начальным условиям типа (5.4).

Лекция 6. Связанная задача термоупругости композитов (продолжение).

6.1 Представление в виде рядов. Структурные функции.

Предположим далее, что функции v и ψ бесконечно дифференцируемы по всем переменным и раскладываются в ряды Тейлора по времени и координатам, тогда из интегральных формул (5.6), (5.7) следует эквивалентное представление в виде рядов по всевозможным производным от перемещений и температуры в однородном стержне:

$$u(x,t) = v(x,t) + U_{(0)}^{(0)}\psi(x,t) + \sum_{\substack{p+q=1\\ p\geqslant 0;\ q\geqslant 0}}^{\infty} \left[N_{(q)}^{(p)} \frac{\partial^p}{\partial t^p} v^{(q)}(x,t) + U_{(q)}^{(p)} \frac{\partial^p}{\partial t^p} \psi^{(q)}(x,t) \right], \qquad (6.1)$$

$$\vartheta(x,t) = \psi(x,t) + \sum_{\substack{p+q=1\\ p\geqslant 0;\ q\geqslant 0}}^{\infty} \left[M_{(q)}^{(p)} \frac{\partial^p}{\partial t^p} \psi^{(q)}(x,t) + V_{(q)}^{(p)} \frac{\partial^p}{\partial t^p} v^{(q)}(x,t) \right]. \qquad (6.2)$$

В формулах (6.1) и (6.2) функции $N_{(q)}^{(p)}$, $U_{(q)}^{(p)}$, $M_{(q)}^{(p)}$, $V_{(q)}^{(p)}$, по сути дела, — это взвешенные моменты тензоров Грина исходной задачи, непрерывные функции переменных x и t, причем $N_{(0)}^{(0)} = 1$, $M_{(0)}^{(0)} = 1$, $V_{(0)}^{(0)} = 0$. Кроме того, все перечисленные функции обращаются в нуль в том случае, когда свойства исходного и сопутствующего тел совпадают. В этой связи попробуем удовлетворить всем условиям исходной задачи считая, что все функции $N_{(q)}^{(p)}$, $U_{(q)}^{(p)}$, $M_{(q)}^{(p)}$, $V_{(q)}^{(p)}$ зависят только от координаты x. В этом случае перемещение и температура в виде рядов (6.1), (6.2) удовлетворяют граничным условиям (5.4), если

$$\left[U_{(0)}^{(0)},\, M_{(0)}^{(0)} \right]_{x=0, x=L} = [0,\, 1]\,, \quad \left[N_{(q)}^{(p)},\, U_{(p)}^{(q)},\, M_{(p)}^{(q)},\, V_{(p)}^{(q)} \right]_{x=0, x=L} = 0 \qquad \text{при } p+q \geqslant 1\,. \quad (6.3)$$

Будем называть функции $N_{(q)}^{(p)}$, $U_{(q)}^{(p)}$, $M_{(q)}^{(p)}$, $V_{(q)}^{(p)}$ *структурными функциями*, поскольку их появление связано с неоднородностью свойств материала стержня, а также с его переменным поперечным сечением (если этот факт имеет место быть). Подстановка рядов (6.1), (6.2) в исходные уравнения (5.3) с учетом уравнений (5.5) сопутствующей задачи приводит к рекуррентным уравнениям для структурных функций.

Распишем эти уравнения подробно для случаев $p+q=0$ и $p+q=1$. Структурные функции с индексом $p+q=0$, т.е. $N^{(0)}_{(0)}$, $M^{(0)}_{(0)}$, $V^{(0)}_{(0)}$ являются постоянными, что следует из представления в виде рядов. Неопределенной остается только функция $U^{(0)}_{(0)}$, для которой получается следующая задача:

$$\Big[EU^{(0)\prime}_{(0)} - \beta\Big]' = 0\,,\ U^{(0)}_{(0)}(0) = U^{(0)}_{(0)}(L) = 0\,,$$

откуда имеем

$$U^{(0)}_{(0)}(x) = \int\limits_0^x \frac{\beta(y) - \big\langle \beta/E\big\rangle/\big\langle 1/E\big\rangle}{E(y)}dy\,.$$

Угловые скобки обозначают среднее по длине стержня. Рассмотрим далее случай $p+q=1$:

1) если p=0,q=1, то

$$\begin{cases} \Big[EN^{(0)\prime}_{(1)} + E - \beta V^{(0)}_{(1)}\Big]' = 0\,, \\ \Big[\lambda V^{(0)\prime}_{(1)}\Big]' = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Big[E\big(U^{(0)\prime}_{(1)} + U^{(0)}_{(0)}\big) - \beta M^{(0)}_{(1)}\Big]' - \big\langle \beta/E\big\rangle/\big\langle 1/E\big\rangle = -\beta^o \\ \Big[\lambda\big(M^{(0)\prime}_{(1)} + 1\big)\Big]' = 0 \end{cases} \tag{6.4}$$

1) если p=1,q=0, то

$$\begin{cases} \Big[EN^{(1)\prime}_{(0)} - \beta V^{(1)}_{(0)}\Big]' = 0\,, \\ \Big[\lambda V^{(1)\prime}_{(0)}\Big]' = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Big[EU^{(1)\prime}_{(0)} - \beta M^{(1)}_{(0)}\Big]' = 0\,, \\ \Big[\lambda M^{(1)\prime}_{(0)}\Big]' - C_\varepsilon - T_0\beta U^{(0)\prime}_{(0)} = -C^o_\varepsilon\,. \end{cases} \tag{6.5}$$

Прежде чем идти дальше определимся с константами β^o и C^o_ε сопутствующих уравнений (5.5), входящими в уравнения (6.4), (6.5), увязав их с коэффициентами исходной задачи. Для этого положим

$$\begin{gathered} \beta^o = \big\langle -EU^{(0)\prime}_{(0)} + \beta M^{(0)}_{(0)}\big\rangle = \big\langle \beta/E\big\rangle/\big\langle 1/E\big\rangle\,, \\ C^o_\varepsilon = \big\langle C_\varepsilon + T_0\beta U^{(0)\prime}_{(0)}\big\rangle = \big\langle C_\varepsilon\big\rangle + T_0\left[\Big\langle \frac{\beta^2}{E}\Big\rangle - \frac{\big\langle \beta/E\big\rangle^2}{\big\langle 1/E\big\rangle}\right]. \end{gathered} \tag{6.6}$$

После этого из уравнений (6.4), (6.5) с учетом граничных условий (6.3) находим $V^{(0)}_{(1)} \equiv 0$,

$V^{(1)}_{(0)} \equiv 0,\ N^{(1)}_{(0)} \equiv 0,$

$$N^{(0)}_{(1)}(x) = \int\limits_0^x \Big[\frac{1}{E(y)\langle 1/E\rangle} - 1\Big]dy\,, \qquad M^{(0)}_{(1)} = \int\limits_0^x \Big[\frac{1}{\lambda(y)\langle 1/\lambda\rangle} - 1\Big]dy\,,$$

$$U^{(0)}_{(1)}(x) = \int\limits_0^x \left[\frac{\beta(y)M^{(0)}_{(1)}(y)}{E(y)} - U^{(0)}_{(0)}(y)\right]dy - \int\limits_0^x \frac{dy}{E(y)\langle 1/E\rangle}\ \left\langle \frac{\beta M^{(0)}_{(1)}}{E} - U^{(0)}_{(0)}\right\rangle,$$

$$M^{(1)}_{(0)}(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{\lambda(y)}\int\limits_0^y \Big[\tilde{C}_\varepsilon(z) - \langle\tilde{C}_\varepsilon\rangle\Big]dz - \int\limits_0^x \frac{dy}{\lambda(y)\langle 1/\lambda\rangle}\ \left\langle \frac{1}{\lambda(y)}\int\limits_0^y \Big[\tilde{C}_\varepsilon(z) - \langle\tilde{C}_\varepsilon\rangle\Big]dz\right\rangle,$$

$$U^{(1)}_{(0)}(x) = \int\limits_0^x \frac{\beta(y)}{E(y)}M^{(1)}_{(0)}(y)dy - \int\limits_0^x \frac{dy}{E(y)\langle 1/E\rangle}\ \left\langle \frac{\beta}{E}M^{(1)}_{(0)}\right\rangle,$$

$$\widetilde{C}_\varepsilon(x) \equiv C_\varepsilon + T_0\beta U^{(0)\prime}_{(0)} = C_\varepsilon(x) + T_0\frac{\beta(x)}{E(x)}\Big[\beta(x) - \langle\beta/E\rangle/\langle 1/E\rangle\Big].$$

Запись и интегрирование уравнений, соответствующих индексу $p+q=2$, не представляет трудностей. Однако мы этого делать не будем, поскольку используем уравнения с индексом $p+q=2$ лишь для определения коэффициентов сопутствующих уравнений. Из них получаем оставшиеся коэффициенты:

$$E^o = \Big\langle E\Big(N^{(0)\prime}_{(1)} + 1\Big)\Big\rangle = \frac{1}{\langle 1/E\rangle}\,, \qquad \lambda^o = \Big\langle \lambda\Big(M^{(0)\prime}_{(1)} + 1\Big)\Big\rangle = \frac{1}{\langle 1/\lambda\rangle}\,, \qquad \varrho^o = \langle\varrho\rangle\,. \quad (6.7)$$

6.2 Формулы для напряжения, количества движения, потока тепла и энтропии.

По формулам (6.1), (6.2) найдем ряды для напряжения, потока тепла, энтропии и количества движения. Сохраним в этих рядах только слагаемые, у которых $p+q=0$ и $p+q=1$:

$$\sigma \approx \frac{1}{\langle 1/E\rangle}\,v' - \frac{\langle\beta/E\rangle}{\langle 1/E\rangle}\,\psi - \frac{1}{\langle 1/E\rangle}\left\langle\frac{\beta}{E}M^{(1)}_{(0)}\right\rangle\dot{\psi} - \frac{1}{\langle 1/E\rangle}\left\langle\frac{\beta M^{(0)}_{(1)}}{E} - U^{(0)}_{(0)}\right\rangle\psi'\,, \qquad \varrho\dot{u} \approx \varrho\dot{v}\,; \tag{6.8}$$

$$q \approx -\frac{1}{\langle 1/\lambda\rangle}\,\psi' - \widetilde{\tau}(x)\,\dot{\psi}\,, \qquad S \approx \widetilde{\beta}(x)\,v' + \frac{\widetilde{C}_\varepsilon(x)}{T_0}\,\psi + \frac{\widetilde{\varkappa}(x)}{T_0}\,\dot{\psi} + \frac{\widetilde{\varphi}(x)}{T_0}\,\psi'\,, \tag{6.9}$$

где

$$\widetilde{\beta}(x) \equiv \beta\Big[N^{(0)\prime}_{(1)} + 1\Big] = \frac{\beta(x)}{E(x)\langle 1/E\rangle}\,,$$

$$\widetilde{C}_\varepsilon(x) \equiv C_\varepsilon + T_0\beta U^{(0)\prime}_{(0)} = C_\varepsilon(x) + T_0\frac{\beta(x)}{E(x)}\Big[\beta(x) - \langle\beta/E\rangle/\langle 1/E\rangle\Big]\,,$$

$$\widetilde{\tau}(x) \equiv \lambda M^{(1)\prime}_{(0)} = \int\limits_0^x \big[\widetilde{C}_\varepsilon(y) - \langle\widetilde{C}_\varepsilon\rangle\big]dy - \left\langle \frac{1}{\lambda\langle 1/\lambda\rangle}\left(\int\limits_0^y \big[\widetilde{C}_\varepsilon(z) - \langle\widetilde{C}_\varepsilon\rangle\big]dz\right),\right\rangle$$

$$\widetilde{\varkappa}(x) \equiv T_0\beta U_{(0)}^{(1)\prime} + C_\varepsilon M_{(0)}^{(1)} = \left(C_\varepsilon + \frac{T_0\beta^2}{E}\right) M_{(0)}^{(1)} - T_0\widetilde{\beta}\left\langle \frac{\beta M_{(0)}^{(1)}}{E}\right\rangle,$$

$$\widetilde{\varphi}(x) \equiv T_0\beta\big(U_{(1)}^{(0)\prime} + U_{(0)}^{(0)}\big) + C_\varepsilon M_{(1)}^{(0)} = \left(C_\varepsilon + \frac{T_0\beta^2}{E}\right) M_{(1)}^{(0)} - T_0\widetilde{\beta}\left\langle \frac{\beta M_{(1)}^{(0)}}{E} - U_{(0)}^{(0)}\right\rangle.$$

Как видно, в первом приближении скорость перемещения точки $\dot{v}$ не влияет на напряжение и плотность энтропии, а на поток тепла влияет только градиент температуры ψ' и скорость изменения температуры $\dot{\psi}$. Количество движения в первом приближении представляется только через $\dot{v}$.

6.3 Основные и дополнительные эффективные коэффициенты.

Предположим теперь, что коэффициенты неоднородного стержня являются быстроосциллирующими, периодическими, с периодом $l \ll L$ функциями продольной координаты. Тогда и все структурные функции являются периодическими быстроосциллирующими функциями продольной координаты с тем же самым периодом, что и у коэффициентов. В этом случае гладкие функции $v(x)$ и $\psi(x)$ вместе со своими производными мало меняются в пределах периода. Усредняя формулы (6.8), (6.9), в пределах любого из периодов Ω, получаем

$$\big\langle\sigma\big\rangle_\Omega \approx E^{\text{eff}}\, v' - \beta^{\text{eff}}\,\psi - \gamma^{\text{eff}}\,\dot{\psi} - \chi^{\text{eff}}\,\psi'\,, \qquad \big\langle q\big\rangle_\Omega \approx -\lambda^{\text{eff}}\,\psi' - \tau^{\text{eff}}\,\dot{\psi}\,, \tag{6.10}$$

$$\big\langle S\big\rangle_\Omega \approx \beta^{\text{eff}}\, v' + \frac{C_\varepsilon^{\text{eff}}}{T_0}\,\psi + \frac{\varkappa^{\text{eff}}}{T_0}\,\dot{\psi} + \frac{\varphi^{\text{eff}}}{T_0}\,\psi'\,, \qquad \big\langle Q\big\rangle_\Omega = \big\langle \varrho\dot{u}\big\rangle_\Omega \approx \varrho^{\text{eff}}\dot{v}\,. \tag{6.11}$$

В этих формулах $E^{\text{eff}} = E^o$, $\beta^{\text{eff}} = \beta^o$, $\lambda^{\text{eff}} = \lambda^o$, $C_\varepsilon^{\text{eff}} = C_\varepsilon^o$, $\varrho^{\text{eff}} = \varrho^o$ — эффективные коэффициенты термоупругости, с помощью которых средние напряжения, средний поток тепла и средняя плотность энтропии выражаются через v', ψ, и которые как раз и есть средние величины в ячейке. Как видно из формул (6.6), (6.7) и (6.10), (6.11) ранее определенные по формулам (6.6), (6.7) коэффициенты сопутствующей задачи совпадают с классическими эффективными коэффициентами термоупругости [2, 18].

Кроме перечисленных пяти эффективных коэффициентов появились еще пять дополнительных эффективных коэффициента γ^{eff}, τ^{eff}, $\varkappa^{\text{eff}}$, φ^{eff}, χ^{eff}, которые обращаются в нуль в однородном случае. Новые эффективные коэффициенты, так же как и старые, выражаются через пять термоупругих коэффициентов исходной задачи:

$$\gamma^{\text{eff}} = -\big\langle\big[EU_{(0)}^{(1)\prime} - \beta M_{(0)}^{(1)}\big]\big\rangle\,,$$

$$\tau^{\text{eff}} = \big\langle\lambda M_{(0)}^{(1)\prime}\big\rangle = \left\langle\left(1 - \frac{1}{\lambda\big\langle 1/\lambda\big\rangle}\right)\int\limits_0^x \Big[\tilde{C}_\varepsilon(y) - \big\langle C_\varepsilon\big\rangle\Big]dy\right\rangle\,,$$

$$\varkappa^{\text{eff}} = \big\langle\big[\beta U_{(1)}^{(0)\prime} + \tfrac{1}{T_0}C_\varepsilon M_{(1)}^{(0)}\big]\big\rangle\,,$$

$$\varphi^{\text{eff}} = \big\langle\widetilde{\varphi}\big\rangle = \left\langle\left(C_\varepsilon + \frac{T_0\beta^2}{E}\right) M_{(1)}^{(0)}\right\rangle - T_0\beta^{\text{eff}}\left\langle\frac{\beta M_{(1)}^{(0)}}{E} - U_{(0)}^{(0)}\right\rangle,$$

$$\chi^{\text{eff}} = \frac{1}{\langle 1/E \rangle} \left\langle \frac{\beta M_{(1)}^{(0)}}{E} - U_{(0)}^{(0)} \right\rangle .$$

6.4 Обобщенное уравнение распространения тепла в однородном стержне.

Представим теперь, что тепловые процессы в стержне описываются следующими соотношениями:

$$T\dot{S} = -q' + w\,, \quad q = -\lambda\vartheta' - \tau\,\dot{\vartheta}\,, \quad S = C_\varepsilon \frac{\vartheta}{T_0} + \varkappa \frac{\dot{\vartheta}}{T_0} + \frac{\varphi}{T_0}\,\psi'\,. \tag{6.12}$$

Подчеркнем еще раз, что вид уравнений (6.12) вытекает из осреднения уравнений нестационарной задачи термоупругости для неоднородного стержня. Из уравнений (6.12) вытекает линеаризованное уравнение теплопроводности следующего вида:

$$\lambda T'' - C_\varepsilon \dot{T} + \underbrace{\bar{\tau}\,\dot{T}' - \varkappa \ddot{T}}_{\text{новые члены}} + w* = 0\,, \qquad \bar{\tau} = \tau - \varphi \tag{6.13}$$

Это уравнение отличается от классического уравнение теплопроводности параболического типа наличием двух дополнительных новых членов, которые меняют тип уравнения и приводят к конечной скорости распространения тепловых возмущений. Пусть на торце $x = 0$ тепло изолированного по боковой поверхности стержня задана гармоническая температура $T_0 + Ae^{-i\omega t}$, где A — действительная амплитуда колебаний, i — мнимая единица, ω — круговая частота. Положим $w^* = 0$, тогда решение гиперболического уравнения (6.13), удовлетворяющее граничному условию $T(0,t) = T_0 + Ae^{-i\omega t}$ и принимающее значение T_0 на бесконечности, имеет вид:

$$T(x,t) = T_0 + Ae^{-kx\,\sin(\chi/2)\,\sqrt[4]{1+\omega^2 b^2}}\; e^{i(rx-\omega t)} \tag{6.14}$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega C_\varepsilon}{\lambda}}\,,\; b = \frac{1}{\lambda}\Big(\varkappa + \frac{\bar{\tau}^2}{4C_\varepsilon}\Big)\,,\; \chi = \arctan\frac{1}{\omega b}\,,\; r \equiv \frac{\omega\bar{\tau}}{2\lambda} + k\sqrt[4]{1+\omega^2 b^2}\;\cos\frac{\chi}{2}$$

6.5 Предельная скорость распространения тепла.

Решение (6.14) представляет собой гармоническую тепловую волну, распространяющуюся вправо от границы стержня. Амплитуда температурной волны, равная A на границе стержня, убывает с удалением от нее по экспоненте. При $\bar{\tau} \neq 0$ и $\varkappa \neq 0$ скорость распространения волны ограничена в случае роста частоты колебаний и определяется по формуле

$$c = \frac{\omega}{r} = \frac{\sqrt{\omega}}{\frac{\sqrt{\omega}\,\bar{\tau}}{2\lambda} + \sqrt{\frac{C_\varepsilon}{\lambda}}\;\sqrt[4]{1+\omega^2 b^2}\;\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{\omega b}\right)} \quad \xrightarrow[\omega\to\infty]{} \quad \frac{\lambda}{\frac{\bar{\tau}}{2} + \sqrt{C_\varepsilon\Big(\varkappa + \frac{\bar{\tau}^2}{4C_\varepsilon}\Big)}}\,. \tag{6.15}$$

Если в формуле (6.15) положить $\bar{\tau} = 0$, а $\varkappa \neq 0$, тогда *уравнение* (6.13) *останется гиперболическим*, при этом $b = \varkappa/\lambda$ и для скорости тепловой волны получается более

простое, ограниченное по частоте выражение

$$c = \frac{\sqrt{\omega\lambda/C_\varepsilon}}{\sqrt[4]{1+\omega^2\varkappa^2/\lambda^2}\ \cos\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{\lambda}{\omega\varkappa}\right)} \quad \underset{\omega\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{\lambda}{\sqrt{\varkappa C_\varepsilon}} \tag{6.16}$$

Если же $\varkappa = 0$, а $\bar{\tau} \neq 0$, то

$$c = \frac{\sqrt{\omega}}{\frac{\sqrt{\omega}\bar{\tau}}{2\lambda} + \sqrt{\frac{C_\varepsilon}{\lambda}}\ \sqrt[4]{1+\omega^2\bar{\tau}^4/(4\lambda C_\varepsilon)^2}\ \cos\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{4\lambda C_\varepsilon}{\omega\bar{\tau}^2}\right)} \quad \underset{\omega\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{\lambda}{\bar{\tau}}\,. \tag{6.17}$$

Если же в формуле (6.15) положить $\bar{\tau} = 0$ и $\varkappa = 0$, то из неё следует формула для неограниченной по частоте скорости тепловой волны такая же, как и в классическом случае:

$$c = \sqrt{\omega\lambda/C_\varepsilon} \quad \underset{\omega\to\infty}{\longrightarrow} \quad \infty\,. \tag{6.18}$$

Лекция 7.Метод получения интегральных формул для решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

7.1 Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка.

Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами очень широко используются в математике, физике, механике и в других разделах науки для описания различных процессов. Приведу, к примеру, только некоторые известные уравнения, имеющие конкретные названия:

$x^2u'' + xu' + (x^2 - m^2)u = 0\,,$	$\big[xu'\big]' + \left(x - \dfrac{m^2}{x}\right)u = 0\,,$	**Ур. Бесселя**
$xu'' + (1-x)u' + mu = 0\,,$	$\big[xe^{-x}u'\big]' + me^{-x}u = 0\,,$	**Ур. Лагерра**
$u'' - 2xu' + 2mu = 0\,,$	$\big[e^{-x^2}u'\big]' + 2me^{-x^2}u = 0\,,$	**Ур. Эрмита**
$(1-x^2)u'' - xu' + m^2u = 0\,,$	$\big[\sqrt{1-x^2}\,u'\,\big]' + \dfrac{m^2}{\sqrt{1-x^2}}u = 0\,,$	**Ур. Чебышева**
$(1-x^2)u'' - 2xu' + m(m+1)u = 0\,,$	$\big[(1-x^2)\,u'\big]' + m(m+1)u = 0\,,$	**Ур. Лежандра**

Более подробная информация о перечисленных и других подобных уравнениях содержится в справочниках [19, глава 10], [20, глава 22], [21, глава 11]. Большинство из таких уравнений имеют самосопряженную форму записи.

Итак, рассмотрим самосопряженное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами (исходное уравнение)

$$L(u(x)) + X(x) = 0\,, \qquad L(u(x)) \equiv \big[C(x)u'\big]' + q(x)u\,, \qquad x \in (a,b) \tag{7.1}$$

Будем считать, что коэффициент $C(x) > 0$, а коэффициент $q(x)$ может быть как положителен, так и отрицателен в зависимости от переменной x.

Рассмотрим в той же области похожее уравнение, но только с постоянными коэффициентами (сопутствующее уравнение)

$$L^o(v(x)) + X(x) = 0\,, \qquad L^o(v) = C^o v'' + q^o v\,, \qquad x \in (a,b) \tag{7.2}$$

Здесь $v(x)$ — решение сопутствующего уравнения. Из уравнений видно, что

$$L(u(x)) = L^o(v(x))\,, \qquad x \in (a,b) \tag{7.3}$$

У исходного и сопутствующего уравнений одна и та же область определения и одни и те же входные данные, то есть свободный член $X(x)$ и граничные условия, например:

$$u(x)\big|_{x=a} = v(x)\big|_{x=a} = \alpha\,, \qquad u(x)\big|_{x=b} = v(x)\big|_{x=b} = \beta \tag{7.4}$$

Константы $C^o > 0$, q^o — пока произвольные постоянные величины. Общее решение сопутствующего уравнения (7.2) имеет вид:

$$v(x) = K_1 e^{i\lambda^o x} + K_2 e^{-i\lambda^o x} + \varphi(x)\,; \quad \lambda^o = \sqrt{q^o/C^o} = \begin{cases} \sqrt{q^o/C^o}, & \text{если } q^o > 0 \\ i\sqrt{-q^o/C^o}, & \text{если } q^o < 0\,, \end{cases} \tag{7.5}$$

где i — комплексная единица, K_1 и K_2 — произвольные комплексные константы, а $\varphi(x)$ — частное решение сопутствующего уравнения (7.2) с постоянными коэффициентами

$$\varphi(x) = \frac{i}{2\lambda^o C^o}\left[e^{i\lambda^o x}\int X(x)e^{-i\lambda^o x}dx - e^{-i\lambda^o x}\int X(x)e^{i\lambda^o x}dx\right] \tag{7.6}$$

.

7.1.1 Интегральное равенство и его преобразование.

Введем функцию $G(x)$, определённую на (a,b) и удовлетворяющую нулевым граничным условиям на концах отрезка, то есть

$$G(x)\big|_{x=a} = 0\,, \qquad G(x)\big|_{x=b} = 0 \tag{7.7}$$

Запишем следующее равенство:

$$\begin{gathered}\int\limits_a^b \Big\{\big[C(x)u'\big]' + q(x)u + X(x)\Big\}G(x)dx = \\ = \int\limits_a^b \big[C(x)u'\big]'G(x)dx + \int\limits_a^b q(x)uG(x)dx + \int\limits_a^b X(x)G(x)dx = 0\,,\end{gathered} \tag{7.8}$$

и преобразуем первый из интегралов в этой формуле

$$\begin{gathered}\int\limits_a^b \big[C(x)u'\big]'G(x)dx = \int\limits_a^b \big[(Cu'G)' - (CG'u)' + (CG')'u\big]dx = \\ Cu'G\Big|_a^b - CG'u\Big|_a^b + \int\limits_a^b (CG')'udx = C^o v'G\Big|_a^b - CG'v\Big|_a^b + \int\limits_a^b (CG')'udx = \\ = \int\limits_a^b (C^o v'G)'dx - \int\limits_a^b (CG'v)'dx + \int\limits_a^b (CG')'udx = \\ = \int\limits_a^b (CG')'\big(u-v\big)dx + \int\limits_a^b G'(x)\big[C^o - C(x)\big]v'dx + \boxed{\int\limits_a^b C^o v''G(x)dx}\end{gathered} \tag{7.9}$$

Из сопутствующего уравнения (7.2) найдём

$$\int_a^b \big[C^o v'' + q^o v + X(x)\big] G(x)dx = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\int_a^b C^o v'' G(x)dx = -\int_a^b q^o v G(x)dx - \int_a^b X(x)G(x)dx \tag{7.10}$$

Подставим это выражение в (7.9) и получим:

$$\int_a^b \big[C(x)u'\big]' G(x)dx = \int_a^b (CG')'\big(u-v\big)dx + \int_a^b G'(x)\big[C^o - C(x)\big]v'dx -$$
$$- \int_a^b q^o v G(x)dx - \int_a^b X(x)G(x)dx \tag{7.11}$$

Далее, <u>добавим и отнимем</u> в правой части формулы (7.11) следующее выражение:

$$\int_a^b q(x)G(x)\big(u-v\big)dx$$

В результате вместо (7.11) получаем выражение для первого из интегралов в формуле (7.8)

$$\int_a^b \big[C(x)u'\big]' G(x)dx =$$
$$= \int_a^b \big[(C(x)G')' + q(x)G(x)\big]\big(u-v\big)dx + \int_a^b G'(x)\big[C^o - C(x)\big]v'dx - \tag{7.12}$$
$$- \int_a^b G(x)\big[q^o - q(x)\big]vdx - \int_a^b q(x)u(x)G(x)dx - \int_a^b X(x)G(x)dx$$

А теперь подставим (7.12) в интегральное равенство (7.8) и получим его преобразованный вид:

$$\int_a^b \Big\{\underline{\big[C(x)G'(x)\big]' + q(x)G(x)}\Big\}\big[u(x)-v(x)\big]dx + \int_a^b G'(x)\big[C^o - C(x)\big]v'(x)dx -$$
$$- \int_a^b G(x)\big[q^o - q(x)\big]v(x)dx = 0 \tag{7.13}$$

7.1.2 Интегральная формула решения исходного уравнения.

В формуле (7.13) положим $G(x) \equiv G(x,\xi)$, а выражение в фигурных скобках приравняем к $-\delta(x-\xi)$ — дельта Кронекера, то есть:

$$L(G(x,\xi)) \equiv \big[C(x)G'(x,\xi)\big]' + q(x)G(x,\xi) = -\delta(x-\xi). \tag{7.14}$$

Функция $G(x,\xi)$ удовлетворяет нулевым граничным условиям (7.7) и называется функцией Грина исходного уравнения. После такой замены и с учетом того, что

$$\int\limits_a^b \big[-\delta(x-\xi)\big]\big(u(x)-v(x)\big)dx = v(\xi)-u(\xi)\,,$$

из (7.13) получаем следующую интегральную формулу

$$u(\xi) = v(\xi) + \int\limits_a^b G'_x(x,\xi)\big[C^o - C(x)\big]v'(x)dx - \int\limits_a^b G(x,\xi)\big[q^o - q(x)\big]v(x)dx \tag{7.15}$$

Сделав замену $x \leftrightarrow \xi$ и учитывая симметрию функции Грина по аргументам x и ξ получаем окончательный вариант интегральной формулы решения исходного уравнения [22]

$$\boxed{u(x) = v(x) + \int\limits_a^b G'_\xi(x,\xi)\big[C^o - C(\xi)\big]v'(\xi)d\xi - \int\limits_a^b G(x,\xi)\big[q^o - q(\xi)\big]v(\xi)d\xi} \tag{7.16}$$

7.1.3 Проверка интегральной формулы.

В интегральной формуле (7.16) явно не присутствуют входные данные задачи, следовательно интегральная формула справедлива и при других граничных условиях, отличных от условий (7.4), (7.7).

Прежде всего подставим выражение (7.16) для $u(x)$ в исходное уравнение (7.1) и покажем, что оно удовлетворяется (напомню, что операторы $L(\bullet)$ и $L^o(\bullet)$ действуют по

правилам $L(\bullet) \equiv \big[C(x)(\bullet)'_x\big] + q(x)(\bullet)$, и $L^o(\bullet) \equiv C^o(\bullet)''_{xx} + q^o(\bullet)$)

$$L(u(x)) + X(x) = L(v(x)) + \int\limits_a^b G'_\xi L(G(x,\xi))\big[C^o - C(\xi)\big]v'(\xi)d\xi -$$

$$- \int\limits_a^b L(G(x,\xi))\big[q^o - q(\xi)\big]v(\xi)d\xi + X(x) = L(v(x)) -$$

$$- \int\limits_a^b \big[\delta(x-\xi)\big]'_\xi\big[C^o - C(\xi)\big]v'(\xi)d\xi + \int\limits_a^b \delta(x-\xi)\big[q^o - q(\xi)\big]v(\xi)d\xi + X(x) =$$

$$= L(v(x)) + \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_a^b \big[\delta(x-\xi)\big]\big[C^o - C(\xi)\big]v'(\xi)d\xi + \big[q^o - q(x)\big]v(x) + X(x) =$$

$$= L(v(x)) + \frac{\partial}{\partial x}\Big\{\big[C^o - C(x)\big]v'(x)\Big\} + \big[q^o - q(x)\big]v(x) + X(x) =$$

$$= L(v(x)) + L^o(v(x)) - L(v(x)) + X(x) = L^o(v(x)) + X(x) = 0\,.$$

Следовательно, исходное уравнение (7.1) удовлетворяется. Кроме этого, выполняется равенство (7.3).

7.1.4 Выбор коэффициентов сопутствующего уравнения.

Постоянные коэффициенты C_o и q_o сопутствующего уравнения — это любые физически допустимые константы. Целесообразно увязать их со свойствами исходной задачи, например, положить их равными эффективным характеристикам [1, 2] так, что

$$C_\text{o} = \frac{1}{\big\langle 1/C \big\rangle}\,, \qquad q_\text{o} = \big\langle q \big\rangle\,, \qquad \big\langle f \big\rangle \equiv \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \tag{7.17}$$

В случае задачи Коши, среднее понимается как предельное значение при $b \to \infty$ [23, стр. 247-249].

7.1.5 Формула общего решения исходного уравнения.

В интегральную формулу (7.16) входит решение сопутствующего уравнения, общее решение которого представлено формулами (7.5) и (7.6). Подставив его в интегральную формулу (7.16) получим общее решение исходного уравнения

$$u(x) = K_1 A(x) + K_2 B(x) + \Phi(x)\,, \tag{7.18}$$

где

$$A(x) = e^{i\lambda^o x} + i\lambda^o \int\limits_a^b G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\, e^{i\lambda^o \xi}d\xi - \int\limits_a^b G(x,\xi)\tilde{q}(\xi)e^{i\lambda^o\xi}d\xi =$$

$$= \begin{cases} \cos(\lambda^o x) - \lambda^o \int\limits_a^b G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\sin(\lambda^o\xi)d\xi - \int\limits_a^b G(x,\xi)\tilde{q}(\xi)\cos(\lambda^o\xi)d\xi\,, & q^o > 0 \\ e^{-\lambda^o x} - \lambda^o \int\limits_a^b G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\,e^{-\lambda^o\xi}d\xi - \int\limits_a^b G(x,\xi)\tilde{q}(\xi)e^{-\lambda^o\xi}d\xi\,, & q^o < 0 \end{cases} \tag{7.19}$$

$$B(x) = e^{-i\lambda^o x} - i\lambda^o \int\limits_a^b G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\,e^{-i\lambda^o\xi}d\xi - \int\limits_a^b G(x,\xi)\tilde{q}(\xi)e^{-i\lambda^o\xi}d\xi =$$

$$= \begin{cases} \sin(\lambda^o x) - \lambda^o \int\limits_a^b G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\cos(\lambda^o\xi)d\xi - \int\limits_a^b G(x,\xi)\tilde{q}(\xi)\sin(\lambda^o\xi)d\xi\,, & q^o > 0 \\ e^{\lambda^o x} + \lambda^o \int\limits_a^b G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\,e^{\lambda^o\xi}d\xi - \int\limits_a^b G(x,\xi)\tilde{q}(\xi)e^{\lambda^o\xi}d\xi\,, & q^o < 0 \end{cases} \tag{7.20}$$

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \int\limits_a^b G'_\xi(x,\xi)\tilde{C}(\xi)\,\varphi'(\xi)d\xi - \int\limits_a^b G(x,\xi)\tilde{q}(\xi)\varphi(\xi)d\xi\,. \tag{7.21}$$

Здесь

$$\tilde{C}(\xi) = C^o - C(\xi)\,, \qquad \tilde{q}(\xi) = q^o - q(\xi) \tag{7.22}$$

В формулы (7.18)-(7.21) входит фундаментальная функция $G(x,\xi)$, которая является решением фундаментального уравнения (7.14).

7.2 Методы решения фундаментального уравнения

7.2.1 Метод возмущений в фундаментальном уравнении.

В работе [2] фундаментальное уравнение (7.14) решалось методом возмущений. Для применения метода возмущений перепишем уравнение (7.14) следующим образом:

$$\frac{d}{dx}\left[C(x)\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right] + \varkappa q(x)G(x,\xi) + \delta(x-\xi) = 0\,, \tag{7.23}$$

где $\varkappa$ — возмущающий параметр, который в окончательном результате положим равным единице. Будем искать решение уравнения (7.23) в виде ряда по степеням параметра $\varkappa$

$$G(x,\xi,\varkappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n G_n(x,\xi) \tag{7.24}$$

Подставим ряд (7.24) в уравнение (7.23), соберем коэффициенты при одинаковых степенях $\varkappa$ и приравняем их к нулю. В результате получаем рекуррентную последовательность уравнений

$$\left[C(x)G'_0(x,\xi)\right]' + \delta(x-\xi) = 0\,, \qquad \left[C(x)G'_n(x,\xi)\right]' + q(x)G_{n-1}(x,\xi) = 0\,, \quad n > 0 \tag{7.25}$$

Или

$$G_0(x,\xi) = -\int\limits_a^x \frac{h(z-\xi)}{C(z)}dz\,, \qquad G_n(x,\xi) = -\int\limits_a^x \frac{dx_1}{C(x_1)}\int\limits_a^{x_1} q(x_2)G_{n-1}(x_2,\xi)dx_2 =$$

$$= (-1)^{n+1} \int\limits_a^x \frac{dx_1}{C(x_1)} \int\limits_a^{x_1} q(x_2)dx_2 \cdots \int\limits_a^{x_{2n-2}} \frac{dx_{2n-1}}{C(x_{2n-1})} \int\limits_a^{x_{2n-1}} q(x_{2n})dx_{2n} \int\limits_a^{x_{2n}} \frac{h(z-\xi)dz}{C(z)}\,,\ n>0 \tag{7.26}$$

Здесь $h(x-\xi)$ — единичная обобщенная функция Хевисайда [**?**]. Константы интегрирования уравнений (7.25) полагаем равными нулю, поскольку нас устраивает любое фундаментальное решение исходного уравнения. Преобразуем выражение (7.26) для функции $G_0(x,\xi)$

$$G_0(x,\xi) = -\int\limits_a^x \frac{h(z-\xi)}{C(z)}dz = -\begin{cases} 0\,, & x<\xi \\ \int\limits_\xi^x \frac{dz}{C(z)}\,, & x \geqslant \xi \end{cases} = -h(x-\xi)\int\limits_\xi^x \frac{dz}{C(z)}\,, \tag{7.27}$$

Дифференцируя (7.27) по ξ, найдем обобщенную производную от $G_0(x,\xi)$ по ξ, которая нам понадобится в дальнейшем

$$\frac{\partial G_0}{\partial \xi} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left[h(x-\xi)\int\limits_\xi^x \frac{dz}{C(z)}\right] = \frac{h(x-\xi)}{C(\xi)} \tag{7.28}$$

Используя формулы (7.27) и (7.28) перепишем выражения для коэффициентов $G_n(x,\xi)$ из (7.26) и их производных по переменным x и ξ при $n \geqslant 1$

$$G_n(x,\xi) = -(-1)^n h(x-\xi)\int\limits_\xi^x \psi(x_1,\xi)dx_1 \cdots \int\limits_\xi^{x_{n-1}} \psi(x_n,\xi)dx_n \int\limits_\xi^{x_n} \frac{dz}{C(z)}\,; \tag{7.29}$$

$$\frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial x} = -(-1)^n \frac{h(x-\xi)}{C(x)}\int\limits_\xi^x q(x_1)dx_1 \int\limits_\xi^{x_1} \psi(x_2,\xi)dx_2 \cdots \int\limits_\xi^{x_{n-1}} \psi(x_n,\xi)dx_n \int\limits_\xi^{x_n} \frac{dz}{C(z)}\,;$$

$$\frac{\partial G_n(x,\xi)}{\partial \xi} = (-1)^n \frac{h(x-\xi)}{C(\xi)}\int\limits_\xi^x \psi(x_1,\xi)dx_1 \cdots \int\limits_\xi^{x_{n-1}} \psi(x_n,\xi)dx_n\,, \quad x_0 \equiv x\,.$$

Здесь для сокращения записи введено вспомогательное обозначение

$$\psi(x,\xi) = \frac{1}{C(x)}\int\limits_\xi^x q(y)dy\,, \qquad \psi'_\xi(x,\xi) = -\frac{q(\xi)}{C(x)}$$

Пользуясь этим обозначением, можно записать выражение (7.29) в виде рекуррентного соотношения

$$G_n(x,\xi) = -\int\limits_a^x \psi(y,\xi)G_{n-1}(y,\xi)dy\,,\ (n>0)\,; \quad G_0(x,\xi) = -h(x-\xi)\int\limits_\xi^x \frac{dz}{C(z)} \tag{7.30}$$

Подставив далее выражения (7.29) для $G_n(x,\xi)$ в ряд (7.24) и положив в нём $\varkappa = 1$, получим фундаментальное решение исходного уравнения в виде бесконечного ряда.

Причем, если $q(x) > 0$, то это знакочередующийся ряд. Если же $q(x) < 0$, то ряд будет знакопостоянным. Итак:

$$G(x,\xi) = -h(x-\xi)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int\limits_{\xi}^{x} \psi(x_1,\xi)dx_1 \cdots \int\limits_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n,\xi)dx_n \int\limits_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)}\,,\ x_0 \equiv x; \tag{7.31}$$

$$G'_x(x,\xi) = -\frac{h(x-\xi)}{C(x)}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int\limits_{\xi}^{x} q(x_1)dx_1 \int\limits_{\xi}^{x_1} \psi(x_2,\xi)dx_2 \cdots \int\limits_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n,\xi)dx_n \int\limits_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)}\right];$$

$$G'_\xi(x,\xi) = \frac{h(x-\xi)}{C(\xi)}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int\limits_{\xi}^{x} \psi(x_1,\xi)dx_1 \cdots \int\limits_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n,\xi)dx_n\right]$$

Пусть $G^{(n)}(x,\xi)$ — частичная сумма ряда (7.31), тогда

$$G^{(n+1)}(x,\xi) = G^{(n)}(x,\xi) - h(x-\xi)(-1)^n \int\limits_{\xi}^{x} \psi(x_1,\xi)dx_1 \cdots \int\limits_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n,\xi)dx_n \int\limits_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)}$$

Если $C = C_{\text{o}} = const.$, а $q = q(x)$ — переменная, тогда

$$\int\limits_{\xi}^{x} \psi(x_1,\xi)dx_1 = \frac{1}{C_{\text{o}}}\int\limits_{\xi}^{x} dx_1 \int\limits_{\xi}^{x_1} q(y)dy = \frac{1}{C_{\text{o}}}\int\limits_{\xi}^{x} (x-x_1)q(x_1)dx_1\,,$$

следовательно

$$G(x,\xi) = -h(x-\xi)\left[\frac{x-\xi}{C_0} - \right.$$
$$\left. -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{C_0^{n+1}} \int\limits_{\xi}^{x} (x-x_1)q(x_1)dx_1 \cdots \int\limits_{\xi}^{x_{n-1}} (x_{n-1}-x_n)(x_n-\xi)q(x_n)dx_n + \cdots\right]$$

Если же $q = q_{\text{o}} = const.$, а $C = C(x)$ — переменная, тогда

$$\psi(x,\xi) = q_{\text{o}}\,\frac{x-\xi}{C(x)}\,,$$

следовательно

$$G(x,\xi) = -h(x-\xi)\left[\int\limits_{\xi}^{x} \frac{dz}{C(z)} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q_{\text{o}}^n \int\limits_{\xi}^{x} \frac{x_1-\xi}{C(x_1)}dx_1 \cdots \int\limits_{\xi}^{x_n} \frac{x_n-\xi}{C(x_n)}dx_n \int\limits_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)}\right]$$

Пусть теперь $C = C_{\text{o}} = const.$ и $q = q_{\text{o}} = const.$, тогда из формулы (7.29), а также с учетом того, что

$$\int\limits_{\xi}^{x} (x-z)(z-\xi)^m dz = \frac{(x-\xi)^{m+2}}{(m+1)(m+2)}\,,$$

получаем

$$G_n(x,\xi) = (-1)^{n+1}\frac{h(x-\xi)q_{\text{o}}^n}{(2n+1)!\,C_{\text{o}}^{n+1}}\,(x-\xi)^{2n+1}\,,\ n \geqslant 0 \tag{7.32}$$

В этом случае ряд (7.31) суммируется и получается фундаментальное решение сопутствующего уравнения (7.2), которое понимается в обобщенном смысле и его можно найти, например, в книге [7]

$$\boldsymbol{G(x,\xi) = -\frac{h(x-\xi)}{C_{\text{o}}}\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n s_{\text{o}}}{(2n+1)!}\left(\frac{x-\xi}{s_{\text{o}}}\right)^{2n+1} = s_{\text{o}}\,\sin\frac{x-\xi}{s_{\text{o}}}\,, \quad s_{\text{o}} = \sqrt{\frac{C_{\text{o}}}{q_{\text{o}}}}\,, & q_{\text{o}} > 0\,, \\ x-\xi\,, & q_{\text{o}} = 0\,, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{s_{\text{o}}}{(2n+1)!}\left(\frac{x-\xi}{s_{\text{o}}}\right)^{2n+1} = s_{\text{o}}\,\text{sh}\,\frac{x-\xi}{s_{\text{o}}}\,, \quad s_{\text{o}} = \sqrt{\frac{C_{\text{o}}}{-q_{\text{o}}}}\,, & q_{\text{o}} < 0\,. \end{cases}}$$

В общем случае, когда коэффициенты C и q переменные, можно получить оценку абсолютной величины n-го члена ряда (7.31). Для этого воспользуемся выражением (7.32), в соответствии с которым при $x \geqslant \xi$ получаем:

$$\begin{gathered}\frac{(x-\xi)^{2n+1}|q|_{\min}^n}{(2n+1)!\,C_{\max}^{n+1}} \leqslant |G_n(x,\xi)| \leqslant \frac{(x-\xi)^{2n+1}|q|_{\max}^n}{(2n+1)!\,C_{\min}^{n+1}} \leqslant \frac{L^{2n+1}|q|_{\max}^n}{(2n+1)!\,C_{\min}^{n+1}} \leqslant \\ \leqslant \frac{L^{2n+1}|\langle q\rangle|^n\,\langle 1/C\rangle^{n+1}}{(2n+1)!}\end{gathered} \tag{7.33}$$

Мажорирующие ряды сходятся, в частности

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-\xi)^{2n+1}|q|_{\max}^n}{(2n+1)!\,C_{\min}^{n+1}} = \frac{s^*}{C_{\min}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{x-\xi}{s^*}\right)^{2n+1} = \frac{s^*}{C_{\min}}\,\sin\frac{x-\xi}{s^*}\,, \quad s^* = \sqrt{\frac{C_{\min}}{|q|_{\max}}}$$

Следовательно, в соответствии с признаком Вейерштрасса, ряд (7.31) сходится равномерно на всём промежутке $a \leqslant x \leqslant b$.

7.2.2 Интегральное уравнение для фундаментальной функции. Метод последовательных приближений для его решения.

В методе последовательных приближений исходят из начального приближения, которое либо задаётся из эвристических соображений, либо находится из некоторого начального дифференциального уравнения, которое легко интегрируется.

Остальные последующие приближения к решению находятся из рекуррентных дифференциальных уравнений, которые также легко интегрируются. Процесс последовательных приближений в нашем случае существенно упрощается, поскольку не нужно заботиться о краевых, либо начальных условиях.

Фундаментальная функция исходного уравнение удовлетворяет уравнению с переменными коэффициентами. **Исходному фундаментальному уравнению поставим**

в соответствие сопутствующее фундаментальное уравнение с постоянными коэффициентами $C_o = 1/\langle 1/C\rangle$ и $q_o = \langle q\rangle$

$$C_o \frac{d^2 G_o(x,\xi)}{dx^2} + q_o G_o(x,\xi) + \delta(x-\xi) = 0\,, \qquad x,\xi \in (a,b)\,. \tag{7.34}$$

Решение сопутствующего фундаментального уравнения (7.34) имеет вид:

$$\boxed{G_o(x,\xi) = h(x-\xi)F_o(x,\xi)\,, \qquad F_o(x,\xi) = \frac{i}{\mu_o C_o}\,\mathrm{sh}\left[i\mu_o(x-\xi)\right]} \tag{7.35}$$

По аналогии с интегральной формулой (??) запишем интегральную формулу представления $G(x,\xi)$ через $G_o(x,\xi)$

$$\boxed{G(x,\xi) = G_o(x,\xi) + \int\limits_a^b \frac{\partial G(x,\eta)}{\partial \eta}\tilde{C}(\eta)\,\frac{\partial G_o(\eta,\xi)}{\partial \eta}d\eta - \int\limits_a^b G(x,\eta)\tilde{q}(\eta)G_o(\eta,\xi)d\eta}\,. \tag{7.36}$$

Формула (7.36) представляет собой интегральное уравнение похожее на известное уравнение Фредгольма второго рода для функции $G(x,\xi)$. Отличие от классического уравнения Фредгольма заключается в том, что в правой части имеется дополнительный интеграл, содержащий производную от искомой функции.

Из формул метода возмущений следует, что

$$G(x,\xi) = h(x-\xi)F(x,\xi)$$

Тогда из (7.36) получим интегральное уравнение похожее на интегральное уравнение Вольтерра второго рода для функции $F(x,\xi)$

$$\boxed{F(x,\xi) = F_o(x,\xi) + \int\limits_\xi^x \frac{\partial F(x,\eta)}{\partial \eta}\tilde{C}(\eta)\,\frac{\partial F_o(\eta,\xi)}{\partial \eta}d\eta - \int\limits_\xi^x F(x,\eta)\tilde{q}(\eta)F_o(\eta,\xi)d\eta}\,. \tag{7.37}$$

Нулевое и первое приближения.

В методе последовательных приближений исходим из нулевого приближения $F^{(0)}(x,\xi)$. Каждое последующее приближение $F^{(n)}(x,\xi)$ вычисляется через $F^{(n-1)}(x,\xi)$

$$\begin{aligned} F^{(n)}(x,\xi) = F_o(x,\xi) + \int\limits_\xi^x \frac{\partial F^{(n-1)}(x,\eta)}{\partial \eta}\tilde{C}(\eta)\,\frac{\partial F_o(\eta,\xi)}{\partial \eta}d\eta - \\ - \int\limits_\xi^x F^{(n-1)}(x,\eta)\tilde{q}(\eta)F_o(\eta,\xi)d\eta\,. \end{aligned} \tag{7.38}$$

В качестве нулевого приближения можно взять функцию $\boldsymbol{F_{\text{o}}(x,\xi)}$ — решение (7.35) сопутствующего фундаментального уравнения (7.34)

$$\begin{gathered}\boldsymbol{F^{(0)}(x,\xi) \equiv F_{\text{o}}(x,\xi) = \frac{i}{\mu_{\text{o}} C_{\text{o}}}\,\mathrm{sh}\left[i\mu_{\text{o}}(x-\xi)\right],}\\ \boldsymbol{\frac{\partial F^{(0)}(x,\eta)}{\partial\eta} = \frac{1}{C_{\text{o}}}\,\mathrm{ch}\left[i\mu_{\text{o}}(x-\eta)\right], \qquad \frac{\partial F_{\text{o}}(\eta,\xi)}{\partial\eta} = -\frac{1}{C_{\text{o}}}\,\mathrm{ch}\left[i\mu_{\text{o}}(\eta-\xi)\right],}\end{gathered} \tag{7.39}$$

тогда из формулы (7.38) получаем первое приближение, где

$$\begin{gathered}\boldsymbol{F^{(1)}(x,\xi) = \frac{i}{\mu_{\text{o}} C_{\text{o}}}\,\mathrm{sh}\left[i\mu_{\text{o}}(x-\xi)\right] - \frac{1}{C_{\text{o}}^2}\int\limits_{\xi}^{x}\mathrm{ch}\left[i\mu_{\text{o}}(x-\eta)\right]\tilde{C}(\eta)\,\mathrm{ch}\left[i\mu_{\text{o}}(\eta-\xi)\right]d\eta +}\\ \boldsymbol{+\frac{1}{\mu_{\text{o}}^2 C_{\text{o}}^2}\int\limits_{\xi}^{x}\mathrm{sh}\left[i\mu_{\text{o}}(x-\eta)\right]\tilde{q}(\eta)\,\mathrm{sh}\left[i\mu_{\text{o}}(\eta-\xi)\right]d\eta}\end{gathered} \tag{7.40}$$

Лекция 8.Инженерная теория сопротивления стержней из композиционных материалов (сопромат для композитов). Уравнения Журавского.

8.1 Связи между внешними и внутренними силами в стержне.

Под внешними силами понимаются объёмные и поверхностные силы, приложенные к стержню, как к трёхмерному объекту.

8.1.1 Балка и система координат. Рассмотрим прямолинейный стержень (балку) длины $\boldsymbol{L}$ из однородного изотропного материала. Поместим начало $\boldsymbol{O}$ правой декартовой системы координат в какой либо точке левого торца стержня. Ось $\boldsymbol{x_3}$ направим параллельно образующей стержня, а оси $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$ — так чтобы система декартовых координат была правой. Обозначим через $\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}$ векторы ортонормированного базиса де-

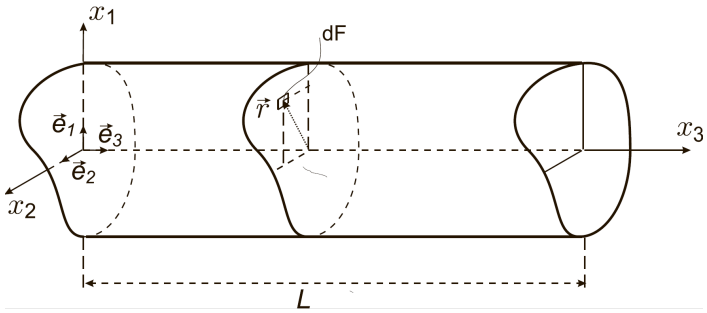


Рис. 8.3: *Стержень (балка) и правая система координат*

картовой системы координат, а через $\vec{\boldsymbol{r}}$ — радиус-вектор точки в плоскости $\boldsymbol{Ox_1x_2}$ и в любом поперечном сечении стержня. Маленькие индексы принимают значения 1, 2, 3, а большие только 1 и 2. По повторяющимся индексам предполагается суммирование в соответствующих пределах, так что

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{x_I}\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{x_1}\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{x_2}\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}}$$

8.1.2 Нагрузки. Внешние объемные $\vec{X}$ и поверхностные $\vec{p}$ распределённые нагрузки, действующие на стержень, приводятся к вектору силы $\vec{q}(x_3)$ и вектору моменту $\vec{m}(x_3)$, распределённым вдоль оси x_3

$$\vec{q}(x_3) = q_i(x_3)\vec{e}_i\,, \qquad \vec{m}(x_3) = m_i(x_3)\vec{e}_i \tag{8.1}$$

К внешним силам относятся силы инерции, являющиеся массовыми силами, а также реакции опор, которые представляют собой сосредоточенные силы и моменты. В статически определимых задачах реакции опор известны и, следовательно, векторы $\vec{q}$ и $\vec{m}(x_3)$ вполне определены. В статически неопределимом случае в выражение для эквивалентных осевых нагрузок будут входить неизвестные постоянные величины, которые нужно искать из решения задачи о прогибах оси стержня (данном случае оси x_3).

Компонента q_i вектора силы считается положительной, если соответствующий вектор $\vec{q}_i = q_i\vec{e}_i$ направлен в положительную сторону оси x_i. Компонента внешнего вектора-момента $m_i > 0$, если она вращает против часовой стрелки при взгляде с положительного направления оси x_i. Соответственно вектор $\vec{m}_i = m_i\vec{e}_i$ направлен в положительную сторону оси x_i и изображается стрелкой с двумя наконечниками (рис. 8.4)

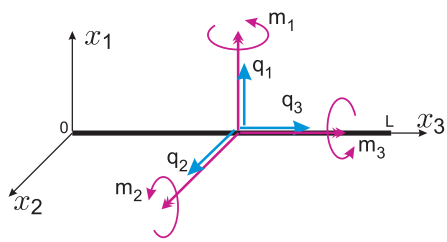


Рис. 8.4: *Положительные направления приведенных внешних сил и моментов*

8.1.3 Условия равновесия всего стержня и его частей. Стержень целиком, также как и любая его выделенная часть, находится в равновесии, поэтому

$$\int\limits_0^L \vec{q}(y)dy = 0\,, \qquad \int\limits_0^L \vec{m}(y)dy + \int\limits_0^L y\vec{e}_3 \times \vec{q}(y)dy = 0 \tag{8.2}$$

Выражения (8.2) представляют собой равенство нулю результирующего вектора и результирующего момента относительно центра левого торца стержня. Выделив какую либо промежуточную точку $0 \leqslant x_3 \leqslant L$ оси стержня, запишем уравнения равновесия (8.2) в виде равенства нулю суммы сил и моментов, действующих слева и справа от выбранной точки

$$\int\limits_0^{x_3} \vec{q}(y)dy + \int\limits_{x_3}^L \vec{q}(y)dy = 0\,,$$

$$\int\limits_0^{x_3} \vec{m}(y)dy - \int\limits_0^{x_3} (x_3 - y)\vec{e}_3 \times \vec{q}(y)dy + \int\limits_{x_3}^L \vec{m}(y)dy + \int\limits_{x_3}^L (y - x_3)\vec{e}_3 \times \vec{q}(y)dy = 0 \tag{8.3}$$

8.1.4 Внутренние силовые факторы. В первом равенстве (8.3) второе слагаемое обозначим через $\vec{Q}(x_3)$, а во втором равенстве сумму третьего и четвертого — через $\vec{M}(x_3)$, т.е.

$$\vec{Q}(x_3) \equiv \int\limits_{x_3}^{L} \vec{q}(y)dy\,, \qquad \vec{M}(x_3) \equiv \int\limits_{x_3}^{L} \vec{m}(y)dy - \int\limits_{x_3}^{L} (x_3 - y)\vec{e}_3 \times \vec{q}(y)dy \tag{8.4}$$

Кроме этого, из равенств (8.3) получаем

$$\vec{Q} = -\int\limits_{0}^{x_3} \vec{q}(y)dy\,, \qquad \vec{M} = -\int\limits_{0}^{x_3} \vec{m}(y)dy + \int\limits_{0}^{x_3} (x_3 - y)\vec{e}_3 \times \vec{q}(y)dy \tag{8.5}$$

Выражения (8.5) являются интегральными уравнениями равновесия части стержня, находящейся левее от поперечного сечения в точке x_3. Векторы $\vec{Q}(x_3)$ и $\vec{M}(x_3)$ представляют собой поперечную силу и изгибающий момент в правом сечении стержня. Как следует из (8.4), они являются результирующими векторами всех внешних сил и моментов, приложенных к правой от сечения части стержня. Компоненты вектора силы $Q_i(x_3)$ и компоненты вектора момента $M_i(x_3)$ называются внутренними силовыми факторами. Q_1 и Q_2 — поперечные (перерезывающие) силы, $Q_3 \equiv T$ — продольная сила. M_1 и M_2 — изгибающие моменты, $M_3 \equiv M_\Theta$ — крутящий момент.

Силы Q_i в "правом" поперечном сечении считаются положительными если векторы $\vec{Q}_i$ направлены в положительном направлении осей x_i. Моменты M_i в "правом" поперечном сечении считаются положительными если они вращают сечение вокруг координатной оси против часовой стрелки при взгляде на циферблат с стороны положительного направления оси x_i.

8.1.5 Дифференциальные зависимости между внутренними силовыми факторами. Уравнения Журавского. Если задача статически определена, то внутренние силовые факторы в поперечном сечении с координатой x_3 находятся непосредственно из уравнения равновесия (8.5) для левой части стержня. В том случае, когда задача статически неопределена выражения (8.5) определяют внутренние силовые факторы с точностью до неизвестных *постоянных слагаемых*, которые представляют собой реакции опор. Если продифференцировать по x_3 выражения (8.5), то в левых частях исчезнут все неизвестные реакции опор и уравнения равновесия записываются в дифференциальной форме

$$\begin{gathered} \vec{Q}' = -\vec{q}\,, \qquad \vec{M}' = -\vec{m} + \vec{e}_3 \times \vec{Q} = -\vec{m} + \epsilon_{i3k} Q_k \vec{e}_i \\ Q_i' = -q_i\,, \qquad M_i' = -m_i + \epsilon_{i3k} Q_k \end{gathered} \tag{8.6}$$

Уравнения равновесия в покомпонентной форме имеют вид:

$$Q_1' = -q_1\,, \qquad Q_2' = -q_2\,, \qquad Q_3' = -q_3\,, \tag{8.7}$$

$$M_1' = -m_1 - Q_2\,, \qquad M_2' = -m_1 + Q_1\,, \qquad M_3' = -m_3 \tag{8.8}$$

Продифференцируем по x_3 уравнения для изгибающих моментов и воспользуемся уравнениями для перерезывающих сил. В результате дифференциальные уравнения

равновесия для изгибающих моментов записываются следующим образом:

$$M_1'' = -m_1' + q_2\,, \qquad M_2'' = -m_2' - q_1 \tag{8.9}$$

Выражения (8.9), как отмечено в книге [24, стр. 118], называются дифференциальными соотношениями Журавского. Эти соотношения можно также получить как условия равновесия элементарного отрезка $[x_3, x_3 + dx_3]$ [25, стр. 21].

8.1.6 Внутренние напряжения в поперечном сечении стержня. С другой стороны векторы $\vec{Q}$ и $\vec{M}$ есть результат приведения к центру сечения вектора напряжения $\vec{P}_3 = \tau_{3j}\vec{e}_j$, распределённого по поперечному сечению стержня

$$\vec{Q}(x_3) = Q_i\vec{e}_i = \int\limits_F \vec{P}_3 dF = \int\limits_F \tau_{3j} dF\ \vec{e}_j \quad \Rightarrow \quad Q_i(x_3) = \int\limits_F \tau_{3i} dF \tag{8.10}$$

$$\vec{M}(x_3) = M_i\vec{e}_i = \int\limits_F \vec{r}\times\vec{P}_3 dF = \int\limits_F \vec{r}\times\vec{e}_j\tau_{3j} dF \quad \Rightarrow \quad M_i(x_3) = \epsilon_{iJk}\int\limits_F x_J\tau_{3k} dF \tag{8.11}$$

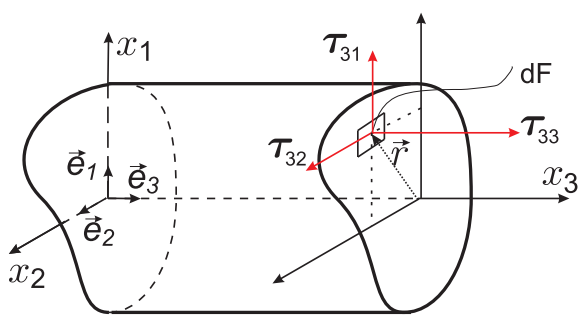


Рис. 8.5: *Внутренние напряжения в поперечном сечении стержня*

Последняя формула для моментов расписывается следующим образом:

$$M_1(x_3) = \int\limits_F x_2\tau_{33} dF\,, \quad M_2(x_3) = -\int\limits_F x_1\tau_{33} dF\,, \quad M_3(x_3) = \int\limits_F (x_1\tau_{32} - x_2\tau_{31}) dF \tag{8.12}$$

Крутящий момент равен нулю в том случае, когда касательные напряжения в каждом поперечном сечении стержня подчиняются следующему условию:

$$\int\limits_F \left[x_1\tau_{32}(x_1,x_2,x_3) - x_2\tau_{31}(x_1,x_2,x_3)\right] dF = 0 \tag{8.13}$$

8.1.7 Чистое растяжение, чистый изгиб, поперечный изгиб и чистое кручение стержня. В зависимости от внутренних силовых факторов один и тот же стержень по всей длине или же в различных своих частях может испытывать состояние чистого продольного растяжения ($Q_3 \neq 0$, $Q_I = 0$, $M_i = 0$), чистый изгиб в одной или в двух плоскостях ($Q_i = 0$, $M_I = const.$, $M_3 = 0$), поперечный изгиб в

одной или двух плоскостях ($\boldsymbol{Q_3 = 0}$, $\boldsymbol{Q_I \neq 0}$, $\boldsymbol{M_I \neq 0}$, $\boldsymbol{M_3 = 0}$), чистое кручение стержня ($\boldsymbol{Q_i = 0}$, $\boldsymbol{M_I = 0}$, $\boldsymbol{M_3 = const.}$). В силу линейности задачи каждый из этих случаев можно рассматривать отдельно и затем результаты суммировать. Однако в большинстве случаев стержень одновременно может испытывать различные виды деформации, причём они взаимосвязаны, что отражается в уравнениях, описывающих напряженно-деформированное состояние стержня.

В случае стержней из композиционных материалов или, в общем случае, неоднородных стержней их НДС, как правило, описывается связанной системой дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Стержни могут быть неоднородными по длине, неоднородными в поперечном сечении, а также одновременно неоднородными по длине и поперечном сечении. От вида неоднородности существенно зависят сложность инженерной теории, описывающей поведение стержней под нагрузкой.

Общим для всех стержней является анализ силовых факторов в поперечных сечениях. В случае статически определимых стержней величина и направление внутренних силовых факторов одинаково для стержней из различных материалов — упругих, неупругих, однородных и неоднородных.

Отметим также, что приведенные выше соотношения остаются справедливыми и в случае стержней с переменным по длине поперечным сечением.

Лекция 9.Сопромат для композитов (продолжение). Кинематические гипотезы Кирхгофа-Лява, Тимошенко, Рейснера (2 типа).

9.1 Гипотеза плоских сечений.

9.1.1 Гипотеза Бернулли-Эйлера. Внутренние силовые факторы однозначно вычисляются через компоненты тензора напряжений. В сопротивлении материалов и в строительной механике стержневых конструкций прежде всего вычисляются внутренние силовые факторы, а затем по ним из уравнений (8.10)–(8.11) нужно вычислить распределение напряжений в сечении. Эта задача не имеет единственного решения. Для разрешения этой проблемы необходимо как-то определиться с распределением напряжений по поперечному сечению. В этом помогают кинематические гипотезы, которые заранее задают распределение перемещений точек в поперечном сечении.

Кинематических гипотез можно придумать бесконечное число. Наиболее распространёнными среди них являются гипотеза Бернулли-Эйлера, гипотеза Тимошенко и гипотеза Рейснера. Самая простая — это гипотеза Бернулли-Эйлера. Соответствующая теория называется теорией балки Бернулли-Эйлера. В теории продольно поперечного изгиба балки Бернулли-Эйлера искомыми кинематическими величинами являются три компоненты вектора перемещений точек оси стержня, являющиеся функциями продольной координаты.

Гипотеза Бернулли-Эйлера иначе называется гипотезой плоских сечений, которая гласит, что плоское до деформации поперечное сечение остаётся плоским, не деформированным и перпендикулярным к изогнутой оси стержня. Оно поворачивается вокруг координатных осей как жесткое целое.

9.1.2 Перемещения точек оси стержня при продольной деформации и изгибе. Вектор перемещений точек оси стержня при его продольной деформации и изгибе обозначим через $\vec{w}$, а его проекции на координатные оси — через w_i, так, что

$$\vec{w}(x_3) = w_i(x_3)\vec{e}_i = w_1(x_3)\vec{e}_1 + w_2(x_3)\vec{e}_2 + w_3(x_3)\vec{e}_3 \tag{9.1}$$

где w_3 — продольное перемещение точки оси, а w_1 и w_2 — прогибы оси в плоскостях Ox_1x_3 и Ox_2x_3. На рисунке 9.6 изображены проекции на координатные плоскости прогиба консоли.

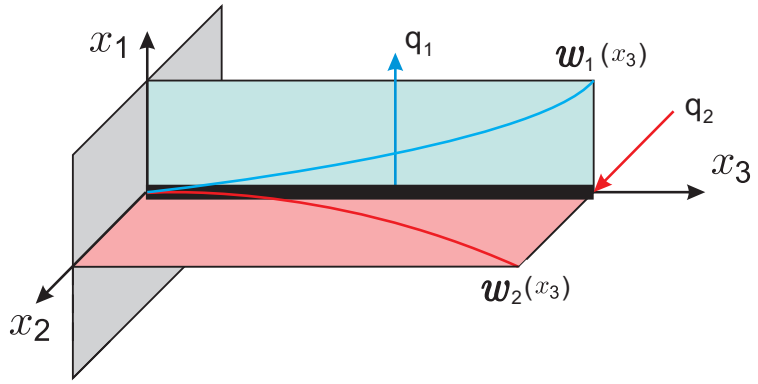


Рис. 9.6: *Изгиб стержня в двух плоскостях*

В случае продольной деформации и изгиба стержня сечение смещается вдоль оси x_3 на величину $w_3(x_3)$ и поворачивается вокруг осей x_1 и x_2 как жесткое целое, вызывая, при этом, осевое перемещение точек стержня и, соответственно, продольную деформацию волокон.

Обозначим через $v_i(x_1, x_2, x_3)$ — компоненты вектора перемещений в точках стержня, а через $e_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2$ — компоненты тензора малых деформаций.

Для того чтобы поперечное сечение оставалось плоским и недеформированным необходимо чтобы в каждом сечении все компоненты тензора деформаций, кроме продольной e_{33}, обращались в нуль, т.е.

$$e_{IJ} = \frac{1}{2}(v_{I,J} + v_{J,I}) = 0\,, \qquad e_{3I} = \frac{1}{2}(v_{3,I} + v_{I,3}) = 0$$

Из этих соотношений следует

$$e_{11} = v_{1,1} = 0\,,\ e_{22} = v_{2,2} = 0\,, \quad \Rightarrow \quad v_1 = f_1(x_2, x_3)\,,\ v_2 = f_2(x_1, x_3)$$

$$e_{12} = \frac{1}{2}(v_{1,2} + v_{2,1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_{1,2}(x_2, x_3) = -f_{2,1}(x_1, x_3) = \vartheta(x_3) \quad \Rightarrow$$

$$f_1 = v_1 = x_2\vartheta(x_3) + f_4(x_3)\,, \qquad f_2 = v_2 = -x_1\vartheta(x_3) + f_5(x_3)$$

$$v_1(x_2 = 0, x_3) = w_1(x_3) = f_4(x_3)\,,\ v_2(x_1 = 0, x_3) = w_2(x_3) = f_5(x_3)\,; \Rightarrow$$

$$v_1 = x_2\vartheta(x_3) + w_1(x_3)\,, \qquad v_2 = -x_1\vartheta(x_3) + w_2(x_3)$$

$$e_{31} = \frac{1}{2}(v_{3,1} + v_{1,3}) = 0 \ \Rightarrow\ v_{3,1} = -v_{1,3} = -x_2\vartheta' - w_{1,3}\,,$$

$$v_3 = -x_1x_2\vartheta' - x_1w_{1,3} + f_6(x_2, x_3)$$

$$e_{32} = \frac{1}{2}(v_{3,2} + v_{2,3}) = 0 \ \Rightarrow\ v_{3,2} = -v_{2,3} = x_1\vartheta' - w_{2,3}\,,\ v_3 = x_1x_2\vartheta' - x_2w_{2,3} + f_7(x_1, x_3)$$

$$\Rightarrow \vartheta = const.\,,\ f_6(x_2, x_3) = w_3(x_3) - x_2w_{2,3}\,,\ f_7(x_1, x_3) = w_3(x_3) - x_1w_{1,3} \Rightarrow$$

$$v_I = \epsilon_{IJ}x_J\vartheta + w_I(x_3)\,, \qquad v_3 = w_3(x_3) - x_Iw_{I,3}(x_3)$$

Первое слагаемое в выражении для v_I соответствует жёсткому повороту всего стержня на постоянный угол ϑ вокруг оси x_3. Оно не влияет на деформацию, поэтому его следует отбросить.

Таким образом, перемещения точек стержня, соответствующие гипотезе плоских сечений и предположению о малых прогибах оси стержня имеют вид:

$$v_I = w_I(x_3)\,, \qquad v_3 = w_3(x_3) - x_I w_{I,3}(x_3)\,, \tag{9.2}$$

Гипотеза плоских сечений содержит три неизвестные функции координаты x_3, в качестве которых выступают три компоненты вектора перемещений точек $w_i(x_3)$. Именно эти функции являются искомыми в теории балки Бернулли-Эйлера. Наша дальнейшая задача состоит в том, чтобы получить уравнения для функций w_i и выразить все искомые величины (внутренние силовые факторы, деформации и напряжения в сечении) через них.

9.1.3 Продольная деформация волокон стержня. По продольному перемещению найдём продольную деформацию

$$e_{33}(x_1, x_2, x_3) = \gamma(x_3) - x_I w_{I,33}(x_3) = \gamma(x_3) + x_1 \varkappa_2(x_3) + x_2 \varkappa_1(x_3) \tag{9.3}$$

где

$$\gamma = w_{3,3}\,, \qquad \varkappa_1 = -w_{2,33}\,, \qquad \varkappa_2 = -w_{1,33} \tag{9.4}$$

$\gamma(x_3)$ - продольная деформация оси стержня, а $\varkappa_1(x_3)$ и $\varkappa_2(x_3)$ характеризуют искривление проекций изогнутой оси стержня на координатные плоскости x_2x_3 и x_1x_3 соответственно. Предполагается, что прогибы малы, т.е. $|w_{I,3}| \ll 1$.

В силу гипотезы плоских сечений все остальные компоненты тензора деформаций равны нулю, , т.е $e_{IJ} = 0$, $e_{I3} = 0$.

Вращение сечения вокруг оси x_2 моментом M_2 вызывает прогиб оси балки в плоскости x_1x_3, поэтому кривизна кривой в плоскости x_1x_3 обозначена через $\varkappa_2 = -w_{1,33}$. Аналогично M_1 связано с $\varkappa_1 = -w_{2,33}$.

В случае больших прогибов кривизны выражаются через прогибы оси по более сложным формулам [26, стр. 110]

$$\varkappa_1 = -w_{2,33}/(1 + w_{2,3}^2)^{3/2}\,, \qquad \varkappa_2 = -w_{1,33}/(1 + w_{1,3}^2)^{3/2}$$

9.1.4 Напряжения в стержне. Статическая гипотеза. Компоненты тензора напряжений в стержне находятся из обобщенного закона Гука, согласно которому

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} = \big(\lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu \Delta_{ijkl}\big) e_{kl} = \left[\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{E}{1+\nu}\Delta_{ijkl}\right] e_{kl} \tag{9.5}$$

Обратный закон Гука имеет вид:

$$e_{ij} = J_{ijkl}\sigma_{kl} = \left[-\frac{\nu}{E}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1+\nu}{E}\Delta_{ijkl}\right]\sigma_{kl} \tag{9.6}$$

где E - модуль Юнга материала однородного стержня, а ν коэффициент Пуассона.

В классическом сопромате, кроме гипотезы плоских сечений, используется ещё одна гипотеза, называемая статической гипотеза или гипотеза *о независимости продольных деформаций волокон стержня.* Принятие этой гипотезы приводит к тому, что все компоненты тензора напряжений в поперечном сечении стержня принимаются равными

нулю, кроме продольного напряжения $\boldsymbol{\tau_{33} \neq 0}$. Оценка величины поперечных напряжений напряжений $\boldsymbol{\tau_{IJ}}$ и касательных напряжений $\boldsymbol{\tau_{3J}}$ по сравнению с продольным напряжением $\boldsymbol{\tau_{33}}$ проводилась в работах [27], [24], [28] и в ряде других работ. Учет сдвиговой податливости и оценка поперечных напряжений при изгибе анизотропных балок материала проведен в работе [29].

Итак, в соответствии со статической гипотезой

$$\boldsymbol{e_{ij} = J_{ij33}\sigma_{33} = \left[-\frac{\nu}{E}\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}\delta_{i3}\delta_{j3} \right]\sigma_{33}} \tag{9.7}$$

Итак, положив в (9.5) $\boldsymbol{\nu = 0}$, получаем

$$\boldsymbol{\tau_{ij} = E\delta_{i3}\delta_{j3}e_{33}\,, \qquad \Rightarrow \qquad \tau_{33} = Ee_{33} = E\gamma + E\big(x_1\varkappa_2 + x_2\varkappa_1\big)} \tag{9.8}$$

Таким образом, для изотропных материалов с коэффициентом Пуассона близким к нулю выражение (9.8) для продольного напряжения вытекает из обобщённого закона Гука и гипотезы плоских сечений Бернулли-Эйлера. Равенство нулю поперечных напряжений $\boldsymbol{\tau_{IJ}}$ и касательных напряжений $\boldsymbol{\tau_{3J}}$ также есть следствие гипотезы плоских сечений и равенства нулю коэффициента Пуассона.

Лекция 10.Сопромат для композитов (продолжение). Уравнение для статически определимых и статически неопределимых стержней с переменными характеристиками по длине стержня.

10.1 Дифференциальные уравнения для перемещений осевой линии.

10.1.1 Случай статической определённости. В статически определённом случае внутренние силовые факторы полностью определяются через внешние нагрузки по формулам (8.5). Следовательно правые части выражений (12.6) и (12.7) полностью определены как функции продольной координаты x_3. Уравнения для перемещений w_i вытекают из обратных определяющих соотношений (12.6) и (12.7) и формул (9.4) для γ и $\varkappa_I$

$$w_3' = f_3(x_3)\,, \qquad w_2'' = -f_2(x_3)\,, \qquad w_1'' = -f_1(x_3) \tag{10.1}$$

Где

$$f_3(x_3) = \frac{1}{\Delta}\,T(x_3) - \frac{R_I D_{I1}^{-1}}{\Delta}\,M_1(x_3) + \frac{R_I D_{I2}^{-1}}{\Delta}\,M_2(x_3) \tag{10.2}$$

$$f_2(x_3) = -\frac{D_{1J}^{-1} R_J}{\Delta}\,T(x_3) + \left(D_{11}^{-1} + \frac{D_{1K}^{-1} R_K R_L D_{L1}^{-1}}{\Delta}\right) M_1(x_3) - \\ - \left(D_{12}^{-1} + \frac{D_{1K}^{-1} R_K R_L D_{L2}^{-1}}{\Delta}\right) M_2(x_3) \tag{10.3}$$

$$f_1(x_3) = -\frac{D_{2J}^{-1} R_J}{\Delta}\,T(x_3) + \left(D_{21}^{-1} + \frac{D_{2K}^{-1} R_K R_L D_{L1}^{-1}}{\Delta}\right) M_1(x_3) - \\ - \left(D_{22}^{-1} + \frac{D_{2K}^{-1} R_K R_L D_{L2}^{-1}}{\Delta}\right) M_2(x_3) \tag{10.4}$$

$$\boldsymbol{\Delta = C - R_K D_{KL}^{-1} R_L = E(F - J_{KL}^{-1} S_K S_L)}$$

В формулах (10.2)–(10.4) величины $\boldsymbol{\Delta}$, $\boldsymbol{R_I}$ и $\boldsymbol{D_{IJ}}$ могут быть функциями координаты $\boldsymbol{x_3}$ в том случае, когда либо модуль Юнга, либо поперечное сечение, либо и то и другое являются функциями координаты $\boldsymbol{x_3}$.

В случае главных центральных осей правые части уравнений (10.1) имеют более простой вид

$$\boldsymbol{f_3 = \frac{T_3}{C}\,, \qquad f_2(x_3) = D_{11}^{-1} M_1 = \frac{M_1}{EJ_1}\,, \qquad f_1(x_3) = -D_{22}^{-1} M_2 = -\frac{M_2}{EJ_2}} \tag{10.5}$$

10.1.2 Случай статической неопределённости. В статически неопределённом случае уравнений статик не достаточно для вычисления всех реакций опор. Следовательно, эти, оставшиеся неизвестными реакции войдут во внутренние силовые факторы. Поэтому уравнения (10.1) не позволяют однозначно определить перемещения осевой линии.

Получим уравнения равновесия осевой линии, пригодные как в статически определённом, так и в статически неопределённом случаях. Для этого подставим выражения (12.1) прямых определяющих соотношений в дифференциальные соотношения Журавского (8.7) и (8.9)

$$\boldsymbol{\begin{cases} \left(EFw_3'\right)' - \left(R_1 w_2''\right)' - \left(R_2 w_1''\right)' = -q_3 \\ \left(R_1 w_3'\right)'' - \left(D_{11} w_2''\right)'' - \left(D_{12} w_1''\right)'' = -m_1' - q_1 \\ -\left(R_2 w_3'\right)'' + \left(D_{21} w_2''\right)'' + \left(D_{22} w_1''\right)'' = -m_2' - q_2 \end{cases}} \tag{10.6}$$

Система уравнений (10.6) записана для общего случая стержня с переменными по длине модулем Юнга $\boldsymbol{E(x_3)}$ и площадью поперечного сечения $\boldsymbol{F(x_3)}$. Она представляет собой связанную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В случае главных центральных осей система расщепляется на три независимых уравнения

$$\boldsymbol{\left(EFw_3'\right)' = -q_3\,, \qquad \left(D_{11} w_2''\right)'' = m_1' + q_1\,, \qquad \left(D_{22} w_1''\right)'' = -m_2' - q_2} \tag{10.7}$$

Лекция 11.Сопромат для композитов (продолжение). Случай неоднородного сечения стержня.

11.1 Теория стержня неоднородного в поперечном сечении. Исходные посылки для построения инженерной теории изгиба неоднородного стержня.

В этой главе сделана попытка построить инженерную теорию изгиба стержня неоднородного в поперечном сечении. Основой является интегральная формула представления решения трёхмерной задачи для неоднородного тела (исходная задача) через решение такой же задачи для однородного тела (сопутствующая задача). Далее из этой формулы следует представление решения исходной задачи в виде рядов по всевозможным производным от решения сопутствующей задачи. Инженерная теория неоднородного стержня строится в виде рядов по производным от продольной деформации в классической инженерной теории изгиба сопутствующего однородного стержня. Коэффициентами этих рядов являются известные функции, определяемые из решения вспомогательной задачи теории упругости в поперечном сечении. Перемещения оси неоднородного стержня находятся из рекуррентной последовательности краевых задач теории балки с переменными входными данными, зависящими от предыдущих рекурсий. В случае однородного в поперечном сечении стержня предлагаемая теория полностью совпадает с классической теорией балки Бернулли-Эйлера.

11.1.1 Выбор системы координат. Стержень предполагается прямолинейным и неоднородным в поперечном сечении. Поперечное сечение также может быть переменным по длине, но так, чтобы центры тяжести всех сечений располагались на прямой линии. Начало координат выбираем в левом торце стержня (рис. 8.3). Ось $\boldsymbol{x_3}$ координатной системы направим через центры тяжести поперечных сечений, а оси $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$ в плоскости поперечного сечения, необязательно по главным осям инерции. Таким образом, *система декартовых координат неоднородного стержня с переменным по длине поперечным сечением — центральная система.*

11.1.2 Ряды для перемещений в трёхмерной задаче неоднородной упругости. Из интегральных формул [22, 30, 31] в задачах неоднородной упругости следуют

представления для компонентов вектора перемещений

$$u_i(x) = v_i(x) + \sum_{q=0}^{\infty} N_{ikli_1\ldots i_q}(x) e_{kl,i_1\ldots i_q}(x) \tag{11.1}$$

Здесь $N_{ikli_1\ldots i_q}$ — непрерывные функции координат x_1, x_2, x_3, симметричные по индексам k, l и по всем индексам $i_1, \ldots, i_q$

11.1.3 Ряды для деформаций и напряжений. Соответствующие разложения для деформаций и напряжений в неоднородном теле имеют вид:

$$\varepsilon_{ij}(x) = \sum_{q=0}^{\infty} B_{ijkli_1\ldots i_q}(x)\, e_{kl,i_1\ldots i_q}(x) \tag{11.2}$$

$$\sigma_{ij}(x) = \sum_{q=0}^{\infty} \tilde{C}_{ijkli_1\ldots i_q}(x)\, e_{kl,i_1\ldots i_q}(x)\,, \tag{11.3}$$

где

$$B_{ijkl}(x) = \Delta_{ijkl} + \Delta_{ijmn}\, N_{mkl,n}(x) \tag{11.4}$$

$$B_{ijkli_1\ldots i_q}(x) = \Delta_{ijmn}\, N_{mkli_1\ldots i_q,n}(x) + \Delta_{ijm\underline{i_q}}\, N_{mkl\underline{i_1\ldots i_{q-1}}}(x) \tag{11.5}$$

$$\tilde{C}_{ijkli_1\ldots i_q} = C_{ijmn}(x) B_{mnkli_1\ldots i_q}(x) = C_{ijmn}\, N_{mkli_1\ldots i_q,n}(x) + C_{ijm\underline{i_q}}\, N_{mkl\underline{i_1\ldots i_{q-1}}} \tag{11.6}$$

Здесь $C_{ijkl}(x)$ — компоненты тензора модулей упругости. По подчёркнутым индексам подразумевается симметризация, например, пусть $b_{ij} = b_{ji}$, тогда

$$a_{\underline{i}} b_{\underline{jk}} = \frac{1}{3}(a_i b_{jk} + a_j b_{ik} + a_k b_{ji})$$

11.1.4 Рекуррентные уравнения для N-функций трёхмерной задачи.

$$[C_{ijmn}\, N_{mkl,n} + C_{ijkl}]_{,j} = 0\,, \tag{11.7}$$

$$[C_{ijmn}\, N_{mkli_1,n} + C_{ijmi_1}\, N_{mkl}]_{,j} = C^o_{ii_1kl} - [C_{ii_1mn}\, N_{mkl,n} + C_{ii_1kl}] \tag{11.8}$$

$$\left[C_{ijmn}\, N_{mkli_1\ldots i_q,n} + C_{ijm\underline{i_q}}\, N_{mkl\underline{i_1\ldots i_{q-1}}}\right]_{,j} = \\ = -\left[C_{i\underline{i_q}mn}\, N_{mkl\underline{i_1\ldots i_{q-1}},n} + C_{i\underline{i_q}m\underline{i_{q-1}}}\, N_{mkl\underline{i_1\ldots i_{q-2}}}\right]\,, \quad \text{при } q \geqslant 2 \tag{11.9}$$

$$C^o_{ii_1kl} = \langle C_{ii_1mn}\, N_{mkl,n} + C_{ii_1kl}\rangle \tag{11.10}$$

Лекция 12.Сопромат для композитов (продолжение). Определяющие соотношения теории Бернулли-Эйлера.

12.1 Определяющие соотношения теории балки Бернулли-Эйлера.

Под определяющими соотношениями теории балки Бернулли-Эйлера понимаются соотношения, связывающие внутренние силовые факторы с продольной деформацией и кривизнами оси.

Подставляя напряжение (9.8) в формулы (8.10) – (8.11), получим связь внутренних силовых факторов $\boldsymbol{Q_3 \equiv T}$, $\boldsymbol{M_1}$, $\boldsymbol{M_2}$, распределённых вдоль оси стержня с деформацией и кривизнами оси $\boldsymbol{x_3}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= \boldsymbol{EF\gamma + ES_2\varkappa_2 + ES_1\varkappa_1} \\ \boldsymbol{M_1} &= \boldsymbol{ES_1\gamma + D_{11}\varkappa_1 + D_{12}\varkappa_2} \\ \boldsymbol{M_2} &= \boldsymbol{-ES_2\gamma - D_{21}\varkappa_1 - D_{22}\varkappa_2} \end{aligned} \tag{12.1}$$

где $\boldsymbol{EF}$ — продольная жесткость, $\boldsymbol{S_1}$ и $\boldsymbol{S_2}$ — статические моменты инерции сечения относительно осей $\boldsymbol{x_2}$ и $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{D_{IJ} = EJ_{IJ}}$ — компоненты тензора изгибной жесткости однородного стержня, $\boldsymbol{J_{IJ}}$ — компоненты тензора моментов инерции поперечного сечения стержня

$$\boldsymbol{S_1 = \int\limits_F x_2 dF\,, \qquad S_2 = \int\limits_F x_1 dF} \tag{12.2}$$

$$\boldsymbol{J_{11} = \int\limits_F x_2^2 dF\,, \qquad J_{22} = \int\limits_F x_1^2 dF\,, \qquad J_{12} = J_{21} = \int\limits_F x_1 x_2 dF} \tag{12.3}$$

В случае главных центральных осей $\boldsymbol{S_I = 0}$ и $\boldsymbol{J_{12} = J_{21} = 0}$. Определяющие соотношения (12.1) существенно упрощаются

$$\boldsymbol{T = C\gamma\,, \qquad M_1 = D_1\varkappa_1 = EJ_1\varkappa_1\,, \qquad M_2 = -D_2\varkappa_2 = -EJ_2\varkappa_2} \tag{12.4}$$

где

$$\boldsymbol{C \equiv EF\,; \qquad D_1 \equiv D_{11}\,, \quad J_1 \equiv J_{11}\,; \qquad D_2 \equiv D_{22}\,, \quad J_2 \equiv J_{22}}$$

12.2 Обращение определяющих соотношений теории балки Бернулли-Эйлера.

Введём обозначения

$$\boldsymbol{R_I = ES_I\,;\qquad M_1^* = M_1\,,\qquad M_2^* = -M_2}$$

и запишем определяющие соотношения (12.1) в сокращенной форме

$$\boldsymbol{T = C\gamma + R_I\varkappa_I\,,\qquad M_I^* = R_I\gamma + D_{IJ}\varkappa_J} \tag{12.5}$$

Формулы (12.5) удобны для обращения определяющих соотношений теории балки. Из формулы (12.5) для моментов найдём

$$\boldsymbol{\varkappa_I = D_{IJ}^{-1}\big(M_J^* - R_J\,\gamma\big)}$$

и подставим в формулу (12.5) для продольной силы. Потом из неё найдём продольную деформацию

$$\boldsymbol{\gamma(x_3) = \frac{1}{C - R_K D_{KL}^{-1} R_L}\,T(x_3) - \frac{R_I D_{IJ}^{-1}}{C - R_K D_{KL}^{-1} R_L}\,M_J^*(x_3)} \tag{12.6}$$

После этого подставляем $\boldsymbol{\gamma}$ в выражение для $\boldsymbol{\varkappa_I}$ и получаем

$$\boldsymbol{\varkappa_I(x_3) = -\frac{D_{IJ}^{-1} R_J}{C - R_K D_{KL}^{-1} R_L}\,T(x_3) + \left(D_{IJ}^{-1} + \frac{D_{IK}^{-1} R_K R_L D_{LJ}^{-1}}{C - R_K D_{KL}^{-1} R_L}\right) M_J^*(x_3)} \tag{12.7}$$

Коэффициенты $\boldsymbol{D_{IJ}^{-1}}$ обозначают коэффициенты матрицы обратной к матрице изгибной жесткости $\boldsymbol{D_{IJ}}$

$$\boldsymbol{\big(D_{IJ}^{-1}\big) = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{12} & J_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{E\big(J_{11}J_{22} - J_{12}^2\big)}\begin{pmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix}}$$

В случае главных центральных осей $\boldsymbol{R_I = 0}$ и $\boldsymbol{J_{12} = J_{21} = 0}$, тогда

$$\boldsymbol{\gamma = \frac{T}{C}\,,\quad \varkappa_I = \frac{M_I^*}{D_I}\qquad \Rightarrow\qquad \gamma = \frac{T}{EF}\,,\qquad \varkappa_1 = \frac{M_1}{EJ_1}\,,\qquad \varkappa_2 = -\frac{M_2}{EJ_2}} \tag{12.8}$$

Лекция 13.Сопромат для композитов (продолжение). Случай слоистого стержня.

13.1 Кинематическая гипотеза при изгибе неоднородного стержня.

В формулах (11.1)–(11.3) компоненты $v_i(x)$ — компоненты вектора перемещений в точном решении трёхмерной сопутствующей задаче.

В случае стержня из волокнистого композита будем считать, что $v_i(x)$ определяются по формулам (9.2) классической теории изгиба стержня с эффективным модулем Юнга в продольном направлении. При этом перемещения оси стержня $w_i(x_3$ — неизвестные функции, которые необходимо найти из уравнений, учитывающих неоднородность материала стержня и переменность его поперечного сечения.

Гипотеза неплоских сечений. Компоненты тензора модулей упругости и N-функции зависят от координат x_1 и x_2 точек в поперечном сечении. В этом случае формулы (11.1) принимают вид:

$$u_i(x) = v_i(x) + \sum_{q=0}^{\infty} N_{i33i_1\ldots i_q}(x_1, x_2) e_{33,i_1\ldots i_q} \tag{13.1}$$

Преобразуем слагаемые под знаком суммы, с учётом того, что

$$v_I = w_I(x_3)\,, \qquad v_3 = w_3(x_3) - x_I w_I^{(1)}\,; \qquad e_{33} = w_3^{(1)} - x_I w_I^{(2)} \tag{13.2}$$

Где

$$f^{(q)}(x_3) \equiv \frac{d^q f}{dx_3^q}$$

При $q = 0$

$$N_{i33} e_{33} = N_{i33(0)} \left[w_3^{(1)} - x_K w_K^{(2)} \right]$$

При $q = 1$

$$N_{i33i_1} e_{33,i_1} = N_{i33I_1} e_{33,I_1} + N_{i333} e_{33,3} = -N_{i33K} w_{K,33} + N_{i333} e_{33,3} =$$

$$= -N_{i33K(0)}w_K^{(2)} + N_{i33(1)}\left[w_3^{(2)} - x_K w_K^{(3)}\right]$$

При $q = 2$

$$N_{i33i_1i_2}e_{33,i_1i_2} = N_{i33I_1I_2}e_{33,I_1I_2} + 2N_{i33I_13}e_{33,I_13} + N_{i3333}e_{33,33}$$
$$= -2N_{i33K3}w_{K,333} + N_{i3333}e_{33,33} = -2N_{i33K(1)}w_K^{(3)} + N_{i33(2)}\left[w_3^{(3)} - x_K w_K^{(4)}\right]$$

Вообще, для любого $q \geqslant 0$

$$N_{i33i_1\ldots i_q}e_{33,i_1\ldots i_q} = -(q+1)N_{i33K(q)}w_K^{(q+1)} + N_{i33(q)}e_{33}^{(q)} =$$
$$= -qN_{i33K(q-1)}w_K^{(q+1)} + N_{i33(q)}\left[w_3^{(q+1)} - x_K w_K^{(q+2)}\right],$$

где введены более краткие обозначения

$$N_{i33(q)} \equiv N_{i33\underbrace{3\ldots3}_{q}}, \qquad N_{i33K(q)} \equiv N_{i33K\underbrace{3\ldots3}_{q}}, \ (q \geqslant 0)$$

В результате ряд (13.1) принимает вид:

$$u_i = v_i + \sum_{q=0}^{\infty}\left\{N_{i33(q)}\left[w_3^{(q+1)} - x_K w_K^{(q+2)}\right] - qN_{i33K(q-1)}w_K^{(q+1)}\right\} =$$
$$= v_i + \sum_{q=0}^{\infty}\left\{N_{i33(q)}w_3^{(q+1)} - \left[x_K N_{i33(q)} + (q+1)N_{i33K(q)}\right]w_K^{(q+2)}\right\} \tag{13.3}$$

Или

$$u_I = w_I + \sum_{q=0}^{\infty}\left\{N_{I33(q)}w_3^{(q+1)} - \left[x_K N_{I33(q)} + (q+1)N_{I33K(q)}\right]w_K^{(q+2)}\right\} = w_I +$$
$$+ \sum_{q=0}^{\infty}\left\{N_{I33(q)}\gamma^{(q)} + \left[x_2 N_{I33(q)} + (q+1)N_{I332(q)}\right]\varkappa_1^{(q)} + \left[x_1 N_{I33(q)} + (q+1)N_{I331(q)}\right]\varkappa_2^{(q)}\right\} \tag{13.4}$$

$$u_3 = w_3 - x_K w_K^{(1)} + \sum_{q=0}^{\infty}\left\{N_{333(q)}w_3^{(q+1)} - \left[x_K N_{333(q)} + (q+1)N_{333K(q)}\right]w_K^{(q+2)}\right\} =$$
$$= w_3 - x_K w_K^{(1)} +$$
$$+ \sum_{q=0}^{\infty}\left\{N_{333(q)}\gamma^{(q)} + \left[x_2 N_{333(q)} + (q+1)N_{3332(q)}\right]\varkappa_1^{(q)} + \left[x_1 N_{333(q)} + (q+1)N_{3331(q)}\right]\varkappa_2^{(q)}\right\} \tag{13.5}$$

Формулы (13.4), (13.5) представляют собой *кинематическую гипотезу неплоских сечений*, которая учитывает характер неоднородности свойств балки в поперечном сечении. В случае однородной балки все N-функции обращаются в нуль и гипотеза неплоских сечений переходит в гипотезу плоских сечений Бернулли–Эйлера. Искомыми величинами, как и в классической теории, являются три компоненты вектора перемещений точек оси стержня $w_i(x_3)$. Функции N находятся из решения вспомогательных задач в поперечном сечении, либо считаются заданными из каких либо эмпирических соображений. В данной работе принят первый путь, основанный на численном, или же аналитическом решении вспомогательных задач в поперечном сечении.

13.1.1 Деформации и напряжения в сечении стержня. Деформации находятся по формулам (11.2) аналогично тому как преобразовывалась сумма в формуле для перемещений

$$\varepsilon_{ij}(x) = \sum_{q=0}^{\infty} B_{ij33i_1\ldots i_q}(x_1, x_2)\, e_{33,i_1\ldots i_q} =$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ B_{ij33(q)} w_3^{(q+1)} - \left[x_K B_{ij33(q)} + (q+1) B_{ij33K(q)} \right] w_K^{(q+2)} \right\} \tag{13.6}$$

$$\sigma_{ij}(x) = \sum_{q=0}^{\infty} \widetilde{C}_{ij33i_1\ldots i_q}(x_1, x_2)\, e_{33,i_1\ldots i_q} =$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \widetilde{C}_{ij33(q)} w_3^{(q+1)} - \left[x_K \widetilde{C}_{ij33(q)} + (q+1) \widetilde{C}_{ij33K(q)} \right] w_K^{(q+2)} \right\} \tag{13.7}$$

Здесь

$$B_{ij33(0)} \equiv B_{ij33} = \Delta_{ijmN} N_{m33,N} + \Delta_{ij33} = \Delta_{ijmN} N_{m33(0),N} + \delta_{i3}\delta_{j3} \tag{13.8}$$

$$B_{ij33(q)} \equiv B_{ij33\underbrace{3\ldots3}_{q}} = \Delta_{ijmN} N_{m33(q),N} + \Delta_{ijm3} N_{m33(q-1)}\,,\ q \geqslant 1 \tag{13.9}$$

$$B_{ij33K(q)} \equiv B_{ij33K\underbrace{3\ldots3}_{q}} = \Delta_{ijmN} N_{m33K(q),N} + \Delta_{ijmK} N_{m33(q)}\,,\ q \geqslant 0 \tag{13.10}$$

$$\widetilde{C}_{ij33(0)} \equiv C_{ijmn} B_{mn33} = C_{ijmN} N_{m33(0),N} + C_{ij33} \tag{13.11}$$

$$\widetilde{C}_{ij33(q)} \equiv C_{ijmn} B_{mn33\underbrace{3\ldots3}_{q}} = C_{ijmN} N_{m33(q),N} + C_{ijm3} N_{m33(q-1)}\,,\ q \geqslant 1 \tag{13.12}$$

$$\widetilde{C}_{ij33K(q)} \equiv C_{ijmn} B_{mn33K\underbrace{3\ldots3}_{q}} = C_{ijmN} N_{m33K(q),N} + C_{ijmK} N_{m33(q)}\,,\ q \geqslant 0 \tag{13.13}$$

13.1.2 Продольное напряжение. Далее из общей формулы (13.7) выделим продольное напряжение в поперечном сечении

$$\sigma_{33} = \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \widetilde{C}_{3333(q)} w_3^{(q+1)} - \left[x_K \widetilde{C}_{3333(q)} + (q+1) \widetilde{C}_{3333K(q)} \right] w_K^{(q+2)} \right\} =$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \widetilde{C}_{3333(q)} \gamma^{(q+1)} + \left[x_2 \widetilde{C}_{3333(q)} + (q+1) \widetilde{C}_{33332(q)} \right] \varkappa_1^{(q)} + \left[x_1 \widetilde{C}_{3333(q)} + (q+1) \widetilde{C}_{33331(q)} \right] \varkappa_2^{(q)} \right. \tag{13.14}$$

13.1.3 Внутренние силовые факторы. После этого найдём продольную силу и изгибающие моменты

$$T = \int_F \sigma_{33} dF = \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ C_{(q)} \gamma^{(q)} + R_{1(q)} \varkappa_1^{(q)} + R_{2(q)} \varkappa_2^{(q)} \right\} \tag{13.15}$$

$$M_1 = \int\limits_F x_2 \sigma_{33} dF = \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ R_{1(q)} \gamma^{(q)} + D_{11(q)} \varkappa_1^{(q)} + D_{12(q)} \varkappa_2^{(q)} \right\} \tag{13.16}$$

$$-M_2 = \int\limits_F x_1 \sigma_{33} dF = \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ R_{2(q)} \gamma^{(q)} + D_{21(q)} \varkappa_1^{(q)} + D_{22(q)} \varkappa_2^{(q)} \right\} \tag{13.17}$$

Где

$$C_{(q)} = F\left\langle \widetilde{C}_{3333(q)} \right\rangle \tag{13.18}$$

$$R_{1(q)} = F\left\langle x_2 \widetilde{C}_{3333(q)} + (q+1)\widetilde{C}_{33332(q)} \right\rangle \tag{13.19}$$

$$R_{2(q)} = F\left\langle x_1 \widetilde{C}_{3333(q)} + (q+1)\widetilde{C}_{33331(q)} \right\rangle \tag{13.20}$$

$$D_{11(q)} = F\left\langle x_2 \left[x_2 \widetilde{C}_{3333(q)} + (q+1)\widetilde{C}_{33332(q)} \right] \right\rangle \tag{13.21}$$

$$D_{22(q)} = F\left\langle x_1 \left[x_1 \widetilde{C}_{3333(q)} + (q+1)\widetilde{C}_{33331(q)} \right] \right\rangle \tag{13.22}$$

$$D_{12(q)} = F\left\langle x_2 \left[x_1 \widetilde{C}_{3333(q)} + (q+1)\widetilde{C}_{33331(q)} \right] \right\rangle \tag{13.23}$$

$$D_{21(q)} = F\left\langle x_1 \left[x_2 \widetilde{C}_{3333(q)} + (q+1)\widetilde{C}_{33332(q)} \right] \right\rangle \tag{13.24}$$

Угловыми скобками обозначено среднее значение в поперечном сечении

$$\left\langle f(x_1, x_2) \right\rangle \equiv \frac{1}{F} \int\limits_F f(x_1, x_2) dF$$

В уравнениях (13.15)–(13.20) предполагается, что сечение стержня может меняться по его длине, т.е. $F = F(x_3)$. В этом случае величины $C_{(q)}$, $R_{I(q)}$ и $D_{IJ(q)}$ также зависят от координаты x_3.

Лекция 14.Сопромат для композитов (продолжение). Случай стержня из композиционного материала.

14.1 Дифференциальные уравнения изогнутой оси неоднородного стержня.

Для получения дифференциальных уравнений изогнутой оси воспользуемся дифференциальными соотношениями Журавского

$$Q_3' = -q_3\,, \qquad M_1'' = -m_1' + q_2\,, \qquad M_2'' = -m_2' - q_1 \tag{14.1}$$

14.1.1 Уравнения бесконечного порядка. Подставив в (14.1) выражения (13.15)–(13.17) получаем уравнения бесконечного порядка:

$$\sum_{q=0}^{\infty}\left\{\left[C_{(q)}\gamma^{(q)}\right]^{(1)} + \left[R_{I(q)}\varkappa_I^{(q)}\right]^{(1)}\right\} = -t \tag{14.2}$$

$$\sum_{q=0}^{\infty}\left\{\left[R_{I(q)}\gamma^{(q)}\right]^{(2)} + \left[D_{IJ(q)}\varkappa_J^{(q)}\right]^{(2)}\right\} = -p_I \tag{14.3}$$

где

$$p_1 = m_{1,3} - q_2\,, \qquad p_2 = m_{2,3} + q_1$$

Запись уравнений (14.2), (14.3) в перемещениях оси стержня будет следующей:

$$\sum_{q=0}^{\infty}\left\{\frac{d}{dx_3}\left[C_{(q)}\frac{d^{q+1}w_3}{dx_3^{q+1}}\right] - \frac{d}{dx_3}\left[R_{1(q)}\frac{d^{q+2}w_2}{dx_3^{q+2}}\right] - \frac{d}{dx_3}\left[R_{2(q)}\frac{d^{q+2}w_1}{dx_3^{q+2}}\right]\right\} = -t \tag{14.4}$$

$$\sum_{q=0}^{\infty}\left\{\frac{d^2}{dx_3^2}\left[R_{1(q)}\frac{d^{q+1}w_3}{dx_3^{q+1}}\right] - \frac{d^2}{dx_3^2}\left[D_{11(q)}\frac{d^{q+2}w_2}{dx_3^{q+2}}\right] - \frac{d^2}{dx_3^2}\left[D_{12(q)}\frac{d^{q+2}w_1}{dx_3^{q+2}}\right]\right\} = -m_{1,3} - q_2 \tag{14.5}$$

$$\sum_{q=0}^{\infty}\left\{\frac{d^2}{dx_3^2}\left[R_{2(q)}\frac{d^{q+1}w_3}{dx_3^{q+1}}\right] - \frac{d^2}{dx_3^2}\left[D_{21(q)}\frac{d^{q+2}w_2}{dx_3^{q+2}}\right] - \frac{d^2}{dx_3^2}\left[D_{22(q)}\frac{d^{q+4}w_1}{dx_3^{q+4}}\right]\right\} = m_{2,3} - q_1 \tag{14.6}$$

14.1.2 Сведение бесконечной системы дифференциальных уравнений к рекуррентной последовательности уравнений балки. В уравнения (14.2)–(14.3) входят интегралы от N-функций, которые зависят от координат. Зависимость N-функций от этих координат полностью определяется зависимостью упругих характеристик от координат. Координаты входят в упругие свойства в безразмерном виде. Пусть l — характерный размер неоднородности, тогда $C_{ijkl} = C_{ijkl}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, где $\zeta_i = x_i/l$. Следовательно и N-функции, так же как и модули упругости, являются функциями переменных ζ_i, и, как следует из формулы (11.1), размерность самих N-функций представляет собой возрастающую степень размерности длины, т.е. $\left[N_{iklli_1\ldots i_q}\right] = [l]^{q+1}$. Используя эти соображения введём безразмерные функции N, входящие в уравнения (14.2)–(14.4), заменив

$$N_{m33(q)}(x) \to l^{q+1} N_{m33(q)}(\zeta)\,, \qquad N_{m33K(q)}(x) \to l^{q+2} N_{m33K(q)}(\zeta) \tag{14.7}$$

Правило дифференцирования функции от переменных ζ_1, ζ_2 по переменным x_I будет следующим:

$$\frac{\partial f(\zeta)}{\partial x_I} = \frac{\partial f}{\partial \zeta_K}\,\frac{\partial \zeta_K}{\partial x_I} = \frac{1}{l}\,\frac{\partial f}{\partial \zeta_I} \tag{14.8}$$

Учитывая (14.7) и правило дифференцирования (14.8), получаем из (13.8) – (13.13), что

$$\begin{aligned} &B_{ij33(q)}(x_1, x_2) \to l^q B_{ij33(q)}(\zeta_1, \zeta_2)\,, \qquad B_{ij33K(q)}(x_1, x_2) \to l^{q+1} B_{ij33K(q)}(\zeta_1, \zeta_2) \\ &\widetilde{C}_{ij33(q)}(x_1, x_2) \to l^q \widetilde{C}_{ij33(q)}(\zeta_1, \zeta_2)\,, \qquad \widetilde{C}_{ij33K(q)}(x_1, x_2) \to l^{q+1} \widetilde{C}_{ij33K(q)}(\zeta_1, \zeta_2) \end{aligned} \tag{14.9}$$

Следовательно

$$C_{(q)} \to l^q C_{(q)}\,, \qquad R_{K(q)} \to l^q R_{K(q)}\,, \qquad D_{IJ(q)} \to l^q D_{IJ(q)}$$

Система уравнений (14.2)–(14.3) примет вид:

$$\sum_{q=0}^{\infty} l^q \left\{ \left[C_{(q)}\gamma^{(q)}\right]^{(1)} + \left[R_{I(q)}\varkappa_I^{(q)}\right]^{(1)} \right\} = -t \tag{14.10}$$

$$\sum_{q=0}^{\infty} l^q \left\{ \left[R_{I(q)}\gamma^{(q)}\right]^{(2)} + \left[D_{IJ(q)}\varkappa_J^{(q)}\right]^{(2)} \right\} = -p_I \tag{14.11}$$

Из уравнений (14.10), (14.11) следует, что перемещения оси стержня зависят не только от координаты x_3, но и от параметра l. Поэтому решение уравнений (14.10), (14.11) имеет смысл искать в виде степенных рядов по l, коэффициенты которых уже от l не зависят, т.е.

$$w_i(x_3, l) = \sum_{n=0}^{\infty} l^n w_i^{\{n\}}(x_3) \quad \Rightarrow \quad \gamma = \sum_{n=0}^{\infty} l^n \gamma^{\{n\}}\,, \qquad \varkappa_I = \sum_{n=0}^{\infty} l^n \varkappa_I^{\{n\}} \tag{14.12}$$

После подстановки рядов (14.12) в уравнения (14.10), (14.11) и сбора коэффициентов при одинаковых степенях l, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} l^n \left\{ \frac{d}{dx_3}\left(C_{(0)}\gamma^{\{n\}}\right) + \frac{d}{dx_3}\left(R_{I(0)}\varkappa_I^{\{n\}}\right) + \right.$$

$$+\sum_{q=1}^{n}\left[\frac{d}{dx_3}\left(C_{(q)}\frac{d^q\gamma^{\{n-q\}}}{dx_3^q}\right)+\frac{d}{dx_3}\left(R_{I(q)}\frac{d^q\varkappa_I^{\{n-q\}}}{dx_3^q}\right)\right]\Bigg\}=-t \tag{14.13}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}l^n\Bigg\{\frac{d^2}{dx_3^2}\left(R_{I(0)}\gamma^{\{n\}}\right)+\frac{d^2}{dx_3^2}\left(D_{IJ(0)}\varkappa_J^{\{n\}}\right)+$$
$$+\sum_{q=1}^{n}\left[\frac{d^2}{dx_3^2}\left(R_{I(q)}\frac{d^q\gamma^{\{n-q\}}}{dx_3^q}\right)+\frac{d^2}{dx_3^2}\left(D_{IJ(q)}\frac{d^q\varkappa_J^{\{n-q\}}}{dx_3^q}\right)\right]\Bigg\}=-p_I \tag{14.14}$$

Приравнивая теперь коэффициенты при одинаковых степенях l в правой и левой частях равенств, приходим к рекуррентным уравнениям относительно величин $\gamma^{\{n\}}$ и $\varkappa_I^{\{n\}}$

$$\frac{d}{dx_3}\left(C_{(0)}\gamma^{\{n\}}\right)+\frac{d}{dx_3}\left(R_{I(0)}\varkappa_I^{\{n\}}\right)=-t^{\{n\}} \tag{14.15}$$

$$\frac{d^2}{dx_3^2}\left(R_{I(0)}\gamma^{\{n\}}\right)+\frac{d^2}{dx_3^2}\left(D_{IJ(0)}\varkappa_J^{\{n\}}\right)=-p_I^{\{n\}} \tag{14.16}$$

Где

$$t^{\{n\}}=\begin{cases} t\,, & n=0\\ \sum\limits_{q=1}^{n}\left[\frac{d}{dx_3}\left(C_{(q)}\frac{d^q\gamma^{\{n-q\}}}{dx_3^q}\right)+\frac{d}{dx_3}\left(R_{I(q)}\frac{d^q\varkappa_I^{\{n-q\}}}{dx_3^q}\right)\right], & n\geqslant 1\end{cases} \tag{14.17}$$

$$p_I^{\{n\}}=\begin{cases} p_I\,, & n=0\\ \sum\limits_{q=1}^{n}\left[\frac{d^2}{dx_3^2}\left(R_{I(q)}\frac{d^q\gamma^{\{n-q\}}}{dx_3^q}\right)+\frac{d^2}{dx_3^2}\left(D_{IJ(q)}\frac{d^q\varkappa_J^{\{n-q\}}}{dx_3^q}\right)\right], & n\geqslant 1\end{cases} \tag{14.18}$$

Таким образом, на каждом этапе решается классические уравнения изгиба балки с правыми частями, зависящими от решений всех предыдущих уравнений.

14.1.3 Нулевое приближение. При практических расчётах используется, в основном, нулевое приближение. Уравнения нулевого приближения следуют из формул (14.15) – (14.18) при $n=0$ и имеют вид:

$$\frac{d}{dx_3}\left(C_{(0)}\gamma^{\{0\}}\right)+\frac{d}{dx_3}\left(R_{I(0)}\varkappa_I^{\{0\}}\right)=-t \tag{14.19}$$

$$\frac{d^2}{dx_3^2}\left(R_{I(0)}\gamma^{\{n\}}\right)+\frac{d^2}{dx_3^2}\left(D_{IJ(0)}\varkappa_J^{\{n\}}\right)=-p_I \tag{14.20}$$

Или

$$\frac{d}{dx_3}\left(C_{(0)}\frac{dw_3^{\{0\}}}{dx_3}\right)-\frac{d}{dx_3}\left(R_{1(0)}\frac{d^2w_2^{\{0\}}}{dx_3^2}\right)-\frac{d}{dx_3}\left(R_{2(0)}\frac{d^2w_1^{\{0\}}}{dx_3^2}\right)=-t$$

$$\frac{d^2}{dx_3^2}\left(R_{1(0)}\frac{dw_3^{\{0\}}}{dx_3}\right)-\frac{d^2}{dx_3^2}\left(D_{11(0)}\frac{d^2w_2^{\{0\}}}{dx_3^2}\right)-\frac{d^2}{dx_3^2}\left(D_{12(0)}\frac{d^2w_1^{\{0\}}}{dx_3^2}\right)=-m_1-q_2$$

$$\frac{d^2}{dx_3^2}\left(R_{2(0)}\frac{dw_3^{\{0\}}}{dx_3}\right)-\frac{d^2}{dx_3^2}\left(D_{21(0)}\frac{d^2w_2^{\{0\}}}{dx_3^2}\right)-\frac{d^2}{dx_3^2}\left(D_{22(0)}\frac{d^2w_1^{\{0\}}}{dx_3^2}\right)=m_2-q_1 \tag{14.21}$$

Из формул (13.18) – (13.24) при $q=0$ найдём коэффициенты уравнений изгиба неоднородной балки в нулевом приближении

$$C_{(0)}=F\left\langle\widetilde{C}_{3333(0)}\right\rangle=\left\langle C_{33mN}\,N_{m33,N}+C_{3333}\right\rangle \tag{14.22}$$

$$\begin{aligned}R_{1(0)}&=F\left\langle x_2\widetilde{C}_{3333(0)}+\widetilde{C}_{33332(0)}\right\rangle=\\&=F\left\langle x_2\left(C_{33mN}\,N_{m33,N}+C_{3333}\right)+C_{33mN}\,N_{m332,N}+C_{33m2}N_{m33}\right\rangle\end{aligned} \tag{14.23}$$

$$\begin{aligned}R_{2(0)}&=F\left\langle x_1\widetilde{C}_{3333(0)}+\widetilde{C}_{33331(0)}\right\rangle=\\&=F\left\langle x_1\left(C_{33mN}\,N_{m33,N}+C_{3333}\right)+C_{33mN}\,N_{m331,N}+C_{33m1}N_{m33}\right\rangle\end{aligned} \tag{14.24}$$

$$\begin{aligned}D_{11(0)}&=F\left\langle x_2\left(x_2\widetilde{C}_{3333(0)}+\widetilde{C}_{33332(0)}\right)\right\rangle=\\&=F\left\langle x_2^2\left(C_{33mN}\,N_{m33,N}+C_{3333}\right)+x_2\left(C_{33mN}\,N_{m332,N}+C_{33m2}N_{m33}\right)\right\rangle\end{aligned} \tag{14.25}$$

$$\begin{aligned}D_{12(0)}&=F\left\langle x_2\left(x_1\widetilde{C}_{3333(0)}+\widetilde{C}_{33331(0)}\right)\right\rangle=\\&=F\left\langle x_2x_1\left(C_{33mN}\,N_{m33,N}+C_{3333}\right)+x_2\left(C_{33mN}\,N_{m331,N}+C_{33m1}N_{m33}\right)\right\rangle\end{aligned} \tag{14.26}$$

$$\begin{aligned}D_{22(0)}&=F\left\langle x_1\left(x_1\widetilde{C}_{3333(0)}+\widetilde{C}_{33331(0)}\right)\right\rangle=\\&=F\left\langle x_1^2\left(C_{33mN}\,N_{m33,N}+C_{3333}\right)+x_1\left(C_{33mN}\,N_{m331,N}+C_{33m1}N_{m33}\right)\right\rangle\end{aligned} \tag{14.27}$$

$$\begin{aligned}D_{21(0)}&=F\left\langle x_1\left(x_2\widetilde{C}_{3333(0)}+\widetilde{C}_{33332(0)}\right)\right\rangle=\\&=F\left\langle x_1x_2\left(C_{33mN}\,N_{m33,N}+C_{3333}\right)+x_1\left(C_{33mN}\,N_{m332,N}+C_{33m2}N_{m33}\right)\right\rangle\end{aligned} \tag{14.28}$$

Коэффициенты $C_{(0)}$, $D_{IJ(0)}$ и $R_{I(0)}$ называются эффективными коэффициентами. $C_{(0)}$ — эффективная продольная жесткость, $D_{IJ(0)}$ — эффективные жесткости на изгиб, а $R_{I(0)}$ — эффективные жесткости влияния.

К уравнениям (14.19), (14.20) необходимо добавить граничные условия.

Лекция 15.Сопромат для композитов (продолжение). Случай произвольно неоднородного стержня. Теория композитных пластин.

15.1 Решение вспомогательных задач в поперечном сечении.

15.1.1 Общие уравнения в сечении для вспомогательных N-функций. Нужные нам уравнения следуют из уравнений (11.9) в предположении, что $C_{ijkl} = C_{ijkl}(x_1, x_2)$ и $N_{mijj_1\ldots i_q} = N_{mijj_1\ldots i_q}(x_1, x_2)$. В этом случае уравнения (11.9), принимают вид:

$$
\begin{aligned}
&[C_{iJmN}\, N_{mkl,N} + C_{iJkl}]_{,J} = 0\,,\\
&[C_{iJmN}\, N_{mkli_1,N} + C_{iJmi_1}\, N_{mkl}]_{,J} = C^o_{ii_1kl} - [C_{ii_1mN}\, N_{mkl,N} + C_{ii_1kl}]\\
&\left[C_{iJmN}\, N_{mkli_1\ldots i_q,N} + C_{iJmi_q}\, N_{mkli_1\ldots i_{q-1}}\right]_{,L} =\\
&\qquad = -\left[C_{ii_qmN}\, N_{mkli_1\ldots i_{q-1},N} + C_{ii_qmi_{q-1}}\, N_{mkli_1\ldots i_{q-2}}\right]\,, \quad \text{при } q \geqslant 2
\end{aligned}
$$

Отсюда, в частности, вытекают уравнения для функций N_{m33} и N_{m33k}

$$[C_{iJmN}\, N_{m33,N} + C_{iJ33}]_{,J} = 0\,, \tag{15.29}$$

$$[C_{iJmN}\, N_{m33k,N} + C_{iJmk}\, N_{m33}]_{,J} = C^o_{ik33} - [C_{ikmN}\, N_{m33,N} + C_{ik33}] \tag{15.30}$$

где

$$C^o_{ik33} = \langle C_{ikmN}\, N_{m33,N} + C_{ik33}\rangle \tag{15.31}$$

На рисунке 15.7 изображено сечение прямоугольного слоистого стержня, сечение многослойной по радиусу трубы, и сечение круглого стержня, армированного круглыми стержнями меньшего диаметра.

В случаях a и b модули упругости являются функциями одной координаты. Естественно, что и N-функции будут также функциями этой координаты

15.1.2 Слоистый в поперечном сечении стержень. В общем случае — это неоднородный по координате x_2 стержень. В том случае, когда $a \gg h$ можно считать, что вдали от сторон $x_1 = \pm a/2$ функции N зависят от x_2. Вблизи сторон $x_1 = \pm a/2$ имеется область краевого эффекта, где функции N зависят от двух координат x_1 и x_2.

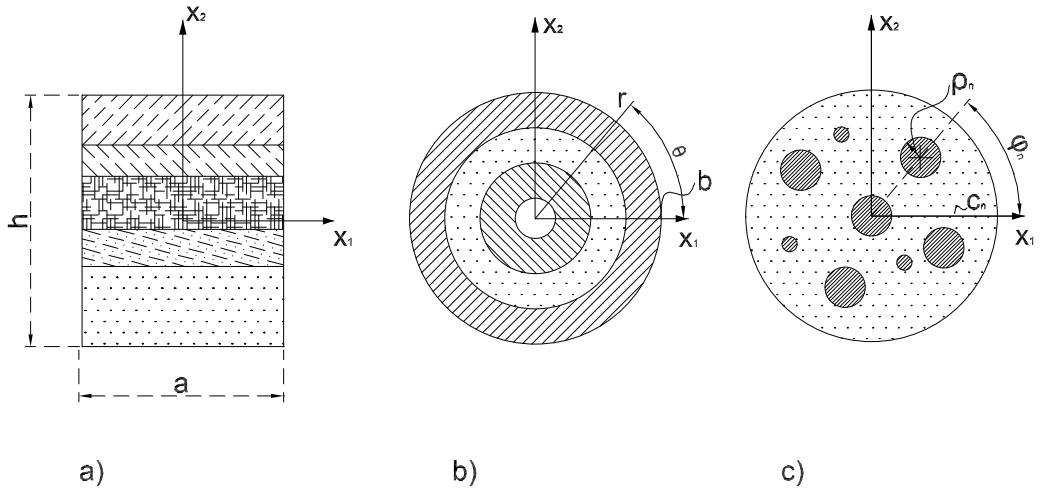


Рис. 15.7: *Стержни с различным типом неоднородности в поперечном сечении*

Уравнения (15.29), (15.30) для слоистого по $\boldsymbol{x_2}$ стержня (рис. 15.7$\boldsymbol{a}$) становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$[\boldsymbol{C_{i2m2}\, N_{m33,2} + C_{i233}}]_{,\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{0}\,, \tag{15.32}$$

$$[\boldsymbol{C_{i2m2}\, N_{m33k,2} + C_{i2mk}\, N_{m33}}]_{,\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{C^{o}_{ik33} - \widetilde{C}_{ik33}} \tag{15.33}$$

$$\boldsymbol{\widetilde{C}_{ik33} = C_{ikm2}\, N_{m33,2} + C_{ik33}\,, \qquad C^{o}_{ik33} = \langle \widetilde{C}_{ik33} \rangle} \tag{15.34}$$

Интегрируя уравнение (15.32), при условии

$$\boldsymbol{N_{m33}(h/2) = N_{m33}(-h/2)}\,, \tag{15.35}$$

найдём функции $\boldsymbol{N_{m33}(x_2)}$

$$\boldsymbol{N_{m33}(x_2) = \int\limits_{-h/2}^{x_2} C^{-1}_{m2n2}(y)\Big[\langle C^{-1}_{n2p2}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p2q2}C_{q233}\rangle - C_{n233}(y)\Big]dy + K_m} \tag{15.36}$$

Здесь $\boldsymbol{K_m}$ — константы второго интегрирования. Их можно положить равными нулю, если потребовать, чтобы

$$\boldsymbol{N_{m33}(\pm h/2) = 0}\,, \tag{15.37}$$

либо положить

$$\boldsymbol{K_m = -\Big\langle \int\limits_{-h/2}^{x_2} C^{-1}_{m2n2}(y)\Big[\langle C^{-1}_{n2p2}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p2q2}C_{q233}\rangle - C_{n233}(y)\Big]dy\Big\rangle} \tag{15.38}$$

Тогда среднее значение функций N_{m33} в области определения будут равны нулю, т.е.

$$\langle N_{m33}\rangle = 0 \tag{15.39}$$

В правой части формулы (15.36) под C^{-1}_{m2n2} понимаются элементы матрицы обратной к матрице C_{m2n2}

$$(C^{-1}_{m2n2}) = \begin{pmatrix} C_{1212} & C_{1222} & C_{1232} \\ C_{2212} & C_{2222} & C_{2232} \\ C_{3212} & C_{3222} & C_{3232} \end{pmatrix}^{-1}$$

В изотропном случае эта матрица становится диагональной и легко обращается

$$(C^{-1}_{m2n2}) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2\mu & 0 \\ & 0 & \mu \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda+2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$$\langle C^{-1}_{m2n2}\rangle^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{<1/\mu>} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{<1/(\lambda+2\mu)>} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{<1/\mu>} \end{pmatrix}$$

В изотропном случае отлична от тождественного нуля только одна функция из трёх функций N_{m33}. При условии (15.37)

$$N_{133} = 0\,,\ N_{333} = 0\,,\ N_{233}(x_2) = \int\limits_{-h/2}^{x_2} \left[\frac{\langle\lambda/(\lambda+2\mu)\rangle}{(\lambda(y)+2\mu(y))\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle} - \frac{\lambda(y)}{\lambda(y)+2\mu(y)}\right] dy \tag{15.40}$$

Эффективная продольная жесткость слоистого стержня. По формулам (15.34) и (15.40) найдём коэффициенты $\widetilde{C}_{ik33}$ и C^o_{ik33}

$$\widetilde{C}_{ik33} = C_{ikm2}\,N_{m33,2} + C_{ik33} = C_{ik33} + C_{ikm2}C^{-1}_{m2n2}\langle C^{-1}_{m2p2}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p2q2}C_{q233}\rangle - \tag{15.41}$$

$$-C_{ikm2}C^{-1}_{m2n2}C_{n233} \tag{15.42}$$

$$C^o_{ik33} = \langle\widetilde{C}_{ik33}\rangle = \langle C_{ik33}\rangle + \langle C_{ikm2}C^{-1}_{m2n2}\rangle\langle C^{-1}_{m2p2}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p2q2}C_{q233}\rangle - \langle C_{ikm2}C^{-1}_{m2n2}C_{n233}\rangle \tag{15.43}$$

Отсюда, в частности, видно, что

$$\widetilde{C}_{i233} = \langle C^{-1}_{i2p2}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p2q2}C_{q233}\rangle = C^o_{i233} \tag{15.44}$$

В изотропном случае среди коэффициентов $\widetilde{C}_{ik33}$, C^o_{ik33} только по три коэффициента отличны от нуля

$$\widetilde{C}_{1133} = \lambda + \frac{\lambda\langle\lambda/(\lambda+2\mu)\rangle}{(\lambda+2\mu)\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle} - \lambda^2/(\lambda+2\mu) \tag{15.45}$$

$$\widetilde{C}_{2233} = \frac{\langle \lambda/(\lambda+2\mu)\rangle}{\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle} \tag{15.46}$$

$$\widetilde{C}_{3333} = \lambda + 2\mu + \frac{\lambda\langle \lambda/(\lambda+2\mu)\rangle}{(\lambda+2\mu)\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle} - \lambda^2/(\lambda+2\mu) \tag{15.47}$$

$$C^o_{1133} = \langle \lambda\rangle + \frac{\langle \lambda/(\lambda+2\mu)\rangle^2}{\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle} - \langle \lambda^2/(\lambda+2\mu)\rangle \tag{15.48}$$

$$C^o_{2233} = \frac{\langle \lambda/(\lambda+2\mu)\rangle}{\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle} \tag{15.49}$$

$$C^o_{3333} = \langle \lambda+2\mu\rangle + \frac{\langle \lambda/(\lambda+2\mu)\rangle^2}{\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle} - \langle \lambda^2/(\lambda+2\mu)\rangle \tag{15.50}$$

После этого по формуле (14.22) найдем эффективную продольную жесткость слоистого по оси x_2 стержня

$$C_{(0)} = ah\langle \widetilde{C}_{3333}\rangle = ahC^o_{3333} = ah\left[\langle \lambda+2\mu\rangle + \frac{\langle \lambda/(\lambda+2\mu)\rangle^2}{\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle} - \langle \lambda^2/(\lambda+2\mu)\rangle\right] \tag{15.51}$$

При нулевом коэффициенте Пуассона $\nu = 0$, параметр Ламе $\lambda = 0$, а модуль сдвига равен половине модуля Юнга $\mu = E/2$. В этом случае, как видно из (15.46), $\widetilde{C}_{3333} = E(x_2)$ и продольная жесткость определяется по самой простой формуле

$$C_{(0)} = ah\langle E\rangle \tag{15.52}$$

Функции $\mathbf{N_{m33k}(x_2)}$. Рассмотрим далее уравнение (15.30), при условии

$$N_{m33k}(h/2) = N_{m33k}(-h/2) \tag{15.53}$$

После первого интегрирования, получаем

$$N_{m33k,2} = C^{-1}_{m2n2}\Bigg[\langle C^{-1}_{n2p2}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p2q2}C_{q2rk}N_{r33}\rangle - C_{n2rk}N_{r33} + \\ + \int\limits_{-h/2}^{x_2}\left(C^o_{nk33} - \widetilde{C}_{nk33}(y)\right)dy - \langle C^{-1}_{n2p2}\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p2q2}\int\limits_{-h/2}^{x_2}\left(C^o_{qk33} - \widetilde{C}_{qk33}(y)\right)dy\right\rangle\Bigg] \tag{15.54}$$

В изотропном случае отличны от нуля три функции

$$N_{1331,2} = \frac{1}{\mu < 1/\mu >}\langle N_{233}\rangle - N_{233} + \\ + \frac{1}{\mu}\int\limits_{-h/2}^{x_2}\left(C^o_{1133} - \widetilde{C}_{1133}(y)\right)dy - \frac{1}{\mu < 1/\mu >}\left\langle \frac{1}{\mu}\int\limits_{-h/2}^{x_2}\left(C^o_{1133} - \widetilde{C}_{1133}(y)\right)dy\right\rangle\Bigg] \tag{15.55}$$

$$N_{2332,2} = \frac{1}{(\lambda+2\mu)\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle}\langle N_{233}\rangle - N_{233} \tag{15.56}$$

$$N_{3333,2} = \frac{1}{\mu < 1/\mu >}\langle N_{233}\rangle - N_{233} +$$
$$+\frac{1}{\mu}\int\limits_{-h/2}^{x_2}\left(C^o_{3333} - \widetilde{C}_{3333}(y)\right)dy - \frac{1}{\mu < 1/\mu >}\left\langle \frac{1}{\mu}\int\limits_{-h/2}^{x_2}\left(C^o_{3333} - \widetilde{C}_{3333}(y)\right)dy\right\rangle\Bigg] \tag{15.57}$$

Теперь найдём функции $\widetilde{C}_{3333K} = C_{33m2}N_{m33K,2} + C_{332K}N_{233}$. Среди них отлична от нуля только одна функция

$$\widetilde{C}_{33331} = 0\,, \qquad \widetilde{C}_{33332} = \frac{\lambda}{(\lambda+2\mu)\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle}\,\langle N_{233}\rangle \tag{15.58}$$

Эффективные коэффициенты $\mathbf{R_{I(0)}}$. Эти коэффициенты определяются по формулам (14.23), (14.24)

$$R_{1(0)} = ah\Big\langle x_2\widetilde{C}_{3333}(x_2) + \widetilde{C}_{33332}(x_2)\Big\rangle = \tag{15.59}$$

$$= ah\left\langle x_2\Big[\lambda + 2\mu + \frac{\lambda\langle\lambda/(\lambda+2\mu)\rangle}{(\lambda+2\mu)\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle} - \lambda^2/(\lambda+2\mu)\Big]\right\rangle + ah\,\frac{\langle\lambda/(\lambda+2\mu)\rangle}{\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle}\,\langle N_{233}\rangle \tag{15.60}$$

$$R_{2(0)} = ah\Big\langle x_1\widetilde{C}_{3333} + \widetilde{C}_{33331}\Big\rangle =$$

$$= \int\limits_{-a/2}^{a/2}\int\limits_{-h/2}^{h/2} x_1\widetilde{C}_{3333}(x_2)dx_1dx_2 = \int\limits_{-a/2}^{a/2} x_1dx_1\int\limits_{-h/2}^{h/2}\widetilde{C}_{3333}dx_2 = 0\cdot hC^o_{3333} = 0 \tag{15.61}$$

При $\nu = 0$ формула (15.60) переходит в более простое выражение

$$R_{1(0)} = ah\langle x_2E\rangle \tag{15.62}$$

Коэффициенты эффективного тензора изгибной жесткости слоистого в сечении стержня $\mathbf{D_{IJ(0)}}$. Для вычисления эффективных компонент тензора изгибной жесткости служат формулы (14.25) – (14.28) при $q = 0$

$$D_{11(0)} = ah\Big\langle x_2\big(x_2\widetilde{C}_{3333} + \widetilde{C}_{33332}\big)\Big\rangle =$$

$$= ah\left\langle x_2^2\Big[\lambda + 2\mu + \frac{\lambda\langle\lambda/(\lambda+2\mu)\rangle}{(\lambda+2\mu)\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle} - \lambda^2/(\lambda+2\mu)\Big]\right\rangle + ah\,\frac{\langle x_2\lambda/(\lambda+2\mu)\rangle}{\langle 1/(\lambda+2\mu)\rangle}\,\langle N_{233}\rangle \tag{15.63}$$

$$D_{12(0)} = ah\Big\langle x_2\big(x_1\widetilde{C}_{3333} + \widetilde{C}_{33331}\big)\Big\rangle = ah\langle x_1\rangle\Big\langle x_2\widetilde{C}_{3333}\Big\rangle = 0 \tag{15.64}$$

$$D_{22(0)} = ah\Big\langle x_1\big(x_1\widetilde{C}_{3333} + \widetilde{C}_{33331}\big)\Big\rangle = \frac{a^3h}{12}C^o_{3333} \tag{15.65}$$

$$D_{21(0)} = ah\Big\langle x_1\big(x_2\widetilde{C}_{3333} + \widetilde{C}_{33332}\big)\Big\rangle = ah\langle x_1\rangle\Big\langle x_2\widetilde{C}_{3333} + \widetilde{C}_{33332}\Big\rangle = 0 \tag{15.66}$$

При $\nu = 0$ получаем

$$D_{11(0)} = ah\langle x_2^2 E\rangle\,, \qquad D_{22(0)} = \frac{a^3h}{12}\langle E\rangle \tag{15.67}$$

15.2 Решение конкретных задач об изгибе слоистого стержня.

15.2.1 Изгиб многослойной балки поперечной силой. Продемонстрируем применение, изложенной выше методики расчета неоднородных стержней на примере консольной балки с различной формой поперечного сечения и с различными функциями распределения модуля Юнга по сечению. Пусть балка длины l защемлена на конце $x_3 = l$ и нагружена на конце $x_3 = 0$ защемлена продольной силой q_3 и поперечными силами q_1 и q_2, приложенными в центре тяжести левого торца балки. Задача является статически определимой, поэтому сразу аходятся внутренние силовые факторы, действующие в поперечном сечении на расстоянии x_3 от начала координат

$$Q_3 = -q_3, M_1 = q_2x_3, M_2 = q_1x_3. \tag{15.68}$$

Найдем продольную деформацию и кривизны геометрической оси балки

$$\begin{aligned}\gamma_{33} &= -\mu q_3 - (f_1q_2 + f_2q_1)x_3,\\ \kappa_1 &= (d_{11}q_2 + d_{12}q_1)x_3 + f_1q_3,\\ \kappa_2 &= (d_{21}q_2 + d_{22}q_1)x_3 + f_2q_3,\end{aligned} \tag{15.69}$$

Далее найдем перемещение точек оси балки

$$\begin{aligned}w_3 &= -\mu q_3x_3 - \frac{1}{2}(f_1q_2 + f_2q_1)x_3^2 + C_3,\\ w_1 &= -\frac{1}{6}(d_{21}q_2 + d_{22}q_1)x_3^3 - \frac{1}{2}f_2q_3x_3^2 + C_1'x_3 + C_1,\\ w_2 &= -\frac{1}{6}(d_{11}q_2 + d_{12}q_1)x_3^3 - \frac{1}{2}f_1q_3x_3^2 + C_2'x_3 + C_2\end{aligned} \tag{15.70}$$

Константы интегрирования найдем из условий защемления правого торца балки

$$\begin{aligned}w_3(l) = 0; w_1(l) = 0, w_{1,3}(l) = 0;\\ w_2(l) = 0, w_{2,3}(l) = 0\end{aligned} \tag{15.71}$$

Из пяти условий (15.71) найдем пять констант

$$\begin{aligned}C_3 &= \mu q_3l + \frac{1}{2}(f_1q_2 + f_2q_1)l^2,\\ C_1' &= \frac{1}{2}(d_{21}q_2 + d_{22}q_1)l^2 + f_2q_3l,\end{aligned}$$

$$C_2' = \frac{1}{2}(d_{11}q_2 + d_{12}q_1)l^2 + f_1q_3l,$$
$$C_1 = -\frac{1}{3}(d_{21}q_2 + d_{22}q_1)l^3 - \frac{1}{2}f_2q_3l^2,$$
$$C_2 = -\frac{1}{3}(d_{11}q_2 + d_{12}q_1)l^3 - \frac{1}{2}f_1q_3l^2. \tag{15.72}$$

Воспользуемся (15.72) и получим следующие формулы для перемещений точек оси балки

$$w_3 = \mu q_3(l - x_3) + \tfrac{1}{2}(f_1q_2 + f_2q_1)(l^2 - x_3^2),$$
$$w_1 = -\tfrac{1}{6}(d_{21}q_2 + d_{22}q_1)(l - x_3)^2(2l - x_3) - \tfrac{1}{2}f_2q_3(l - x_3)^2,$$
$$w_2 = -\tfrac{1}{6}(d_{11}q_2 + d_{12}q_1)(l - x_3)^2(2l - x_3) - \tfrac{1}{2}f_1q_3(l - x_3)^2. \tag{15.73}$$

Продольные деформации волокн балки определяются через деформацию и кривизны геометрической оси

$$\varepsilon_{33} = (-\mu + f_2x_1 + f_1x_2)q_3 +$$
$$+x_3\Big[(-f_1 + d_{21}x_1 + d_{11}x_2)q_2 + (-f_2 + d_{22}x_1 + d_{12}x_2)q_1\Big].$$

Из закона Гука находим продольные напряжения

$$\sigma_{33} = E(x_1, x_2)(-\mu + f_2x_1 + f_1x_2)q_3 +$$
$$+x_3E(x_1, x_2)\Big[(-f_1 + d_{21}x_1 + d_{11}x_2)q_2 + (-f_2 + d_{22}x_1 + d_{12}x_2)q_1\Big].$$

Эквивалентная (15.74) формула для напряжений

$$\sigma_{33} = -q_3\tfrac{E(x_1,x_2)}{m_0F}\Big[1 - (m_0x_I - m_I)(m_{IJ}m_0 - m_Im_J)^{-1}m_J\Big] +$$
$$+x_3\tfrac{E(x_1,x_2)}{F}(m_0x_I - m_I)(m_{IJ}m_0 - m_Im_J)^{-1}q_J \tag{15.74}$$

Формула (15.74) удобна тем, что из нее сразу видно, что

$$\int_F \sigma_{33}dF = Q_3 = -q_3, \int_F x_1\sigma_{33}dF = M_2 = q_1x_3,$$
$$\int_F x_2\sigma_{33}dF = M_1 = q_2x_3 \tag{15.75}$$

Таким образом, смещения точек геометрической оси неоднородной консоли, а также продольные деформации и напряжения в ней зависят от коэффициентов податливости μ, f_I, d_{IJ}, определяемых через коэффициенты m_0, m_I, m_{IJ}.

Литература

[1] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осредненние процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.

[2] Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.

[3] Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 367 с.

[4] Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 431 с.

[5] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.

[6] Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 443 с.

[7] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.

[8] Горбачев В. И., Москаленко О. Б. Устойчивость стержней с переменной жесткостью при сжатии распределенной нагрузкой // Вестник Московского университета. Математика. Механика. 2012. №2. С. 41–47.

[9] Горбачев В. И. О собственных частотах продольных колебаний неоднородного стержня с переменным поперечным сечением // Вестник Московского университета. Математика. Механика. 2016. №1. С. 31–39.

[10] Горбачев В. И. Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных сред // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1991. № 2. 61–76.

[11] Горбачев В. И. Динамические задачи механики композитов // Известия РАН. Серия физическая. 2011. Т. 75. № 1. С. 117–122.

[12] Горбачев В. И. Интегральные формулы в связанной задаче термоупругости. Применение в механике композитов // Прикладная математика и механика. 2014. Т.78. № 2. С. 277–299.

[13] Gorbachev V. I. Integral formulas in electromagnetic elasticity of heterogeneous bodies. application in the mechanics of composite materials // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International J. // 2017. V. 8. № 2. С. 147–170.

[14] Олехова Л. В. Кручение неоднородного анизотропного стержня. Диссертация кандидата физико-математических наук. Master's thesis, МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, 2009.

[15] Емельянов А. Н. Эффективные характеристики в моментной теории упругости. Диссертация кандидата физико-математических наук. Master's thesis, МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, 2016.

[16] Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995.

[17] Горбачёв В. И. Интегральные формулы в связанной задаче термоупругости. Применение в механике композитов. // Прикл. матем. и механ., 2014. **78**, № 2. 277–299.

[18] Бардзокас Д. И. Зобнин А. И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. М.: Едиториал УРСС, 2003.

[19] Bateman H. and Erdelyi A. Higher Transcendental Functions, Vol. 1. McGraw-Hill, New York, 1953.

[20] Abramowitz M. Handbook of Mathematical Functions, 1964: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.

[21] Янке Е. Специальные функции [Текст] : Формулы, графики, таблицы : Пер. с 6-го переработ. нем. изд. / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш ; Под ред. Л. И. Седова. - 2-е изд., стер. - Москва : Наука, 1968. - 344 с. : черт.; 27 см.

[22] Горбачев В. И. Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных сред // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1991. № 2. 61–76.

[23] Седов Л. И. Механика сплошной среды. В 2-х т. т.2. 1970.

[24] Ильюшин А. А., Ленский В. С. Сопротивление материалов. ФИЗМАТГИЗ, Москва, 1959.

[25] Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 1999.

[26] Фиников С. П. Курс дифференциальной геометрии. Гостехиздат, Москва, 1952.

[27] Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ НКТП СССР, М-Л, 1935.

[28] Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов. ФИЗМАТГИЗ, Москва, 1962.

[29] Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. Машиностроение, Москва, 1968.

[30] Горбачев В. И. Осреднение линейных задач механики композитов при непериодической неоднородности. Известия РАН. МТТ, (1):31-37, 2001.

[31] Горбачев В. И. Осреднение процессов в неоднородных телах. In Упругость и неупругость. Материалы Междунар. научного симпозиума по проблемам мех. деф. тв. тела, посвящен. 90-летию А.А. Ильюшина. (М. 22-23 января 2001 г.), pages 294-296. Изд-во МГУ, Москва, 2001.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ