



МЕХАНИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# МЕХАНИКА КОМПОЗИТОВ. ЧАСТЬ 1

• • • ГОРБАЧЕВ  
ВЛАДИМИР ИВАНОВИЧ

—  
МЕХМАТ МГУ

—  
КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН  
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ  
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ  
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.  
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ  
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://VK.COM/TEACHINMSU).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ  
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,  
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,  
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ  
[VK.COM/TEACHINMSU](https://VK.COM/TEACHINMSU).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА  
СТУДЕНТА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ  
**НЕКРАСОВА ВСЕВОЛОДА ВАЛЕРЬЕВИЧА**

---

# Оглавление

<b>Лекция 1. Введение в механику композитов</b>	<b>4</b>
1.1 Что такое композит ? . . . . .	4
1.2 Постановка статической задачи механики композитов. . . . .	7
1.3 Основные типы определяющих соотношений. . . . .	8
<b>Лекция 2. Эффективные характеристики неоднородных материалов.</b>	<b>14</b>
2.1 Общее представление определяющих соотношений для упругих, вязко-упругих и упругопластических материалов. . . . .	14
2.2 Понятие об эффективных определяющих соотношениях. . . . .	20
2.3 Эффективные модули упругости неоднородного упругого тела. . . . .	22
<b>Лекция 3. Решение первой специальной краевой задачи.</b>	<b>27</b>
3.1 Сведение вспомогательной задачи к серии классических задач теории упругости. . . . .	27
3.2 Цилиндрическое тело неоднородное в поперечном сечении. Волокнистый композит. . . . .	29
3.3 Эффективные модули упругости неоднородного по толщине бесконечного слоя. Слоистый композит. . . . .	31
<b>Лекция 4. Вторая специальная краевая задача. Эффективные податливости.</b>	<b>35</b>
4.1 Тензор эффективных податливостей неоднородного упругого тела. . . . .	35
4.2 Постановка второй СКЗ в напряжениях. . . . .	35
4.3 Эффективные податливости неоднородного по толщине бесконечного слоя.	37
<b>Лекция 5. Эффективные податливости. Вилки эффективных характеристик.</b>	<b>40</b>
5.1 Случай периодически неоднородного слоя. . . . .	40
5.2 Проблема единственности эффективных характеристик и масштабный эффект. . . . .	43
5.3 Оценка эффективных характеристик упругих композитов. . . . .	45
<b>Лекция 6. Вилка Фойгта-Рейсса. Функционал Хашина-Штрикмана.</b>	<b>48</b>
6.1 Вилка Фойгта-Рейсса. . . . .	49
6.2 Функционал Хашина-Штрикмана. . . . .	51

<b>Лекция 7-8. Вариационный принцип Хашина-Штрикмана. Вилка Хашина-Штрикмана.</b>	<b>53</b>
7.1 Вилка Хашина-Штрикмана. . . . .	56
7.2 Вилка Хилла-Хашина для макроскопически трансверсально изотропного композита. . . . .	60
7.3 Вилка Йеха (учет формы включений). . . . .	60
<b>Лекция 9. Задача Эшелби. Метод Эшелби</b>	<b>61</b>
9.1 Задача Эшелби. Тензор Эшелби. . . . .	61
9.2 Случай изотропной среды и эллипсоидальной области трансформации. . . . .	64
9.3 Деформации и напряжения внутри инородного эллипсоидального включения в бесконечной упругой среде. . . . .	68
<b>Лекция 10-11. Метод Бахвалова-Победри осреднения обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими по координатам коэффициентами</b>	<b>71</b>
10.1 Композиты с периодической структурой. . . . .	71
10.2 Задача о неоднородной по толщине, бесконечной в плане, упругой плите. . . . .	75
10.3 Вычисление структурных функций $N_q(\zeta)$ и констант $h_{q-1}$ . . . . .	82
10.4 Сходимость метода Бахвалова-Победри к точному решению. . . . .	85
<b>Лекция 12-13. Новый метод осреднения обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами</b>	<b>87</b>
12.1 Новый метод осреднения обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными интегрируемыми коэффициентами. . . . .	87
12.2 Уравнения второго порядка общего вида. . . . .	91
<b>Лекция 14. Динамическая задача для неоднородного стержня с переменным поперечным сечением</b>	<b>104</b>
14.1 Осреднение задачи о продольных колебаниях неоднородной плиты и стержня. . . . .	104
14.2 Установившиеся продольные колебания неоднородного стержня с переменным поперечным сечением. . . . .	114
<b>Список литературы</b>	<b>116</b>



# Лекция 1. Введение в механику композитов

## 1.1 Что такое композит?

**1.1.1 Широкое и узкое определение.** Прежде чем определить предмет механики композитов, следует ответить на вопрос: "Что такое композит?" В широком смысле под композитом понимают любой материал неоднородный по своим физико-механическим свойствам (иначе такой материал называется гетерогенным материалом).

Более узкое определение композита состоит в том, что композит это единый материал, составленный из различных компонент (фаз), взаимодействующих между собой по границам раздела. Граница раздела это поверхность, разделяющая два разных материала. Каждая отдельная компонента является однородной сплошной средой.

**1.1.2 Математическое определение.** Для механика нужно такое определение, которое позволяло бы выделить основные наиболее существенные стороны явления и которое позволяло бы достаточно просто включить эти явления в некоторую математическую модель. В нашем случае *композит это математическая модель, описываемая с помощью разрывных по координатам материальных функций определяющих соотношений* [1]. Как частный случай, сюда также включаются и пористые материалы.

**1.1.3 Контактные условия между компонентами композита.** Условия для различных физических и механических полей на границе раздела называются контактными условиями. В случае задачи механики деформируемого тела (МДТТ) перемещения и напряжения на контактной поверхности должны удовлетворять шести граничным условиям.

**Идеальный контакт.** Идеальным контактом называется такой контакт, когда при переходе через границу раздела непрерывны вектор перемещений  $\vec{u}$  и вектор напряжений  $\vec{P}_{(n)}$  на элементарной контактной площадке с единичной нормалью  $\vec{n}$

$$[u_i]_\Gamma \equiv (u_i^+ - u_i^-)_\Gamma = 0, \quad [P_{(n)i}]_\Gamma = (\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-)_\Gamma n_j = 0 \quad (1.1)$$

Квадратные скобки обозначают скачёк при переходе через границу раздела. В случае композита с изолированными включениями все величины, относящиеся к включению помечаются знаком "+", величины относящиеся к внешности включения помечены знаком минус. Величины  $n_i$  обозначают компоненты вектора внешней нормали к контактной поверхности  $\Gamma$ .

**Скользящий контакт.** Если реализован скользящий контакт, то на границе разделя непрерывны перемещения  $u_{(n)}$  точки по нормали к контактной поверхности, а также непрерывна сила нормальная к контактной поверхности. Кроме этого равны нулю касательные напряжения с обеих сторон контактной поверхности. Всего 6 условий.

$$\begin{aligned} [u_{(n)}]_\Gamma &= \vec{u}_\Gamma \vec{n} \equiv (u_i^+ - u_i^-)_\Gamma n_i = 0, & [\sigma_{(n)}]_\Gamma &= [\sigma_{ij}]_\Gamma n_i n_j \equiv (\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-)_\Gamma n_i n_j = 0, \\ \vec{P}_{(n)}^+ \vec{\tau}_\alpha &= \sigma_{ij}^+ n_i \tau_{\alpha j} = 0, & \vec{P}_{(n)}^- \vec{\tau}_\alpha &= \sigma_{ij}^- n_i \tau_{\alpha j} = 0, & \alpha &= 1, 2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Векторы  $\vec{\tau}_\alpha$  — единичные, взаимно-ортогональные векторы на элементарной площадке, касательной к контактной поверхности.

**Контакт с натягом.** Еще один тип контактных условий возникает, когда включения вставлены с натягом. В этом случае

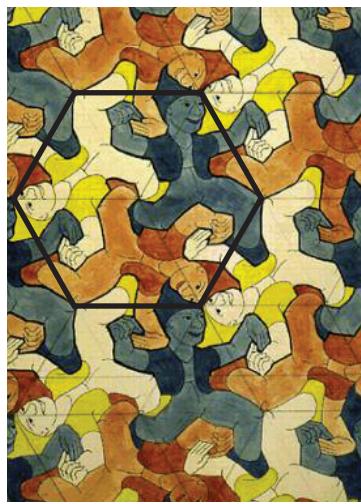
$$\begin{aligned} [u_{(n)}]_\Gamma &= \vec{u}_\Gamma \vec{n} \equiv (u_i^+ - u_i^-)_\Gamma n_i = \delta, & [u_\alpha]_\Gamma &\equiv (u_\alpha^+ - u_\alpha^-) = 0, \\ [P_{(n)i}]_\Gamma &= (\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-)_\Gamma n_j = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $\delta$  — натяг, который может осуществляться различными способами, например пусть в среде имеется шаровая пора радиуса  $R$  и шар из того же или из другого материала радиуса  $R + \delta$ , где  $\delta$  — малая величина по сравнению с  $R$ . При охлаждении шара его радиус уменьшается. Так вот, охладим его до той температуры, при которой радиус шара станет равным  $R$ . Вставим теперь охлажденный шар в пору. Далее, в следствие теплопроводности, температура шара и окружающей среды меняется. Меняется также радиус шара и, соответственно, радиус поры. При этом материальные точки шара и точки поры на контактной поверхности получают разные перемещения по нормали, однако, разница между ними не меняется во времени и будет равна величине  $\delta$ .

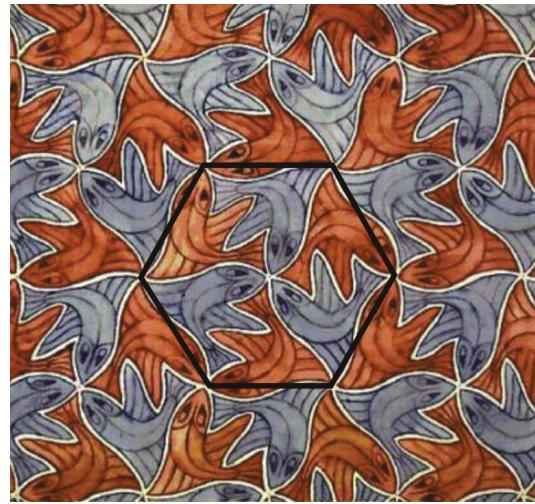
Мы будем изучать композит с позиций механики деформируемого твердого тела. Причем из большого числа моделей МДТТ наибольшее внимание уделим линейно упругой модели.

**1.1.4 Представительный объём.** Для большинства из известных композитных материалов существует некоторый *представительный объём* — это такой минимальный объём вещества, изучение которого позволяет судить о свойствах композита как однородного материала. Возможность экспериментального изучения поведения композита в эксперименте на представительном объёме основано на том факте, что средние значения напряжений и деформаций в представительном объеме должны быть такими же как и во всем композиционном теле, состоящем из большого числа представительных объёмов [2]. В общем случае относительно представительного объёма можно сказать только то, что композитное тело должно состоять из большого количества таких объёмов, а характерный размер неоднородности должен быть меньше характерного размера представительного объёма.

**1.1.5 Типичный элемент. Замощение.** Типичный элемент — это такой элемент, многократное повторение которого в определенной логической последовательности позволяет построить все тело.



Танцующие люди.



Рыбы.

**Типичные элементы совершенно одинаковы и пересекаются друг с другом только по границам. Представительный объём состоит из конечного числа типичных элементов. В математике образование тела с помощью типичных элементов называется замощением [3].** Например плоскость можно замостить прямоугольниками, параллелограммами, правильными шестиугольниками. Можно придумать очень красивые замощения плоскости. Морис Корнелиус Эшер – Голландский художник второй полвины прошлого века рисовал картины, многие, из которых основаны на принципах замощения плоскости типичными элементами (рыбки, бабочки, лошади со всадниками и т.п.)

**1.1.6 Ячейка периодичности. Периодические и квазипериодические структуры.** Ячейка периодичности структуры это такой объём вещества, многократное повторение которого по трем, двум, или одному направлению позволяет построить все тело. Ячейка периодичности является частным случаем типичного элемента, и она же является минимальным объёмом, по которому можно судить о свойствах композита в целом, т.е. ячейка периодичности является представительным объёмом. *Композиты, в которых можно выделить ячейку периодичности называются периодическими, или регулярными структурами.* Как правило, в регулярных структурах можно ввести декартовы координаты так, что его физические и механические характеристики являются периодическими функциями координат.

*Если в композите можно ввести такие криволинейные координаты, что его материальные характеристики являются периодическими функциями одной, двух, или трех криволинейных координат, тогда композит называется квазипериодической, или квазирегулярной структурой.*

Конечно, введение понятия ячейки периодичности является идеализацией реального композита. Однако и сама сплошная сплошная среда является идеализацией, и во многих случаях оправданной. Известны и другие примеры из механики, когда разумная идеализация позволяет построить модель реальной среды, и с помощью этой модели отвечать на вопросы, возникающие в практической деятельности человека.

**1.1.7 Классификация композитов.** С точки зрения математических трудностей, возникающих при создании модели композита принято выделять три основных типа таких материалов, это: слоистый композит, волокнистый композит и дисперсно-армированный композит.

## 1.2 Постановка статической задачи механики композитов.

Пусть  $V$  обозначает объём тела занятого композиционным материалом, а  $\Sigma$  — граница этого объёма.

**1.2.1 Постановка в перемещениях.** Постановка статической задачи МДТТ при малых деформациях состоит из:

уравнений равновесия

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \vec{X} = 0, \quad \sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad (1.4)$$

определяющих соотношений

$$\underline{\sigma} = \check{F}(x, \underline{\varepsilon}), \quad \sigma_{ij} = \check{F}_{ij}(x, \underline{\varepsilon}), \quad (1.5)$$

соотношений Коши для малых деформаций

$$\underline{\varepsilon} = \operatorname{Def} \vec{u}, \quad \varepsilon_{ij} = \Delta_{ijkl} u_{k,l} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1.6)$$

и граничных условий

$$\vec{u}|_{\Sigma_u} = \vec{u}^0, \quad \underline{\sigma} \vec{n}|_{\Sigma_p} = \vec{p}^0 \quad u_i|_{\Sigma_u} = u_i^0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{\Sigma_p} = p_i^0 \quad (1.7)$$

Задача (1.4) – (1.7) является смешанной краевой задачей. Уравнения (1.4) – (1.7) можно записать в виде системы трёх уравнений относительно трёх компонент вектора перемещений

$$\operatorname{div} \check{F}(x, \operatorname{Def} \vec{u}) + \vec{X} = 0 \quad (1.8)$$

**1.2.2 Общие свойства определяющих соотношений.** Определяющие соотношения это феноменологические соотношения, связывающие между собой тензор напряжений и тензор деформаций. Они позволяют замкнуть систему уравнений МДТТ. В некоторых частных случаях их можно вывести из термодинамики. Называются они определяющими соотношениями поскольку определяют конкретный материал, используемый в конструкции. Определяющие соотношения могут быть довольно сложными и в них обязательно входят материальные константы и материальные функции, которые находятся из экспериментов над образцами из исследуемого материала.

Галочка сверху символа  $F$  указывает на оператор по времени от деформаций. Это означает, что в любой заданный момент времени  $t$  напряжения  $\sigma$  определяются однозначно по деформациям  $\varepsilon$  во все предыдущие времена  $\tau \leq t$ . Причем в общем случае эта зависимость от деформаций нелинейна. Аргумент  $x$  в формуле (1.5) указывает на то, что определяющие соотношения зависят от точки тела, например в различных компонентах композита они различаются.

Предполагается также, что определяющие соотношения (1.5) обратимы, т.е. существует однозначный и единственный оператор позволяющий выразить деформации через напряжения

$$\varepsilon = \check{\Phi}(x, \sigma) \quad (1.9)$$

## 1.3 Основные типы определяющих соотношений.

**1.3.1 Линейный упругий материал.** Упругий материал (вернее упругое поведение материала) характеризуется линейной связью между тензором напряжений и тензором деформаций. Такая связь между тензорами второго ранга осуществляется с помощью тензора четвертого ранга

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = J_{ijkl}(x)\sigma_{kl}, \quad C_{ijkl}J_{klmn} = J_{klmn}C_{ijkl} = \Delta_{ijkl} \quad (1.10)$$

Линейный закон (1.10), выражающий напряжения через деформации, называется *обобщенный закон Гука*. Наоборот, представление деформаций через напряжения называется обратным обобщенным законом Гука. Как правило слово "обобщенный" опускают. Тензоры четвертого ранга  $C$  и  $J$  называются соответственно тензором модулей упругости и тензором податливости. Эти тензоры, как тензоры четвертого ранга, имеют в общем случае  $3^4 = 81$  независимую компоненту.

**Общий случай анизотропии.** Симметрия тензоров напряжений и деформаций сокращает число независимых компонент тензоров упругости и податливости до  $6^2 = 36$ .

Предположение о существовании упругого потенциала  $W(\varepsilon)$ , такого, что

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \Rightarrow \quad C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{klij}$$

приводит к выводу о симметрии тензоров  $C$  и  $J$  по первой и второй паре индексов  $C_{ijkl} = C_{klij}$ . Это обстоятельство, в свою очередь, сокращает число независимых компонент до  $(6^2 - 6)/2 + 6 = 21$ . Итак, в общем случае анизотропии число независимых компонент тензора упругости (как и тензора податливостей) равно **21**

Коэффициенты  $C_{ijkl}$ , с учетом указанных симметрий образуют квадратную матрицу размером  $6 \times 6$

$$(C_{ijkl}) = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ \text{сим} & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ \text{мет} & & & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ \text{рич} & & & & C_{1313} & C_{1323} \\ \text{но} & & & & & C_{2323} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$



Дальнейшее сокращение числа независимых компонентов тензора  $C$  связано с учетом симметрии свойств материала, обусловленных прирожденными или конструкционными свойствами материала.

Число независимых характеристик сокращается в зависимости от типа симметрии материала тела. Симметрия здесь понимается в том смысле, что в каждой точке тела имеются симметричные направления, эквивалентные в отношении упругих свойств.

Симметрию материала можно изучать с помощью формул преобразования компонент тензора при переходе к другой, повернутой системе координат. Пусть  $l_{ij}$  — косинусы углов между старыми  $x_j$  и новыми  $x'_i$  осями декартовых координат. В записи  $l_{ij}$  первый индекс "i" — номер новой оси, второй "j" — номер старой оси, тогда

$$x'_i = l_{ij}x_j$$

Компоненты тензоров первого, второго и четвертого рангов в новых координатах будут определяться по формулам [4]

$$a'_i = l_{ij}a_j, \quad a'_{ij} = l_{im}l_{jn}a_{mn}, \quad a'_{ijkl} = l_{im}l_{jn}l_{kp}l_{lq}a_{mnpq} \quad (1.12)$$

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся типы симметрии материала.

**Материал с плоскостью упругой симметрии.** Пусть в любой точке тела можно провести плоскость, обладающую тем свойством, что любые два направления, симметричные относительно этой плоскости, эквивалентны в отношении термомеханических свойств. Пусть ось  $x_3$  перпендикулярна этой плоскости, тогда плоскость будет плоскостью симметрии (впрочем как и любая плоскость параллельная координатной плоскости  $x_1x_2$ ). В этом случае при замене  $x_3$  на  $-x_3$  не должны меняться компоненты тензора  $C_{ijkl}$ .

Перейдем к новым координатам, в которых направление  $x_3$  заменено на противоположное, т.е.

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = -x_3$$

Компоненты матрицы преобразования координат будут определять по формуле

$$l_{ij} = \delta_{iK}\delta_{Kj} - \delta_{i3}\delta_{3j}$$

Здесь и везде далее большие латинские индексы принимают значения 1 и 2, малые латинские индексы всегда принимают значения 1,2,3. Вычисляя по формуле (1.12) компоненты тензора модулей упругости в новых координатах, получим

$$\begin{aligned} C'_{IJKL} &= C_{IJKL}, & C'_{IJK3} &= -C_{IJK3}, & C'_{IJ33} &= C_{IJ33}; \\ C'_{I3KL} &= -C_{I3KL}, & C'_{I3K3} &= C_{I3K3}, & C'_{I333} &= -C_{I333}; \\ C'_{33KL} &= C_{33KL}, & C'_{33K3} &= -C_{33K3}, & C'_{3333} &= C_{3333} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Отсюда видно, что для того, чтобы компоненты тензора модулей упругости не менялись при замене  $x_3$  на  $-x_3$  должны быть равны нулю все коэффициенты с нечетным количеством индексов "3", т.е.

$$C_{IJK3} = 0, \quad C_{I333} = 0 \quad (1.14)$$

Количество таких коэффициентов равно 8. Таким образом, общее число независимых, ненулевых коэффициентов упругости уменьшается с 21 до  $21 - 8 = 13$ .

Этот же вывод легко получить из матрицы (1.11). Нужно только в матрице (1.11) положить нулевыми все коэффициенты с нечетным количеством троек и посчитать количество оставшихся ненулевых коэффициентов

$$(C_{ijkl}) = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & 0 & 0 \\ C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & 0 & 0 & \\ \text{сим} & & C_{3333} & C_{3312} & 0 & 0 \\ & & & C_{1212} & 0 & 0 \\ \text{мет} & & & & C_{1313} & C_{1323} \\ & & & & & C_{2323} \\ \text{рич} & & & & & \\ \text{но} & & & & & \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Если же в теле имеется две ортогональные плоскости симметрии, например плоскость  $x_1x_3$  (ось  $x_2$  перпендикулярна этой плоскости), тогда в матрице упругости обращаются в нуль коэффициенты с нечетным количеством двоек, т.е.  $C_{1112} = 0$ ,  $C_{2212} = 0$ ,  $C_{3312} = 0$ ,  $C_{1323} = 0$ . Отметим, что эти же коэффициенты обращаются в нуль, если второй плоскостью симметрии будет не  $x_1x_3$  а плоскость  $x_2x_3$ . В этом случае обращаются в нуль коэффициенты  $C_{ijkl}$  с нечетным количеством единиц. Отсюда следует вывод: *если в теле имеются две взаимно ортогональные плоскости симметрии упругих свойств, то и третья плоскость ортогональная первым двум также является плоскостью симметрии упругих свойств.*

Ненулевых независимых коэффициентов упругости будет ровно 9. Такое тело называется ортотропным.

**Ортотропный материал.** Ортотропный материал имеет три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии термомеханических свойств. Направления перпендикулярные плоскостям симметрии называются главными осями анизотропии. В декартовой системе координат, оси которой совпадают с главными осями анизотропии, у всех тензоров должны быть равны нулю компоненты с нечетным количеством единиц, двоек и троек в значениях индексов. Тензор модулей упругости будет иметь девять независимых компонент. Примером ортотропного материала может служить стеклопластик, армированный волокнами по трем перпендикулярным направлениям. Матрица модулей упругости ортотропного материала имеет вид:

$$(C_{ijkl}) = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 & \\ \text{сим} & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1212} & 0 & 0 \\ \text{мет} & & & & C_{1313} & 0 \\ & & & & & C_{2323} \\ \text{рич} & & & & & \\ \text{но} & & & & & \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

**Трансверсально изотропный материал.** Такой материал имеет в каждой точке ось симметрии термомеханических свойств. Иногда ось симметрии называют осью изотропии. Это означает, что все направления в плоскости перпендикулярной оси симметрии эквивалентны с точки зрения механических свойств (плоскость изотропии).

Примером трансверсально изотропного материала является слоистый композит, составленный из изотропных слоев (рис.1.1), а также композит, армированный в одном

направлении круглыми волокнами, центры которых лежат в вершинах равностороннего треугольника (рис.1.2).

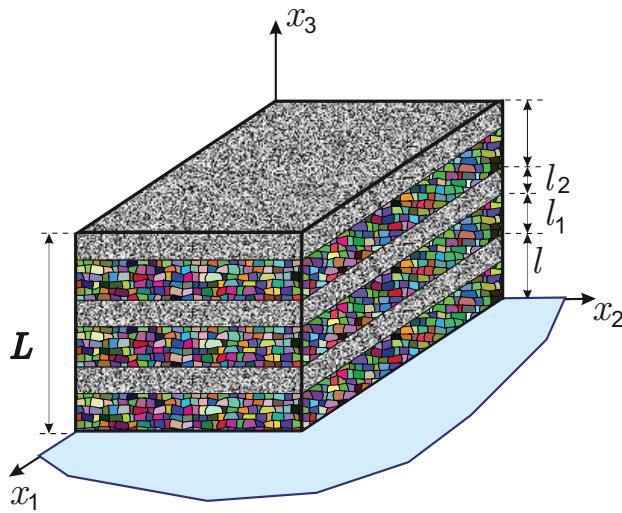


Рис. 1.1: Слоистый композит периодической структуры. Пример трансверсально изотропного материала.

Выберем декартовы координаты так, чтобы ось  $x_3$  была бы направлена по оси симметрии, тогда направления  $x_1$  и  $x_2$  лежат в перпендикулярной плоскости и неразличимы по термомеханическим свойствам. Переядем к новым координатам, повернутым относительно оси  $x_3$  на угол  $\vartheta$ . Матрица поворота имеет вид:

$$(l_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Вычисляя по формулам (1.12) коэффициенты тензоров в новых координатах и требуя их неизменности при таком преобразовании, получим, что, в отличие от ортотропного материала, в транстропном материале должны иметь место дополнительные соотношения между компонентами материальных тензоров, а именно:

$$C_{1111} = C_{2222}, \quad C_{1133} = C_{2233}, \quad C_{1313} = C_{2323}, \quad C_{1212} = (C_{1111} - C_{1122})/2 \quad (1.18)$$

Таким образом, тензор модулей упругости  $\underline{C}$  в трансверсально изотропном атериале будет иметь **5** независимых компонент

**Случай полной изотропии. Параметры Ламе.** Если в каждой точке все направления эквивалентны в отношении упругих свойств, то материал является полностью симметричным и называется изотропным материалом. Для изотропного материала все компоненты материальных тензоров являются инвариантами при любых поворотах системы координат. Единственным таким симметричным тензором второго ранга является  $\delta$ -Кронекера с компонентами  $\delta_{ij}$ . С помощью дельт Кронекера можно образовать два линейно независимых тензора четвертого ранга компоненты которых обладают симметрией тензора упругости и инвариантны при повороте координат [4] — это тензоры

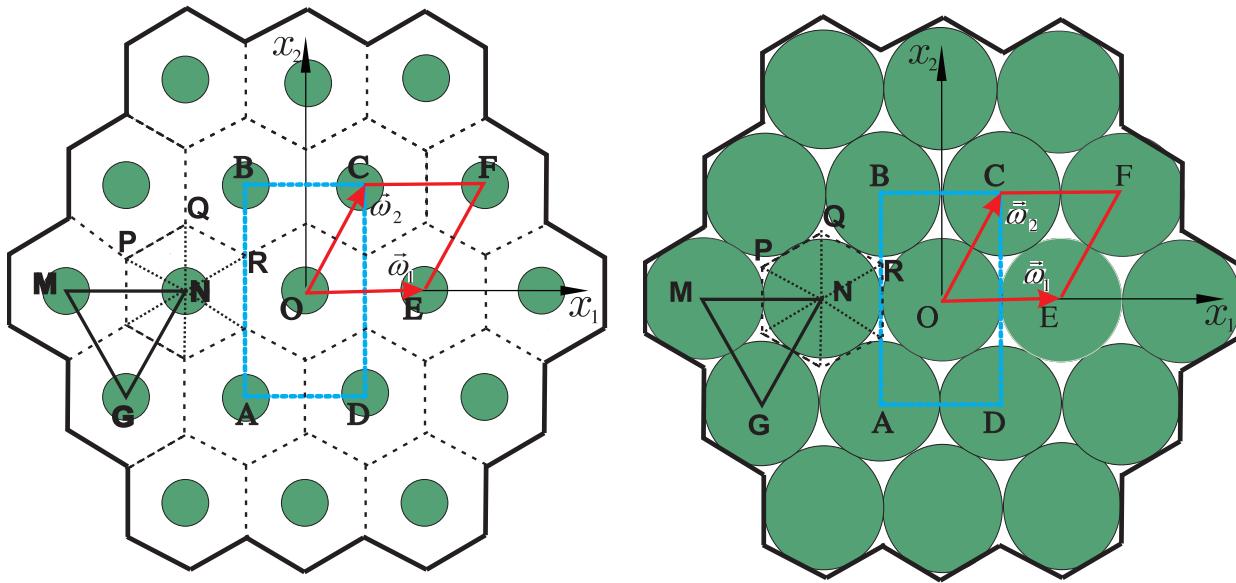


Рис. 1.2: Волокнистый композит — ещё один пример трансверсально изотропного материала. Поперечное сечение волокнистого композита с волокнами в центре равностороннего треугольника (справа — случай плотной упаковки). Типичные элементы: малый треугольный  $NPQ$ , малый ромбовидный  $NPQR$ , большой треугольный  $GMN$ , большой ромбовидный  $OCFE$ , шестиугольный и прямоугольный  $ABCD$ .

$\underline{\Lambda}$  и  $\underline{\Delta}$  с компонентами  $\Lambda_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}$  и  $\Delta_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{il} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$ . Все остальные тензоры четвертого ранга, составленные из делта Кронекера и обладающие нужным типом симметрии, будут линейными комбинациями последних.

Это означает, что любые тензоры четвертого ранга, обладающие свойством инвариантности компонент при вращении системы координат, а компоненты которых симметричны по первой и второй парам индексов и по индексам в этих парах определяются только двумя независимыми величинами:

$$\underline{C} = \lambda \underline{\Lambda} + 2\mu \underline{\Delta}, \quad C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu \Delta_{ijkl} \quad (1.19)$$

Коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$  называются параметрами Ламе. Компоненты обратного тензора будут определять через параметры Ламе по формулам

$$J = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \underline{\Lambda} + \frac{1}{2\mu} \underline{\Delta}, \quad J_{ijkl} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2\mu} \Delta_{ijkl} \quad (1.20)$$

Вместо параметров Ламе в технических приложениях чаще используются две другие независимые величины — модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ , имеющие более прозрачный физический смысл. Между этими двумя параметрами имеется связь

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}; \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.21)$$

Коэффициенты упругости и коэффициенты податливости, выраженные через модуль Юнга и коэффициент Пуассона представляются следующим образом:

$$C_{ijkl} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{E}{1+\nu} \Delta_{ijkl}, \quad J_{ijkl} = -\frac{\nu}{E} \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1+\nu}{E} \Delta_{ijkl} \quad (1.22)$$

В коэффициентах Ламе  $\lambda$  и  $\mu$  проще выглядит обобщенный закон Гука, а в технических величинах  $E$  и  $\nu$  — обратный закон Гука.

**Способ перемножения и обращения изотропных тензоров четвертого ранга.** Наряду с тензорами  $\underline{\Lambda}$  и  $\underline{\Delta}$  построим из дельт Кронекера еще два тензора четвертого ранга  $\underline{V}$  и  $\underline{D}$  с компонентами [5]

$$V_{ijkl} \equiv \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}, \quad D_{ijkl} \equiv \Delta_{ijkl} - V_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (1.23)$$

Пару тензоров  $\underline{V}$  и  $\underline{D}$ , также как и  $\underline{\Lambda}$  и  $\underline{\Delta}$ , можно принять в качестве базиса в пространстве изотропных тензоров четвертого ранга. Эти тензоры удобны тем, что с их помощью удобно умножать и обращать изотропные тензоры четвертого ранга, поскольку

$$\underline{V}\underline{V} = \underline{V}, \quad \underline{D}\underline{D} = \underline{D}, \quad \underline{V}\underline{D} = \underline{D}\underline{V} = 0 \quad (1.24)$$

В новом базисе для тензора модулей упругости получим выражение

$$\underline{C} = 3K\underline{V} + 2G\underline{D} \quad (1.25)$$

где  $K = \lambda + 2\mu/3$  — модуль объемного сжатия, а  $G \equiv \mu$  — модуль сдвига. Учитывая свойства (1.24) очень просто найти обратный тензор к  $\underline{C}$

$$\underline{C}^{-1} \equiv \underline{J} = \frac{1}{3K}\underline{V} + \frac{1}{2G}\underline{D} \quad (1.26)$$

# Лекция 2. Эффективные характеристики неоднородных материалов.

## 2.1 Общее представление определяющих соотношений для упругих, вязкоупругих и упругопластических материалов.

**2.1.1 Линейный вязкоупругий материал.** Упругие материалы характеризуются тем, что напряжения в данной точке в данный момент времени непосредственно связаны с деформациями в этой же точке и в тот же самый момент времени. Иначе говоря, напряжения являются линейными функциями от деформаций. В вязкоупругих материалах напряжения зависят не только от деформаций в данный момент времени, но и от того какие деформации были во все времена, предшествующие рассматриваемому моменту. Можно сказать, что вязкоупругий материал обладает свойством памяти о том, что происходило с ним в предыдущие моменты времени [6]. Другими словами, напряжения являются функционалами по времени от деформаций.

В момент времени приложения нагрузки тело ведет себя как упругий материал, т.е. в теле мгновенно возникают напряжения и деформации и далее напряжения и деформации будут меняться во времени.

В предположении о линейной зависимости связь между напряжениями и деформациями в любой точке тела описывается следующими соотношениями:

$$\sigma_{ij}(x, t) = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(x, t) - \int_0^t F_{ijkl}(x, t, \tau)\varepsilon_{kl}(x, \tau)d\tau, \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_{ij}(x, t) = J_{ijkl}(x)\sigma_{kl}(t) + \int_0^t \Phi_{ijkl}(x, t, \tau)\sigma_{kl}(x, \tau)d\tau. \quad (2.2)$$

**Релаксация и ползучесть.** Ядра  $F_{ijkl}$  и  $\Phi_{ijkl}$  в интегралах (2.1)–(2.2) являются компонентами *регулярных* тензоров скоростей релаксации и скоростей ползучести, соответственно. Почему это тензоры скоростей? Да потому, что, к примеру, размерность каждой компоненты  $F_{ijkl}$  равна размерности напряжения поделенной на размерность времени. Именно поэтому  $F_{ijkl}$  представляет собой скорость и является

одной из компонент тензора скорости релаксации напряжений<sup>1</sup>.

Аналогично и для компонент  $\Phi_{ijkl}$ , которые также являются скоростями и образуют тензор скоростей ползучести<sup>2</sup>.

**Сингулярные ядра скоростей релаксации и ползучести.** Используя дельта-функции Дирака, можно записать прямые и обратные соотношения (2.1)–(2.2) в виде

$$\sigma_{ij} = \int_0^t [C_{ijkl}(x)\delta(t-\tau) - F_{ijkl}(x,t,\tau)]\varepsilon_{kl}(\tau)d\tau = \int_0^t \Gamma_{ijkl}(x,t,\tau)\varepsilon_{kl}(\tau)d\tau \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \int_0^t [J_{ijkl}(x)\delta(t-\tau) + \Phi_{ijkl}(x,t,\tau)]\sigma_{kl}(\tau)d\tau = \int_0^t \Upsilon_{ijkl}(x,t,\tau)\sigma_{kl}(\tau)d\tau \quad (2.4)$$

Где  $\Gamma_{ijkl}$  и  $\Upsilon_{ijkl}$  — компоненты *сингулярных* тензоров ядер скоростей релаксации и ползучести

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijkl}(x,t,\tau) &\equiv C_{ijkl}(x)\delta(t-\tau) - F_{ijkl}(x,t,\tau), \\ \Upsilon_{ijkl}(x,t,\tau) &\equiv J_{ijkl}(x)\delta(t-\tau) + \Phi_{ijkl}(x,t,\tau). \end{aligned} \quad (2.5)$$

С общими свойствами ядер релаксации и ползучести можно познакомиться в книгах [6], [7], [8], [9]

**Стареющие и нестареющие материалы.** Во всех предыдущих формулах ядра, конкретизирующие материал зависят от координаты  $x$  (неоднородный материал), актуального момента времени  $t$  и параметра  $\tau$ , изменяющегося в пределах от начала процесса до момента  $t$ . Зависимость ядер от времени  $t$  указывает на то, что свойства материала меняются со временем. Такие материалы называются *стареющими*. Так или иначе все материалы стареют. Однако некоторые стареют довольно быстро, а другие в течение всего срока службы практически не меняют своих свойств. Материалы не меняющие во времени своих служебных свойств называются *нестареющими* материалами.

Рассмотрим как изменяются определяющие соотношения для нестареющих материалов. Пусть имеется график зависимости  $\varepsilon(t)$ , полученный в результате эксперимента на ползучесть (Рис.2.3). Начало эксперимента примем за нулевой момент времени

Для нестареющих материалов сдвиг по времени начала отсчета не влияет на свойства материала, т.е.  $\varepsilon(t-t_0) = \varepsilon(t)$ . Напряжения в образце в процессе ползучести определяются по формуле (2.3). Запишем её в тензорном виде (зависимость от  $x$  опускаем)

$$\underline{\sigma}(t) = \int_0^t \underline{\Gamma}(t,\tau)\underline{\varepsilon}(\tau)d\tau \quad (2.6)$$

<sup>1</sup>(см. википедию) От лат. relaxatio — ослабление, расслабление. Релаксация напряжений означает постепенное снижение интенсивности напряжений при заданной постоянной деформации.

<sup>2</sup>(см. википедию) Ползучесть материалов (последействие) — медленная, происходящая с течением времени деформация твёрдого тела под воздействием постоянной нагрузки или механического напряжения. Ползучести в той или иной мере подвержены все твёрдые тела — как кристаллические, так и аморфные.

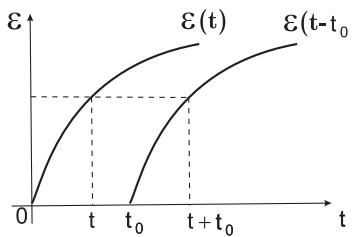


Рис. 2.3: График ползучести (схема)

Отсюда при сдвиге начала отсчета времени следует, что

$$\underline{\sigma}(t - t_0) = \int_0^{t-t_0} \underline{\Gamma}(t - t_0, \tau) \underline{\varepsilon}(\tau) d\tau$$

Заменяя здесь переменную интегрирования  $\tau$  на  $\vartheta - t_0$  и переходя, вместо  $\vartheta$ , снова к переменной  $\tau$ , получаем:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(t - t_0) &= \int_{t_0}^t \underline{\Gamma}(t - t_0, \vartheta - t_0) \underline{\varepsilon}(\vartheta - t_0) d\vartheta = \int_{t_0}^t \underline{\Gamma}(x, t - t_0, \tau - t_0) \underline{\varepsilon}(\tau - t_0) d\tau = \\ &= \int_0^t \underline{\Gamma}(t - t_0, \tau - t_0) \underline{\varepsilon}(\tau - t_0) d\tau \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь нижний предел  $t_0$  в интеграле поменяли на 0 в силу того, что  $\underline{\Gamma}(t - t_0, \tau - t_0) = 0$  при  $\tau < t_0$ . Из того, что для нестареющих материалов  $\underline{\sigma}(t - t_0) = \underline{\sigma}(t)$  и формул (2.6), (2.7) приходим к равенству

$$\int_0^t \underline{\Gamma}(t, \tau) \underline{\varepsilon}(\tau) d\tau = \int_0^t \underline{\Gamma}(t - t_0, \tau - t_0) \underline{\varepsilon}(\tau - t_0) d\tau \quad (2.8)$$

Учитывая, что  $\underline{\varepsilon}(\tau - t_0) = \underline{\varepsilon}(\tau)$ , получаем из (2.8)

$$\int_0^t [\underline{\Gamma}(t, \tau) - \underline{\Gamma}(t - t_0, \tau - t_0)] \underline{\varepsilon}(\tau) d\tau = 0$$

Для произвольных процессов деформации такое равенство возможно только если

$$\underline{\Gamma}(t, \tau) - \underline{\Gamma}(t - t_0, \tau - t_0) = 0, \quad \Rightarrow \quad \underline{\Gamma}(t, \tau) = \underline{\Gamma}(t - t_0, \tau - t_0),$$

а при произвольных  $t_0$  последнее равенство возможно только тогда, когда

$$\underline{\Gamma}(t, \tau) = \underline{\Gamma}(t - \tau)$$

**Таким образом, для нестареющих вязкоупругих материалов сингулярные и регулярные ядра ползучести и релаксации являются ядрами разностного типа.**

**Запись вязкоупругих определяющих соотношений для нестареющих материалов в виде интегралов Стилтьеса.** В случае нестареющих материалов соотношения (2.1)–(2.2) в тензорной форме принимают вид:

$$\underline{\sigma}(x, t) = \underline{C}(x)\underline{\varepsilon}(x, t) - \int_0^t \underline{F}(x, t - \tau)\underline{\varepsilon}(x, \tau)d\tau \quad (2.9)$$

$$\underline{\varepsilon}(x, t) = \underline{C}(x)\underline{\sigma}(x, t) + \int_0^t \underline{\Phi}(x, t - \tau)\underline{\sigma}(x, \tau)d\tau \quad (2.10)$$

Вместо ядер релаксации и ползучести введем другие тензор-функции релаксации и ползучести такие, что

$$\underline{F}(x, t - \tau) = \frac{\partial \underline{R}(x, t - \tau)}{\partial \tau}, \quad \underline{\Phi}(x, t - \tau) = -\frac{\partial \underline{\Pi}(x, t - \tau)}{\partial \tau} \quad (2.11)$$

Преобразуем сначала формулу (2.9)

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(x, t) &= \underline{C}(x)\underline{\varepsilon}(x, t) - \int_0^t \underline{F}(x, t - \tau)\underline{\varepsilon}(x, \tau)d\tau = \underline{C}(x)\underline{\varepsilon}(x, t) - \int_0^t \frac{\partial \underline{R}(x, t - \tau)}{\partial \tau} \underline{\varepsilon}(x, \tau)d\tau = \\ &= \underline{C}(x)\underline{\varepsilon}(x, t) - \int_0^t \underline{\varepsilon}(x, \tau)d_\tau \underline{R}(x, t - \tau) = \underline{C}(x)\underline{\varepsilon}(x, t) - \underline{R}(x, t - \tau)\underline{\varepsilon}(x, \tau) \Big|_0^t + \\ &+ \int_0^t \underline{R}(x, t - \tau)d_\tau \underline{\varepsilon}(x, \tau) = \underline{C}(x)\underline{\varepsilon}(x, t) - \underline{R}(x, 0)\underline{\varepsilon}(x, t) + \underline{R}(x, t)\underline{\varepsilon}(x, 0) + \int_0^t \underline{R}(x, t - \tau)d_\tau \underline{\varepsilon}(x, \tau) \end{aligned}$$

Функции релаксации и ползучести определены с точностью до аддитивных констант. Теперь мы можем избавиться от этого произвола положив  $\underline{R}(x, 0) = \underline{C}(x)$ . Учтем также, что в начальный момент времени  $\underline{\varepsilon}(x, 0) = 0$  и получим окончательно представление определяющих соотношений линейной теории вязкоупругости нестареющих материалов в форме интегралов Стилтьеса

$$\underline{\sigma}(x, t) = \int_0^t \underline{R}(x, t - \tau)d_\tau \underline{\varepsilon}(x, \tau), \quad \sigma_{ij}(x, t) = \int_0^t R_{ijkl}(x, t - \tau)d_\tau \varepsilon_{kl}(x, \tau) \quad (2.12)$$

Аналогично записываются обратные соотношения

$$\underline{\varepsilon}(x, t) = \int_0^t \underline{\Pi}(x, t - \tau)d_\tau \underline{\sigma}(x, \tau), \quad \varepsilon_{ij}(x, t) = \int_0^t \Pi_{ijkl}(x, t - \tau)d_\tau \sigma_{kl}(x, \tau) \quad (2.13)$$

Тензоры-функции релаксации  $\underline{R}$  и ползучести  $\underline{\Pi}$  взаимно обратны, т.е.  $\underline{R}\underline{\Pi} = \underline{\Pi}\underline{R} = \underline{\Delta}$ . В этом случае, к примеру, подстановка соотношений (2.13) в (2.12) дает тождество.

В самом деле:

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}(x, t) &= \int_0^t \underline{R}(x, t - \tau) d_\tau \int_0^\tau \underline{\Pi}(x, t - \tau_1) d_{\tau_1} \underline{\sigma}(x, \tau_1) = \\ &= \int_0^t \underline{R}(x, t - \tau) \underline{\Pi}(x, t - \tau) d_\tau \underline{\sigma}(x, \tau) = \int_0^t d_\tau \underline{\sigma}(x, \tau) = \underline{\sigma}(x, t)\end{aligned}$$

Коэффициенты тензоров релаксации и ползучести обладают теми же свойствами симметрии, что и модули упругости.

**Операторная запись определяющих соотношений вязкоупругости.** Интегралы в формулах (2.12), (2.13) условимся обозначать "птичками" над идентификаторами функций релаксации и ползучести. Тогда определяющие соотношения линейной теории вязкоупругости можно записать в виде операторов

$$\underline{\sigma}(x, t) = \check{\underline{R}}(x, t) \underline{\varepsilon}(x, t), \quad \underline{\varepsilon}(x, t) = \check{\underline{\Pi}}(x, t) \underline{\sigma}(x, t) \quad (2.14)$$

Операторы-тензоры  $\check{\underline{R}}$  и  $\check{\underline{\Pi}}$  являются взаимнообратными тензорами, компоненты которых обладают теми же типами симметрии, что и компоненты тензора модулей упругости. В этой связи, можно установить аналогию между решениями задач упругости и вязкоупругости, полагая, что  $\check{\underline{R}}$  соответствует тензору модулей упругости, а  $\check{\underline{\Pi}}$  — тензору податливостей. Таким образом, из решения задачи упругости можно сразу получить решение задачи вязкоупругости, заменив упругие модули на операторы. После этого необходимо произвести расшифровку операторов в полученном решении [7, стр. 91-104].

**Случай изотропного вязкоупругого материала.** В этом случае тензор модулей упругости представляется через модуль объёмного сжатия  $K(x)$  и модуль сдвига  $G(x)$  по формуле

$$\underline{C}(x) = 3K(x)\underline{V} + 2G(x)\underline{D} \quad (2.15)$$

где  $\underline{V}$  и  $\underline{D}$  — взаимно ортогональные тензоры (1.23). В похожей форме представим тензор релаксации  $\underline{R}$  и тензор ползучести  $\underline{\Pi}$

$$\underline{R}(x, t) = 3K_1(x, t)\underline{V} + 2G_1(x, t)\underline{D}, \quad \underline{\Pi}(x, t) = \frac{1}{3K_1(x, t)} \underline{V} + \frac{1}{2G_1(x, t)} \underline{D} \quad (2.16)$$

Здесь  $K_1(x, t)$  и модуль сдвига  $G_1(x, t)$  — функции объёмной и сдвиговой релаксации, которые находятся из экспериментов на ползучесть.

## 2.1.2 Упруго-пластический материал.

**Теория малых упруго-пластических деформаций.** В теории малых упругопластических деформаций определяющие соотношения при активном нагружении представляют собой нелинейные зависимости

$$\sigma_{ij} = F_{ijkl}(x, \underline{\varepsilon})\varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = \Phi_{ijkl}(x, \underline{\sigma})\sigma_{kl} \quad (2.17)$$

Для пластически несжимаемых изотропных материалов компоненты тензоров  $F$  и  $\Phi$  имеют вид:

$$F_{ijkl}(x, \varepsilon_{mn}) = C_{ijkl}(x) - 2G(x)\omega(x, \varepsilon_u)D_{ijkl},$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ijkl}(x, \sigma_{mn}) &= J_{ijkl}(x) + \frac{\varphi(x, \sigma_u)}{2G(x)}D_{ijkl}, \\ D_{ijkl} &= \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

**Функция plasticности Ильюшина.** В формуле (2.18)  $\omega(x, \varepsilon_u)$  — функция plasticности Ильюшина, определяемая из опытов на растяжение или кручение

$$\omega = 1 - \frac{\sigma_u(\varepsilon_u)}{3G\varepsilon_u}, \quad \varphi = \frac{\omega}{1 - \omega} = \frac{3G\varepsilon_u(\sigma_u)}{\sigma_u} - 1, \quad (2.19)$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2}D_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}}, \quad \varepsilon_u = \sqrt{\frac{2}{3}D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}} \quad (2.20)$$

**Общее представление определяющих соотношений для упругих, вязкоупругих и упругопластических материалов.** Определяющие соотношения линейной теории упругости, линейной вязкоупругости и теории малых упругопластических деформаций можно представить единой зависимостью следующего вида:

$$\sigma_{ij} = \check{F}_{ij}(x, \underline{\varepsilon}) = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl} - \check{C}_{ij}(x, \underline{\varepsilon}), \quad (2.21)$$

где

$$\check{C}_{ij}(x, \underline{\varepsilon}) = 0, \quad \text{— линейная упругость} \quad (2.22)$$

$$\check{C}_{ij}(x, \underline{\varepsilon}) = \int_0^t F_{ijkl}(x, t, \tau)\varepsilon_{kl}(x, \tau)d\tau, \quad \text{— линейная вязкоупругость} \quad (2.23)$$

$$\check{C}_{ij}(x, \underline{\varepsilon}) = 2G(x)\omega(x, \varepsilon_u)D_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \text{— ТМУПД} \quad (2.24)$$

где  $\omega$  — функция plasticности А.А. Ильюшина, определяемая из опытов на растяжение или кручение

$$\omega = 1 - \frac{\sigma_u(\varepsilon_u)}{3G\varepsilon_u}, \quad \varphi = \frac{\omega}{1 - \omega} = \frac{3G\varepsilon_u(\sigma_u)}{\sigma_u} - 1,$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2}D_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}}, \quad \varepsilon_u = \sqrt{\frac{2}{3}D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}} \quad (2.25)$$

## 2.2 Понятие об эффективных определяющих соотношениях.

Композиционное тело, состоящее из большого количества, примерно одинаковых, элементов ведёт себя под нагрузкой как некоторое однородное тело, свойства которого отличны от свойств компонентов, составляющих элемент. Свойства такого модельного однородного тела называются эффективными свойствами.

При экспериментальном подходе к нахождению эффективных физико-механических свойств композитов, выясняется, что результаты существенно зависят от количества элементов, входящих в образец, над которым проводятся все эксперименты. В этом заключается **масштабный эффект** в композите. При увеличении числа элементов в образце наступает такой момент, когда добавление элементов в образце практически перестаёт сказываться на измеряемые величины.

Таким образом, в механике композитов представительный объём — это объём, состоящий из минимального количества типичных элементов, который обладает такими же эффективными свойствами, что и всё композиционное тело, состоящее из некоторого количества представительных объёмов. Причём любой из представительных объёмов тела имеет такие же эффективные характеристики, а добавление дополнительных элементов в состав представительного объёма не оказывает значимого влияния на экспериментально определяемые характеристики.<sup>3</sup>

Реально экспериментальный образец состоит довольно из большого числа представительных объёмов. Эксперимент над таким образцом должен быть так организован, чтобы в любом представительном объёме реализовывалось в среднем одинаковое напряженно деформированное состояние.

Аналогичная ситуация и при теоретическом подходе к вычислению эффективных свойств. Внешние нагрузки должны быть таковы, чтобы *средние значения напряжений и деформаций в каждом из представительных объёмов были одинаковы и совпадали со средними значениями во всем композиционном теле, состоящем из большого числа представительных объёмов* [2, стр. 15].

Очевидно, что такое возможно только при определенном способе нагружения тела. В работе [10] Хашина и Розена 1964 года указаны два набора входных данных, при которых выполняются эти условия. В первом случае на всей границе тела задаются *перемещения граничных точек специального вида*, а во втором случае на всей границе тела должны быть заданы *усилия специального вида*. В обоих случаях **объёмные нагрузки отсутствуют**. Напряжения, деформации и перемещения, возникающие внутри

<sup>3</sup> В механике композитов понятие о представительном объёме вещества является одним из важнейших. В википедии приводится следующее понятие представительного объёма, позаимствованного из курса общей физики Д.В. Сивухина "Представительный объем (ПО) — минимальный объём материала, в котором содержится достаточное для статистического описания состояния тела число «носителей» рассматриваемых механизмов процесса. Добавление к этому объёму других частей данного материала с аналогичной (в статистическом смысле) конфигурацией «носителей» анализируемых механизмов не должно приводить к изменению эволюционных уравнений для полевых величин, описывающих изменение конфигурации «носителей». В классической МСС предполагается, что размеры представительного объёма таковы, что градиентами этих полевых величин и других параметров состояния в пределах представительного объёма можно пренебречь, что позволяет считать указанные поля однородными (в статистическом смысле) в масштабах представительного объёма."

области, занятой телом удовлетворяют уравнениям:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \sigma_{ij} = \check{F}_{ij}(x, \xi), \quad \varepsilon_{kl} = \Delta_{klmn} u_{m,n}, \quad (x \in V) \quad (2.26)$$

Итак, назовём эффективными такие определяющие соотношения, которые связывают средние по объёму тела напряжения со средними деформациями, возникшими в теле, подвергнутом воздействиям специального вида.

**2.2.1 Первая специальная краевая задача. Эффективные определяющие соотношения типа  $\langle \sigma \rangle \sim \langle \varepsilon \rangle$ .** В случае первой специальной краевой задачи (СКЗ) на всей границе  $\Sigma$  композиционного тела задаются граничные перемещения специального вида:

$$u_i|_{\Sigma} = u_i^0 = \gamma_{ij} y_j, \quad y \in \Sigma, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji} = \text{const} \quad (2.27)$$

При таких граничных условиях, независимо от вида определяющих соотношений, среднее по объёму от деформаций равно тензору  $\gamma$ . В самом деле

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij} \rangle &= \frac{1}{V} \Delta_{ijkl} \int_V u_{k,l} dV = \frac{1}{V} \Delta_{ijkl} \int_{\Sigma} u_k n_l d\Sigma = \frac{1}{V} \Delta_{ijkl} \gamma_{ks} \int_{\Sigma} y_s n_l d\Sigma = \\ &= \frac{1}{V} \Delta_{ijkl} \gamma_{ks} \int_V x_{s,l} dV = \frac{1}{V} \Delta_{ijkl} \gamma_{ks} \delta_{sl} \int_V dV = \Delta_{ijkl} \gamma_{kl} = \gamma_{ij} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Решив далее задачу (2.26) при специальных граничных условиях (2.27), найдем распределение деформаций  $\xi(x, \gamma)$  и напряжений  $\sigma(x, \gamma)$  в объёме тела. Усредним напряжения по объему и получим

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma(x, \gamma) dV = \frac{1}{V} \int_V \check{F}(x, \xi(x, \gamma)) dV \equiv \check{h}(\gamma) = \check{h}(\langle \xi \rangle) \quad (2.29)$$

Оператор, обозначенный через  $\check{h}$  называется эффективным оператором, а соотношения (2.29), позволяющие выразить средние по объёму напряжения через средние по объёму деформации называются эффективными определяющими соотношениями типа  $\langle \sigma \rangle \sim \langle \varepsilon \rangle$ .

**2.2.2 Вторая специальная краевая задача. Эффективные определяющие соотношения типа  $\langle \varepsilon \rangle \sim \langle \sigma \rangle$ .** Во второй краевой задаче на всей границе тела задаются распределенные нагрузки специального вида

$$\sigma_{ij} n_j|_{\Sigma} = P_i^0 = \lambda_{ij} n_j, \quad \lambda_{ij} = \lambda_{ji} = \text{const} \quad (2.30)$$

Покажем, что в этом случае, независимо от вида определяющих соотношений, среднее по объёму от тензора напряжений равно тензору  $\lambda$ . Для этого умножим уравнения равновесия на  $x_k$  и проинтегрируем по объёму  $V$

$$0 = \int_V \sigma_{ij,j} x_k dV = \int_V [(\sigma_{ij} x_k)_{,j} - \sigma_{ij} x_{k,j}] dV = \int_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j y_k d\Sigma - \int_V \sigma_{ij} \delta_{kj} = \lambda_{ij} \int_{\Sigma} y_k n_j d\Sigma - \quad (2.31)$$

$$-V \langle \sigma_{ik} \rangle = \lambda_{ij} \int_V x_{k,j} dV - V \langle \sigma_{ik} \rangle = V \lambda_{ik} - V \langle \sigma_{ik} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \sigma_{ik} \rangle = \lambda_{ik}.$$

Решим далее задачу (2.26) при специальных граничных условиях (2.30). Найдем распределение деформаций  $\xi(x, \lambda)$  и напряжений  $\sigma(x, \lambda)$  в объеме тела. Усредним деформации по объему и получим

$$\langle \xi \rangle = \frac{1}{V} \int_V \xi(x, \lambda) dV = \frac{1}{V} \int_V \check{\Phi}(x, \sigma(x, \lambda)) dV \equiv \check{H}(\lambda) = \check{H}(\langle \sigma \rangle) \quad (2.32)$$

Оператор, обозначенный через  $\check{H}$  называется эффективным оператором, а соотношения (2.32), позволяющие выразить средние по объему деформации через средние по объему напряжения называются эффективными определяющими соотношениями типа  $\langle \varepsilon \rangle \sim \langle \sigma \rangle$ .

**2.2.3 О двух подходах к расчету эффективных характеристик.** Из первой СКЗ находятся эффективные определяющие соотношения

$$\langle \sigma \rangle = \check{h}(\langle \varepsilon \rangle) \Rightarrow \langle \varepsilon \rangle = \check{H}(\langle \sigma \rangle), \quad (2.33)$$

где через  $\check{H}^*$  обозначен оператор, обратный к  $\check{h}$ .

Вторая СКЗ позволяет найти эффективные определяющие соотношения, то есть найти эффективный оператор податливости  $\check{H}$ . Обозначим через  $\check{h}^*$  оператор обратный к оператору  $\check{H}$ . Таким образом:

$$\langle \varepsilon \rangle = \check{H}(\langle \sigma \rangle) \Rightarrow \langle \sigma \rangle = \check{h}^*(\langle \varepsilon \rangle). \quad (2.34)$$

В общем случае операторы  $\check{h}$  и  $\check{h}^*$ , а также  $\check{H}$  и  $\check{H}^*$  не совпадают, то есть

$$\check{h}(\langle \varepsilon \rangle) \neq \check{h}^*(\langle \varepsilon \rangle), \quad \check{H}(\langle \sigma \rangle) \neq \check{H}^*(\langle \sigma \rangle)$$

## 2.3 Эффективные модули упругости неоднородного упругого тела.

Рассмотрим теперь случай неоднородного упругого тела, то есть определяющие соотношения имеет вид:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = J_{ijkl}(x) \sigma_{kl}, \quad C_{ijkl} J_{klmn} = J_{klmn} C_{ijkl} = \Delta_{ijkl}$$

Тензором эффективных модулей упругости неоднородного упругого тела называется такой постоянный тензор четвертого ранга  $\check{h}$ , с помощью которого средние напряжения выражаются через средние деформации в теле, на всей поверхности которого заданы перемещения специального вида.

**2.3.1 Постановка первой СКЗ для линейно упругого неоднородного тела.** Математическая формулировка задачи об эффективных модулях упругости дается следующими уравнениями

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{kl} = \Delta_{klmn}u_{m,n}, \quad x \in V \quad (2.35)$$

$$u_i|_{\Sigma} = \gamma_{ij}y_j, \quad y \in \Sigma, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji} = \text{const.} \quad (2.36)$$

Система последовательных выражений (2.35) сводится к системе трех уравнений относительно трёх неизвестных перемещений

$$(C_{ijkl}u_{k,l})_j = 0 \quad (2.37)$$

В предыдущем разделе было доказано, что в случае задачи (2.35), (2.36)  $\langle \xi \rangle = \gamma$  независимо от вида определяющих соотношений. Первая СКЗ является линейной задачей и поэтому сами компоненты тензора напряжений линейно зависят от тензора  $\gamma$ .

$$\sigma_{ij} = \tilde{C}_{ijkl}(x)\gamma_{kl}, \quad (2.38)$$

где коэффициенты  $\tilde{C}_{ijkl}(x)$  предстоит найти из решения первой СКЗ. Усредняя (2.38) по объёму тела найдем компоненты  $h_{ijkl}$  тензора эффективных модулей упругости

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle \tilde{C}_{ijkl} \rangle \gamma_{kl} = h_{ijkl} < \varepsilon_{kl} >, \quad h_{ijkl} \equiv \langle \tilde{C}_{ijkl} \rangle \quad (2.39)$$

**Итак, для вычисления эффективных характеристик нужно вначале найти коэффициенты  $\tilde{C}_{ijkl}$ , а для этого нужно решить исходную первую СКЗ либо свести её к вспомогательной задаче и решать вспомогательную задачу.**

**2.3.2 Сопутствующая первая СКЗ.** Под сопутствующей задачей здесь и везде далее будем понимать задачу для однородного упругого тела, той же формы и находящегося под действием тех же самых входных данных, что и исходное неоднородное тело. Пусть  $v_i$ ,  $e_{ij}$  и  $\tau_{ij}$  — компоненты перемещений, деформаций и напряжений в сопутствующем однородном теле с модулями упругости  $C_{ijkl}^o = \text{const}$ . Система уравнений первой сопутствующей СКЗ имеет вид:

$$\tau_{ij,j} = 0, \quad \tau_{ij} = C_{ijkl}^o e_{kl}, \quad e_{kl} = \Delta_{klmn}v_{m,n} \Rightarrow C_{ijkl}^o v_{k,lj} = 0 \quad (2.40)$$

$$v_i|_{\Sigma} = \gamma_{ij}y_j, \quad y \in \Sigma, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji} = \text{const.} \quad (2.41)$$

Очевидно решение этой краевой задачи

$$v_i = \gamma_{ij}x_j = < \varepsilon_{ij} > x_j, \quad e_{ij} = \gamma_{ij} = < \varepsilon_{ij} >, \quad \tau_{ij} = C_{ijkl}^o \gamma_{kl} = C_{ijkl}^o < \varepsilon_{ij} > \quad (2.42)$$

Подчеркнём здесь, что напряжения  $\tau_{ij}$  это напряжения в однородном теле с произвольно выбранными постоянными компонентами  $C_{ijkl}^o$ , поэтому  $< \sigma_{ij} > \neq \tau_{ij}$ . **Равенство будет иметь место только в том случае, когда в качестве  $C_{ijkl}^o$  выбираются эффективные модули упругости неоднородного тела, т.е. при  $C_{ijkl}^o = h_{ijkl}$ .**

**2.3.3 Сведение исходной первой СКЗ к вспомогательной задаче.** Решение исходной СКЗ будем искать в виде

$$u_i = v_i + \bar{u}_i(\gamma), \quad (2.43)$$

где второе слагаемое появилось вследствие неоднородности тела. В силу линейности задачи величины  $\bar{u}_i$  также линейно зависят от граничных условий, т.е. от тензора второго ранга  $\gamma$ , поэтому

$$u_i(x) = \gamma_{ij}x_j + N_{ikl}(x)\gamma_{kl} \quad (2.44)$$

**Структурные функции. Уравнения и граничные условия.** Назовем неизвестные функции  $N_{ikl}(x)$  **структурными функциями**. Перечислим некоторые очевидные свойства структурных функций.

Во-первых, они непрерывны по координатам и симметричны по двум последним индексам.

Во-вторых, они не зависят от тензора  $\gamma$  и определяются только формой области и функциональной зависимостью коэффициентов упругости от координат.

В третьих, в случае однородного тела все N-функции тождественно равны нулю, а в случае неоднородного тела они, вследствие необходимости выполнения граничных условий, все обращаются в нуль на границе области, занятой телом, то есть

$$N_{ikl}|_{\Sigma} = 0 \quad (2.45)$$

И последнее: в общем случае анизотропии имеется 18 независимых структурных функций, образующих структурный тензор третьего ранга. В формуле (2.44) функции  $N_{ikl}$  представляются собой компоненты структурного тензора 1 раз ковариантные и дважды контравариантные, т.е. формулу (2.44) следовало бы написать в виде

$$u_i = \gamma_{ij}x^j + N_{i..}^{kl}\gamma_{kl} = (\Delta_{ijkl}x^j + N_{i..}^{kl})\gamma_{kl},$$

но поскольку мы здесь используем декартовы координаты, поскольку разница между верхними и нижними индексами пропадает.

**Тензор концентрации деформаций.** По перемещениям (2.44) найдём деформации и напряжения

$$\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} + \Delta_{ijmn}N_{mkl,n}\gamma_{kl} = (\Delta_{ijkl} + \Delta_{ijmn}N_{mkl,n})\gamma_{kl} \equiv K_{(\varepsilon)ijkl}(x)\gamma_{kl} \quad (2.46)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = C_{ijkl}K_{(\varepsilon)klpq}\gamma_{pq} = (C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n})\gamma_{kl} = \tilde{C}_{ijkl}(x)\gamma_{kl}, \quad (2.47)$$

где

$$K_{(\varepsilon)ijkl}(x) = \Delta_{ijkl} + \Delta_{ijmn}N_{mkl,n}(x), \quad \tilde{C}_{ijkl}(x) = C_{ijkl}(x) + C_{ijmn}(x)N_{mkl,n}(x) \quad (2.48)$$

**Коэффициенты  $K_{(\varepsilon)ijkl}(x)$  являются компонентами тензора 4-го ранга, называемого тензором концентрации деформаций. Его компоненты, в отличие от компонент тензора модулей упругости, не симметричны по первой и второй парам индексов, но симметричны по индексам в парах.**

**Вспомогательная краевая задача.** Из уравнений равновесия (2.35), вследствие независимости коэффициентов  $\gamma_{ij}$ , получаем уравнения для N-функций

$$(C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n})_{,j}\gamma_{kl} = 0; \Rightarrow (C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n})_{,j} = 0 \quad (2.49)$$

Эти уравнения и граничные условия (2.45) позволяют найти единственныеструктурные функции  $N_{ikl}(x)$ .

Поскольку в первой СКЗ  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \gamma_{ij}$ , а также из граничных условий (2.45) и формул (2.46) следует, что

$$\langle N_{ikl,j} \rangle = \frac{1}{V} \int_V N_{ikl,j} dV = \frac{1}{V} \int_\Sigma N_{ikl} n_j dV = 0 \quad (2.50)$$

где  $n_j$  — компоненты вектора внешней единичной нормали к поверхности  $\Sigma$ . Вследствие этого

$$\langle K_{(\varepsilon)ijkl} \rangle = \Delta_{ijkl} \quad (2.51)$$

**Выражение эффективных коэффициентов упругости через структурные функции.** Усредняя напряжения (2.47) по области найдем формулы представляющие компоненты эффективного тензора через N-функции

$$h_{ijkl} = \langle \tilde{C}_{ijkl} \rangle = \langle C_{ijmn} K_{(\varepsilon)mnl} \rangle = \langle C_{ijkl} + C_{ijmn} N_{mkl,n} \rangle \quad (2.52)$$

Таким образом, для вычисления эффективных характеристик нам нужны не сами N-функции, а только их производные.

**2.3.4 Теорема о симметрии и положительной определенности эффективных коэффициентов упругости.** Эффективные коэффициенты должны удовлетворять всем условиям симметрии и условию положительной определенности [1], т.е.

$$h_{ijkl} = h_{jikl} = h_{ijlk} = h_{klij},$$

$$h_{ijkl} \varkappa_{ij} \varkappa_{kl} \geq m \varkappa_{ij} \varkappa_{ij}, \quad m > 0, \quad \varkappa_{ij} = \varkappa_{ji} \neq 0$$

**Теорема 2.3.1.** Эффективные коэффициенты, получаемые по формулам (2.52) из решения первой краевой задачи (2.48), (2.45) удовлетворяют всем условиям симметрии и условиям положительной определенности.

#### Доказательство.

Симметрия  $h_{ijkl}$  по индексам в первой и второй парах индексов следует из выражения (2.52).

Для доказательства свойства симметрии по парам индексов и свойства положительной определенности умножим уравнения равновесия (2.35) на функции  $N_{ikl}$ , проинтегрируем полученное тождество по объёму тела и преобразуем интеграл:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \sigma_{ij,j} N_{ikl} dV = \int_V [(\sigma_{ij} N_{ikl})_{,j} - \sigma_{ij} N_{ikl,j}] dV = - \int_V \sigma_{ij} N_{ikl,j} dV = \\ &= - \int_V \sigma_{ij} (N_{ikl,j} + \Delta_{ijkl} - \Delta_{ijkl}) dV = - \int_V \sigma_{ij} (N_{ikl,j} + \Delta_{ijkl}) dV + \int_V \sigma_{kl} dV \end{aligned} \quad (2.53)$$

Учтём далее, что

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(N_{ikl,j} + \Delta_{ijkl}) &= \sigma_{ij}(\Delta_{ijst}N_{skl,t} + \Delta_{ijkl}) = \\ &= \sigma_{ij}K_{(\varepsilon)ijkl} = C_{ijpq}K_{(\varepsilon)pqmn}\gamma_{mn}K_{(\varepsilon)ijkl} = C_{mnpq}K_{(\varepsilon)pqij}K_{(\varepsilon)ijkl}\gamma_{ij} \end{aligned}$$

В результате из (2.53) получаем

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_V C_{mnpq}K_{(\varepsilon)pqij}K_{(\varepsilon)mnl}dV\gamma_{ij} + \int_V \sigma_{kl}dV \\ &\quad \Downarrow \\ \langle C_{mnpq}K_{(\varepsilon)pqij}K_{(\varepsilon)mnl} \rangle \gamma_{ij} &= \langle C_{mnpq}K_{(\varepsilon)pqij}K_{(\varepsilon)mnl} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \langle \sigma_{kl} \rangle \\ &\quad \Downarrow \\ \langle C_{mnpq}K_{(\varepsilon)pqij}K_{(\varepsilon)mnl} \rangle &= h_{ijkl} = h_{klij} \end{aligned} \tag{2.54}$$

То есть, компоненты тензора эффективных модулей упругости симметричны по первой и второй парам индексов.

Очевидна также и положительная определенность коэффициентов  $h_{ijkl}$ . В самом деле, в каждой точке тела, где определены коэффициенты упругости имеет место неравенство

$$C_{mnpq}(x)\varkappa_{mn}\varkappa_{pq} \geq m\varkappa_{ij}\varkappa_{ij}$$

для любого ненулевого симметричного тензора  $\varkappa$ . В этом случае из формулы (2.54) получаем с помощью неравенства Коши — Буняковского<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} h_{ijkl}\varkappa_{ij}\varkappa_{kl} &= \langle C_{mnpq}K_{(\varepsilon)pqij}K_{(\varepsilon)mnl} \rangle \varkappa_{ij}\varkappa_{kl} = \langle C_{mnpq}(K_{(\varepsilon)mni}j\varkappa_{ij})(K_{(\varepsilon)pqkl}\varkappa_{kl}) \rangle \geq \\ &\geq m\langle (K_{(\varepsilon)pqij}\varkappa_{ij})(K_{(\varepsilon)pqkl}\varkappa_{kl}) \rangle \geq m\langle K_{(\varepsilon)pqij}\varkappa_{ij} \rangle \langle K_{(\varepsilon)pqkl}\varkappa_{kl} \rangle = m\langle K_{(\varepsilon)pqij} \rangle \varkappa_{ij} \langle K_{(\varepsilon)pqkl} \rangle \varkappa_{kl} = \\ &= m\Delta_{pqij}\varkappa_{ij}\Delta_{pqkl}\varkappa_{kl} = m\varkappa_{pq}\varkappa_{pq} \end{aligned}$$

**Ч.Т.Д.**

Таким образом, эффективные модули упругости могут быть приняты в качестве свойств некоторого реального материала.

<sup>4</sup>Классическое неравенство Коши — Буняковского имеет вид [11]:

$$\int_V f^2(x)dV \int_V g^2(x)dV \geq \left( \int_V f(x)g(x)dV \right)^2$$

Отсюда при  $g \equiv 1$  имеем  $\langle f^2 \rangle \geq \langle f \rangle^2$  и следовательно  $\sum_i \langle f_i f_i \rangle \geq \sum_i \langle f_i \rangle \langle f_i \rangle$

# Лекция 3. Решение первой специальной краевой задачи.

## 3.1 Сведение вспомогательной задачи к серии классических задач теории упругости.

Вспомогательная задача, состоит в нахождении  $N_{mkl}(x)$ , удовлетворяющих уравнениям (2.49) внутри области, занятой телом и обращающихся в нуль на границе тела.

Путем переобозначения искомых величин сведем решение вспомогательной задачи (2.49), (2.45) к серии классических задач теории упругости об НДС упругого тела, защемленного по границе и нагруженного распределенными объёмными силами. Введем следующие общепринятые обозначения:

$$u_i^{(kl)}(x) \equiv N_{ikl}(x) \quad \text{— фиктивные перемещения} \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(kl)}(x) = \Delta_{ijmn} u_{m,n}^{(kl)}(x) \quad \text{— фиктивные деформации} \quad (3.2)$$

$$\sigma_{ij}^{(kl)}(x) = C_{ijmn}(x) \varepsilon_{mn}^{(kl)}(x) \quad \text{— фиктивные напряжения} \quad (3.3)$$

$$X_i^{(kl)}(x) = C_{ijkl,j}(x) \quad \text{— фиктивные объёмные нагрузки} \quad (3.4)$$

Фиктивные объёмные нагрузки представляют собой производные от модулей упругости  $X_i^{(kl)} = C_{i1kl,1} + C_{i2kl,2} + C_{i3kl,3}$ , то есть, их величина порядка модулей упругости. При таких больших нагрузках задача теории упругости теряет физический смысл. Тем не менее, решать упругую задачу можно, её решение существует и оно единственное.

В теории упругости имеются и другие примеры, когда при больших нагрузках решение задачи существует и оно единственно, но не физично.

**Постановка вспомогательной задачи в перемещениях.** В соответствии с новыми обозначениями постановка задачи для фиктивных перемещений даётся следующими уравнениями

$$(C_{ijmn} u_{m,n}^{(kl)})_{,j} + X_i^{(kl)} = 0, \quad u_m^{(kl)}|_{\Sigma} = 0 \quad (3.5)$$

При различных значениях пары индексов  $kl$ , в общем случае неоднородности, получается шесть различных задач, соответствующих значениям  $kl = 11, 22, 33, 12, 13, 23$ . Из решения этих задач получаем 18 различных  $N$ -функций:  $N_{i11} = u_i^{(11)}$ ,  $N_{i22} = u_i^{(22)}$ , и т.д.

**По решениям фиктивных задач сразу можно найти перемещения, деформации, напряжения и эффективные модули упругости в первой СКЗ**

$$u_i(x) = [\Delta_{ijkl} x_j + u_i^{(kl)}(x)] \gamma_{kl} \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_{ij}(x) = [\Delta_{ijkl} + \varepsilon_{ij}^{(kl)}(x)]\gamma_{kl} \quad (3.7)$$

$$\sigma_{ij}(x) = [C_{ijkl}(x) + \sigma_{ij}^{(kl)}(x)]\gamma_{kl} \quad (3.8)$$

$$h_{ijkl} = \langle C_{ijkl}(x) + \sigma_{ij}^{(kl)}(x) \rangle = \langle C_{ijkl} \rangle + \langle \sigma_{ij}^{(kl)} \rangle \quad (3.9)$$

Таким образом, перемещения, деформации и напряжения в первой СКЗ выражаются через фиктивные перемещения, деформации и напряжения соответственно. Через усреднённые по области фиктивные напряжения выражаются и эффективные модули упругости.

**3.1.1 Примеры задач теории упругости, приводящих к физически недостоверным результатам.** Приведем пример подобной задачи: пусть прямолинейный упругий стержень длины  $L_0$  постоянного поперечного сечения  $S$  защемлен на конце  $x = 0$ , а на другом конце  $x = L_0$  задана сжимающая нагрузка величины  $p$ , равномерно распределенная по торцевому сечению (рис. 3.4).

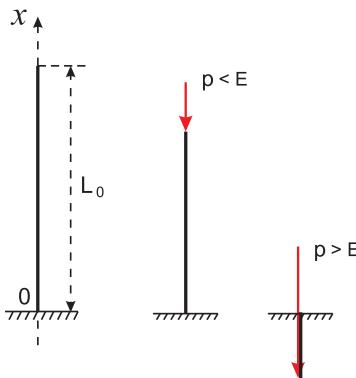


Рис. 3.4: Верхний конец стержня, после приложения нагрузки, находится ниже точки защемления (схема)

Постановка такой простейшей задачи даётся уравнениями

$$\frac{d\sigma}{dx} = 0, \quad \sigma = E\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{du}{dx}; \quad u(0) = 0, \quad \sigma(L_0) = -p$$

Здесь  $E$  — модуль Юнга. Решение этой задачи очевидно

$$\sigma = -p, \quad \varepsilon = -\frac{p}{E}, \quad u(x) = -\frac{px}{E}$$

Найдём теперь перемещение нагруженного конца стержня и его положение  $x_{L_0}$  после приложения нагрузки

$$u(L_0) = -\frac{pL_0}{E}, \quad x_{L_0} = L_0 + u(L_0) = \left(1 - \frac{p}{E}\right)L_0 < 0 \text{ при } p > E$$

То есть, при нагрузке большей модуля Юнга верхний конец стержня переместится внутрь тела, в котором он закреплен. Аналогичный эффект имеется и в задаче Ламе о бесконечной упругой трубе под действием внутреннего давления. При давлении порядка модуля Юнга труба выворачивается, т.е перемещение внутренней поверхности трубы опережает перемещение наружной поверхности. Это обстоятельство противоречит физике явления.

## 3.2 Цилиндрическое тело неоднородное в поперечном сечении. Волокнистый композит.

Рассмотрим упругое тело бесконечное в одном направлении, ограниченное в двух других направлениях цилиндрической поверхностью и неоднородное в сечении перпендикулярном бесконечному направлению.

Пусть ось  $x_3$  прямоугольных координат направлена параллельно оси цилиндра<sup>5</sup>, а плоскость  $Ox_1, x_2$  совместим с одним из нормальных поперечных сечений цилиндра.

Неоднородность материала может быть вызвана разными причинами. Например, неоднородность в сечении может быть результатом действия температурных, радиационных, электромагнитных и других полей. Кроме этого, к задаче неоднородной теории упругости сводятся некоторые задачи для цилиндров из нелинейно упругих и упруго-пластических материалов [12]. Стержень может быть структурно неоднородным, например, это может быть стержень, армированный круглыми или прямоугольными волокнами (рис. 3.5)

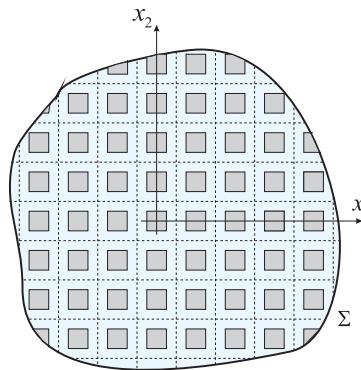


Рис. 3.5: Поперечное сечение стержня, армированного квадратными волокнами. Границы ячеек периодичности показаны штриховыми линиями.

Во всех этих случаях модули упругости неоднородного тела являются функциями координат  $x_1, x_2$ , т.е.  $C_{ijkl} = C_{ijkl}(x_1, x_2)$ . Уравнения вспомогательной задачи (2.49), (2.45) выглядят следующим образом:

$$(C_{ijkl} + C_{ijms}N_{mkl,S})_{,J} = 0, \quad N_{mkl}|_{\Gamma} = 0 \quad (3.10)$$

**3.2.1 Плоские и антиплоские вспомогательные задачи.** Рассмотрим случай, когда плоскость поперечного сечения стержня является плоскостью симметрии упругих свойств материала матрицы и включений. В этом случае, в выбранной системе координат, все коэффициенты с нечётным числом троек в индексах равны нулю, т.е.,  $C_{IJ13} = 0$ ,  $C_{IJ23} = 0$ ,  $C_{3313} = 0$  и система уравнений (3.10) разбивается на четыре независимых системы уравнений, каждая относительно двух функций и два уравнения, каждое относительно одной функции

$$(C_{IJKl} + C_{IJMS}N_{Mkl,S})_{,J} = 0; \quad (kl = 11, 22, 33, 12) \quad (3.11)$$

<sup>5</sup>под осью цилиндра, как обычно, понимается ось проходящая через геометрические центры тяжести всех поперечных сечений

$$(C_{3Jkl} + C_{3J3S}N_{3kl,S})_{,J} = 0; \quad (kl = 13, 23) \quad (3.12)$$

С учетом симметрии  $N$ -функций по двум последним индексам, из уравнений (3.11) и (3.12) находится 10 независимых функций  $N_{mkl}$ . Уравнения (3.11), по сути дела, являются уравнениями плоской задачи теории упругости (плоская деформация) [20]. Уравнения (3.12) представляют собой уравнения антиплюской деформации [14]. В самом деле, используя систему обозначений (3.1)–(3.4), представим уравнения (3.11), (3.12) в привычной записи

$$(C_{IJMS}u_{M,S})_{,J} + X_I = 0 \quad (3.13)$$

$$(C_{3J3S}u_{3,S})_{,J} + X_3 = 0, \quad (3.14)$$

где

$$X_i = C_{iJkl,J} = C_{i1kl,1} + C_{i2kl,2} \quad (3.15)$$

В уравнениях (3.13), (3.14) индексы  $kl$  опущены, поскольку в них нет явной необходимости. Вся разница между разными плоскими задачами и разными антиплюскими задачами заключена в фиктивных объёмных нагрузках (3.15), определяемых функциональной зависимостью модулей упругости от координат.

**3.2.2 Выражения для фиктивных объёмных сил в случае кусочно-постоянных модулей.** В композитах, как правило, принимается, что модули упругости меняются скачком от одной постоянной величины до другой при переходе через границу раздела фаз [1]. Поэтому производные от компонент тензора модулей упругости необходимо понимать в обобщенном смысле [15], [16], т.е.

$$X_i = C_{ijkl,j} = (C_{ijkl}^+ - C_{ijkl}^-)n_J\delta(\Gamma) \quad (3.16)$$

где  $C^+$  и  $C^-$  — тензоры модулей упругости в волокнах и в матрице,  $\vec{n}(n_1, n_2)$  — вектор внешней единичной нормали к границе  $\Gamma$  раздела фаз,  $\delta(\Gamma)$  — дельта-функция Дирака, сосредоточенная на границе раздела фаз.

Объёмные нагрузки (3.16) будем трактовать как обычные нагрузки, распределенные по границам раздела фаз. Интенсивность этих нагрузок равна

$$q_i = (C_{ijkl}^+ - C_{ijkl}^-)n_J \quad (3.17)$$

На рисунке (рис. 3.6) схематично изображены фиктивные нагрузки (3.16), приложенные на границе квадратного волокна со свойствами  $C^+$ . Волокно впаяно в материал матрицы со свойствами  $C^-$ .

Каждый из шести фрагментов рисунка соответствует своему значению пары индексов  $kl$ . Стрелками показано направление вектора распределенной нагрузки на каждой стороне квадратного волокна. Характер нагрузок соответствует изотропным материалам матрицы и волокна, причём, волокно более жёсткое чем матрица. Первые четыре рисунка ( $kl=11, 22, 33, 12$ ) иллюстрируют плоские задачи, а последние два ( $kl=13, 23$ )

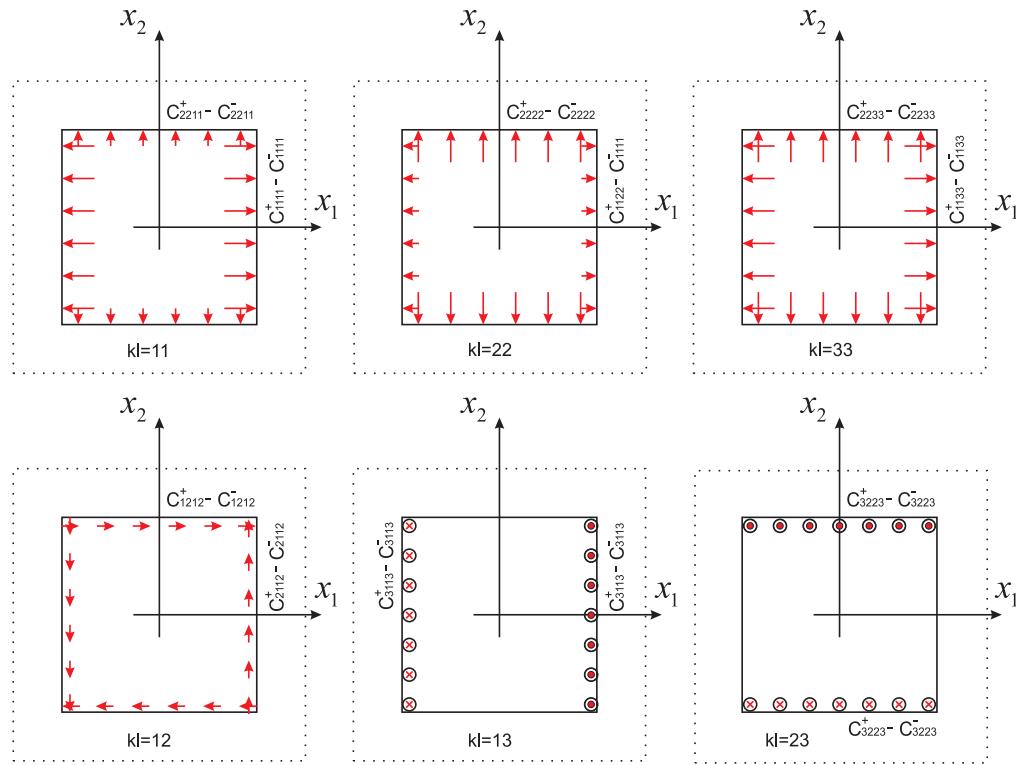


Рис. 3.6: Фиктивные нагрузки на контактной границе матрицы с волокном.

23) — антиплоские. Направления векторов нагрузки в антиплоских задачах показано точками в кружках (наконечник стрелки) и крестиком в кружках (оперение стрелки). Пунктирными линиями показана граница ячейки периодичности, в случае композита с регулярной структурой.

### 3.3 Эффективные модули упругости неоднородного по толщине бесконечного слоя. Слоистый композит.

**3.3.1 Постановка вспомогательной задачи для слоя.** Пусть оси  $Ox_1$ ,  $Ox_2$  выбраны в нижней плоскости слоя  $-\infty < x_1 < +\infty$ ,  $-\infty < x_2 < +\infty$ , а ось  $0 \leq x_3 \leq L$  — перпендикулярна ограничивающим слой плоскостям, тогда  $C_{ijkl} = C_{ijkl}(x_3)$  и естественно считать, что и функции  $N_{mkl}$  зависят только от координаты по толщине слоя, т.е., от  $x_3$ . Вспомогательная задача (2.49), (2.45) принимает вид:

$$(C_{i3kl} + C_{i3m3}N'_{mkl})' = 0; \quad N_{mkl}(0) = N_{mkl}(L) = 0, \quad (3.18)$$

где  $L$  — толщина слоя.

После решения этой задачи найдем эффективные модули по формуле

$$h_{ijkl} = \langle C_{ijkl} + C_{ijm3}N'_{mkl} \rangle \quad (3.19)$$

**3.3.2 Общий случай анизотропии и зависимости модулей упругости от координаты поперёк слоя.** Интегрируя обыкновенное дифференциальное уравнение,

ПОЛУЧИМ

$$N_{mkl}(x_3) = - \int_0^{x_3} C_{m3n3}^{-1}(y) C_{n3kl}(y) dy + \int_0^{x_3} C_{m3n3}^{-1}(y) dy K_{n3kl}^{(1)} + K_{m3kl}^{(2)}, \quad (3.20)$$

где  $K_{n3kl}^{(1)}$  и  $K_{m3kl}^{(2)}$  — константы интегрирования, а  $C_{m3n3}^{-1}(x_3)$  — коэффициенты матрицы обратной к матрице  $C_{m3n3}(x_3)$  т.е.

$$(C_{m3n3}^{-1}) = \begin{pmatrix} C_{1313} & C_{1323} & C_{1333} \\ C_{2313} & C_{2323} & C_{2333} \\ C_{3313} & C_{3323} & C_{3333} \end{pmatrix}^{-1}$$

Из граничных условий (3.18) найдём

$$K_{m3kl}^{(2)} = 0, \quad K_{n3kl}^{(1)} = \langle C_{n3p3}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{p3q3}^{-1} C_{q3kl} \rangle \quad (3.21)$$

здесь

$$\langle f(x_3) \rangle \equiv \frac{1}{L} \int_0^L f(x_3) dx_3$$

Итак,

$$N'_{mkl}(x_3) = -C_{m3n3}^{-1}(x_3) C_{n3kl}(x_3) + C_{m3n3}^{-1}(x_3) \langle C_{n3p3}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{p3q3}^{-1} C_{q3kl} \rangle \quad (3.22)$$

$$N_{mkl}(x_3) = - \int_0^{x_3} C_{m3n3}^{-1}(y) C_{n3kl}(y) dy + \int_0^{x_3} C_{m3n3}^{-1}(y) dy \langle C_{n3p3}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{p3q3}^{-1} C_{q3kl} \rangle \quad (3.23)$$

В результате из (3.19) и (3.22) получается следующая явная аналитическая формула для эффективных коэффициентов упругости неоднородного по толщине слоя

$$h_{ijkl} = \langle C_{ijkl} \rangle + \langle C_{ijm3} C_{m3n3}^{-1} \rangle \langle C_{n3p3}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{p3q3}^{-1} C_{q3kl} \rangle - \langle C_{ijm3} C_{m3n3}^{-1} C_{n3kl} \rangle \quad (3.24)$$

В 1977 году такая же формула была получена для периодически неоднородного по толщине слоя в работе Победри Б.Е. и Горбачева В.И. Ранее в 1966 году аналогичная формула была опубликована Л.П. Хорошуном. Ещё раньше, в 1946 году такое же выражение приведено в работе Т.М. Лифшица и Л.Н. Розенцвейга . Отметим, что в перечисленных работах *существенным моментом является предположение о периодической неоднородности свойств по толщине слоя*. В отличие от этого формула (3.24) справедлива при произвольной интегрируемой зависимости упругих свойств от координаты  $x_3$ .

Из формул (3.24), в частности, следуют более компактные выражения для эффективных коэффициентов упругости с одной или двумя тройками в индексах

$$h_{i3kl} = \langle C_{i3p3}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{p3q3}^{-1} C_{q3kl} \rangle, \quad h_{ijk3} = \langle C_{ijm3} C_{m3n3}^{-1} \rangle \langle C_{n3k3}^{-1} \rangle^{-1}, \quad h_{i3k3} = \langle C_{i3k3}^{-1} \rangle^{-1} \quad (3.25)$$

**3.3.3 Обратный тензор к эффективному тензору упругости.** Тензор обратный к  $\underline{h}$  уже обозначен через  $\underline{H}^* \equiv \underline{h}^{-1}$ . Для его компонент найдем следующие выражения:

$$\begin{aligned} h_{ijkl}^{-1} \equiv H_{ijkl}^* = & \langle J_{ijkl} \rangle + \langle J_{ijKL} J_{KLMN}^{-1} \rangle \langle J_{MNST}^{-1} \rangle^{-1} \langle J_{STPQ}^{-1} J_{PQkl} \rangle - \\ & - \langle J_{ijKL} J_{KLMN}^{-1} J_{MNkl} \rangle \end{aligned} \quad (3.26)$$

Здесь

$$(J_{KLMN}^{-1}) = \begin{pmatrix} J_{1111} & J_{1122} & J_{1112} \\ J_{2211} & J_{2222} & J_{2212} \\ J_{1211} & J_{1222} & J_{1212} \end{pmatrix}^{-1}$$

Формула (3.26), была впервые получена в работе [17] Победри Б.Е. и Горбачева В.И. 1977 года. В этой формуле  $J_{ijkl}$  — компоненты тензора податливости. Большие латинские индексы принимают значения 1 и 2, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование в соответствующих пределах. Технология получения этой формулы подробно изложена ниже в лекции, посвященной тензору эффективных податливостей, определяемому из решения второй СКЗ.

**3.3.4 Случай изотропии.** В изотропном случае

$$C_{ijkl} = \lambda(x_3)\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu(x_3)\Delta_{ijkl} \quad (3.27)$$

Из формул (3.23) найдем все отличные от нуля  $N$ -функции

$$N_{311} = N_{322} = \frac{\langle \lambda/(\lambda + 2\mu) \rangle}{\langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle} \int_0^{x_3} \frac{1}{\lambda(y) + 2\mu(y)} dy - \int_0^{x_3} \frac{\lambda(y)}{\lambda(y) + 2\mu(y)} dy \quad (3.28)$$

$$N_{333} = \frac{1}{\langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle} \int_0^{x_3} \frac{1}{\lambda(y) + 2\mu(y)} dy - x_3 \quad (3.29)$$

$$N_{113} = N_{131} = N_{223} = N_{232} = \frac{1}{\langle 1/\mu \rangle} \int_0^{x_3} \frac{1}{\mu(y)} dy - x_3 \quad (3.30)$$

Ненулевых  $N$ -функций ровно 7, а независимых  $N$ -функций всего лишь три.

**Компоненты тензора эффективных модулей упругости.** Независимых эффективных модулей будет 5 штук [17]

$$h_{1111} = h_{2222} = \langle \lambda + 2\mu \rangle + \frac{\langle \lambda/(\lambda + 2\mu) \rangle^2}{\langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle} - \left\langle \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right\rangle, \quad h_{3333} = \frac{1}{\langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle},$$

$$h_{1122} = \langle \lambda \rangle + \frac{\langle \lambda/(\lambda + 2\mu) \rangle^2}{\langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle} - \left\langle \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right\rangle, \quad h_{1133} = h_{2233} = \frac{\langle \lambda/(\lambda + 2\mu) \rangle}{\langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle}, \quad (3.31)$$

$$h_{1212} = \langle \mu \rangle, \quad h_{1313} = h_{2323} = \frac{1}{\langle 1/\mu \rangle}$$

т.е. эффективная слоистая среда является трансверсально изотропной, а плоскость параллельная лицевым поверхностям слоя является плоскостью изотропии. В самом деле, из формул (3.31) следует

$$h_{1212} = \frac{h_{1111} - h_{1122}}{2}, \quad (3.32)$$

что характерно для изотропии.

Вместо параметров Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ , можно взять любые два других параметра, имеющих более прозрачный физический смысл. Например модуль Юнга и коэффициент Пуассона, положив в формулах (3.31)

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.33)$$

В этом случае формулы (3.31) для эффективных коэффициентов упругости приобретают вид:

$$\begin{aligned} h_{1111} = h_{2222} &= \left\langle \frac{E}{1-\nu^2} \right\rangle + \frac{\langle \nu/(1-\nu) \rangle^2}{\left\langle \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right\rangle}, \quad h_{3333} = \frac{1}{\left\langle \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right\rangle}, \\ h_{1122} &= \left\langle \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right\rangle + \frac{\langle \nu/(1-\nu) \rangle^2}{\left\langle \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right\rangle}, \quad h_{1133} = h_{2233} = \frac{\langle \nu/(1-\nu) \rangle}{\left\langle \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right\rangle}, \\ h_{1212} &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{E}{1+\nu} \right\rangle, \quad h_{1313} = h_{2323} = \frac{1}{2 \langle (1+\nu)/E \rangle}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

**Компоненты тензора эффективных податливостей.** Ненулевые компоненты тензора  $H^* \equiv h^{-1}$  будем искать по формуле (3.26), в которой

$$J_{ijkl}(x_3) = -\frac{\nu(x_3)}{E(x_3)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1+\nu(x_3)}{E(x_3)} \Delta_{ijkl} \quad (3.35)$$

Опуская подробности выкладок, получаем:

$$\begin{aligned} H_{1111}^* = H_{2222}^* &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\langle \frac{E}{1+\nu} \rangle} + \frac{1}{\langle \frac{E}{1-\nu} \rangle} \right], \quad H_{3333}^* = \left\langle \frac{1}{E} \right\rangle + 2 \left[ \frac{\langle \frac{\nu}{1-\nu} \rangle^2}{\langle \frac{E}{1-\nu} \rangle} - \left\langle \frac{\nu^2}{E(1-\nu)} \right\rangle \right], \\ H_{1122}^* &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\langle \frac{E}{1+\nu} \rangle} - \frac{1}{\langle \frac{E}{1-\nu} \rangle} \right], \quad H_{1133}^* = H_{2233}^* = -\frac{\langle \frac{\nu}{1-\nu} \rangle}{\langle \frac{E}{1-\nu} \rangle}, \\ H_{1212}^* &= \frac{1}{2} \frac{1}{\langle \frac{E}{1+\nu} \rangle}, \quad H_{1313}^* = H_{2323}^* = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1+\nu}{E} \right\rangle \end{aligned} \quad (3.36)$$

# Лекция 4. Вторая специальная краевая задача. Эффективные податливости.

## 4.1 Тензор эффективных податливостей неоднородного упругого тела.

**4.1.1 Определение.** Тензором эффективных податливостей неоднородного упругого тела называется такой тензор четвертого ранга, с помощью которого средние деформации выражаются через средние напряжения в неоднородном теле нагруженном по всей поверхности усилиями специального вида и при нулевых объемных силах.

**4.1.2 Постановка второй специальной краевой задачи (СКЗ) в перемещениях.** Математическая формулировка задачи об эффективных податливостях в перемещениях дается теми же самыми уравнениями, что и задача об эффективных упругостях. Меняются только граничные условия

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \sigma_{ij}(x) = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(x), \quad \varepsilon_{kl} = \Delta_{klmn}u_{m,n}, \quad x \in V; \quad (4.1)$$

$$\sigma_{ij} n_j|_{\Sigma} = \lambda_{ij} n_j, \quad \lambda_{ij} = \lambda_{ji} = const. \quad (4.2)$$

Здесь  $n_j$  — компоненты единичной внешней нормали к поверхности  $\Sigma$ . Во второй лекции было показано, что независимо от вида определяющих соотношений справедлива формула

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda_{ij} \quad (4.3)$$

Решив задачу (4.1), (4.2) представим выражения для  $\varepsilon_{ij}$  следующим образом

$$\varepsilon_{ij} = \tilde{J}_{ijkl}(x)\lambda_{kl} = \tilde{J}_{ijkl}(x) \langle \sigma_{kl} \rangle$$

Усредним теперь  $\varepsilon_{ij}$  по объему и получим

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \langle \tilde{J}_{ijkl} \rangle \langle \sigma_{kl} \rangle \Rightarrow H_{ijkl} = \langle \tilde{J}_{ijkl} \rangle \quad (4.4)$$

Коэффициенты  $\tilde{J}_{ijkl}(x)$  находятся только после решения второй СКЗ.

## 4.2 Постановка второй СКЗ в напряжениях.

Рассмотрим постановку задачи (4.1), (4.2) в напряжениях. Основанием для такого подхода является то, что граничные условия на всей поверхности заданы в напряжениях. Постановка второй СКЗ дается уравнениями

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = J_{ijkl}(x)\sigma_{kl}, \quad \epsilon_{\alpha ik}\epsilon_{\beta jl}\varepsilon_{ij,kl} = 0 \quad (4.5)$$

Или

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \epsilon_{\alpha ik} \epsilon_{\beta jl} [J_{ijmn}(x) \sigma_{mn}]_{,kl} = 0 \quad (4.6)$$

**4.2.1 Функции напряжений во второй СКЗ. L-функции.** Решение уравнений (4.6) ищем в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ij} + \epsilon_{iu\gamma} \epsilon_{jv\eta} L_{uvpq,\gamma\eta}(x) \lambda_{pq} = [\Delta_{ijpq} + \epsilon_{iu\gamma} \epsilon_{jv\eta} L_{uvpq,\gamma\eta}] \lambda_{pq} \quad (4.7)$$

Из (4.3) и из независимости коэффициентов  $\lambda_{ij}$  следует, что L-функции должны удовлетворять интегральному условию

$$\epsilon_{iu\gamma} \epsilon_{jv\eta} \langle L_{uvpq,\gamma\eta} \rangle = 0 \quad (4.8)$$

Заметим, что интегральное условие (4.8) будет заведомо выполнено, если

$$\epsilon_{iu\gamma} \epsilon_{jv\eta} L_{uvpq,\gamma\eta} n_\gamma \Big|_{\Sigma} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon_{iu\gamma} \epsilon_{jv\delta} L_{uvpq,\delta} n_\gamma \Big|_{\Sigma} = 0 \quad (4.9)$$

Последняя формула означает, что если имеет место левое равенство, то справедливо и правое равенство, и наоборот. Доказательство следует при замене  $\gamma \leftrightarrow \delta$ .

**4.2.2 Выражение эффективных податливостей через L-функции.** Из обратного закона Гука и формул (4.7) найдем деформации

$$\varepsilon_{ij} = [J_{ijpq} + J_{ijmn} \epsilon_{mu\gamma} \epsilon_{nv\delta} L_{uvpq,\gamma\delta}] \lambda_{pq} = \tilde{J}_{ijpq}(x) \lambda_{pq} \quad (4.10)$$

Усредним далее деформации по объему и воспользуемся равенством (4.3), получим

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \langle J_{ijpq} + J_{ijmn} \epsilon_{mu\gamma} \epsilon_{nv\delta} L_{uvpq,\gamma\delta} \rangle \lambda_{pq} = \langle J_{ijpq} + J_{ijmn} \epsilon_{mu\gamma} \epsilon_{nv\delta} L_{uvpq,\gamma\delta} \rangle \langle \sigma_{pq} \rangle$$

Отсюда и из определения (4.4) найдем эффективные податливости

$$H_{ijkl} = \langle J_{ijpq} + J_{ijmn} \epsilon_{mu\gamma} \epsilon_{nv\delta} L_{uvpq,\gamma\delta} \rangle \quad (4.11)$$

**4.2.3 Уравнения и граничные условия для функций напряжений второй СКЗ.** Подстановка (4.7) в уравнения равновесия тождественно удовлетворяет последние, а из условий совместности в напряжениях, в силу независимости коэффициентов  $\lambda_{ij}$ , следуют уравнения для L-функций

$$\epsilon_{\alpha ik} \epsilon_{\beta jl} [J_{ijpq} + J_{ijmn} \epsilon_{mu\gamma} \epsilon_{nv\delta} L_{uvpq,\gamma\delta}]_{,kl} = 0 \quad (4.12)$$

Граничные условия для введенных функций следуют из граничных условий второй СКЗ и произвольности коэффициентов  $\lambda_{ij}$

$$\epsilon_{iu\gamma} \epsilon_{jv\delta} L_{uvpq,\gamma\delta} n_j \Big|_{\Sigma} = 0 \quad (4.13)$$

Условий (4.13) недостаточно для выделения единственного решения уравнений (4.12). Граничных условий должно быть два в каждой точке границы.

**В плоской второй краевой задаче теории упругости доказывается, что вместо граничных условий второго порядка для функции напряжений необходимо и достаточно знать на границе саму функцию и ее производную по нормали [20].**

Покажем, что для того чтобы на границе тела имело место условие (4.13) *необходимо и достаточно* чтобы на границе выполнялись два условия

$$\epsilon_{ku\gamma}\epsilon_{lv\delta}L_{uvpq,\gamma\delta}n_\delta|_\Sigma = 0, \quad \epsilon_{ku\gamma}\epsilon_{lv\delta}L_{uvpq}n_\gamma|_\Sigma = 0 \quad (4.14)$$

Вначале рассмотрим очевидное тождество

$$\epsilon_{iu\gamma}\epsilon_{jv\delta}L_{uvpq,\gamma\delta j} \equiv 0$$

Умножим его на произвольную трижды непрерывно дифференцируемую функцию  $f(x)$  и проинтегрируем по объему тела, получим

$$\epsilon_{iu\gamma}\epsilon_{jv\delta} \int_V L_{uvpq,\gamma\delta j} f dV \equiv 0 \quad (4.15)$$

Используя теорему Гаусса-Остроградского, преобразуем объемный интеграл так, чтобы перебросить все производные с  $L$ -функций на функцию  $f$ . В результате приедем к следующему тождеству

$$\int_\Sigma \epsilon_{iu\gamma}\epsilon_{jv\delta}L_{uvpq,\gamma\delta j} n_j f d\Sigma - \int_\Sigma \epsilon_{iu\gamma}\epsilon_{jv\delta}L_{uvpq,\delta}n_\gamma f_{,j} d\Sigma + \int_\Sigma \epsilon_{iu\gamma}\epsilon_{jv\delta}L_{uvpq}n_\delta f_{,j\gamma} d\Sigma \equiv 0 \quad (4.16)$$

**Необходимость.** Пусть имеет место граничное условие (4.13), вытекающие из второй СКЗ. Из тождества (4.16) следует, что кроме граничного условия (4.13) необходимо, чтобы  $L$ -функции удовлетворяли тождеству

$$-\int_\Sigma \epsilon_{iu\gamma}\epsilon_{jv\delta}L_{uvpq,\delta}n_\gamma f_{,j} d\Sigma + \int_\Sigma \epsilon_{iu\gamma}\epsilon_{jv\delta}L_{uvpq}n_\delta f_{,j\gamma} d\Sigma \equiv 0 \quad (4.17)$$

**Для выполнения тождества (4.17) при произвольных  $f$  необходимо, чтобы выполнялись условия (4.14)**

**Достаточность** Пусть  $L$ -функции удовлетворяют условиям (4.14). Тождество (4.16) остается справедливым, причем в нем два последних интеграла обращаются в нуль. Следовательно

$$\epsilon_{ku\gamma}\epsilon_{lv\delta} \int_\Sigma L_{uvpq,\gamma\delta}n_l f d\Sigma \equiv 0$$

Отсюда и в силу произвольности функции  $f$  вытекает, что  $L$ -функции будут удовлетворять условиям (4.13) на границе области. Более того, поскольку  $L$ -функции удовлетворяют граничным условиям (4.14), поскольку

$$\epsilon_{iu\gamma}\epsilon_{jv\delta} \langle L_{uvkl,\gamma\delta} \rangle = 0, \quad \epsilon_{iu\gamma}\epsilon_{jv\delta} \langle L_{uvkl,\gamma} \rangle = 0 \quad (4.18)$$

## 4.3 Эффективные податливости неоднородного по толщине бесконечного слоя.

**4.3.1 Система обыкновенных дифференциальных 4-го порядка для  $L$ -функций.**  
Рассмотрим неоднородный по толщине слой, т.е. упругое тело, занимающее область

$0 \leq x_3 \leq L$ ,  $-\infty < x_1, x_2 < +\infty$ , модули упругости которого зависят только от координаты  $x_3$  т.е.  $J_{ijkl} = J_{ijkl}(x_3)$ . В этом случае  $L$ -функции также зависят только от  $x_3$  и задача (4.12), (4.14) принимает вид:

$$\epsilon_{\alpha i 3} \epsilon_{\beta j 3} \left[ J_{ijpq} + J_{ijkl} \epsilon_{ku3} \epsilon_{lv3} L''_{uvpq} \right]'' = 0, \quad (4.19)$$

$$\epsilon_{ku3} \epsilon_{lv3} L'_{uvpq}(0) = \epsilon_{ku3} \epsilon_{lv3} L'_{uvpq}(L) = 0, \quad (4.20)$$

$$\epsilon_{ku3} \epsilon_{lv\delta} L_{uvpq}(0) = \epsilon_{ku3} \epsilon_{lv\delta} L_{uvpq}(L) = 0 \quad (4.21)$$

Из (4.19) видно, что индексы  $p, q$  могут принимать значения 1,2,3, а остальные индексы могут быть равны 1 или 2. Такие индексы мы обозначаем большими буквами. Итак, в расчет принимаются только функции  $L_{UVpq}$ . Все остальные функции полагаются тождественно равными нулю. Нужные нам функции находятся из уравнений:

$$\left[ J_{IJpq} + J_{IJKL} \epsilon_{KU} \epsilon_{LV} L''_{UVpq} \right]'' = 0, \quad (4.22)$$

$$L'_{UVpq}(0) = L'_{UVpq}(L) = 0 \quad \text{или} \quad \langle L''_{UVpq} \rangle = 0, \quad (4.23)$$

$$L_{UVpq}(0) = L_{UVpq}(L) = 0 \quad \text{или} \quad \langle L'_{UVpq} \rangle = 0 \quad (4.24)$$

Формула (4.11) для эффективных податливостей примет вид:

$$H_{ijpq} = \langle J_{ijpq} + J_{ijKL} \epsilon_{KU} \epsilon_{LV} L''_{UVpq} \rangle \quad (4.25)$$

#### 4.3.2 Нахождение $L$ -функций.

Проинтегрируем уравнения (4.22) и найдем

$$J_{IJpq} + J_{IJKL} \epsilon_{KU} \epsilon_{LV} L''_{UVpq} = a_{IJpq} x_3 + b_{IJpq}, \quad (4.26)$$

где  $a_{IJpq}$  и  $b_{IJpq}$  — константы интегрирования. Из (4.26) имеем

$$\epsilon_{KU} \epsilon_{LV} L''_{UVpq} = J_{KLST}^{-1} (a_{STpq} x_3 + b_{STpq} - J_{STpq}), \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{KU} \epsilon_{LV} L'_{UVpq} &= \int_0^{x_3} y J_{KLST}^{-1}(y) dy \ a_{STpq} - \\ &\quad - \int_0^{x_3} J_{KLST}^{-1}(y) dy \ b_{STpq} - \int_0^{x_3} J_{KLST}^{-1}(y) J_{STpq}(y) dy + d_{KLpq}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Здесь  $d_{KLpq}$  еще одни константы интегрирования. Для нахождения констант применим условия (4.20) и (4.21). При этом  $d_{KLpq} = 0$ , а для  $a_{KLpq}$  и  $b_{KLpq}$  получим систему уравнений

$$\begin{cases} \left\langle x_3 J_{KLST}^{-1} \right\rangle a_{STpq} + \left\langle J_{KLST}^{-1} \right\rangle b_{STpq} = \left\langle J_{KLST}^{-1} J_{STpq} \right\rangle \\ \left\langle \int_0^{x_3} y J_{KLST}^{-1} dy \right\rangle a_{STpq} + \left\langle \int_0^{x_3} J_{KLST}^{-1} dy \right\rangle b_{STpq} = \left\langle \int_0^{x_3} J_{KLST}^{-1} J_{STpq} dy \right\rangle \end{cases} \quad (4.29)$$

Отсюда найдем

$$a_{STpq} = \langle x_3 F_{STMN} \rangle^{-1} \langle F_{MNRD} J_{RDpq} \rangle, \quad (4.30)$$

$$b_{STpq} = \langle J_{STPQ}^{-1} \rangle^{-1} \langle J_{PQRD}^{-1} J_{RDpq} \rangle - \langle J_{STPQ}^{-1} \rangle^{-1} \langle x_3 J_{PQRD}^{-1} \rangle a_{RDpq}, \quad (4.31)$$

Где

$$F_{STMN}(x_3) \equiv x_3 J_{STMN}^{-1} - J_{STUV}^{-1} \langle J_{UVAB}^{-1} \rangle^{-1} \langle x_3 J_{ABMN}^{-1} \rangle \quad (4.32)$$

Подставим найденные константы  $a_{KLPq}$  и  $b_{KLPq}$  в выражение (4.27) и после преобразований получим:

$$\begin{aligned} \epsilon_{KU} \epsilon_{LV} L''_{UVpq} &= J_{KLST}^{-1} \langle J_{STPQ}^{-1} \rangle^{-1} \langle J_{PQRD}^{-1} J_{RDpq} \rangle - \\ &\quad - J_{KLST}^{-1} J_{STpq} + F_{KLRD} \langle x_3 F_{RDUV} \rangle^{-1} \langle F_{UVAB} J_{ABpq} \rangle \end{aligned} \quad (4.33)$$

Подставим далее (4.33) в (4.25) и найдем окончательные выражения для эффективных податливостей

$$H_{ijkl} = H_{ijkl}^* + \langle J_{ijMN} F_{MNRD} \rangle \langle x_3 F_{RDUV} \rangle^{-1} \langle F_{UVAB} J_{ABkl} \rangle \quad (4.34)$$

Где

$$\begin{aligned} H_{ijkl}^* &= h_{ijkl}^{-1} = \langle J_{ijkl} \rangle - \langle J_{ijKL} J_{KLMN}^{-1} J_{MNkl} \rangle + \\ &\quad + \langle J_{ijKL} J_{KLMN}^{-1} \rangle \langle J_{MNST}^{-1} \rangle^{-1} \langle J_{STPQ}^{-1} J_{PQkl} \rangle. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Здесь  $h_{ijkl}$  — компоненты эффективного тензора модулей упругости неоднородного по толщине упругого слоя, найденного во второй лекции.



# Лекция 5. Эффективные податливости. Вилки эффективных характеристик.

Продолжим изучать материал, на котором остановились в конце предыдущей лекции.

## 5.1 Случай периодически неоднородного слоя.

В случае периодически неоднородного слоя тензор податливостей является периодической глобальной координаты  $x_3$  т.е.  $\underline{J}(x_3 + kl) = \underline{J}(x_3)$ , где  $l$  — период, а  $k$  — любое целое число.

Для простоты будем считать, что слой составлен из целого числа  $I^* \geq 1$  пакетов периодичности. Анализ более общего случая, когда к границам слоя примыкают части периодов структуры, по существу, ничего не даёт, только выкладки будут более громоздкими. Толщина слоя  $L = I^*l$ . Наряду с локальной размерной переменной  $0 \leq z \leq l$ , введём безразмерную локальную переменную  $\zeta = z/l$ ,  $0 \leq \zeta \leq 1$ . Будем считать, что тензор  $\underline{J}$  в каждом периоде описывается одними и теми же функциями переменной  $\zeta$ . Глобальная координата  $x_3$  связана с локальной по формуле

$$x_3 = l(i^* - 1 + \zeta), \quad (i^* = 1, 2, \dots, I^*).$$

Пусть  $\alpha = l/L$  — малый геометрический параметр. Обозначим через  $\langle\langle \bullet \rangle\rangle$  среднее по периоду

$$\langle\langle f(\zeta) \rangle\rangle \equiv \int_0^1 f(\zeta) d\zeta.$$

Среднее по толщине всего слоя обозначаются, как и прежде, одинарными угловыми скобками. Имеют место следующие зависимости между средними по слою и средними по ячейке периодичности

$$\langle f(\zeta) \rangle = \langle\langle f \rangle\rangle, \tag{5.1}$$

$$\langle x_3 f(\zeta) \rangle = L \left[ \frac{1-\alpha}{2} \langle\langle f \rangle\rangle + \alpha \langle\langle \zeta f \rangle\rangle \right], \tag{5.2}$$

$$\langle x_3^2 f(\zeta) \rangle = L^2 \left[ \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{6} \langle\langle f \rangle\rangle + \alpha(1-\alpha) \langle\langle \zeta f \rangle\rangle + \alpha^2 \langle\langle \zeta^2 f \rangle\rangle \right]. \tag{5.3}$$

Используя эти формулы получаем

$$\langle J_{ijMN}(\zeta) F_{MNPQ}(x_3) \rangle = L\alpha \langle\langle J_{ijMN} \Phi_{MNPQ} \rangle\rangle \tag{5.4}$$

$$\langle x_3^2 F_{PQRD}(x_3) \rangle = L^2 \left[ \frac{1 - \alpha^2}{12} \langle\!\langle J_{PQRD}^{-1} \rangle\!\rangle + \alpha^2 \langle\!\langle \zeta \Phi_{PQRD} \rangle\!\rangle \right] \quad (5.5)$$

где

$$\Phi_{MNPQ}(\zeta) \equiv \zeta J_{MNPQ}^{-1}(\zeta) - J_{MNUV}^{-1}(\zeta) \langle\!\langle J_{UVAB}^{-1} \rangle\!\rangle^{-1} \langle\!\langle \eta J_{ABPQ}^{-1}(\eta) \rangle\!\rangle. \quad (5.6)$$

**5.1.1 Формула для эффективных податливостей периодически неоднородного слоя.** Подставим выражения (5.4), (5.4) в формулу (4.34), проведём несложные преобразования и получим следующее выражение для эффективных податливостей периодически неоднородного по толщине слоя, составленного из целого числа пакетов слоёв, склеенных между собой

$$H_{ijkl} = H_{ijkl}^* + \alpha^2 \langle\!\langle J_{ijMN} \Phi_{MNPQ} \rangle\!\rangle \Psi_{PQRD}^{-1} \langle\!\langle \Phi_{RDST} J_{STkl} \rangle\!\rangle, \quad (5.7)$$

где

$$\Psi_{PQRD} = \frac{1 - \alpha^2}{12} \langle\!\langle J_{PQRD} \rangle\!\rangle + \alpha^2 \langle\!\langle \zeta \Phi_{PQRD} \rangle\!\rangle. \quad (5.8)$$

**Изотропный, периодически неоднородный слой.** В этом случае

$$J_{ijkl}(\zeta) = -\frac{\nu(\zeta)}{E(\zeta)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1 + \nu(\zeta)}{E(\zeta)} \Delta_{ijkl}. \quad (5.9)$$

По формулам (4.35) найдём компоненты тензора  $\underline{H}^*$

$$\begin{aligned} H_{1111}^* = H_{2222}^* &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\langle \frac{E}{1+\nu} \rangle} + \frac{1}{\langle \frac{E}{1-\nu} \rangle} \right], \quad H_{3333}^* = \left\langle \frac{1}{E} \right\rangle + 2 \left[ \left\langle \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle^2 - \left\langle \frac{\nu^2}{E(1-\nu)} \right\rangle \right], \\ H_{1122}^* &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\langle \frac{E}{1+\nu} \rangle} - \frac{1}{\langle \frac{E}{1-\nu} \rangle} \right], \quad H_{1133}^* = H_{2233}^* = -\frac{\left\langle \frac{\nu}{1-\nu} \right\rangle}{\langle \frac{E}{1-\nu} \rangle}, \\ H_{1212}^* &= \frac{1}{2} \frac{1}{\langle \frac{E}{1+\nu} \rangle}, \quad H_{1313}^* = H_{2323}^* = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1+\nu}{E} \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.10)$$

**Здесь вместо двойных угловых скобок использованы одинарные угловые скобки, обозначающие среднее по толщине слоя. Это возможно только тогда, когда слой состоит из целого числа периодов.**

Компоненты эффективного тензора податливостей будут определяться по формулам

$$H_{1111} = H_{2222} = H_{1111}^* + \frac{\alpha^2}{2} \left( \frac{A_1^2}{D_1} + \frac{A_2^2}{D_2} \right), \quad H_{3333} = H_{3333}^* + 2\alpha^2 \frac{B^2}{D_2},$$

$$H_{1122} = H_{1122}^* - \frac{\alpha^2}{2} \left( \frac{A_1^2}{D_1} - \frac{A_2^2}{D_2} \right), \quad H_{1133} = H_{2233} = H_{1133}^* - \alpha^2 \frac{BA_2}{D_2},$$

$$H_{1212} = H_{1212}^* + \frac{\alpha^2}{2} \frac{A_1^2}{D_1}, \quad H_{1313} = H_{2323} = H_{1313}^* \quad (5.11)$$

Здесь использовались следующие обозначения:

$$A_1 = \frac{1}{2} - \frac{\langle\zeta\frac{E}{1+\nu}\rangle}{\langle\frac{E}{1+\nu}\rangle}, \quad A_2 = \frac{1}{2} - \frac{\langle\zeta\frac{E}{1-\nu}\rangle}{\langle\frac{E}{1-\nu}\rangle}, \quad (5.12)$$

$$B = \langle\zeta\frac{\nu}{1-\nu}\rangle - \frac{\langle\zeta\frac{E}{1-\nu}\rangle}{\langle\frac{E}{1-\nu}\rangle}\langle\frac{\nu}{1-\nu}\rangle, \quad (5.13)$$

$$D_1 = \frac{1-\alpha^2}{12}\left\langle\frac{E}{1+\nu}\right\rangle + \alpha^2\left(\langle\zeta^2\frac{E}{1+\nu}\rangle - \frac{\langle\zeta\frac{E}{1+\nu}\rangle^2}{\langle\frac{E}{1+\nu}\rangle}\right), \quad (5.14)$$

$$D_2 = \frac{1-\alpha^2}{12}\left\langle\frac{E}{1-\nu}\right\rangle + \alpha^2\left(\langle\zeta^2\frac{E}{1-\nu}\rangle - \frac{\langle\zeta\frac{E}{1-\nu}\rangle^2}{\langle\frac{E}{1-\nu}\rangle}\right). \quad (5.15)$$

Отметим, что константы  $D_1$  и  $D_2$  всегда положительны, так как  $\alpha \leq 1$ . Положительность слагаемых, заключенных в круглые скобки вытекает из неравенства Коши-Буняковского, которое при  $f(\zeta) > 0$  имеет вид:

$$\langle\zeta f\rangle^2 = \langle\zeta\sqrt{f}\sqrt{f}\rangle^2 \leq \langle\zeta^2 f\rangle\langle f\rangle \quad (5.16)$$

Отсюда следует

$$\langle\zeta^2 f\rangle - \frac{\langle\zeta f\rangle^2}{\langle f\rangle} \geq 0 \quad (5.17)$$

**Изотропный, периодически неоднородный слой при постоянном коэффициенте Пуассона.**

При  $\nu = const$ .

$$A_1 = A_2 = A = \frac{1}{2} - \frac{\langle\zeta E\rangle}{\langle E\rangle}, \quad B = \frac{\nu}{1-\nu} A \quad (5.18)$$

$$D_1 = \frac{D}{1+\nu}, \quad D_2 = \frac{D}{1-\nu}, \quad D = \frac{1-\alpha^2}{12}\left\langle\frac{E}{1-\nu}\right\rangle + \alpha^2\left(\langle\zeta^2 E\rangle - \frac{\langle\zeta E\rangle^2}{\langle E\rangle}\right) \quad (5.19)$$

формулы (5.11) для эффективных податливостей существенно упрощаются

$$H_{1111} = H_{2222} = \left\langle\frac{1}{E}\right\rangle + \alpha^2 \frac{A^2}{D},$$

$$H_{3333} = \left\langle\frac{1}{E}\right\rangle + \frac{2\nu^2}{1-\nu} \left( \frac{1}{\langle E\rangle} + \left\langle\frac{1}{E}\right\rangle \right) + \frac{2\alpha^2\nu^2}{1-\nu} \frac{A^2}{D},$$

$$H_{1122} = H_{1133} = H_{2233} = -\frac{\nu}{\langle E \rangle} - \alpha^2 \nu \frac{A^2}{D},$$

$$H_{1212} = \frac{1+\nu}{2\langle E \rangle} + \frac{\alpha^2(1+\nu)}{2} \frac{A^2}{D},$$

$$H_{1313} = H_{2323} = \frac{1+\nu}{2\langle E \rangle}. \quad (5.20)$$

## 5.2 Проблема единственности эффективных характеристик и масштабный эффект.

**5.2.1 Ещё раз о двух подходах к расчету эффективных характеристик.** Эффективные характеристики композиционного материала или, в общем случае неоднородного материала, определяются из решения первой, либо второй специальной краевой задачи. Из первой СКЗ находятся эффективные определяющие соотношения типа

$$\langle \sigma \rangle = \check{h}(\langle \varepsilon \rangle) \quad (5.21)$$

Из второй СКЗ — соотношения другого типа

$$\langle \varepsilon \rangle = \check{H}(\langle \sigma \rangle) \quad (5.22)$$

В упругом случае обе специальные краевые задачи сведены к двум вспомогательным задачам, из решения которых находятся эффективные тензоры упругости и податливости. Доказаны теоремы о том, что оба эффективных тензора удовлетворяют всем ограничениям, которые накладываются на материальные тензоры упругости. Само собой разумеется, что эти два эффективных тензора не взаимообратны, хотя каждая из специальных краевых задач имеет единственное решение.

В случае периодически неоднородного тела тензор модулей упругости является функцией безразмерных локальных переменных  $\zeta$  т.е.  $C = C(\zeta) = C(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ . В первой вспомогательной краевой задаче для всего периодически неоднородного тела  $N$ -функции определяются функциональной зависимостью коэффициентов упругости от координат. По этой основной причине *N-функции вдали от границы тела являются непрерывными и периодическими функциями тех же самых локальных переменных  $\zeta_i$ , что и модули упругости [21].* При подходе к границе  $N$ -функции трансформируются так, чтобы обратиться в нуль на границе всего тела. То есть, в теле можно выделить пограничный слой, разделяющий области периодических значений  $N$ -функций от непериодических. На рисунке 10.8 примерная зона по-

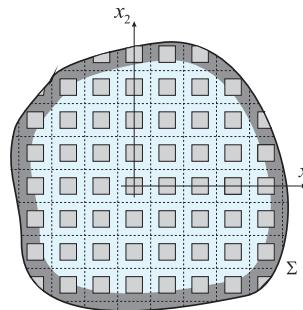


Рис. 5.7: Пограничный слой в композите с периодической структурой.

граничного слоя отмечена серым цветом. Толщина пограничного слоя порядка характерного размера ячейки периодичности [22, стр. 36]. С дроблением структуры толщина погранслоя уменьшается, а средние по объёму тела стремятся к средним по ячейке периодичности.

**5.2.2 Суть масштабного эффекта.** Сущность масштабного эффекта заключается в зависимости экспериментально измеренных эффективных характеристик от числа ячеек периодичности. Очевидный факт заключается в том, что чем из большего числа представительных элементов (ячеек периодичности для регулярных композитов) состоит экспериментальный образец, тем меньше оказывается масштабный эффект на результаты измерений.

Оценка необходимого числа ячеек в образце в общем случае довольно затруднительна. Однако в случае слоистого композита это удается сделать. Из формулы (5.7) следует, что при  $\alpha \rightarrow 0$

$$H_{ijkl} \rightarrow H_{ijkl}^* = h_{ijkl}^{-1}$$

где  $H_{ijkl}^*$  определяется по формуле (4.35). Будем считать, что  $H_{ijkl}^*$  — это именно те величины, которые должны быть получены из эксперимента с заданной степенью точности. Спрашивается, каково должно быть минимальное число периодов в испытуемом образце, чтобы удовлетворить поставленным условиям?

Ответ на поставленный вопрос следует из общей формулы (5.7). Например, в случае изотропных слоев непосредственно из (5.11), или из формул (5.20) при постоянном коэффициенте Пуассона. В частности из формул (5.20) получаем следующее выражение для модуля сдвига  $G_{12}^{ef} = 1/(4H_{1212})$  в плоскости, параллельной слоям

$$G_{12}^{ef} = \frac{G_{12}^*}{1 + 2\alpha^2 \langle\!\langle G \rangle\!\rangle A_1^2 / D_1} = \frac{G_{12}^*}{1 + 12\alpha^2 \frac{A_1^2}{1 + 12\alpha^2 K}} \quad (5.23)$$

где

$$\begin{aligned} G_{12}^* &= \langle\!\langle G \rangle\!\rangle, \quad A_1 = \frac{1}{2} - \frac{\langle\!\langle \zeta G \rangle\!\rangle}{\langle\!\langle G \rangle\!\rangle}, \\ D_1 &= \frac{1 - \alpha^2}{6} \langle\!\langle G \rangle\!\rangle + 2\alpha^2 \left( \langle\!\langle \zeta^2 G \rangle\!\rangle - \frac{\langle\!\langle \zeta G \rangle\!\rangle^2}{\langle\!\langle G \rangle\!\rangle} \right), \\ K &= \frac{\langle\!\langle G \rangle\!\rangle \langle\!\langle \zeta^2 G \rangle\!\rangle - \langle\!\langle \zeta G \rangle\!\rangle^2}{\langle\!\langle G \rangle\!\rangle^2} - \frac{1}{12} \end{aligned}$$

В случае двухслойного пакета периодичности

$$\begin{aligned} G_{12}^* &= v_1 G_1 + v_2 G_2 = G_2(v_1 \omega + v_2), \quad A_1 = \frac{v_1 v_2}{2} \frac{G_1 - G_2}{v_1 G_1 + v_2 G_2} = \frac{v_1 v_2}{2} \frac{\omega - 1}{v_1 \omega + v_2} \\ D_1 &= \frac{v_1 G_1 + v_2 G_2}{6} \left[ 1 + \alpha^2 \frac{(v_1^2 G_1 - v_2^2 G_2)^2 - (v_1 G_1 - v_2 G_2)^2}{(v_1 G_1 + v_2 G_2)^2} \right] = \\ &= \frac{G_2(v_1 \omega + v_2)}{6} \left[ 1 + \alpha^2 \frac{(v_1^2 \omega - v_2^2)^2 - (v_1 \omega - v_2)^2}{(v_1 \omega + v_2)^2} \right] \end{aligned}$$

где  $G_1, G_2$  — модули сдвига слоев,  $v_1$  и  $v_2$  — их относительные толщины, причем  $v_1 = 1 - v_2$ , а  $\omega = G_1/G_2$ . В этом случае

$$\frac{G_{12}^{ef}}{G_2} = \frac{v_1\omega + v_2}{1 + 3\alpha^2 \frac{v_1^2 v_2^2 (\omega - 1)^2}{(v_1\omega + v_2)^2 + \alpha^2 [(v_1^2\omega - v_2^2)^2 - (v_1\omega - v_2)^2]}} \quad (5.24)$$

Потребуем, чтобы относительное отклонение модуля  $G_{12}^{ef}$  от  $G_{12}^*$  не превышало малого числа  $0 < \delta < 1$ , т.е.

$$\frac{G_{12}^* - G_{12}^{ef}}{G_{12}^*} = 1 - \frac{1}{1 + 12\alpha^2 \frac{A_1^2}{1 + 12\alpha^2 K}} \leq \delta \quad (5.25)$$

Отсюда получаем

$$\alpha^2 \leq \frac{\delta}{1 - \delta} \frac{1}{12 \left( A_1 - \frac{K\delta}{1 - \delta} \right)} \quad (5.26)$$

### 5.3 Оценка эффективных характеристик упругих композитов.

Точное решение первой специальной краевой задачи (СКЗ) для вычисления эффективных модулей упругости, или второй специальной краевой задачи (СКЗ) для вычисления эффективных податливостей возможно лишь в некоторых простейших случаях. К таким случаям относится, в частности, случай слоистого композита. Иногда целесообразно вместо точного решения воспользоваться приближенным. Как правило, это либо кинематически допустимые решения, либо статически допустимые.

Напомним, что кинематически допустимое решение задачи теории упругости точно удовлетворяет кинематическим граничным условиям. Уравнения равновесия либо вовсе не удовлетворяются, либо удовлетворяются приближенно. Статически допустимое решение точно удовлетворяет уравнениям равновесия и статическим граничным условиям, при этом не выполнены условия совместности.

**5.3.1 Эффективные модули Фойгта.** Кинематически допустимым решением первой СКЗ являются функции  $u_i^{(F)}(x) = \gamma_{ij}x_j$ . При этом  $\varepsilon_{kl}^{(F)} = \gamma_{ij}$ , а

$$\sigma_{ij}^{(F)} = C_{ijkl}\gamma_{kl} = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}^{(F)} \quad (5.27)$$

Осредняя (5.27) по объему, получим

$$\langle \sigma_{ij}^{(F)} \rangle = \langle C_{ijkl} \rangle \gamma_{kl} = \langle C_{ijkl} \rangle \langle \varepsilon_{kl}^{(F)} \rangle \quad (5.28)$$

Следовательно

$$h_{ijkl} \approx \langle C_{ijkl} \rangle = h_{ijkl}^{(F)} \quad (5.29)$$

Величины  $h_{ijkl}^{(F)} = \langle C_{ijkl} \rangle$  образуют тензор эффективных модулей упругости Фойгта. По этой причине все основные величины данного раздела снабжены верхним индексом ( $F$ ). Эффективные податливости Фойгта равны

$$H_{ijkl}^{(F)} = \left( h_{ijkl}^{(F)} \right)^{-1} \quad (5.30)$$

**Из вариационного принципа Лагранжа следует, что для статической первой, второй или же смешанной краевой задачи теории упругости функционал лагранжа от точного решения принимает минимальное значение т.е.**

$$\mathcal{L}(\vec{u}) \leq \mathcal{L}(\vec{u}^*), \quad (5.31)$$

где  $\vec{u}$  — точное решение,  $\vec{u}^*$  — любое кинематически допустимое решение исходной задачи, в частности первой СКЗ.

Функционал Лагранжа  $\mathcal{L}$  в общем случае смешанной краевой задачи задан формулой [23]:

$$\mathcal{L}(\vec{u}) \equiv \int_V W_\varepsilon(\underline{\varepsilon}(\vec{u})) dV - \int_V X_i u_i dV - \int_{\Sigma_p} P_i^0 u_i d\Sigma \quad (5.32)$$

Здесь  $P_i^0$  — распределенная нагрузка, заданная на части  $\Sigma_p$  граничной поверхности.  $\underline{\varepsilon} \equiv Def \vec{u}$ , или же в компонентах при малых деформациях  $\varepsilon_{ij} \equiv \Delta_{ijkl} u_{k,l}$ , а  $W_\varepsilon(\underline{\varepsilon}(\vec{u})) = \sigma_{ij}(\underline{\varepsilon}) \varepsilon_{ij} / 2$  — потенциал деформации. В случае первой СКЗ  $X_i \equiv 0$  и  $\Sigma_p = \emptyset$ , а лагранжиан принимает более простой вид:

$$\mathcal{L}(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(\underline{\varepsilon}) \varepsilon_{ij} dV \stackrel{\text{у пр.}}{=} \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl}(x) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} dV \quad (5.33)$$

Преобразуем правую и левую части неравенства (5.31), имея в виду, что  $u_i(x)$  — точное решение первой СКЗ, а  $u_i^*(x) = u_i^{(F)} = \gamma_{ij} x_j$  — лишь одно из кинематически допустимых решений первой СКЗ.

$$\mathcal{L}(\vec{u}^{(F)}) = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^{(F)} \varepsilon_{ij}^{(F)} dV = \frac{V}{2} \left\langle \sigma_{ij}^{(F)} \right\rangle \gamma_{ij} = \frac{V}{2} \langle C_{ijkl} \rangle \gamma_{ij} \gamma_{kl} = \frac{V}{2} h_{ijkl}^{(F)} \gamma_{ij} \gamma_{kl} \quad (5.34)$$

Лагранжиан на точном решении первой СКЗ равен:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{u}) &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} u_{i,j} dV = \frac{1}{2} \int_V [(\sigma_{ij} u_i)_{,j} - \sigma_{ij,j} u_i] dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sigma_{ij} u_i n_j d\Sigma = \frac{1}{2} \gamma_{ik} \int_{\Sigma} \sigma_{ij} y_k n_j d\Sigma = \frac{1}{2} \gamma_{ik} \int_V (\sigma_{ij} x_k)_{,j} dV = \\ &= \frac{1}{2} \gamma_{ik} \int_V [\sigma_{ij,j} x_k + \sigma_{ik}] dV = \frac{V}{2} \langle \sigma_{ik} \rangle \gamma_{ik} = \frac{V}{2} h_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} \end{aligned} \quad (5.35)$$

**Следовательно, для любого ненулевого симметричного тензора второго ранга  $\underline{\varkappa}$  имеет место неравенство**

$$h_{ijkl} \varkappa_{ij} \varkappa_{kl} \leq h_{ijkl}^{(F)} \varkappa_{ij} \varkappa_{kl} = \langle C_{ijkl} \rangle \varkappa_{ij} \varkappa_{kl} \quad (5.36)$$

**5.3.2 Эффективные модули Рейсса.** В случае второй СКЗ напряжения  $\sigma_{ij}^{(R)} = \lambda_{ij}$  будут удовлетворять уравнениям равновесия и статическим граничным условиям задачи. Следовательно,  $\sigma_{ij}^{(R)} = \lambda_{ij}$  является одним из статически допустимых решений. Из закона обратного Гука найдем

$$\varepsilon_{ij}^{(R)} = J_{ijkl}(x)\sigma_{kl}^{(R)} = J_{ijkl}(x)\lambda_{kl} \quad (5.37)$$

Отсюда

$$\langle \varepsilon_{ij}^{(R)} \rangle = \langle J_{ijkl} \rangle \lambda_{kl} = \langle J_{ijkl} \rangle \langle \sigma_{kl}^{(R)} \rangle \quad (5.38)$$

Следовательно, по определению

$$H_{ijkl} \approx \langle J_{ijkl} \rangle = \langle C_{ijkl}^{-1} \rangle = H_{ijkl}^{(R)} \quad (5.39)$$

**Величины  $H_{ijkl}^{(R)}$  образуют тензор эффективных податливостей Рейсса. Эффективные модули Рейсса имеют вид:**

$$h_{ijkl}^{(R)} = \left( H_{ijkl}^{(R)} \right)^{-1} = \langle J_{ijkl} \rangle^{-1} = \langle C_{ijkl}^{-1} \rangle^{-1} \quad (5.40)$$

# Лекция 6. Вилка Фойгта-Рейсса. Функционал Хашина-Штрикмана.

Продолжим изучать материал, на котором остановились в конце предыдущей лекции.

Пусть теперь  $\underline{\sigma}^{**}$  и  $\underline{\sigma}$  любое статически допустимое и точное решения статической задачи теории упругости.

**Из вариационного принципа Кастильяно [23] следует, что функционал Кастильяно на точном решении достигает своего максимального значения. Другими словами, на любом статически допустимом решении функционал Кастильяно меньше значения функционала на точном решении. То есть:**

$$\boxed{\mathcal{K}(\underline{\sigma}^{**}) \leq \mathcal{K}(\underline{\sigma})}, \quad (6.1)$$

где  $\mathcal{K}$  — функционал Кастильяно, который в общем случае смешанной краевой задачи записывается следующей формулой:

$$\mathcal{K}(\underline{\sigma}) \equiv - \int_V W_\sigma(\underline{\sigma}) dV + \int_{\Sigma_u} \sigma_{ij} n_j u_i^0 d\Sigma \quad (6.2)$$

Здесь  $u_i^0$  — распределенные перемещения, заданные на части  $\Sigma_u$  граничной поверхности.  $W_\sigma(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\underline{\sigma})$  — потенциал напряжения. В случае второй СКЗ  $X_i \equiv 0$  и  $\Sigma_u = \emptyset$ , и функционал Кастильяно принимает совсем простой вид:

$$\mathcal{K}(\underline{\sigma}) = -\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\underline{\sigma}) dV \stackrel{\text{упругость}}{=} -\frac{1}{2} \int_V J_{ijkl}(x) \sigma_{ij} \sigma_{kl} dV \quad (6.3)$$

Пусть теперь  $\sigma_{ij}^{**} = \sigma_{ij}^{(R)} = \lambda_{ij}$  — наше статически допустимое решение второй СКЗ, тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\underline{\sigma}^{(R)}) &= -\frac{1}{2} \int_V J_{ijkl} \sigma_{ij}^{(R)} \sigma_{kl}^{(R)} dV = -\frac{1}{2} \int_V J_{ijkl} \lambda_{ij} \lambda_{kl} dV = \\ &= -\frac{V}{2} \langle J_{ijkl} \rangle \lambda_{ij} \lambda_{kl} = -\frac{V}{2} H_{ijkl}^{(R)} \lambda_{ij} \lambda_{kl} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Значение функционала Кастильяно на **точном решении второй СКЗ** в упругом случае имеет вид:

$$\mathcal{K}(\underline{\sigma}) = -\frac{1}{2} \int_V J_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} dV = -\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} u_{i,j} dV = -\frac{1}{2} \int_V [(\sigma_{ij} u_i)_{,j} - \sigma_{ij,j} u_i] dV = -\frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV = \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j u_i d\Sigma = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \lambda_{ij} n_j u_i d\Sigma = -\frac{1}{2} \lambda_{ij} \int_{\Sigma} u_i n_j d\Sigma = \\
 &= -\frac{1}{2} \lambda_{ij} \int_V u_{i,j} dV = -\frac{1}{2} \lambda_{ij} \int_V \varepsilon_{ij} dV = -\frac{V}{2} \lambda_{ij} \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \\
 &= -\frac{V}{2} \lambda_{ij} H_{ijkl} \langle \sigma_{kl} \rangle = -\frac{V}{2} \mathbf{H}_{ijkl} \lambda_{ij} \lambda_{kl}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Таким образом,

$$-\frac{V}{2} H_{ijkl}^{(R)} \lambda_{ij} \lambda_{kl} \leq -\frac{V}{2} H_{ijkl} \lambda_{ij} \lambda_{kl} \tag{6.6}$$

Или

$$H_{ijkl}^{(R)} \lambda_{ij} \lambda_{kl} \geq H_{ijkl} \lambda_{ij} \lambda_{kl} \tag{6.7}$$

Тогда для любого ненулевого симметричного тензора второго ранга  $\underline{\varkappa}$  имеет место следующее неравенство:

$$\boxed{h_{ijkl}^{(R)} \varkappa_{ij} \varkappa_{kl} = \langle C_{ijkl}^{-1} \rangle^{-1} \varkappa_{ij} \varkappa_{kl} \leq H_{ijkl}^{-1} \varkappa_{ij} \varkappa_{kl}} \tag{6.8}$$

## 6.1 Вилка Фойгта-Рейсса.

Дадим оценку того, как соотносятся между собой эффективные модули Фойгта и эффективные модули Рейсса. В случае первой СКЗ  $u_i^{(F)} = \gamma_{ij} x_j$  является кинематически допустимым решением, а  $\sigma_{ij}^* = \varkappa_{ij}$  является для этой же первой СКЗ статически допустимым решением, поскольку выполнены уравнения равновесия, а на всей границе заданы перемещения  $u_i^{(F)} = \gamma_{ij} x_j$ . **Запишем функционалы Лагранжа и Кастельяно для случая первой СКЗ**

$$\mathcal{L}(\vec{u}) \leq \mathcal{L}(\vec{u}^{(F)}) = \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^{(F)} \varepsilon_{kl}^{(F)} dV = \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} dV = \frac{V}{2} h_{ijkl}^{(F)} \gamma_{ij} \gamma_{kl}, \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}(\underline{\varkappa}) &\geq \mathcal{K}(\underline{\varkappa}^*) = -\frac{1}{2} \int_V J_{ijkl} \sigma_{ij}^* \sigma_{kl}^* dV + \int_{\Sigma} \sigma_{ij}^*(y) n_j u_i^{(F)}(y) d\Sigma = \\
 &= -\frac{1}{2} \int_V J_{ijkl} \varkappa_{ij} \varkappa_{kl} dV + \int_{\Sigma} \varkappa_{ij} n_j \gamma_{ik} y_k d\Sigma = \\
 &= -\frac{1}{2} \varkappa_{ij} \varkappa_{kl} \int_V J_{ijkl} dV + \varkappa_{ij} \gamma_{ik} \int_{\Sigma} n_j y_k d\Sigma = -\frac{V}{2} H_{ijkl}^{(R)} \varkappa_{ij} \varkappa_{kl} + V \varkappa_{ij} \gamma_{ij}
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Тензор  $\underline{\varkappa}$  произвольный симметричный, поэтому возьмем его компоненты в следующем виде  $\varkappa_{ij} = h_{ijkl}^{(R)} \gamma_{kl}$ . В этом случае

$$\mathcal{K}(\underline{\varkappa}) \geq \mathcal{K}(\underline{\varkappa}^*) = \frac{V}{2} h_{ijkl}^{(R)} \gamma_{ij} \gamma_{kl} \tag{6.11}$$

Кроме этого, **на точном решении первой СКЗ**  $\mathcal{K} = \mathcal{L} = V h_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} / 2$ . В сноске приведено краткое доказательство этого факта<sup>6</sup>.

В результате получим из (6.9) и (6.11), следующую двухстороннюю оценку точных эффективных модулей

$$\frac{V}{2} h_{ijkl}^{(R)} \gamma_{ij} \gamma_{kl} \leq \mathcal{K} = \mathcal{L} = \frac{V}{2} h_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} \leq \frac{V}{2} h_{ijkl}^{(F)} \gamma_{ij} \gamma_{kl}, \quad (6.13)$$

то есть

$$h_{ijkl}^{(R)} \gamma_{ij} \gamma_{kl} \leq h_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} \leq h_{ijkl}^{(F)} \gamma_{ij} \gamma_{kl}, \quad (6.14)$$

или же

$$\langle C_{ijkl}^{-1} \rangle^{-1} \gamma_{ij} \gamma_{kl} \leq h_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} \leq \langle C_{ijkl} \rangle \gamma_{ij} \gamma_{kl} \quad (6.15)$$

Двухстороннее неравенство (6.15) заключает в некоторые границы точные эффективные модули упругости. **Эти границы принято называть вилкой Фойгта – Рейсса (иногда её называют также вилкой Хилла).**

Пусть, например, композит состоит из изотропных фаз то есть,  $C(x) = 3K(x)V + 2\mu(x)D$ , где  $K(x)$  — модуль объёмного сжатия, а  $\mu(x)$  — модуль сдвига. Тензоры  $V$  и  $D$  — изотропные постоянные тензоры четвёртого ранга, такие, что  $V_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}$ ,  $D_{ijkl} = \Delta_{ijkl} - V_{ijkl}/3$ . Кроме этого заведомо известно, что композит в целом ведет себя также как изотропное тело т.е.  $\underline{h} = 3K_{eff}V + 2\mu_{eff}D$ , тогда из (6.15) получим вилки для эффективных модулей объёмного сжатия и сдвига

$$\frac{1}{\langle 1/K \rangle} \leq K_{eff} \leq \langle K \rangle, \quad \frac{1}{\langle 1/\mu \rangle} \leq \mu_{eff} \leq \langle \mu \rangle \quad (6.16)$$

Отметим, что любые другие приближенные выражения для эффективных модулей упругости  $K_{eff}$  и  $\mu_{eff}$  должны также лежать внутри вилки Фойгта – Рейсса. Этот факт используется для отбраковки приближенных выражений эффективных характеристик. Однако, эта вилка слишком широка для реальных композитов [24]. Вилка Фойгта-Рейсса получена в предположении об однородности поля деформаций или напряжений в исследуемом композите.

**Возникает вопрос: можно ли улучшить вилку? То есть, не делая предположений об однородности напряжений или деформаций, получить приближенное решение задачи об эффективных свойствах, оценивающее точное**

<sup>6</sup>Для функционала Лагранжа на первой СКЗ это доказано в формуле (5.3.1). Для функционала Кастильяно на точном решении первой СКЗ получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= -\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV + \int_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j \gamma_{ik} y_k d\Sigma = -\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} u_{i,j} dV + \int_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j \gamma_{ik} y_k d\Sigma = \\ &= -\frac{1}{2} \int_V [(\sigma_{ij} u_i)_{,j} - \sigma_{ij,j} u_i] dV + \int_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j \gamma_{ik} y_k d\Sigma = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sigma_{ij} \mathbf{u}_{,j} n_j d\Sigma + \int_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j \gamma_{ik} y_k d\Sigma = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j \gamma_{ik} y_k d\Sigma = \frac{1}{2} \gamma_{ik} \int_V (\sigma_{ij} x_k)_{,j} dV = \frac{1}{2} \gamma_{ik} \int_V \sigma_{ik} dv = \frac{V}{2} \langle \sigma_{ij} \rangle \gamma_{ij} = \frac{V}{2} h_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} = \mathcal{L} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Ч. Т. Д.

**решение.** Ответ на такой вопрос оказался положительным, и разрешен он Хашиным и Штрикманом в 1962-1964 годах [25]. Это еще один из замечательных результатов в механике композитов.

## 6.2 Функционал Хашина-Штрикмана.

Рассмотрим первую краевую задачу для неоднородного упругого тела

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{kl} = \Delta_{klmn}u_{m,n}, \quad u_i|_{\Sigma} = u_i^0 \quad (6.17)$$

Наряду с задачей (6.17) для неоднородного тела рассмотрим точно такую же задачу для однородного тела той же самой формы. Задачу для однородного тела назовем сопутствующей задачей.

$$\tau_{ij,j} = 0, \quad \tau_{ij} = C_{ijkl}^0 e_{kl}, \quad e_{kl} = \Delta_{klmn}v_{m,n}, \quad v_i|_{\Sigma} = u_i^0 \quad (6.18)$$

Здесь  $C_{ijkl}^0$  — постоянные величины. Решение задачи (6.17) ищем в виде

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{u}^* \Rightarrow \underline{\varepsilon} = \underline{e} + \underline{\varepsilon}^* \quad (6.19)$$

Введем тензор поляризации

$$\underline{P} = \underline{\sigma} - \underline{C}^0 \underline{\varepsilon} = (\underline{C} - \underline{C}^0) \underline{\varepsilon} \quad (6.20)$$

Отсюда

$$\underline{\sigma} = \underline{P} + \underline{C}^0 \underline{\varepsilon} = \underline{P} + \underline{\tau} + \underline{C}^0 \underline{\varepsilon}^* \quad (6.21)$$

Из уравнения (6.21) и граничных условий исходной и сопутствующей задач следует:

$$\operatorname{div}(\underline{P} + \underline{C}^0 \underline{\varepsilon}^*) = 0, \quad u_i^*|_{\Sigma} = 0 \quad (6.22)$$

Составим Лагранжиан задачи (6.17)

$$\mathcal{L}(u) = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma} \underline{\varepsilon} dV \quad (6.23)$$

Легко показать, что  $\int_V \underline{\sigma} \underline{\varepsilon}^* dV = 0$ , поэтому

$$\mathcal{L}(u) = \frac{1}{2} \int_V (\underline{\sigma} \underline{\varepsilon} - \underline{\sigma} \underline{\varepsilon}^*) dV \quad (6.24)$$

Преобразуем выражение в круглых скобках под знаком интеграла

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} \underline{\varepsilon} - \underline{\sigma} \underline{\varepsilon}^* &= \underline{\sigma}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^*) = \underline{\sigma} \underline{e} = (\underline{P} + \underline{C}^0 \underline{\varepsilon}) \underline{e} = \underline{P} \underline{e} + \underline{C}^0 \underline{\varepsilon} \underline{e} = \\ &= \underline{\tau} \underline{\varepsilon} + 2\underline{P} \underline{e} - \underline{P} \underline{e} + \underline{P} \underline{\varepsilon} - \underline{P} \underline{\varepsilon} = \\ &= \underline{\tau}(\underline{e} + \underline{\varepsilon}^*) + 2\underline{P} \underline{e} + \underline{P} \underline{\varepsilon}^* - \underline{P} \underline{\varepsilon} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Учитывая, что  $\int_V \tilde{\varepsilon}^* dV = 0$ , получим

$$\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(v) - \frac{1}{2} \int_V (\tilde{P}\tilde{\varepsilon} - 2\tilde{P}\tilde{e} - \tilde{P}\tilde{\varepsilon}^*) dV \quad (6.26)$$

из (6.20)  $\Rightarrow$

$$\tilde{\varepsilon} = (\tilde{C} - \tilde{C}^o)^{-1} \tilde{P} \quad (6.27)$$

Следовательно

$$\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(v) - \frac{1}{2} \int_V [\tilde{P}(\tilde{C} - \tilde{C}^o)^{-1} \tilde{P} - 2\tilde{P}\tilde{e} - \tilde{P}\tilde{\varepsilon}^*] dV \quad (6.28)$$

В выражение (6.28) входит тензор поляризации  $\tilde{P}$ . Полагая, что он произволен, а не обязательно связан с решением исходной задачи по формуле (6.20), получим, что преобразованный к виду (6.28) лагранжиан является функционалом от  $\tilde{P}$ . Для этого случая обозначим

$$\mathcal{L}_p = \mathcal{L}(v) - \frac{1}{2} \int_V [\tilde{P}(\tilde{C} - \tilde{C}^o)^{-1} \tilde{P} - 2\tilde{P}\tilde{e} - \tilde{P}\tilde{\varepsilon}^*] dV \quad (6.29)$$

Это и есть функционал Хашина-Штрикмана. В нем  $\tilde{P}$  — произвольный тензор второго ранга,  $\tilde{e}$  — тензор деформаций в сопутствующей задаче,  $\tilde{\varepsilon}^*$  — решение задачи (6.22), зависящее от  $\tilde{P}$ .

# Лекция 7-8. Вариационный принцип Хашина-Штрикмана. Вилка Хашина-Штрикмана.

Продолжим изучать материал, на котором остановились в конце предыдущей лекции.

**7.0.1 Вариационный принцип Хашина-Штрикмана.** Вариационный принцип Хашина-Штрикмана гласит, что **функционал Хашина-Штрикмана, принимает на решении задачи (6.22) экстремальное значение, если тензор поляризации определен по формуле (6.20).**

Функционал максимальен, если среда сравнения более "жесткая"

$$(\underline{C} - \underline{C}^0) \underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon} > \alpha_1 \underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon}, \quad \alpha_1 > 0. \quad \text{Для } \forall \text{ симметричного } \underline{\varepsilon} \neq 0 \quad (7.1)$$

и минимальен, если среда сравнения более "мягкая"

$$(\underline{C} - \underline{C}^0) \underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon} < \alpha_2 \underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon}, \quad \alpha_2 > 0. \quad \text{Для } \forall \text{ симметричного } \underline{\varepsilon} \neq 0 \quad (7.2)$$

Для композита, составленного из изотропных компонентов условием максимума будет  $K(x) > K^0$ ,  $\mu(x) > \mu^0$ , а условием минимума  $-K(x) < K^0$ ,  $\mu(x) < \mu^0$ .

**7.0.2 Доказательство стационарности.** Прежде всего покажем, что решение задачи (6.22) при условии (6.20) является стационарной точкой [26] функционала Хашина-Штрикмана. Для этого нужно показать, что первая вариация функционала (6.29) равна нулю. В (6.29) нужно варьировать  $\underline{P}$  и  $\underline{\varepsilon}^*$ , поскольку, по условию,  $\underline{\varepsilon}^*$  удовлетворяет уравнению (6.22) и  $\Rightarrow \underline{\varepsilon}^* = \underline{\varepsilon}^*(\underline{P})$  при заданном  $\underline{P}$ .

Итак,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_p &= -\frac{1}{2} \int_V [2(C - C^0)^{-1} : \underline{P} : \delta \underline{P} - 2\underline{\varepsilon} \delta \underline{P} - \underline{\varepsilon}^* \delta \underline{P} - \underline{P} \delta \underline{\varepsilon}^*] dV = \\ &= -\frac{1}{2} \int_V \{2[(\underline{C} - \underline{C}^0)^{-1} \underline{P} - \underline{e}] \delta \underline{P} - \underline{\varepsilon}^* \delta \underline{P} - \underline{P} \delta \underline{\varepsilon}^*\} dV = \\ &= -\frac{1}{2} \int_V (2\underline{\varepsilon}^* \delta \underline{P} - \underline{\varepsilon}^* \delta \underline{P} - \underline{P} \delta \underline{\varepsilon}^*) dV = -\frac{1}{2} \int_V (\underline{\varepsilon}^* \delta \underline{P} - \underline{P} \delta \underline{\varepsilon}^*) dV \end{aligned} \quad (7.3)$$

Здесь использовано то, что  $(\underline{C} - \underline{C}^o)^{-1} \underline{P} = \underline{\varepsilon} = \underline{e} + \underline{\varepsilon}^*$ , так как по условию тензор поляризации не просто произволен, а подчинен ограничению (6.20), т.е.  $\underline{P} = (\underline{C} - \underline{C}^o)\underline{\varepsilon}$ .

Рассмотрим теперь уравнение (6.22). Умножим его на вариацию  $\delta u_i^*$ , проинтегрируем по объему и воспользуемся тем, что  $u_i|_{\Sigma} = 0$ , получим:

$$\begin{aligned} & \int_V (P_{ij} + C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^*)_{,j} \delta u_i^* dV = \\ & = \int_V [(P_{ij} + C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^*) \delta u_i^*]_{,j} dV - \int_V (P_{ij} - C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^*) \delta \varepsilon_{ij}^* dV = 0 \\ & \Rightarrow \int_V (\underline{P} \delta \underline{\varepsilon}^* - \underline{C}^o \underline{\varepsilon}^* \delta \underline{\varepsilon}^*) dV = 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Уравнения (6.22) справедливы также и для вариаций, т.е.

$$div(\delta \underline{P} + \underline{C}^o \delta \underline{\varepsilon}^*) = 0 \quad (7.5)$$

Умножим (7.5) на  $u_i^*$ , проинтегрируем по объему и используем, что  $\delta u_i^*|_{\Sigma} = 0$ , получим:

$$\int_V (\underline{\varepsilon}^* \delta \underline{P} + \underline{C}^o \underline{\varepsilon}^* \delta \underline{\varepsilon}^*) dV = 0 \quad (7.6)$$

После вычитания из уравнения (7.6) уравнения (7.5) найдем:

$$\int_V (\underline{\varepsilon}^* \delta \underline{P} - \underline{P} \delta \underline{\varepsilon}^*) dV = 0 \quad (7.7)$$

Отсюда и из (7.3) следует, что решение задачи (6.22) обращает в нуль первую вариацию функционала Хашина-Штрикмана, если тензор поляризации ограничен в своем произволе условием (6.20)

**7.0.3 Доказательство минимаксности.** Для того чтобы выяснить условия, при которых функционал Хашина-Штрикмана принимает максимальное или минимальное значения найдем вторую вариацию этого функционала

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathcal{L}_p &= -\frac{1}{2} \int_V [2(\underline{C} - \underline{C}^o)^{-1} \delta \underline{P} \delta \underline{P} - 2 \delta \underline{P} \delta \underline{\varepsilon}^*] dV = \\ &= - \int_V [(\underline{C} - \underline{C}^o)^{-1} \delta \underline{P} \delta \underline{P} - \delta \underline{P} \delta \underline{\varepsilon}^*] dV \end{aligned} \quad (7.8)$$

Из (6.21)  $\Rightarrow \delta \underline{P} = \delta \underline{\sigma} - \underline{C}^o \delta \underline{\varepsilon}^*$ , поэтому

$$\int_V \delta \underline{P} \delta \underline{\varepsilon}^* dV = \int_V \delta \underline{\sigma} \delta \underline{\varepsilon}^* dV - \int_V \underline{C}^o \delta \underline{\varepsilon}^* \delta \underline{\varepsilon}^* dV = - \int_V \underline{C}^o \delta \underline{\varepsilon}^* \delta \underline{\varepsilon}^* dV \quad (7.9)$$

Учитывая (7.9), получим вместо (7.8) следующую формулу для второй вариации функционала Хашина-Штрикмана:

$$\delta^2 \mathcal{L}_p = - \int_V [(\underline{C} - \underline{C}^o)^{-1} \delta \underline{P} \delta \underline{P} + \underline{C}^o : \delta \underline{\varepsilon}^* : \delta \underline{\varepsilon}^*] dV \quad (7.10)$$

Пусть выполнено условие  $(7.1) \Rightarrow$  обе квадратичные формы в (7.10) положительно определены и,  $\Rightarrow \delta^2 \mathcal{L}_p < 0$ . Следовательно,

*функционал Хашина-Штрикмана достигает максимального значения на решении задачи (6.22) при условии, что тензор поляризации определен по формуле  $P = (\underline{C} - \underline{C}^o)\underline{\varepsilon}$  и среда сравнения более "мягкая" т.е.  $\underline{C}_{\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}} > \underline{C}^o_{\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}}$*

Рассмотрим далее интеграл  $J = \int_V \underline{C}^o \delta \underline{P} \delta \underline{P} dV$

$$J = \int_V \underline{C}^o (\delta \underline{\sigma} - \underline{C}^o \delta \underline{\varepsilon}^*) (\delta \underline{\sigma} - \underline{C}^o \delta \underline{\varepsilon}^*) = \int_V (\underline{C}^o \delta \underline{\sigma} \delta \underline{\sigma} + \underline{C}^o \delta \underline{\varepsilon}^* \delta \underline{\varepsilon}^*) dV \quad (7.11)$$

Отсюда вытекает очевидное равенство

$$\int_V \underline{C}^o \delta \underline{P} \delta \underline{P} dV - \int_V \underline{C}^o \delta \underline{\varepsilon}^* \delta \underline{\varepsilon}^* = \int_V \underline{C}^o \delta \underline{\sigma} \delta \underline{\sigma} \quad (7.12)$$

Учитывая, что  $\underline{C}^o$  и  $\underline{C}^o$  положительно определенные тензоры, получаем:

$$\int_V \underline{C}^o \delta \underline{P} \delta \underline{P} dV > \int_V \underline{C}^o \delta \underline{\varepsilon}^* \delta \underline{\varepsilon}^* dV \quad (7.13)$$

Принимая во внимание последнее неравенство, найдем из (7.10)

$$\delta^2 \mathcal{L}_p > - \int_V [(\underline{C} - \underline{C}^o)^{-1} + \underline{C}^o] \delta \underline{P} \delta \underline{P} dV \quad (7.14)$$

Вторая вариация будет положительна, если  $[(\underline{C} - \underline{C}^o)^{-1} + \underline{C}^o]_{\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}} < 0$ , или

$$(\underline{C} - \underline{C}^o)^{-1} \underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon} < -\underline{C}^o \underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon} < -\alpha_3 \underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon} \quad (7.15)$$

Если  $(\underline{C} - \underline{C}^o)^{-1}$  — отрицательно определен, то и  $\underline{C} - \underline{C}^o$  — отрицательно определен  
 $\Rightarrow \underline{C} \underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon} < \underline{C}^o \underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}$ .

Итак

*функционал Хашина-Штрикмана принимает минимальное значение на решении задачи (6.22) при условии, что тензор поляризации определен по формуле  $\underline{P} = (\underline{C} - \underline{C}^o)\underline{\varepsilon}$  и среда сравнения более "жесткая" т.е.  $\underline{C} \underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon} < \underline{C}^o \underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}$*

**7.0.4 Доказательство того, что в стационарном состоянии функционал Хашина-Штрикмана совпадает с лагранжианом исходной задачи.** Пусть тензор поляризации  $\tilde{P} = (\tilde{C} - \tilde{C}^o)\xi$ , а  $\varepsilon^*$  — решение задачи (6.22), тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_p &= \frac{1}{2} \int_V \tau \tilde{\varepsilon} dV - \frac{1}{2} \int_V [\tilde{P}(\tilde{C} - \tilde{C}^o)^{-1} \tilde{P} - 2\tilde{P}\tilde{\varepsilon} - \tilde{P}\xi^*] dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \tau \tilde{\varepsilon} dV - \frac{1}{2} \int_V \tilde{P}(\xi - 2\tilde{\varepsilon} - \xi^*) dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \tau \tilde{\varepsilon} dV + \frac{1}{2} \int_V P \tilde{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_V \tau \tilde{\varepsilon} dV + \frac{1}{2} \int_V (\tilde{C} - \tilde{C}^o)^{-1} \varepsilon \tilde{\varepsilon} dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \tau \tilde{\varepsilon} dV + \frac{1}{2} \int_V (\sigma \tilde{\varepsilon} - \tau \tilde{\varepsilon}) dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \tau \tilde{\varepsilon} dV + \frac{1}{2} \int_V [\sigma(\xi - \xi^*) - \tau(\varepsilon + \xi^*)] dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \tau \tilde{\varepsilon} dV + \frac{1}{2} \int_V (\sigma \xi - \tau \varepsilon) dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma \xi dV = \mathcal{L}(u)\end{aligned}$$

## 7.1 Вилка Хашина-Штрикмана.

В зависимости от того каковы свойства тела сравнения функционал Хашина-Штрикмана в стационарном состоянии принимает минимальные или максимальные значения. В случае 1сказ  $\mathcal{L} = 1/2 \tilde{h} \gamma \gamma$ , где  $\tilde{h}$  — тензор эффективных модулей упругости. Учитывая то, что в стационарном состоянии функционал Хашина-Штрикмана совпадает с лагранжианом, получаем

$$\boxed{\mathcal{L}_p|_{\tilde{C}_{\gamma\gamma} > C^o_{\gamma\gamma}} \leq \frac{V}{2} \tilde{h} \gamma \gamma \leq \mathcal{L}_p|_{C_{\gamma\gamma} < C^o_{\gamma\gamma}}} \quad (7.16)$$

**Неравенство (7.16), ограничивающее сверху и снизу квадратичную форму для точных эффективных модулей упругости называется вилкой Хашина-Штрикмана.**

**7.1.1 Случай  $N \geq 2$  изотропных компонент.** Предположим, что композит состоит из  $N$  различных изотропных компонент, расположенных в пространстве так, что эффективная среда априори является также изотропной средой. Тогда

$$\tilde{C}(x) = 3K(x)V + 2\mu(x)\tilde{D}, \quad C^o = 3K^o V + 2\mu^o \tilde{D}, \quad h = 3K_{eff}V + 2\mu_{eff}\tilde{D} \quad (7.17)$$

Тензор поляризации  $\tilde{P}$  и тензор  $\gamma$  представим в виде сумм шаровых и девиаторных частей.

$$\tilde{P} = \bar{P} + P_0 \delta, \quad P_0 = \frac{1}{3} P_{ii}, \quad \bar{P} = \tilde{P} - P_0 \delta,$$

$$\underline{\gamma} = \bar{\underline{\gamma}} + \gamma_0 \underline{\delta}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{3} \gamma_{ii}, \quad \bar{\underline{\gamma}} = \underline{\gamma} - \gamma_0 \underline{\delta}$$

Учитывая, что

$$V\underline{\gamma} = \gamma_0 \underline{\delta}, \quad V\underline{\gamma}\underline{\gamma} = 3\gamma_0^2, \quad D\underline{\gamma} = \bar{\underline{\gamma}}, \quad D\underline{\gamma}\underline{\gamma} = \bar{\underline{\gamma}}\bar{\underline{\gamma}},$$

получим

$$\mathcal{L}(v) = \frac{V}{2} C^o \underline{e} \underline{e} = \frac{V}{2} C^o \underline{\gamma} \underline{\gamma} \frac{V}{2} (9K^o \gamma_0^2 + 2\mu^o \bar{\underline{\gamma}} \bar{\underline{\gamma}}) \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_V [P(C - C^o)^{-1} P - 2\underline{P}\underline{\gamma}] dV &= \\ &= \frac{V}{2} \left[ -\left\langle \frac{P_0^2}{K - K^o} \right\rangle - \left\langle \frac{\bar{\underline{P}}\bar{\underline{P}}}{2(\mu - \mu^o)} \right\rangle + 6\langle P_0 \rangle \gamma_0 + 2\langle \bar{\underline{P}} \rangle \bar{\underline{\gamma}} \right] \end{aligned} \quad (7.19)$$

Примем пока без доказательства<sup>7</sup>, что

$$\frac{1}{2} \int_V \underline{P}\underline{\varepsilon}^* dV = \frac{V}{2} \left[ \alpha^o (\langle P_0^2 \rangle - \langle P_0 \rangle^2) + \beta^o (\langle \bar{\underline{P}}\bar{\underline{P}} \rangle - \langle \bar{\underline{P}} \rangle \langle \bar{\underline{P}} \rangle) \right], \quad (7.20)$$

где

$$\alpha^o = -\frac{3}{3K^o + 4\mu^o}, \quad \beta^o = -\frac{3(K^o + 2\mu^o)}{5\mu^o(3K^o + 4\mu^o)} \quad (7.21)$$

Сложим далее выражения (7.18), (7.19), (7.20) и получим формулу для функционала Хашина-Штрикмана, когда композит составлен из равномерно распределенных изотропных компонентов

$$\begin{aligned} \frac{2}{V} \mathcal{L}_p &= 9K^o \gamma_0^2 + 2\mu^o \bar{\underline{\gamma}} \bar{\underline{\gamma}} + \\ &+ 6\langle P_0 \rangle \gamma_0 + 2\langle \bar{\underline{P}} \rangle \bar{\underline{\gamma}} - \left\langle \frac{P_0^2}{K - K^o} \right\rangle - \left\langle \frac{\bar{\underline{P}}\bar{\underline{P}}}{2(\mu - \mu^o)} \right\rangle + \\ &+ \alpha^o (\langle P_0^2 \rangle - \langle P_0 \rangle^2) + \beta^o (\langle \bar{\underline{P}}\bar{\underline{P}} \rangle - \langle \bar{\underline{P}} \rangle \langle \bar{\underline{P}} \rangle) \end{aligned} \quad (7.22)$$

**Выберем тензор поляризации постоянным внутри каждого компонента.**

Тогда

$$\langle \underline{P} \rangle = \sum_{n=1}^N P_n v_n, \quad (7.23)$$

где  $v_n$  — относительная объемная доля n-го компонента  $v_n = V_n/V$ ;  $\sum v_n = 1$ . Для случая кусочно-постоянного тензора поляризации функционал Хашина-Штрикмана примет вид:

$$\frac{2}{V} \mathcal{L}_p = 9K^o \gamma_0^2 + 2\mu^o \bar{\underline{\gamma}} \bar{\underline{\gamma}} + 6\gamma_0 \sum_{n=1}^N P_{0(n)} v_n + 2\bar{\underline{\gamma}} \sum_{n=1}^N \bar{\underline{P}}_n v_n -$$

<sup>7</sup> Доказательство в книге [5] на странице 126.

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{n=1}^N \frac{P_{0(n)}^2}{K_n - K^o} v_n - \sum_{n=1}^N \frac{\bar{P}_n \bar{P}_n}{2(\mu_n - \mu^o)} v_n + \\
 & + \alpha^o \left[ \sum_{n=1}^N P_{0(n)}^2 v_n - \left( \sum_{n=1}^N P_{0(n)} v_n \right)^2 \right] + \\
 & + \beta^o \left[ \sum_{n=1}^N \bar{P}_n \bar{P}_n v_n - \left( \sum_{n=1}^N \bar{P}_n v_n \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{7.24}$$

Итак получено, что функционал Хашина-Штрикмана зависит от величин  $P_{0(n)}$  и  $\bar{P}_n$ . Найдем такие  $P_{0(n)}$  и  $\bar{P}_n$ , при которых функционал Хашина-Штрикмана принимает стационарное значение. Для этого необходимо, чтобы

$$\frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial P_{0(n)}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \bar{P}_n} = 0 \tag{7.25}$$

Отсюда и из (7.24) получим систему уравнений для  $P_{0(n)}$  и  $\bar{P}_n$

$$\begin{cases} 3\gamma_0 - \frac{P_{0(n)}}{K_n - K^o} + \alpha^o \langle P_0 \rangle = 0 \\ \bar{\gamma} + \frac{\bar{P}_n}{2(\mu_n - \mu^o)} + \beta^o \bar{P}_n - \beta^o \langle \bar{P} \rangle = 0 \end{cases} \tag{7.26}$$

Умножим уравнения системы на  $v_n$ , просуммируем по  $n$ , и учтем, что  $\sum v_n = 1$ , получим

$$\left\langle \frac{P_0}{K - K^o} \right\rangle = 3\gamma_0, \quad \left\langle \frac{\bar{P}}{2(\mu - \mu^o)} \right\rangle = \bar{\gamma} \tag{7.27}$$

Из первого уравнения системы выразим  $P_{0(n)}$ , а из второго  $\bar{P}_n$

$$P_{0(n)} = \left( \alpha^o - \frac{1}{K_n - K^o} \right)^{-1} (\alpha^o \langle P_0 \rangle - 3\gamma_0) \tag{7.28}$$

$$\bar{P}_n = \left( \beta^o - \frac{1}{2(\mu_n - \mu^o)} \right)^{-1} (\beta^o \langle \bar{P} \rangle - \bar{\gamma}) \tag{7.29}$$

Умножив выражения (7.28), (7.29) на уравнения  $v_n$  и просуммировав по  $n$ , получим два уравнения, из которых найдем  $\langle P_0 \rangle$  и  $\langle \bar{P} \rangle$

$$\langle P_0 \rangle = \frac{3A}{1 + A\alpha^o}, \quad \langle \bar{P} \rangle = \frac{B}{1 + B\beta^o}, \tag{7.30}$$

где

$$A = \left\langle \left( \frac{1}{K - K^o} - \alpha^o \right)^{-1} \right\rangle, \quad B = \left\langle \left( \frac{1}{2(\mu - \mu^o)} - \beta^o \right)^{-1} \right\rangle \tag{7.31}$$

Вернемся снова к функционалу Хашина-Штрикмана в стационарной точке

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_p &= \frac{1}{2} \int_V \tau \tilde{\varepsilon} dV - \frac{1}{2} \int_V [\tilde{P}(\tilde{C} - \tilde{C}^o)^{-1} \tilde{P} - 2\tilde{P}\tilde{\varepsilon} - \tilde{P}\tilde{\varepsilon}^*] dV = \\
 &= \frac{1}{2} \int_V \tau \tilde{\varepsilon} dV - \frac{1}{2} \int_V P(\varepsilon - 2e - \varepsilon^*) dV = \\
 &= \frac{1}{2} \int_V \tau \tilde{\varepsilon} dV + \frac{1}{2} \int_V P \tilde{e} dV = \\
 &= \frac{V}{2} \left[ (3K^o V + 2\mu^o D) \underline{\gamma} \underline{\gamma} + (\langle \bar{P} \rangle + \langle P_0 \rangle \underline{\delta}) \underline{\gamma} \right] = \\
 &= \frac{V}{2} \left[ 9(K^o + \frac{A}{1+A\alpha^o}) \gamma_0^2 + (2\mu^o + \frac{B}{1+B\beta^o}) \bar{\gamma} \bar{\gamma} \right]
 \end{aligned} \tag{7.32}$$

Учитывая что  $V/2h \underline{\gamma} \underline{\gamma} = V/2(9K_{eff} \gamma_o^2 + 2\mu_{eff} \bar{\gamma} \bar{\gamma})$  и из выражений (7.16), (7.32) получим неравенства

$$K_{eff} \gtrless K^o + \frac{A}{1+A\alpha^o}, \quad \mu_{eff} \gtrless \mu^o + \frac{1/2B}{1+B\beta^o} \tag{7.33}$$

**Пусть  $K_1$  и  $\mu_1$  модуль объемного сжатия и модуль сдвига наиболее мягкого компонента, а  $K_N$  и  $\mu_N$  — то же для наиболее жесткого компонента. Тогда, положив  $K^o = K_1$ ,  $\mu^o = \mu_1$ , применяем в формуле (7.33) нижний знак неравенства. Если же  $K^o = K_N$ ,  $\mu^o = \mu_N$ , тогда используется верхний знак.**

**7.1.2 Случай  $N = 2$  изотропных компонент.** В частности для двухкомпонентного композита вилка Хашина-Штрикмана имеет вид [5]:

$$K_2 + \frac{v_1(K_1 - K_2)}{1 + v_2 a_2(K_1 - K_2)} \leq K_{eff} \leq K_1 + \frac{v_2(K_2 - K_1)}{1 + v_1 a_1(K_2 - K_1)}, \tag{7.34}$$

$$\mu_2 + \frac{v_1(\mu_1 - \mu_2)}{1 + v_2 a_2(\mu_1 - \mu_2)} \leq \mu_{eff} \leq \mu_1 + \frac{v_2(\mu_2 - \mu_1)}{1 + v_1 a_1(\mu_2 - \mu_1)}, \tag{7.35}$$

где через  $a_I$  и  $b_I$  обозначено

$$\begin{aligned}
 a_I &= -\alpha_I = \frac{3}{3K_I + 4\mu_I} = \frac{1}{K_I} \frac{3}{3 + 4\frac{\mu_I}{K_I}} = \frac{1}{3K_I} \frac{1 + \nu_I}{1 - \nu_I}, \\
 b_I &= -2\beta_I = \frac{6(K_I + 2\mu_I)}{5\mu_I(3K_I + 4\mu_I)} = \frac{1}{\mu_I} \frac{6(1 + 2\frac{\mu_I}{K_I})}{5(3 + 4\frac{\mu_I}{K_I})} = \frac{6}{45\mu_I} \frac{4 - 5\nu_I}{1 - \nu_I}
 \end{aligned} \tag{7.36}$$

Здесь учтено, что  $\frac{\mu}{K} = \frac{3}{2} \frac{1-2\nu}{1+\nu}$ , а  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

## 7.2 Вилка Хилла-Хашина для макроскопически трансверсально изотропного композита.

Прежде всего условимся, что ось  $x_1$  является осью изотропии, а плоскость  $x_2, x_3$  — плоскость изотропии. Такие макроскопические свойства имеет слоистый вдоль оси  $x_1$  композит с изотропными слоями, а также волокнистый вдоль оси  $x_1$  композит, у которого волокна изотропные, прямые и круглые, имеют одинаковый диаметр и расположены в центре ячейки в виде шестиугольного цилиндра (гексагональная упаковка).

Макроскопически трансверсальный композит характеризуется пятью независимыми эффективными упругими характеристиками. Их можно выбирать различными способами. В книге Кристенсена [27] в качестве независимых эффективных характеристик приняты  $K_{23}^{eff}$  — модуль объёмного сжатия в плоскости изотропии,  $\mu_{23}^{eff}$  — эффективный модуль сдвига в плоскости изотропии,  $E_{11}^{eff}$  — эффективный модуль Юнга при растяжении поперёк слоёв,  $E_{22}^{eff} = E_{33}^{eff}$  — модуль Юнга в плоскости изотропии,  $\nu_{12}^{eff} = \nu_{13}^{eff}$  — эффективный коэффициент поперечной деформации (вдоль оси  $x_2$ ) при растяжении в направлении оси  $x_1$  (поперёк слоёв). Индекс 1 соответствует армировке, в 2 — матрице, причем принято  $\mu_1 \geq \mu_2$ ,  $K_1 \geq K_2$

Для двухкомпонентных волокнистых композитов вилки эффективных свойств были вычислены практически одновременно Хиллом и Хашином [28, 29].

$$\begin{aligned} K_2 + \frac{v_1}{1/(K_1 - K_2) + v_2/(K_2 + \mu_2)} &\leq K_{23} \leq K_1 + \frac{v_1}{1/(K_2 - K_1) + v_2/(K_1 + \mu_1)} \\ \mu_2 + \frac{v_1}{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} + v_2 \frac{K_2 + 2\mu_2}{2\mu_2(K_2 + \mu_2)}} &\leq \mu_{23} \leq \mu_1 + \frac{v_2}{\frac{1}{\mu_2 - \mu_1} + v_1 \frac{K_1 + 2\mu_1}{2\mu_1(K_1 + \mu_1)}} \\ \mu_2 + \frac{v_1}{1/(\mu_1 - \mu_2) + v_2/2\mu_2} &\leq \mu_{12} \leq \mu_1 + \frac{v_2}{1/(\mu_2 - \mu_1) + v_1/2\mu_1} \end{aligned} \quad (7.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_1 v_2}{v_1/K_2 + v_2/K_1 + 1/\mu_2} &\geq \frac{E_{11} - v_1 E_1 - v_2 E_2}{4(\nu_1 - \nu_2)^2} \leq \frac{v_1 v_2}{v_1/K_2 + v_2/K_1 + 1/\mu_1} \\ \frac{v_1 v_2}{v_1/K_2 + v_2/K_1 + 1/\mu_2} &\geq \frac{\nu_{12} - v_1 \nu_1 - v_2 \nu_2}{(\nu_1 - \nu_2)(1/K_1 - 1/K_2)} \leq \frac{v_1 v_2}{v_1/K_2 + v_2/K_1 + 1/\mu_1} \end{aligned}$$

## 7.3 Вилка Йеха (учет формы включений).

Из вилок, учитывающих влияние формы компонентов известна вилка Йеха [5, стр. 215].

# Лекция 9. Задача Эшелби. Метод Эшелби

## 9.1 Задача Эшелби. Тензор Эшелби.

Большое количество приближенных методов вычисления эффективных коэффициентов упругости основано на классической задаче Эшелби о внезапном превращении некоторого объёма вещества в бесконечной упругой среде [?, стр. 103-139].

### 9.1.1 Превращение (трансформация) области тела.

Под превращением понимается самопроизвольное преобразование некоторого конечного объёма заданной формы, в другой объём другой формы.

Превращение в свободном состоянии выливается в однородную деформацию трансформации  $\underline{\varepsilon}^T$ . При этом, физико-механические свойства материала трансформированной области остаются без изменений.

Задача состоит в том, чтобы найти напряжения и деформации в области и в среде после превращения. Деформации предполагаются малыми.

### 9.1.2 Этапы решения задачи.

При решении задачи Эшелби выделяется три этапа:

1 этап — мысленно вынимаем область и даём ей возможность испытать свободную деформацию превращения (трансформации)  $\underline{\varepsilon}^T$ . При этом, ни в среде ни в материале, испытавшем превращение, нет напряжений.

2 этап — Удержим область от трансформации (изменения объёма и формы), приложив в момент трансформации к начальной поверхности  $\Sigma$  нагрузки

$$p_i = -C_{ijkl}\underline{\varepsilon}_{kl}^T n_j(\Sigma) \quad (9.38)$$

Здесь  $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$  — внешняя нормаль к области в начале трансформации. В этом случае область не изменит ни объём ни форму, но в материале области появятся предварительные напряжения

$$\sigma_{ij}^T = -C_{ijkl}\underline{\varepsilon}_{kl}^T \quad (9.39)$$

3 этап — вложим напряженную область на старое место в среду. Склейм по границе и освободим область от приложенных сил, то есть приложим к поверхности  $\Sigma$  силы  $-p_i$ .

Таким образом, **после превращения в среде на границе  $\Sigma$  внутренне напряженной области  $V$  действуют силы  $q_i = -p_i = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^T n_j$ , от которых в области  $V$  и в вне её возникают "стеснённые" перемещения  $\tilde{u}^c$  и деформации  $\tilde{\varepsilon}^c$ .**

Пусть  $u_i^{(k)}(x, \xi)$  — тензор Грина для бесконечной упругой однородной анизотропной среды<sup>8</sup> (в изотропном случае его принято называть тензором Кельвина [?]). В этом случае компоненты вектора стеснённых перемещений *в среде и в трансформированной области* определяются по формуле:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^c(\mathbf{x}) &= \int_{\Sigma} u_i^{(m)}(x, \eta) q_m(\eta) d\Sigma_{\eta} = - \int_{\Sigma} u_i^{(m)}(x, \eta) p_m(\eta) d\Sigma_{\eta} = \\ &= \int_{\Sigma} u_i^{(m)}(x, \eta) C_{mtkl} \varepsilon_{kl}^T n_t(\eta) d\Sigma_{\eta} = \int_V u_{i|t}^{(m)}(x, \xi) dV_{\xi} C_{mtkl} \varepsilon_{kl}^T = \\ &= - \int_V u_{i,t}^{(m)}(x, \xi) dV_{\xi} C_{mtkl} \varepsilon_{kl}^T, \end{aligned} \quad (9.40)$$

### 9.1.3 Тензор Эшелби (анизотропная среда и произвольная область трансформации).

Из соотношений Коши  $\varepsilon_{ij}^c = (u_{i,j}^c + u_{j,i}^c)/2$  получаем:

$$\varepsilon_{ij}^c = \mathcal{E}_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}^T, \quad (9.41)$$

где через  $\mathcal{E}$  — обозначен тензор Эшелби

$$\mathcal{E}_{ijkl}(x) = -\Delta_{ijpq} \int_V u_{p,qt}^{(m)}(x, \xi) dV_{\xi} C_{mtkl} = - \int_V \varepsilon_{ij,t}^{(m)}(x, \xi) dV_{\xi} C_{mtkl} \quad (9.42)$$

Таким образом, **тензор Эшелби позволяет найти деформации, как в бесконечной среде, так и в области испытавшей превращение в стеснённых условиях.** Тензор Эшелби — тензор четвёртого ранга  $\mathcal{B}^+$ . Он симметричен по индексам в первой второй парах индексов и несимметричен по этим парам индексов.

### 9.1.4 Напряжения при трансформации.

Для вычисления напряжений необходимо сложить напряжения  $\sigma^c$  от стесненных деформаций с предварительными напряжениями  $\tilde{\sigma}^T$ , определёнными по формуле (9.39)

$$\sigma = \sigma^c + \tilde{\sigma}^T = \begin{cases} C(\mathcal{E} - \Delta)\varepsilon^T, & \text{if } x \in V \\ C \mathcal{E} \varepsilon^T, & \text{if } x \in V \end{cases} \quad (9.43)$$

<sup>8</sup>и-я компонента вектора перемещений в точке  $x(x_1, x_2, x_3)$  от единичной силы, приложенной в точке  $\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  и направленной по оси  $x_k$

### 9.1.5 Перемещения в случае изотропной среды и произвольной области трансформации.

В изотропном случае компоненты тензора перемещений Кельвина определяются по следующим формулам [?]:

$$u_i^{(m)}(x, \xi) = \frac{1}{8\pi\mu} (\delta_{im}\varrho_{,pp} - \varkappa\varrho_{,im}) \quad (9.44)$$

Здесь  $\varrho$  — расстояние между точками  $x$  и  $\xi$ , а  $\varkappa$  — константа

$$\varrho = \sqrt{(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)}, \quad \varkappa = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1}{2(1 - \nu)}$$

Вычислим производные

$$\begin{aligned} \varrho_{,i} &= \frac{x_i - \xi_i}{\varrho} = -l_i, \\ \varrho_{,im} &= \frac{\delta_{im}}{\varrho} - \frac{(x_i - \xi_i)(x_m - \xi_m)}{\varrho^3} = \frac{1}{\varrho} (\delta_{im} - l_i l_m), \\ \varrho_{,imt} &= 3 \frac{(x_i - \xi_i)(x_m - \xi_m)(x_t - \xi_t)}{\varrho^5} - \frac{x_i - \xi_i}{\varrho^3} \delta_{mt} - \frac{x_m - \xi_m}{\varrho^3} \delta_{it} - \frac{x_t - \xi_t}{\varrho^3} \delta_{im} = \\ &= \frac{1}{\varrho^3} (-3l_i l_m l_t + l_i \delta_{mt} + l_m \delta_{it} + l_t \delta_{im}). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\varrho_{,ppt} = \frac{1}{\varrho^3} (-3l_t + l_t + l_t + 3l_t) = 2 \frac{l_t}{\varrho^2}.$$

Таким образом,

$$u_{i,t}^{(m)} = \frac{1}{\varrho^2} f_{imt}(l), \quad (9.45)$$

где

$$f_{imt}(l) = \frac{1}{8\pi\mu} [2\delta_{im}l_t + \varkappa (3l_i l_m l_t - l_i \delta_{mt} - l_m \delta_{it} - l_t \delta_{im})], \quad (9.46)$$

где  $\vec{l}$  — единичный вектор направления от точки  $x$  к точке  $\xi$ , то есть

$$\vec{l} = \left( \frac{\xi_1 - x_1}{\varrho}, \frac{\xi_2 - x_2}{\varrho}, \frac{\xi_3 - x_3}{\varrho} \right) \Rightarrow l_i = \frac{\xi_i - x_i}{\varrho}, \quad (9.47)$$

следовательно,  $f_{imt}(l)$  — нечетная по  $\vec{l}$ . Подставим далее (9.45) в формулу (9.40) для стесненных перемещений и получим:

$$u_i^c(x) = - \int_V \frac{1}{\varrho^2} f_{imt}(\vec{l}) dV_\xi C_{mtkl} \varepsilon_{kl}^T, \quad (9.48)$$

**Формула (9.48) справедлива для всех  $x \in \mathbb{R}^3$ .**

### 9.1.6 Перемещения внутренних точек области трансформации.

Для внутренних точек области трансформации  $dV_\xi = \varrho^3 d\omega$  и формула примет вид:

$$u_i^c(x) = - \int_{\Omega=4\pi} \varrho(l) f_{imt}(\vec{l}) d\omega C_{mtkl} \varepsilon_{kl}^T, \quad x \in V, \quad (9.49)$$

где  $d\omega$  — телесный угол<sup>9</sup>, под которым видна элементарная площадка  $d\Sigma_\xi$  на поверхности области в окрестности точки  $\xi \in \Sigma$  из внутренней точки  $x$  области  $V$ .

Уравнение поверхности области  $V$  имеет вид:

$$F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0, \text{ где } \xi_i = x_i + \varrho l_i \Rightarrow F(x_1 + \varrho l_1, x_2 + \varrho l_2, x_3 + \varrho l_3) = 0. \quad (9.50)$$

Во второй из формул (9.50)  $\varrho$  — положительная величина, которая равна расстоянию от точки  $x \in V$  до точки  $\xi \in \Sigma$ .

## 9.2 Случай изотропной среды и эллипсоидальной области трансформации.

### 9.2.1 Трёхосный эллипсоид.

Если область трансформации имеет форму трехосного эллипсоида, то стесненные перемещения внутри него будут линейными функциями координат. **Покажем это.**

Пусть начало декартовых координат расположено в центре эллипсоида, а  $a_1, a_2, a_3$  — полуоси эллипсоида

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \leq 1.$$

Уравнение (9.50) принимает вид:

$$\frac{(x_1 + \varrho \xi_1)^2}{a_1^2} + \frac{(x_2 + \varrho \xi_2)^2}{a_2^2} + \frac{(x_3 + \varrho \xi_3)^2}{a_3^2} = 1, \quad x \in V, \quad \xi \in \Sigma,$$

Отсюда получим квадратное уравнение для  $\varrho$

$$\alpha(l) \varrho^2 + 2\beta(l) \varrho - \gamma = 0, \quad (9.51)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{l_1^2}{a_1^2} + \frac{l_2^2}{a_2^2} + \frac{l_3^2}{a_3^2}; \\ \beta &= \lambda_j x_j; \quad \lambda_1 = \frac{l_1}{a_1^2}, \lambda_2 = \frac{l_2}{a_2^2}, \lambda_3 = \frac{l_3}{a_3^2}; \end{aligned}$$

<sup>9</sup>вся поверхность  $\Sigma$  видна из внутренней точки  $x$  под телесным углом равным  $4\pi$

$$\gamma = 1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} \geq 0, \quad \text{так как } x \in V$$

Решив уравнение (9.51) найдем положительный корень  $\varrho(\vec{l})$

$$\varrho(\vec{l}) = \sqrt{\frac{\beta^2(\vec{l})}{\alpha^2(\vec{l})} + \frac{\gamma}{\alpha(\vec{l})}} - \frac{\beta(\vec{l})}{\alpha(\vec{l})} \quad (9.52)$$

В формуле (9.52) первое слагаемое (корень) четно по  $\vec{l}$ , а второе  $\beta = \lambda_j x_j = l_i x_j / a_j^2$  — нечетное, поэтому в интеграле (9.49) по четному промежутку ненулевым будет только интеграл от четной на этом промежутке функции, т.е. отличен от нуля интеграл от произведения нечетной функции  $f_{imt}(\vec{l})$  на нечетное второе слагаемое из выражения для  $\varrho(\vec{l})$  и, следовательно, вместо (9.49) получим:

$$u_i^c(x) = x_j \int_{\Omega=4\pi} \frac{\lambda_j(\vec{l})}{\alpha(\vec{l})} f_{imt}(\vec{l}) d\omega C_{mtkl} \varepsilon_{kl}^T, \quad (9.53)$$

т.е. **стеснённые перемещения внутри эллипсоидальной области, испытавшей превращение являются линейными функциями координат точки области.** Вычисляя по формулам Коши стесненные деформации  $\xi^c$ , приходим к выводу, что **стеснённые деформации  $\xi^c$  постоянны внутри эллипсоида и выражаются через постоянные деформации трансформации  $\varepsilon^T$  с помощью тензора Эшелби, который также не зависит от координат и имеет вид:**

$$\exists_{ijkl} = \Delta_{ijpq} \int_{\Omega=4\pi} \frac{\lambda_p f_{qmt}}{\alpha} d\omega C_{mtkl} = \frac{1}{2} \int_{\Omega=4\pi} \frac{\lambda_i f_{jmt} + \lambda_j f_{imt}}{\alpha} d\omega C_{mtkl}. \quad (9.54)$$

Или

$$\exists_{ijkl} = \frac{\Delta_{ijpq}}{8\pi\mu a_p^2} \int_{\Omega} \frac{(2-\kappa)l_p l_t \delta_{qm} + \kappa(3l_p l_q l_m l_t - l_p l_q \delta_{mt} - l_p l_m \delta_{qt})}{l_1^2/a_1^2 + l_2^2/a_2^2 + l_3^2/a_3^2} d\omega C_{mtkl}. \quad (9.55)$$

В точке  $x$  эллипсоидальной области построим единичную сферу. Тогда единичный вектор  $\vec{l}$  от точки  $x \in V$  к точке  $\xi \in \Sigma$  совпадает с единичным вектором внешней нормали  $\vec{n}$  к поверхности  $S$  сферы. Следовательно интеграл по телесному углу в формуле (9.55) можно заменить на интеграл по поверхности единичной сферы, а компоненты вектора  $\vec{l}$  на компоненты вектора  $\vec{n}$ . Ведем обозначения:

$$J_{ij} = \frac{1}{a_i^2} \int_S \frac{n_i n_j}{n_1^2/a_1^2 + n_2^2/a_2^2 + n_3^2/a_3^2} dS, \quad (9.56)$$

$$J_{ijkl} = \frac{1}{a_i^2} \int_S \frac{n_i n_j n_k n_l}{n_1^2/a_1^2 + n_2^2/a_2^2 + n_3^2/a_3^2} dS, \quad (9.57)$$

где  $J_{ij}$  и  $J_{ijkl}$  сводятся к эллиптическим интегралам. В самом деле, в сферических координатах с началом в центре единичной сферы на её поверхности имеем

$$\vec{n} = (\sin \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \varphi); 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi; dS = d\varphi d\vartheta,$$

поэтому

$$J_{ij} = \frac{1}{a_i^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{n_i n_j}{n_1^2/a_1^2 + n_2^2/a_2^2 + n_3^2/a_3^2} d\varphi d\vartheta, \quad (9.58)$$

$$J_{ijkl} = \frac{1}{a_i^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{n_i n_j n_k n_l}{n_1^2/a_1^2 + n_2^2/a_2^2 + n_3^2/a_3^2} d\varphi d\vartheta. \quad (9.59)$$

С учетом принятых обозначений формула (9.55) для компонент тензора Эшелби примет вид:

$$\boxed{\exists_{ijkl} = \Delta_{ijpq} \frac{(2 - \varkappa) I_{pt} \delta_{qm} + \varkappa (3I_{pqmt} - I_{pq} \delta_{mt} - I_{pm} \delta_{qt})}{8\pi\mu} C_{mtkl}}. \quad (9.60)$$

### 9.2.2 Сферическая область трансформации.

В случае сферической области трансформации  $a_1 = a_2 = a_3 = R$ . Учитывая, что  $|\vec{n}| = 1$ ,  $n_i = y_i/|\vec{n}| = y_i$ , ( $\mathbf{y} \in \mathbf{S}$ ) получаем:

$$J_{ij} = \int_S n_i n_j dS = \int_S y_i n_j dS = \int_{V_\omega} x_{i,j} dV = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \quad (9.61)$$

Аналогично вычисляется интеграл  $J_{ijkl}$ :

$$J_{ijkl} = \int_S n_i n_j n_k n_l d\omega = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + 2\Delta_{ijkl}) \quad (9.62)$$

Полагая  $C = 3kV + 2\mu D$  и учитывая (9.61), (9.62), получим после несложных преобразований следующее выражение для тензора Эшелби

$$\underline{\exists} = 3 \underline{\exists}_1 V + 2 \underline{\exists}_2 D, \quad (9.63)$$

где

$$\underline{\exists}_1 = \frac{1}{3} \frac{k}{\mu} (1 - \varkappa) = \frac{1}{3} \frac{3\lambda + 2\mu}{3\lambda + 6\mu} = \frac{1}{9} \frac{1 + \nu}{1 - \nu}, \quad (9.64)$$

$$\underline{\exists}_2 = \frac{2}{15} (5 - 2\varkappa) = \frac{1}{5} \frac{3\lambda + 4\mu}{3\lambda + 6\mu} = \frac{1}{15} \frac{4 - 5\nu}{1 - \nu} \quad (9.65)$$

В случае шаровой области превращения тензор Эшелби симметричен по индексам в первой и второй парах индексов и симметричен по этим двум парам индексов, то есть обладает симметрией тензора модулей упругости.

### 9.2.3 Круговой цилиндр.

Пусть теперь область трансформации представляет из себя круговой цилиндр, ось которого параллельна оси  $x_3$ . В этом случае  $a_1 = a_2 = R, a_3 = \infty$ , следовательно  $J_{3j} = 0, J_{3jkl} = 0$ , а

$$J_{Ij} = \int_{\Omega} n_I n_j d\omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{Ij}, \quad (9.66)$$

$$J_{Ijkl} = \int_{\Omega} n_I n_j n_k n_l d\omega = \frac{4\pi}{15} (\delta_{Ij} \delta_{kl} + 2\Delta_{Ijkl}). \quad (9.67)$$

Компоненты тензора Эшелби имеют вид<sup>10</sup>:

$$\begin{aligned} \varTheta_{ijkl} &= \frac{1}{\mu} \Delta_{ijPq} \left[ \frac{1}{3} \delta_{Pt} \delta_{qm} - \frac{\kappa}{15} (\delta_{Pq} \delta_{mt} + 2\Delta_{Pqmt}) \right] C_{mtkl} = \\ &= \frac{3}{10} \frac{k+2\mu}{3k+4\mu} (\delta_{iP} \delta_{Pk} \delta_{jl} + \delta_{iP} \delta_{Pl} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jP} \delta_{Pl} + \delta_{il} \delta_{jP} \delta_{Pk}) + \\ &+ \frac{1}{5} \frac{3k-4\mu}{3k+4\mu} \delta_{iP} \delta_{Pq} \delta_{kl} \end{aligned} \quad (9.68)$$

### 9.2.4 Слой.

Область превращения — слой толщины  $h$  перпендикулярный оси  $x_3$ . В этом случае  $a_1 = \infty, a_2 = \infty, a_3 = h$ , поэтому  $J_{Ij} = 0, J_{Ijkl} = 0$ , а

$$J_{3j} = \frac{4\pi}{3} \delta_{3j}, \quad (9.69)$$

$$J_{3jkl} = \frac{4\pi}{15} (\delta_{3j} \delta_{kl} + 2\Delta_{3jkl}). \quad (9.70)$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \varTheta_{ijkl} &= \frac{1}{\mu} \Delta_{ij3q} \left[ \frac{1}{3} \delta_{3t} \delta_{qm} - \frac{\kappa}{15} (\delta_{3q} \delta_{mt} + 2\Delta_{3qmt}) \right] C_{mtkl} = \\ &= \frac{3}{10} \frac{k+2\mu}{3k+4\mu} (\delta_{i3} \delta_{3k} \delta_{jl} + \delta_{i3} \delta_{3l} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{j3} \delta_{3l} + \delta_{il} \delta_{j3} \delta_{3k}) + \\ &+ \frac{1}{5} \frac{3k-4\mu}{3k+4\mu} \delta_{i3} \delta_{3q} \delta_{kl} \end{aligned} \quad (9.71)$$

### 9.2.5 Единая формула для трёх случаев (шар, цилиндр, слой).

Все три, описанных выше, случая можно объединить единой формулой

$$\varTheta_{ijkl} = \frac{1}{5} \frac{3k-4\mu}{3k+4\mu} \delta_{i\alpha} \delta_{\alpha j} \delta_{kl} + \frac{6}{5} \frac{k+2\mu}{3k+4\mu} \Delta_{ijat} \Delta_{\alpha tkl} =$$

<sup>10</sup>как обычно большие латинские индексы принимают значения 1 и 2 и по повторяющимся большим индексам предполагается суммирование от единицы до двух

$$= \frac{1}{15} \frac{5\nu - 1}{1 - \nu} \delta_{i\alpha} \delta_{\alpha j} \delta_{kl} + \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu}{1 - \nu} \Delta_{ijat} \Delta_{\alpha tkl}, \quad (9.72)$$

где

- $\alpha = 1, 2, 3$  — шаровая область превращения (центр к-т — в центре шара);
- $\alpha = 1, 2$  — круговой цилиндр с осью  $x_3$ ;
- $\alpha = 3$  — слой  $\perp$  оси  $x_3$  (центр к-т — в центральной плоскости слоя)

## 9.3 Деформации и напряжения внутри инородного эллипсоидального включения в бесконечной упругой среде.

### 9.3.1 Постановка задачи

Рассматривается бесконечная упругая среда, свойства которой описываются тензором модулей упругости  $\underline{C}^-$ . Тензор модулей упругости материала эллипсоидального включения обозначим через  $\underline{C}^+$ . Пусть  $\underline{\varepsilon}^\infty$  — постоянное поле деформаций при бесконечном удалении от включения. Требуется вычислить деформации и напряжения внутри включения, т.е. фактически необходимо найти тензоры четвёртого ранга, с помощью которых деформации и напряжения в среде с включением выражаются через деформации и напряжения в среде без включения. Назовём такие тензоры тензорами концентрации деформаций  $\underline{B}^+$  и напряжений  $\underline{A}^+$ , соответственно.

### 9.3.2 Трансформация области в однородном нагруженном пространстве

Если свойства включения такие же, что и у окружающей среды, то напряжения внутри эллипсоидальной области постоянны и равны

$$\underline{\sigma}^\infty = \underline{C}^- \underline{\varepsilon}^\infty \quad (9.73)$$

Складывая эти напряжения с напряжениями, определяемыми по формуле (9.43)<sup>11</sup>, получим напряжения, которые возникнут в эллипсоидальной области, если она трансформируется в предварительно деформированной среде с деформациями  $\underline{\varepsilon}^\infty = const$

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^\infty + \underline{\sigma}^c + \underline{\sigma}^T = \underline{C}^- (\underline{\varepsilon}^\infty + \underline{\varepsilon}^c - \underline{\varepsilon}^T) = \underline{C}^- \left[ \underline{\varepsilon}^\infty + (\underline{\vartheta}^- - \underline{\Delta}) \underline{\varepsilon}^T \right] \quad (9.74)$$

### 9.3.3 Деформации в инородном включении в нагруженном пространстве.

При деформировании среды с инородным эллипсоидальным включением деформации внутри включения будут составлены из деформаций, заданных на бесконечности

<sup>11</sup> в формуле (9.43) нужно  $\underline{C}$  заменить на  $\underline{C}^-$

и дополнительных деформаций, появившихся из-за разницы в свойствах материалов матрицы и включения. Дополнительные деформации обозначим через  $\underline{\varepsilon}'$ , тогда

$$\underline{\varepsilon}^+ = \underline{\varepsilon}^\infty + \underline{\varepsilon}' ; \quad \underline{\sigma}^+ = \underline{C}^+ \underline{\varepsilon}^+ = \underline{C}^+ (\underline{\varepsilon}^\infty + \underline{\varepsilon}') \quad (9.75)$$

### 9.3.4 Гипотеза Эшеби.

*Если на бесконечности задано однородное поле деформаций, то и в инородном включении эллипсоидальной формы поле деформаций будет также однородным. Таким образом,  $\underline{\varepsilon}^+ = \text{const}$  и, следовательно,  $\underline{\varepsilon}' = \text{const}$ .*

Примем эту постоянную деформацию  $\underline{\varepsilon}'$  за стесненную деформацию от превращения эллипсоидальной области такой же формы, что и включение.

Соответствующую деформацию трансформации  $\underline{\varepsilon}^T$  подберем так, чтобы стесненные напряжения превращения (9.74) совпали с напряжениями (9.75) в эллипсоидальном инородном включении

$$\underline{C}^- \left[ \underline{\varepsilon}^\infty + (\underline{\vartheta}^- - \underline{\Delta}) \underline{\varepsilon}^T \right] = \underline{C}^+ (\underline{\varepsilon}^\infty + \underline{\varepsilon}') = \underline{C}^+ (\underline{\varepsilon}^\infty + \underline{\varepsilon}^c) = \underline{C}^+ (\underline{\varepsilon}^\infty + \underline{\vartheta}^- \underline{\varepsilon}^T) .$$

Здесь  $\underline{\vartheta}^-$  — тензор Эшеби основной среды. Из этой формулы находим нужную нам деформацию превращения

$$\underline{\varepsilon}^T = \left[ \underline{C}^- + (\underline{C}^+ - \underline{C}^-) \underline{\vartheta}^- \right]^{-1} (\underline{C}^- - \underline{C}^+) \underline{\varepsilon}^\infty \quad (9.76)$$

### 9.3.5 Тензоры концентрации деформаций и напряжений в инородном включении.

Найдем далее деформации и напряжения внутри изотропного эллипсоидального включения в бесконечном изотропном упругом пространстве при заданной на бесконечности постоянной деформации  $\underline{\varepsilon}^\infty = \text{const.}$ , либо при постоянном напряжении на бесконечности  $\underline{\sigma}^\infty = \underline{C}^- \underline{\varepsilon}^\infty$ .

$$\underline{\varepsilon}^+ = \underline{\varepsilon}^\infty + \underline{\varepsilon}^c = \underline{B}^+ \underline{\varepsilon}^\infty , \quad \underline{\varepsilon}_{ijkl}^+ = \underline{B}_{ijmn}^+ \underline{\varepsilon}_{mnkl}^\infty \quad (9.77)$$

где

$$\boxed{\underline{B}^+ = \underline{\Delta} + \underline{\vartheta}^- \left[ \underline{C}^- + (\underline{C}^+ - \underline{C}^-) \underline{\vartheta}^- \right]^{-1} (\underline{C}^- - \underline{C}^+)} \quad (9.78)$$

Тензор  $\underline{B}^+$  — тензор четвёртого ранга, симметричный по индексам в первой паре индексов и несимметричный по этим двум парам индексов.

Напряжения во включении найдем из закона Гука

$$\underline{\sigma}^+ = \underline{C}^+ \underline{\varepsilon}^+ = \underline{C}^+ \underline{B}^+ \underline{\varepsilon}^\infty = \underline{C}^+ \underline{B}^+ \underline{J}^- \underline{\sigma}^\infty = \underline{A}^+ \underline{\sigma}^\infty , \quad (9.79)$$

Тензоры  $\tilde{B}^+$  и  $\tilde{A}^+$  позволяет выразить деформации и напряжения во включении через деформации и напряжения в бесконечности. По этой причине их можно назвать тензорами концентрации деформаций и напряжений [?, ?, ?, ?].

$$\boxed{\tilde{A}^+ = \tilde{C}^+ \left\{ \tilde{\Delta} + \tilde{\varTheta}^- \left[ \tilde{C}^- + (\tilde{C}^+ - \tilde{C}^-) \tilde{\varTheta}^- \right]^{-1} (\tilde{C}^- - \tilde{C}^+) \right\} \tilde{J}^-} \quad (9.80)$$

В изотропном случае компоненты тензора  $\tilde{\varTheta}^-$  определяются по формуле (9.60), в которой модули упругости следует брать с верхним значком  $-$ . В случае шарового включения формулы (9.79), (9.80) примут вид:

$$\tilde{B}^+ = B_1 \tilde{V} + B_2 \tilde{D}, \quad (9.81)$$

$$\tilde{A}^+ = A_1 \tilde{V} + A_2 \tilde{D}, \quad (9.82)$$

где

$$B_1 = \frac{1}{1 + 3 \tilde{\varTheta}_1^- \left( \frac{k^+}{k^-} - 1 \right)} = \frac{3k^- + 4\mu^-}{3k^+ + 4\mu^-},$$

$$B_2 = \frac{1}{1 + 2 \tilde{\varTheta}_2^- \left( \frac{\mu^+}{\mu^-} - 1 \right)} = \frac{5\mu^- (3k^- + 4\mu^-)}{3k^- (3\mu^- + 2\mu^+) + 4\mu^+ (2\mu^- + 3\mu^+)}; \quad (9.83)$$

$$A_1 = \frac{k^+}{k^-} B_1 = \frac{k^+}{k^-} \frac{3k^- + 4\mu^-}{3k^+ + 4\mu^-},$$

$$A_2 = \frac{\mu^+}{\mu^-} B_2 = \frac{\mu^+}{\mu^-} \frac{5\mu^+ (3k^- + 4\mu^-)}{3k^- (3\mu^- + 2\mu^+) + 4\mu^+ (2\mu^- + 3\mu^+)}. \quad (9.84)$$

# Лекция 10-11. Метод Бахвалова-Победри осреднения обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими по координатам коэффициентами

## 10.1 Композиты с периодической структурой.

### 10.1.1 Ячейка периодичности. Периодические и квазипериодические структуры.

Ячейка периодичности структуры это такой объём вещества, многократное повторение которого по трем, двум, или одному направлению позволяет построить все тело. Ячейка периодичности является частным случаем типичного элемента, и она же является минимальным объёмом, по которому можно судить о свойствах композита в целом. *Композиты, в которых можно выделить ячейку периодичности называются периодическими, или регулярными структурами.* Как правило в регулярных структурах можно ввести декартовы координаты так, что его физические и механические характеристики являются периодическими функциями координат. *Если в композите можно ввести такие криволинейные координаты, что его материальные характеристики являются периодическими функциями одной, двух, или трех криволинейных координат, тогда композит называется квазипериодической, или квазирегулярной структурой.*

Конечно, введение понятия ячейки периодичности является идеализацией реального композита. Однако и сама сплошная сплошная среда является идеализацией, и во многих случаях оправданной. Известны и другие примеры из механики, когда разумная идеализация позволяет построить модель реальной среды, и с помощью этой модели отвечать на вопросы, возникающие в практической деятельности человека.

### 10.1.2 Преобразование произвольной ячейки периодичности в куб периодичности с единичным ребром.

В случае периодически неоднородного тела, в математическом плане, удобно, вместо реальной ячейки периодичности достаточно произвольной формы, рассматривать ячейку периодичности в виде куба с единичным ребром. При этом предполагается, что

реальная ячейка может быть переведена афинным преобразованием в единичный куб.

Покажем это нам конкретном примере. Пусть ячейка периодичности представляет собой прямоугольник размером  $l_1 \times l_2 \times l_3$ . Оси глобальных координат  $x_1, x_2, x_3$  выберем параллельными ребрам ячейки.

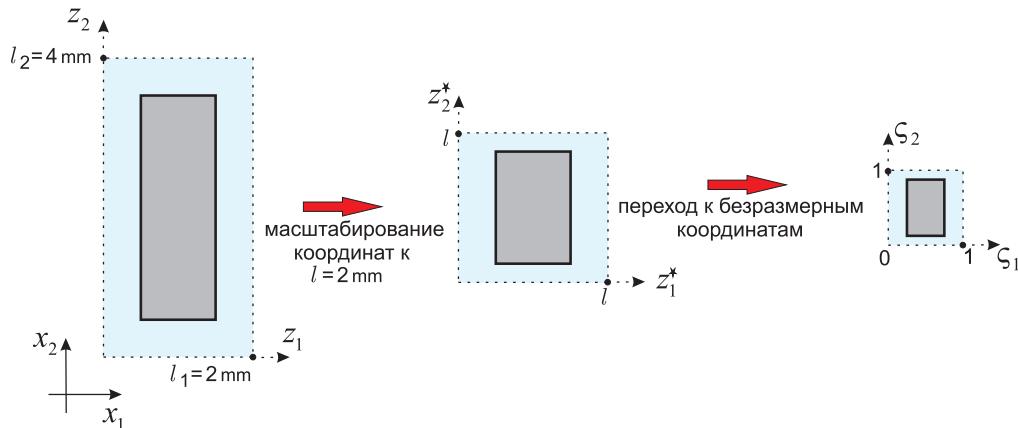


Рис. 10.8: Схема преобразования локальных координат.

**Внутри ячейки периодичности расположены включения, поры, трещины и т.п. Тело состоит из большого числа одинаковых ячеек периодичности. В этом случае тензор модулей упругости  $\underline{C}(x)$  является периодической функцией глобальных координат**

$$\underline{C}(x_1 + k_1 l_1, x_1 + k_2 l_2, x_3 + k_3 l_3) = \underline{C}(x_1, x_2, x_3), \quad k_i \in \mathbb{Z}, \quad l_i - \text{период по оси } x_i \quad (10.1)$$

**Периодически неоднородное тело можно описать по другому:** введем в каждой ячейке размерные локальные координаты  $z(z_1, z_2, z_3)$ , тогда тензор модулей упругости в любой ячейке описывается одной и той же функцией локальных переменных  $z$ , т.е.  $\underline{C} = \underline{C}(z) = \underline{C}(z_1, z_2, z_3)$ . Областью изменения переменных  $z$  является прямоугольник  $l_1 \times l_2 \times l_3$ . Локальные размерные переменные можно отмасштабировать так, чтобы область изменения новых размерных переменных  $z^*$  стала кубом с ребром  $l$ , при этом  $\underline{C} = \underline{C}(z^*) = \underline{C}(z_1^*, z_2^*, z_3^*)$ .

Размерные масштабированные и не масштабированные переменные связаны по формулам

$$z_i^* = \frac{l}{l_i} z_i, \quad 0 \leq z_i^* \leq l, \quad i = 1, 2, 3 \quad (10.2)$$

Очень часто вместо размерных переменных  $z^*$  вводятся безразмерные переменные  $\zeta(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ , изменяющиеся в единичном кубе

$$\zeta_i = \frac{z_i^*}{l} = \frac{z_i}{l_i}, \quad 0 \leq \zeta_i \leq 1, \quad i = 1, 2, 3 \quad (10.3)$$

### 10.1.3 Связь глобальных и безразмерных локальных координат.

Пусть композиционное тело по всем направлениям составлено из большого числа ячеек в виде куба с ребром  $l$ , а  $L$  — характерный размер всего тела. Таким образом, в математическом плане все физико-механические характеристики являются  $l$ -периодическими функциями.

В математических уравнениях, описывающих процессы в периодически неоднородном теле, естественным образом, появляется **малый геометрический параметр**, равный отношению характерного размера  $l$  ячейки периодичности к характерному размеру  $L$  всего тела  $\alpha = l/L \ll 1$ .

Расположим начало декартовых координат  $x_1, x_2, x_3$  в вершине какого либо куба периодичности, которому присвоим "номер" 0,0,0 из трёх нулей. Каждый куб периодичности пометим тремя целыми числами  $m_1, m_2, m_3$ . Внутри каждого куба периодичности введем безразмерные местные (локальные, быстрые) декартовы координаты  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  такие, что  $0 < \zeta_i < 1$ . В этом случае глобальные декартовы координаты  $x_k$  любой точки композита регулярной структуры определяются через "номер" ячейки, в которую попала эта точка. Глобальные и локальные координаты в ячейке определяются по формуле:

$$x_k = l\zeta_k + lm_k \Leftrightarrow \zeta_k = x_k/l - m_k, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (10.4)$$

#### 10.1.4 Дифференцирование функций локальной переменной по безразмерной глобальной координате.

**Функции локальной переменной.** Пусть " $a$ " некоторая материальная характеристика композита с периодической структурой. Например, это может быть модуль Юнга, плотность вещества, коэффициент теплового расширения, и т.п.. Величина " $a$ " принимает одно и то же значение в точках  $l\zeta_1, l\zeta_2, l\zeta_3$  каждой из ячеек периодичности, т.е. " $a$ " является одно-периодической функцией координат  $\zeta_i$  (период по каждой переменной равен 1), следовательно и в соответствии с (10.4)

$$a(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = a(\zeta_1 + m_1, \zeta_2 + m_2, \zeta_3 + m_3) = a\left(\frac{x_1}{l}, \frac{x_2}{l}, \frac{x_3}{l}\right)$$

**Безразмерные глобальные координаты.** Пусть  $L$  — характерный размер всего композиционного тела. Тогда вместо размерных глобальных координат  $x_i$  можно ввести безразмерные глобальные координаты  $\bar{x}_i = x_i/L$ . В этом случае

$$a(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = a\left(\frac{x_1}{l}, \frac{x_2}{l}, \frac{x_3}{l}\right) = a\left(\frac{x_1/L}{l/L}, \frac{x_2/L}{l/L}, \frac{x_3/L}{l/L}\right) = a\left(\frac{\bar{x}_1}{\alpha}, \frac{\bar{x}_2}{\alpha}, \frac{\bar{x}_3}{\alpha}\right),$$

**Малый геометрический параметр.** Из последней формулы видно, что **дифференцирование функций локальных переменных по глобальной безразмерной координате осуществляется по правилу:**

$$\boxed{\frac{\partial a}{\partial \bar{x}_i} \equiv a_{,i} = \frac{\partial a}{\partial \zeta_k} \frac{\partial \zeta_k}{\partial \bar{x}_i} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial a}{\partial \zeta_i} \equiv \frac{1}{\alpha} a_{|i}}, \quad (10.5)$$

где  $\alpha = \frac{l}{L} \ll 1$  — малый геометрический параметр. Подчеркнём ещё раз, что  $a_{|i} \equiv \frac{\partial a}{\partial \zeta_i}$ .

### 10.1.5 Асимптотический метод решения задач для тел из композиционных материалов с периодической структурой (метод Бахвалова-Победри).

Через зависимость материальных характеристик от локальных переменных малый параметр входит в уравнения, описывающие процессы в композите с периодической структурой. А раз так, то можно разработать процедуру разложения искомого решения в ряд по малому геометрическому параметру  $\alpha$ .

Такая процедура была предложена в работах Н.С. Бахвалова, начатых им с 1974 года [?, ?, ?]. Большой вклад в развитие метода малого геометрического параметра (ММГП) и его систематическое применение к механике композитов было дано в работах Б.Е. Победри и его учеников [1, ?, 17, ?, ?, ?].

В 1985 г. Н.С. Бахвалов и Б.Е. Победря в составе коллектива авторов за создание методов расчета конструкций из композиционных материалов получили Государственную премию СССР в области науки. В 1987 г. на механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова была организована кафедра механики композитов, которую с первого дня и до своей кончины 1 марта 2016 г. возглавлял Борис Ефимович Победря. Основной задачей новой кафедры была обучение специалистов в области фундаментальной механики композитов. Начиная с 1967 г. Б.Е. Победре опубликовано более 200 печатных работ, из них примерно половина так или иначе касается проблем деформирования и прочности композитов, причем в большинстве из работ используются идеи, заложенные в методе осреднения. **Метод осреднения в механике композитов с регулярной структурой по праву называется методом осреднения Бахвалова-Победри (МБП).**

Следует отметить, что после публикации перечисленных выше работ Н.С. Бахвалова и Б.Е. Победри появилось большое количество публикаций российских и иностранных авторов, посвященных математическим и механическим проблемам теории осреднения. Упомянем лишь некоторые монографии из обширного списка трудов. В.А. Марченко, Е.Я. Хруслов [21], Э. Санчес-Паленсия [22], О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян, А.С. Шамаев [23], В.В. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олейник [24], Д.И. Бардзокас, А.И. Зобнин [25], В.Л. Бердичевский [26], В.И. Большаков, И.В. Андрианов, В.В. Данишевский [27], Alexander L. Kalamkarov [28], T. Levinski, J.J. Telega [29]. В этих публикациях можно найти более подробную библиографию по теории осреднения.

В МБП решение исходной краевой задачи для периодически неоднородного, упругого тела ищется в виде асимптотического ряда по степеням малого геометрического параметра. В результате исходная краевая задача сводится к двум рекуррентным последовательностям задач.

**Из первой последовательности находятся коэффициенты асимптотического ряда (структурные функции).** Первая рекуррентная последовательность, по сути дела, заключается в нахождении периодического решения уравнений неоднородной упругости в области периодичности коэффициентов упругости.

**Вторая последовательность состоит в решении краевых задач для однородного, но, как правило, анизотропного тела.** Тензор модулей упругости этого однородного тела называется эффективным тензором. Его находят после решения на ячейке периодичности специальной задачи, которая служит базой рекурсии в первой рекуррентной последовательности задач на ячейке. Базой рекурсии во второй последовательности в ММГП служит решение краевой задачи для тела с эффективными

характеристиками, имеющего ту же самую форму и точно так же загруженного, что и исходное неоднородное тело.

Входные данные в каждой из последовательностей на каком либо шаге находятся лишь после того как решены все предыдущие рекуррентные задачи.

## 10.2 Задача о неоднородной по толщине, бесконечной в плане, упругой плите.

Поясним метод осреднения Бахвалова–Победри на примере задачи о сжатии (растяжении) равномерной поверхностной нагрузкой бесконечной в плане, неоднородной по толщине плиты  $-\infty < x_1, x_2 < +\infty$ . Пусть  $L : 0 \leq x_3 \leq L$  толщина плиты из изотропного материала.

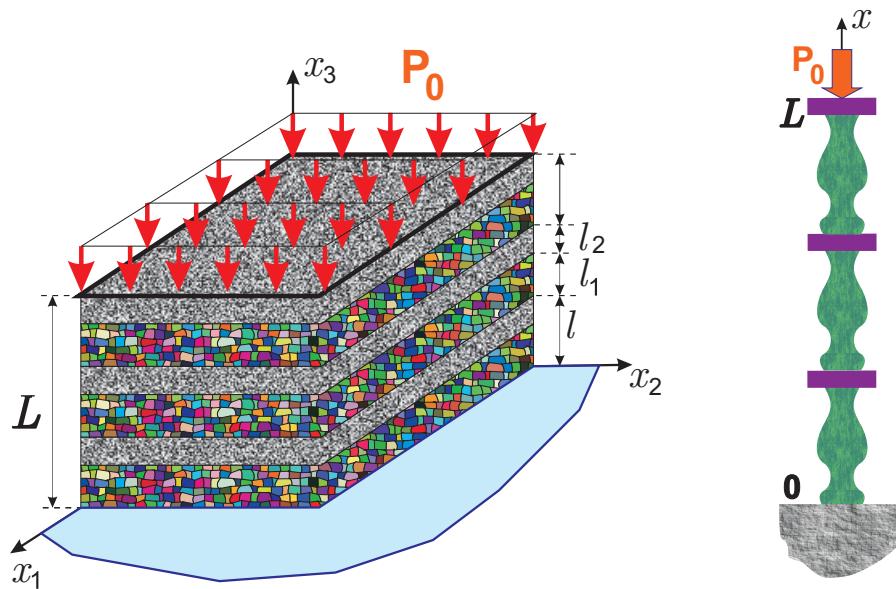


Рис. 10.9: Периодически неоднородная по толщине, бесконечная в плане плита и периодически неоднородный стержень с периодическим переменным сечением.

### 10.2.1 Описание исходной задачи.

Плита является периодически неоднородной, то есть она построена из **склеенных между собой одинаковых пакетов (ячеек периодичности) изотропного материала толщины  $l$** . В каждом пакете модуль Юнга  $E$  является одинаковой функцией локальной переменной  $0 < \zeta < 1$ .

Глобальная переменная  $x_3$  связана с локальной по формуле  $x_3/l = \zeta + m, m = 0, 1, 2, \dots$ , где  $m$  — номер ячейки периодичности начиная с ячейки с нулевым номером  $m = 0$ , примыкающей к нижней границе  $x_3 = 0$  плиты (рис.14.10).

Плита сжимается (растягивается) равномерно распределённой на верхней стороне  $x_3 = L$  нагрузкой  $P_0 = \text{const.}$  и объёмной нагрузкой  $X(x_3)$ . На нижней плоскости  $x_3 = 0$  задано перемещение  $u_0 = \text{const.}$  (как правило  $u_0 = 0$ ).

### 10.2.2 Постановка исходной задачи.

В нашем случае задача об определении напряженно – деформированного состояния (НДС) является одномерной и описывается обыкновенным дифференциальным уравнением для перемещения  $u(x_3)$  и двумя граничными условиями на нижней и верхней плоскостях (для сокращения записи в дальнейшем полагаем  $x_3 \equiv x$ )

$$\frac{d}{dx} \left[ E(\zeta) \frac{du}{dx} \right] + X(x) = 0, \quad u|_{x=0} = u_0, \quad E(\zeta) \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = -P_0, \quad (10.6)$$

$$\zeta = \frac{x}{l} - \left\lfloor \frac{x}{l} \right\rfloor = \left\{ \frac{x}{l} \right\}$$

Заметим, что этими же уравнениями описывается НДС стержня с периодическим переменным поперечным сечением  $F(\zeta)$  (рис.14.10). Только в уравнениях (10.6) нужно сделать следующие замены:  $E(\zeta) \rightarrow E(\zeta)F(\zeta)$ ,  $X(x) \rightarrow X(x)F(\zeta)$ . **Периоды модуля Юнга и поперечного сечения, в данном примере, одинаковы, хотя они могут и отличаться.**

Задача (10.6) имеет точное решение

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \left[ -P_0 + \int_z^L X(y) dy \right] \frac{dz}{E(\zeta)} \quad (10.7)$$

### 10.2.3 Постановка исходной задачи в безразмерных координатах.

Далее перейдём к безразмерным координатам  $\bar{x} = x/L$ . Уравнения (10.6) примут вид:

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left[ E(\zeta) \frac{du}{d\bar{x}} \right] + X^*(\bar{x}) = 0, \quad u|_{\bar{x}=0} = u_0, \quad E(\zeta) \frac{du}{d\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=1} = -P_0^*, \quad (10.8)$$

$$\zeta = \left\{ \frac{\bar{x}}{\alpha} \right\} = \frac{\bar{x}}{\alpha} - \left\lfloor \frac{\bar{x}}{\alpha} \right\rfloor = \frac{\bar{x}}{\alpha} - m,$$

где  $X^*(\bar{x}) \equiv L^2 X(\bar{x})$ ,  $P_0^* = L P_0$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  — целое число равное номеру ячейки. Модуль Юнга  $E(\zeta)$  — одна периодическая функция быстрой переменной  $0 \leq \zeta \leq 1$ . Может быть как непрерывной, так и кусочно непрерывной функцией.

Решение задачи (10.8), отнесенное к безразмерным координатам, представляется следующей формулой:

$$u(\bar{x}) = u_0 + \int_0^{\bar{x}} \left[ -P_0^* + \int_z^1 X^*(y) dy \right] \frac{dz}{E(\zeta)} \quad (10.9)$$

Предположим для простоты, что  $E(\zeta)$  — непрерывная функция, тогда уравнение (10.8), с учетом правила (10.5), принимает вид:

$$Eu'' + \frac{1}{\alpha} E^l u' + X^* = 0 \quad (10.10)$$

**Отметим, что в этом разделе штрихи обозначают обыкновенные производные по безразмерной координате  $\bar{x}$ , а вертикальная черта вверху символа — производную по локальной переменной  $\zeta$ .**

В уравнение (10.10) входит малый параметр  $\alpha$ , следовательно решение уравнения (10.10), соответственно и уравнения (10.8) зависит от этого параметра, то есть  $u = u(\bar{x}, \alpha)$ .

#### 10.2.4 Разложение решения исходной задачи в асимптотический ряд по степеням малого параметра. Структурные функции.

Попробуем искать решение уравнения (10.8)) путем **специального разложения** функции  $u(\bar{x}, \alpha)$  в ряд по параметру  $\alpha$

$$\begin{aligned} u(\bar{x}, \alpha) &= v(\bar{x}, \alpha) + \alpha N_1(\zeta)v'(\bar{x}, \alpha) + \alpha^2 N_2(\zeta)v''(\bar{x}, \alpha) + \dots = \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q N_q(\zeta)v^{(q)}(\bar{x}, \alpha), \quad (N_0 \equiv 1), \\ v^{(q)}(\bar{x}, \alpha) &\equiv \frac{d^q v(\bar{x}, \alpha)}{d\bar{x}^q}, \end{aligned} \tag{10.11}$$

где  $v(\bar{x}, \alpha)$  — гладкая функция безразмерной координаты, зависящая и от малого параметра<sup>12</sup>. **Функции  $N_q(\zeta)$  — непрерывные периодические функции быстрой переменной  $\zeta$  с единичным периодом (однопериодические функции).** При  $q < 0$  функции  $N_q \equiv 0$ . В случае постоянного модуля Юнга, то есть при  $E = \text{const}$ . они также обращаются в нуль. **Назовём их структурными функциями.**

Функции  $v(\bar{x}, \alpha)$  и  $N_q(\zeta)$  при  $q > 1$  пока неизвестные. Их предстоит найти в процессе удовлетворения всем уравнениям исходной задачи (10.8).

По перемещению находим ряд для деформации  $\varepsilon = u'$  и затем ряд для напряжения  $\sigma = E(\zeta)\varepsilon$

$$\varepsilon = u' = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^{q-1} (N_q^| + N_{q-1}) v^{(q)} \tag{10.12}$$

$$\sigma = E\varepsilon = Eu' = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^{q-1} E(N_q^| + N_{q-1}) v^{(q)} \tag{10.13}$$

Ещё нам понадобится производная от напряжения

$$\sigma' = (Eu')' = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^{q-2} \left\{ [E(N_q^| + N_{q-1})] + E(N_{q-1}^| + N_{q-2}) \right\} v^{(q)} \tag{10.14}$$

#### 10.2.5 Сведение исходного уравнения второго порядка с переменным коэффициентом к уравнению бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.

<sup>12</sup>Строгое и обстоятельное математическое доказательство существования разложения (10.11) приведено книге Бахвалова Н.С. и Панасенко Г.П. [?, стр. 16-21, стр. 40-52]

В результате из исходного уравнения (10.8) второго порядка с переменным коэффициентом для функции  $u(\bar{x})$  получаем дифференциальное уравнение бесконечного порядка для гладкой функции  $v(\bar{x})$ , да ещё с переменными коэффициентами

$$\sum_{q=1}^{\infty} \alpha^{q-2} \left\{ [E(N_q^l + N_{q-1})]^l + E(N_{q-1}^l + N_{q-2}) \right\} v^{(q)} + X^*(\bar{x}) = 0 \quad (10.15)$$

**В уравнении (10.15) первое слагаемое порядка  $1/\alpha$ . То есть, первое слагаемое стремится к бесконечности при  $\alpha \rightarrow 0$ . Чтобы избавиться от этой особенности нужно приравнять к нулю выражение в фигурных скобках при  $v^{(1)} \equiv v'$ .**

Далее, поскольку  $v(\bar{x}, \alpha)$  гладкая по  $\bar{x}$  функция, постольку коэффициенты при производных в уравнении (10.15) необходимо положить равными некоторым постоянным величинам. Обозначим их через  $h_0, h_1, \dots$ . При этом, уравнение (10.15) становится дифференциальным уравнением бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{q=2}^{\infty} \alpha^{q-2} h_{q-2} v^{(q)} + X^*(\bar{x}) = 0, \quad \text{или} \quad \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q h_q v^{(q+2)} + X^*(\bar{x}) = 0 \quad (10.16)$$

#### 10.2.6 Рекуррентные уравнения для структурных функций (структурные уравнения).

Для структурных функций получается следующая система рекуррентных уравнений, которые будем называть **структурными уравнениями**:

$$[E(N_1^l + 1)]^l = 0, \quad (10.17)$$

$$[E(N_2^l + N_1)]^l + E(N_1^l + 1) = h_0, \quad (10.18)$$

$$[E(N_3^l + N_2)]^l + E(N_2^l + N_1) = h_1, \quad (10.19)$$

.....

$$[E(N_q^l + N_{q-1})]^l + E(N_{q-1}^l + N_{q-2}) = h_{q-2}, \quad q = 2, 3, \dots \quad (10.20)$$

#### 10.2.7 Выражение коэффициентов $h_q$ через структурные функции.

В формулах (10.18)–(10.20) **выражения в квадратных скобках являются непрерывными однопериодическими функциями быстрой переменной  $\zeta$ , хотя  $E(\zeta)$  и  $N_q^l(\zeta)$  по отдельности могут иметь конечные разрывы**. Поэтому среднее значение по периоду от производной квадратных скобок обращается в нуль.

Усреднив равенства (10.18)–(10.20) по периоду, получим формулы, по которым константы  $h_q$  выражаются через структурные функции

$$h_q = \langle E(N_{q+1}^l + N_q) \rangle, \quad q = 0, 1, \dots \quad (10.21)$$

#### 10.2.8 Первая рекуррентная последовательность для вычисления структурных функций и коэффициентов $h_q$ .

Теперь можно записать рекуррентную последовательность, по которой можно найти структурные функции и константы  $\mathbf{h}_q$  любого порядка. Первым этапом рекурсии служит уравнение (10.17). После этого по формуле (10.22) при  $q = 0$  получаем формулу для константы  $h_0$ . Потом находим находим константу  $h_1$ , и так далее

**1-й этап — начало рекурсии :**  $[E(N_1^l + 1)]^l = 0, \quad h_0 = \langle E(N_1^l + 1) \rangle; \quad (10.22)$

**2-й этап**  $[E(N_2^l + N_1)]^l + E(N_1^l + 1) = h_0, \quad h_1 = \langle E(N_2^l + N_1) \rangle;$

**3-й этап**  $[E(N_3^l + N_2)]^l + E(N_2^l + N_1) = h_1, \quad h_2 = \langle E(N_3^l + N_2) \rangle;$

.....

**q-й этап**  $[E(N_{q+2}^l + N_{q+1})]^l + E(N_{q+1}^l + N_q) = h_q, \quad h_{q+1} = \langle E(N_{q+2}^l + N_{q+1}) \rangle$

Отметим, что в начало рекурсии, то есть в первое уравнение системы (10.22), входит функция  $E(\zeta)$ , следовательно первая структурная функция  $N_1(\zeta)$  определяется функциональной зависимостью модуля Юнга от локальной координаты. Во второе структурное уравнение входит функция  $N_1(\zeta)$  и константа  $h_0$ , которая определяется, в свою очередь, через  $N_1(\zeta)$ . Таким образом, функция  $N_2(\zeta)$  выражается через функцию  $N_1(\zeta)$ . Как видно из последнего уравнения (10.22), при  $q \geq 2$  структурная функция q-го порядка  $N_q(\zeta)$  выражается через две предыдущие функции  $N_{q-1}(\zeta)$  и  $N_{q-2}(\zeta)$ , а следовательно через  $E(\zeta)$ .

#### 10.2.9 Условия для выделения единственного решения структурных уравнений.

**Решение каждого из уравнений (10.22) определено с точностью до двух произвольных констант. Поэтому необходимо два условия накладываемых на каждую из структурных функций для выделения единственного решения каждого из рекуррентных дифференциальных уравнений второго порядка.**

**Условие периодичности.** Прежде всего **используем условие периодичности и непрерывности структурных функций  $N_q(\zeta)$  на ячейке периодичности**. В этом случае среднее значение производной от структурной функции равно нулю, то есть

$$\langle N_q^l \rangle = \int_0^1 N_q^l(\zeta) d\zeta = N_q(1) - N_q(0) = 0, \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (10.23)$$

Формула (10.23) носит название **условие периодичности**. Из условия периодичности находится первая константа интегрирования q-го структурного уравнения.

**Условие нормировки.** Второе условие выбирается из тех соображений, что **среднее значение исходного перемещения в любой ячейке периодичности при**

дроблении структуры, то есть при  $\alpha \rightarrow 0$ , должно совпадать с гладкой функцией  $v(\bar{x}, \alpha)$ .

При достаточно малых  $\alpha$  функция  $v(\bar{x}, \alpha)$  вместе со всеми своими производными практически не меняется в пределах любой из ячеек периодичности. В этом случае

$$\langle u(\bar{x}, \alpha) \rangle = \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q \left\langle N_q(\zeta) v^{(q)}(\bar{x}, \alpha) \right\rangle \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q \langle N_q(\zeta) \rangle v^{(q)}(\bar{x}, \alpha) = v(\bar{x}, \alpha),$$

если среднее значение любой структурной функции на ячейке периодичности равно нулю, то есть

$$\langle N_q(\zeta) \rangle = \int_0^1 N_q(\zeta) d\zeta = 0, \quad q = 1, 2, \dots$$

(10.24)

Это и есть второе условие, из которого находится вторая константа интегрирования. Формула (10.24) носит название **условие нормировки**.

#### 10.2.10 Вторая рекуррентная последовательность задач для вычисление гладкой функции $v(x, \alpha)$ .

Функция  $v(\bar{x}, \alpha)$ , которая вводится в разделе 10.2.4 удовлетворяет дифференциальному уравнению (10.16) бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q h_q v^{(q+2)}(\bar{x}, \alpha) + X^*(\bar{x}) = 0 \quad (10.25)$$

Как видно из (10.25), сама функция  $v$  и все её производные зависят от параметра  $\alpha$ . Попробуем её представить так же в виде ряда по степеням параметра  $\alpha$

$$v(\bar{x}, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n w_n(\bar{x}), \quad (10.26)$$

где функции  $w_n(\bar{x})$  уже зависят только от безразмерной переменной  $\bar{x}$ .

Подставим ряд (10.26) в уравнение (10.25). В полученном двойном ряде соберём все коэффициенты при одинаковых степенях параметра  $\alpha$ .

$$\sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q h_q v^{(q+2)} = \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q h_q \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n w_n^{(q+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[ h_0 w_n'' + \sum_{q=1}^n h_q w_{n-q}^{(q+2)} \right]$$

В результате приходим к уравнению следующего вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[ h_0 w_n'' + \sum_{q=1}^n h_q w_{n-q}^{(q+2)} \right] + X^*(\bar{x}) = 0, \dots \quad (10.27)$$

Приравнивая в уравнении (10.27) коэффициенты при  $\alpha^n$  справа и слева знака равенства получаем рекуррентные уравнения для функций  $w_n(\bar{x})$

$$h_0 w_n'' + X_n^*(\bar{x}) = 0, \quad X_n^*(\bar{x}) = \begin{cases} X^*(\bar{x}), & \text{если } n = 0 \\ \sum_{q=1}^n h_q w_{n-q}^{(q+2)}, & \text{если } n > 0 \end{cases}$$

(10.28)



Например:

$$X_1^*(\bar{x}) = h_1 \frac{d^3 w_0}{d\bar{x}^3}, \quad X_2^*(\bar{x}) = h_1 \frac{d^3 w_1}{d\bar{x}^3} + h_2 \frac{d^4 w_0}{d\bar{x}^4}$$

Ряд (10.11) для перемещения преобразуется аналогично

$$u(\bar{x}, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[ w_n(\bar{x}) + \sum_{q=1}^n N_q(\zeta) w_{n-q}^{(q)}(\bar{x}) \right] \quad (10.29)$$

Из граничного условия исходной задачи при  $\bar{x} = 0$  имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[ w_n(\bar{x}) + \sum_{q=1}^n N_q(\zeta) w_{n-q}^{(q)}(\bar{x}) \right]_{\bar{x}=0} = u_0$$

Отсюда

$$w_n|_{\bar{x}=0} = u_{0(n)} = \begin{cases} u_0, & \text{если } n = 0 \\ - \left[ \sum_{q=1}^n N_q(\zeta) w_{n-q}^{(q)}(\bar{x}) \right]_{\bar{x}=0}, & \text{если } n > 0 \end{cases} \quad (10.30)$$

В частности:

$$w_1|_{\bar{x}=0} = -N_1(0)w'_0(0), \quad w_2|_{\bar{x}=0} = -N_1(0)w'_0(0) - N_2(0)w''_0(0), \dots$$

Для аналогичного преобразования напряжения, то есть ряда (10.13) перепишем его следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma = E\varepsilon = Eu' &= \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^{q-1} E(N_q^l + N_{q-1}) v^{(q)} = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^{q-1} \tilde{C}_{q-1}(\zeta) v^{(q)} = \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q \tilde{C}_q(\zeta) v^{(q+1)}, \quad \tilde{C}_q(\zeta) \equiv E(\zeta) [N_{q+1}^l(\zeta) + N_q(\zeta)] \end{aligned}$$

После подстановки сюда ряда (10.25) и сбора коэффициентов при одинаковых степенях  $\alpha$ , получаем

$$\sigma(\bar{x}, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[ \tilde{C}_0(\zeta) w'_n(\bar{x}) + \sum_{q=1}^n \tilde{C}_q(\zeta) w_{n-q}^{(q+1)}(\bar{x}) \right], \quad (10.31)$$

$$\tilde{C}_q(\zeta) = E(\zeta) [N_{q+1}^l(\zeta) + N_q(\zeta)]$$

Из второго граничного условия на верхней плоскости плиты, где задано равномерное давление находим:

$$\tilde{C}_0(\zeta) w'_n|_{\bar{x}=0} = -P_{0(n)}^* = - \begin{cases} P_0^*, & \text{если } n = 0 \\ \left[ \sum_{q=1}^n \tilde{C}_q(\zeta) w_{n-q}^{(q)}(\bar{x}) \right]_{\bar{x}=0}, & \text{если } n > 0 \end{cases} \quad (10.32)$$

Или:

$$P_{0(1)}^* = \left[ \tilde{C}_1(\zeta) w'_0(\bar{x}) \right]_{\bar{x}=1}, \quad P_{0(2)}^* = \left[ \tilde{C}_1(\zeta) w'_1(\bar{x}) \right]_{\bar{x}=1} + \left[ \tilde{C}_2(\zeta) w''_0(\bar{x}) \right]_{\bar{x}=1}, \dots$$

## 10.3 Вычисление структурных функций $N_q(\zeta)$ и констант $h_{q-1}$ .

Рассмотрим подробнее процесс вычисления структурных функций в модельной задаче о сжатии неоднородной по толщине плиты.

### 10.3.1 Функция $N_1(\zeta)$ и константа $h_0$ .

Прежде всего вспомним, что  $N_0 \equiv 1$ . Далее определяем функцию  $N_1(\zeta)$ . Общее решение уравнения (10.22) начала рекурсии имеет вид:

$$N_1(\zeta) = a_1 \int_0^\zeta \frac{1}{E(\eta)} d\eta - \zeta + b_1$$

Константы интегрирования  $a_1$  и  $b_1$  находим из условий (10.23) и (10.24)

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\langle 1/E \rangle}, \quad b_1 = - \left\langle \int_0^\zeta \left[ \frac{1}{E(\eta)\langle 1/E \rangle} - 1 \right] d\eta \right\rangle = - \left\langle (1-\eta) \left[ \frac{1}{E(\eta)\langle 1/E \rangle} - 1 \right] \right\rangle = \\ &= \left\langle \eta \left[ \frac{1}{E(\eta)\langle 1/E \rangle} - 1 \right] \right\rangle \end{aligned}$$

В итоге получаем следующие выражения для  $N_1^l(\zeta)$  и  $N_1(\zeta)$

$$\boxed{N_1^l(\zeta) = \frac{1}{E(\zeta)\langle 1/E \rangle} - 1}, \quad (10.33)$$

$$\boxed{N_1(\zeta) = \int_0^\zeta \left[ \frac{1}{E(\eta)\langle 1/E \rangle} - 1 \right] d\eta - \left\langle (1-\eta) \left[ \frac{1}{E(\eta)\langle 1/E \rangle} - 1 \right] \right\rangle}$$

После этого сразу, по формуле (10.22), находим

$$\boxed{h_0 = \langle E(N_1^l + 1) \rangle = \frac{1}{\langle 1/E \rangle}} \quad (10.34)$$

### 10.3.2 Функции $N_q(\zeta)$ и константы $h_{q-1}$ при $q \geq 2$ .

Рассмотрим второе уравнение (10.22) для функции  $N_2(\zeta)$ . Из формул (10.33) и (10.34) получаем

$$E(\zeta)(N_1^l + 1) = \frac{1}{\langle 1/E \rangle} = h_0$$

Следовательно, уравнение (10.22) для  $N_2(\zeta)$  принимает вид:

$$[E(N_2^| + N_1)]^| = 0$$

Отсюда, а так же из условий периодичности (10.23) и нормировки (10.24), находим  $N_2(\zeta)$ . После этого, по формуле (10.22), находим константу  $h_1$

$$\begin{aligned} N_2^| &= -N_1(\zeta), \quad N_2(\zeta) = -\int_0^\zeta N_1(\eta)d\eta + \left\langle \int_0^\zeta N_1(\eta)d\eta \right\rangle = \\ &= -\int_0^\zeta N_1(\eta)d\eta + \left\langle (1-\eta)N_1(\eta)d\eta \right\rangle = -\int_0^\zeta N_1(\eta)d\eta - \left\langle \eta N_1(\eta) \right\rangle, \\ h_1 &= \left\langle E \cdot (N_2^| + N_1) \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (10.35)$$

Вообще для любого  $\mathbf{q} \geq 1$  получаем:

$$\boxed{N_{q+1}^| = -N_q \quad \Rightarrow \quad N_{q+1}(\zeta) = -\int_0^\zeta N_q(\eta)d\eta + b_{q+1}}, \quad (10.36)$$

где  $b_{q+1} = \text{const}$ . Из формулы (10.36) следует, что:

**1.)** Каждая структурная функция определена с точностью до константы, которая определяется из условия нормировки

$$\langle N_{q+1} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad b_{q+1} = \left\langle \int_0^\zeta N_q(\eta)d\eta \right\rangle = \left\langle (1-\eta)N_q(\eta) \right\rangle = -\left\langle \eta N_q(\eta) \right\rangle \quad (10.37)$$

**2.)** Коэффициенты  $h_q = 0$ , при  $q \geq 1$ . В соответствии с формулой (10.21) и рекуррентным соотношением (10.36) получаем:

$$\boxed{\mathbf{h}_q = \left\langle \mathbf{E} \cdot (N_{q+1}^| + N_q) \right\rangle = \mathbf{0}} \quad (10.38)$$

**3.)** Структурную функцию, чей номер больше двух, можно выразить через любую из предыдущих функций. Для доказательства нужно продифференцировать рекуррентную формулу (10.36) соответствующее число раз

$$\boxed{\frac{d^{s+1} N_{q+1}}{d\zeta^{s+1}} = (-1)^{s+1} N_{q-s}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, q-1} \quad (10.39)$$

**4.)** Любая структурная функция, чей номер больше двух, выражается через начальную структурную функцию  $N_1(\zeta)$  в виде дифференциального уравнения  $q$ -го порядка. Для доказательства нужно в формуле (10.39) положить  $s=q-1$ , тогда

$$\boxed{\frac{d^q N_{q+1}}{d\zeta^q} = (-1)^q N_1} \quad (10.40)$$

5.) Воспользуемся вторым рекуррентным соотношением в формуле (10.36) и получим полезную формулу, по которой функция  $N_{q+1}$  выражается через структурную функцию  $N_{q-s}$  нижнего уровня

$$N_{q+1} = (-1)^{s+1} N_{q-s}^{(-s-1)} + \sum_{n=0}^s (-1)^n b_{q-n+1}^{(-n)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, q-1 \quad (10.41)$$

Эту же формулу можно получить непосредственно из дифференциального уравнения (10.39).

6.) Структурная функция  $N_{q+1}$  выражается непосредственно через начальную структурную функцию  $N_1(\zeta)$ . Это утверждение непосредственно следует из формулы (10.41) при  $s = q - 1$ . Её же можно получить интегрируя уравнение (10.40).

$$N_{q+1} = (-1)^q N_1^{(-q)} + \sum_{n=1}^{q-1} (-1)^n b_{q-n+1}^{(-n)} + b_{q+1}, \quad q = 1, 2, \dots \quad (10.42)$$

7.) И, наконец, последнее утверждение: функция  $N_{q+1}(\zeta)$   $q$  раз непрерывно дифференцируема, то есть  $N_{q+1}(\zeta) \in C^q[0, 1]$ . Справедливость этого утверждения вытекает из формулы (10.42).

Верхний отрицательный индекс в круглых скобках в формулах (10.41), (10.42) означает интеграл кратности, соответствующей значению индекса

$$N_1^{(-q)} \equiv \int_0^\zeta d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \cdots d\eta_{q-1} \int_0^{\eta_{q-1}} N_1(\eta) d\eta = \frac{1}{(q-1)!} \int_0^\zeta (\zeta - \eta)^{q-1} N_1(\eta) d\eta, \quad (10.43)$$

$$\langle N_1^{(-q)} \rangle = \frac{1}{q!} \langle (1 - \eta)^q N_1(\eta) \rangle$$

$$b_{q-n+1}^{(-n)} \equiv b_{q-n+1} \int_0^\zeta d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \cdots d\eta_{n-1} \int_0^{\eta_{n-1}} 1 d\eta = \frac{b_{q-n+1}}{n!} \zeta^n, \quad (10.44)$$

$$\langle b_{q-n+1}^{(-n)} \rangle = \frac{b_{q-n+1}}{(n+1)!}$$

**10.3.3 Окончательные формулы для структурных функций  $N_{q+1}(\zeta)$ ,  $q=1,2,\dots$**   
Воспользуемся формулами (10.43), (10.44) и запишем для структурных функций более удобные формулы, позволяющие выразить все функции через начальную  $N_1(\zeta)$

$$N_{q+1} = \frac{(-1)^q}{(q-1)!} \int_0^\zeta (\zeta - \eta)^{q-1} N_1(\eta) d\eta + \sum_{n=1}^{q-1} \frac{(-1)^n}{n!} b_{q-n+1} \zeta^n + b_{q+1}, \quad (10.45)$$

$$b_{q+1} = \frac{(-1)^{q+1}}{q!} \langle (1 - \eta)^q N_1(\eta) \rangle - \sum_{n=1}^{q-1} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} b_{q-n+1}, \quad q = 1, 2, \dots$$

Вычисления нужно проводить последовательно, начиная с  $q=1$ , то есть с функции  $N_2(\zeta)$ . Считая при этом, что функция  $N_1(\zeta)$  находится по формуле (10.33), либо просто задана

$$\begin{aligned} N_2 &= -\frac{1}{0!} \int_0^\zeta N_1 d\eta + b_2, & b_2 &= \frac{1}{1!} \langle (1-\eta) N_1 \rangle \\ N_3 &= \frac{1}{1!} \int_0^\zeta (\zeta - \eta) N_1 d\eta - b_2 \zeta + b_3, & b_3 &= -\frac{1}{2!} \langle (1-\eta)^2 N_1 \rangle + \frac{1}{2!} b_2 \\ N_4 &= -\frac{1}{2!} \int_0^\zeta (\zeta - \eta)^2 N_1 d\eta - b_3 \zeta + \frac{b_2}{2!} \zeta^2 + b_4, & b_4 &= \frac{1}{3!} \langle (1-\eta)^3 N_1 \rangle + \frac{b_3}{2!} - \frac{b_2}{3!} \\ N_5 &= \frac{1}{3!} \int_0^\zeta (\zeta - \eta)^3 N_1 d\eta - b_4 \zeta + \frac{b_3}{2!} \zeta^2 - \frac{b_2}{3!} \zeta^3 + b_5, & b_5 &= -\frac{1}{4!} \langle (1-\eta)^4 N_1 \rangle - \frac{b_4}{2!} + \frac{b_3}{3!} - \frac{b_2}{2!} \end{aligned}$$

## 10.4 Сходимость метода Бахвалова-Победри к точному решению.

Учтем результаты предыдущего раздела 10.3 и вернёмся к разделу 10.2.10, где для нахождения функции  $v(x, \alpha)$  построена бесконечная рекуррентная последовательность задач на отрезке  $[0, 1]$ .

В параграфе 10.3 было показано, что при  $q > 0$  все константы  $h_q = 0$ . Поэтому рекуррентные уравнения (10.28) и граничные условия (10.30) и (10.32) принимают вид:

$$h_0 w_0'' + X^*(\bar{x}) = 0, \quad w_0|_{\bar{x}=0} = u_0, \quad h_0 w_0'|_{\bar{x}=1} = -P_0^*; \quad (10.46)$$

$$h_0 w_n'' = 0, \quad w_n|_{\bar{x}=0} = - \left[ \sum_{q=1}^n N_q(\zeta) w_{n-q}^{(q)}(\bar{x}) \right]_{\bar{x}=0}, \quad h_0 w_n'|_{\bar{x}=1} = 0, \quad \text{при } n > 0 \quad (10.47)$$

Решение задачи (10.46) имеет вид:

$$\begin{aligned} w_0(\bar{x}) &= u_0 + \frac{1}{h_0} \int_0^{\bar{x}} \left[ -P_0^* + \int_z^1 X^*(y) dy \right] dz, \\ w_0' &= \frac{1}{h_0} \left[ -P_0^* + \int_{\bar{x}}^1 X^*(y) dy \right], \quad w_0^{(q)} = \frac{1}{h_0} X^{*(q-2)}, \quad q \geq 2 \end{aligned} \quad (10.48)$$

Решением всех остальных задач (10.47) являются константы, то есть

$$w_n(\bar{x}) = k_n = - \left[ N_n(\zeta) w_0^{(n)}(\bar{x}) \right]_{\bar{x}=0} = \text{const.}, \quad n > 0 \quad (10.49)$$

Вследствие этого асимптотический ряд (10.26) для функции  $v(\bar{x}, \alpha)$  принимает вид:

$$v(\bar{x}, \alpha) = w_0(\bar{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n k_n \Rightarrow v^{(q)} \equiv \frac{d^q v}{d\bar{x}^q} = \frac{d^q w_0}{d\bar{x}^q} \equiv w_0^{(q)}, \quad q > 0 \quad (10.50)$$

По формулам (10.11) и (10.12) найдем перемещение, деформацию и напряжение

$$\begin{aligned} u &= v + \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^q N_q(\zeta) v^{(q)} = w_0 + \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^q \left[ N_q(\zeta) w_0^{(q)}(\bar{x}) + k_q \right] = \\ &= w_0 + \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^q \left\{ N_q(\zeta) w_0^{(q)}(\bar{x}) - \left[ N_n(\zeta) w_0^{(n)}(\bar{x}) \right]_{\bar{x}=0} \right\} = \\ &= w_0 + \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^q \int_0^{\bar{x}} \left[ N_q(\eta) w_0^{(q)}(y) \right]' dy = w_0 + \sum_{q=1}^{\infty} \alpha^q \int_0^{\bar{x}} \left[ \frac{1}{\alpha} N_q^! w_0^{(q)} + N_q w_0^{(q+1)} \right] dy = \\ &= w_0 + \int_0^{\bar{x}} N_1^! w_0' + \sum_{q=2}^{\infty} \alpha^{q-1} \int_0^{\bar{x}} \left( \underbrace{N_q^! + N_{q-1}}_0 \right) w_0^{(q)} dy = w_0 + \int_0^{\bar{x}} N_1^! w_0' dy = \\ &= w_0 + \int_0^{\bar{x}} \left( \frac{h_0}{E(\eta)} - 1 \right) w_0' dy = w_0 - \int_0^{\bar{x}} w_0' dy + \int_0^{\bar{x}} \frac{h_0}{E(\eta)} w_0' dy = \\ &= u_0 + h_0 \int_0^{\bar{x}} \frac{1}{E(\eta)} w_0' dy = \textcolor{red}{u_0 + \int_0^{\bar{x}} \left[ -P_0^* + \int_z^1 X^*(y) dy \right] \frac{dz}{E(\zeta)}}$$

что полностью совпадает с полученным ранее точным решением (10.9) исходной задачи в безразмерных координатах!

# Лекция 12-13. Новый метод осреднения обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

## 12.1 Новый метод осреднения обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными интегрируемыми коэффициентами.

В этом разделе, на примере одномерной задачи, рассматривается другой подход к решению задач механики композитов. **Основой нового подхода является интегральная формула представления решения исходной задачи для уравнения с переменными коэффициентами через решение сопутствующей задачи для уравнения с постоянными коэффициентами.** Коэффициенты исходного уравнения могут быть произвольными интегрируемыми функциями координат, в том числе и периодическими функциями. В отличие от метода Бахвалова–Победри **в новом подходе нужно решать одну рекуррентную последовательность задач для нахождения структурных функций и один раз решить задачу для однородного тела с эффективными характеристиками.**

Вначале рассматривается задача для неоднородной (не обязательно периодически неоднородной) по толщине плиты из упругого материала. Эта задача удобна тем, что поведение плиты под действием равномерной поверхностной нагрузки и объёмной нагрузки, зависящей о координаты по толщине, описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, допускающим точное решение.

Далее рассматривается обобщение нового метода на случай линейных дифференциальных уравнений второго порядка общего вида с переменными интегрируемыми коэффициентами. Фундаментальное решение исходного уравнения находится методом возмущений. В результате получаются приближенные формулы для решения исходного уравнения. Получена оценка количества членов ряда, приближающая точное решение с заданной точностью. Для тестирования МГП рассмотрен конкретный пример уравнения Чебышева, имеющего точное решение.

### 12.1.1 Исходная модельная задача.

Исходная задача для неоднородной по толщине, бесконечной в плане плиты  $-\infty < x_1, x_2 > +\infty$ ,  $0 \leq x_3 \leq L$ , равномерно нагруженной сверху и защемлённой снизу описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dx} + X(x) &= 0, \quad \sigma = E(x)\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{du}{dx}; \\ \mathcal{L}(u) + X(x) &= 0, \quad u(0) = u_0, \quad E(x) \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = -P_0, \end{aligned} \quad (12.1)$$

где

$$\mathcal{L}(u) \equiv \frac{d}{dx} \left[ E(x) \frac{du}{dx} \right] \quad \text{— оператор исходного уравнения} \quad (12.2)$$

Общее решение исходного уравнения легко находится

$$u(x) = - \int_0^x \frac{dz}{E(z)} \int_0^z X(y) dy + K_1 \int_0^x \frac{dy}{E(y)} + K_2 \quad (12.3)$$

Константы интегрирования определяем из граничных условий

$$K_1 = -P_0 + \int_0^L X(y) dy, \quad K_2 = u_0 \quad (12.4)$$

### 12.1.2 Сопутствующая модельная задача.

Наряду с исходной задачей рассмотрим точно такую же задачу для однородной плиты

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dx} + X(x) &= 0, \quad \tau = E_o e, \quad e = \frac{dv}{dx}; \\ \mathcal{L}_o(v) + X(x) &= 0, \quad v(0) = u_0, \quad E_o \frac{dv}{dx} \Big|_{x=L} = -P_0, \end{aligned} \quad (12.5)$$

где

$$\mathcal{L}_o(v) \equiv E_o \frac{d^2v}{dx^2} \quad \text{— оператор сопутствующего уравнения} \quad (12.6)$$

Общее решение сопутствующего уравнения запишем следующим образом:

$$v(x) = - \frac{1}{E_o} \int_0^x dz \int_0^z X(y) dy + \frac{K_1}{E_o} x + K_2 \quad (12.7)$$

Такая запись решения сопутствующего уравнения выбрана с той целью, чтобы произвольные константы  $K_1$  и  $K_2$  в исходном и сопутствующем уравнениях имели одинаковую размерность. В этом случае общее решение (12.3) исходного уравнения, при  $E(x) = E_o$ , будет полностью совпадать с решением (12.7) сопутствующего уравнения.

### 12.1.3 Фундаментальное решение исходного модельного уравнения.

Пусть  $G(x, \xi)$  — фундаментальное решение исходного уравнения (12.1). То есть,  $G(x, \xi)$  — это любая функция переменных  $x$  и  $\xi$  удовлетворяющая следующему уравнению:

$$\mathcal{L}(G) + \delta(x - \xi) = 0, \quad (12.8)$$

где  $\delta(x - \xi)$  — обобщенная дельта-функция Дирака [?, стр. 194], [16, стр. 42]. Основное свойство дельта-функции, которое нам здесь понадобится, заключается в следующем равенстве

$$\int_0^L \delta(x - \xi) f(\xi) d\xi = f(x), \quad x \in (0, L)$$

Уравнение (12.8) понимается в обобщенном смысле, то есть в смысле интегрального тождества С.Л. Соболева. Уравнение (12.1), при разрывном коэффициенте  $E(x)$ , также является обобщенным [?, стр. 30-35].

Фундаментальное решение уравнения (12.8) имеет самый простой вид:

$$G(x, \xi) = -h(x - \xi) \int_{\xi}^x \frac{dy}{E(y)}, \quad (12.9)$$

где  $h(x - \xi)$  — функция Хевисайда

$$h(x - \xi) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < \xi \\ 1, & \text{if } x \geq \xi \end{cases}, \quad \frac{dh(x - \xi)}{dx} = \delta(x - \xi)$$

Константы интегрирования в формуле (12.9) выбраны нулевыми, поскольку нам нужно любое решение уравнения (12.8).

### 12.1.4 Замечание по поводу дифференцирования обобщенных функций.

Необходимо помнить, что функция  $G(x, \xi)$ , представленная формулой (12.9) является обобщенной функцией. Рассмотрим функцию

$$F(x, \xi) = h(x - \xi) f(x - \xi) = \begin{cases} 0, & x < \xi \\ f(x - \xi), & x \geq \xi \end{cases}$$

где  $f(x - \xi) = O[(x - \xi)^n]$ . Возьмём первую производную  $F'_x(x, \xi)$ . С одной стороны, применяем правило дифференцирования произведения функций, с другой стороны дифференцируем фигурную скобку в правой части предыдущей формулы. В результате получаем:

$$F'_x = \delta(x - \xi) f(x - \xi) + h(x - \xi) f'_x(x - \xi) = \begin{cases} 0, & x < \xi \\ f'_x(x - \xi), & x \geq \xi \end{cases} = h(x - \xi) f'_x(x - \xi)$$

Отсюда следует, что  $\delta(x - \xi)f(x - \xi) = 0$  — обобщённый нуль, при  $f(x - \xi) = O[(x - \xi)^n]$  и  $n \geq 1$ . В самом деле:

$$\int_0^L \delta(x - \xi)f(x - \xi)dx = f(\xi - \xi) = 0$$

Таким образом, нужные нам производные от фундаментального решения определяются по формулам:

$$\frac{dG(x, \xi)}{dx} = -\frac{h(x - \xi)}{E(x)}, \quad \frac{dG(x, \xi)}{d\xi} = \frac{h(x - \xi)}{E(\xi)} \quad (12.10)$$

### 12.1.5 Интегральная формула представления решения исходного модельного уравнения.

Решение исходного уравнения (12.1) можно представить в виде следующей интегральной формулы [?, ?]:

$$u(x) = v(x) + \int_0^L \frac{dG(x, \xi)}{d\xi} \tilde{E}(\xi) v'(\xi) d\xi, \quad (12.11)$$

где  $\tilde{E}(\xi) = E_0 - E(\xi)$ . Непосредственной проверкой убедимся, что выражение (12.8) удовлетворяет уравнению (12.1). В самом деле

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u) + X(x) &= \mathcal{L}(v) + \int_0^L \frac{d}{d\xi} [\mathcal{L}(G(x, \xi))] \tilde{E}(\xi) v'(\xi) d\xi + X(x) = \\ &= \mathcal{L}(v) - \int_0^L \frac{d}{d\xi} [\delta(x - \xi)] \tilde{E}(\xi) v'(\xi) d\xi + X(x) = \mathcal{L}(v) + \frac{d}{dx} \int_0^L \delta(x - \xi) \tilde{E}(\xi) v'(\xi) d\xi + X(x) = \\ &= \mathcal{L}(v) + \frac{d}{dx} [(E_0 - E(x)) v'(x)] + X(x) = \mathcal{L}(v) + \mathcal{L}_0(v) - \mathcal{L}(v) + X(x) = \mathcal{L}_0(v) + X(x) = 0 \end{aligned}$$

### 12.1.6 Вывод общего решения исходного уравнения из интегральной формулы.

В данном случае общее решение исходного уравнения находится явно и определяется по формуле (12.3). **Найдем решение исходного уравнения с помощью интегральной формулы (12.8).** Для этого подставим в интегральную формулу общее решение (12.7) сопутствующего уравнения и представим результат в виде:

$$u(x) = \Phi(x) + K_1 A(x) + K_2 B(x), \quad (12.12)$$

где  $K_1$  и  $K_2$ , как и ранее, произвольные константы интегрирования, а

$$\Phi(x) = -\frac{1}{E_0} \left[ \int_0^x d\xi \int_0^\xi X(y) dy + \int_0^L \frac{dG(x, \xi)}{d\xi} \tilde{E}(\xi) d\xi \int_0^\xi X(y) dy \right], \quad (12.13)$$

$$A(x) = \frac{1}{E_o} \left[ x + \int_0^L \frac{dG(x, \xi)}{d\xi} \tilde{E}(\xi) d\xi \right], \quad (12.14)$$

$$B(x) = 1 \quad (12.15)$$

### 12.1.7 Подстановка интегральной формулы в исходное уравнение.

Покажем, что в нашем модельном примере, где фундаментальное решение находится явно (12.9), формулы (12.12)-(12.15) дают точное общее решение исходного уравнения.

Для этого преобразуем выражения для  $\Phi(x)$  и  $A(x)$ , учитывая явный вид производной от фундаментального решения (12.10)

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= -\frac{1}{E_o} \left[ \int_0^x d\xi \int_0^\xi X(y) dy + \int_0^L \frac{h(x-\xi)}{E(\xi)} \tilde{E}(\xi) d\xi \int_0^\xi X(y) dy \right] = \\ &= -\frac{1}{E_o} \left[ \int_0^x d\xi \int_0^\xi X(y) dy + \int_0^x \frac{\tilde{E}(\xi)}{E(\xi)} d\xi \int_0^\xi X(y) dy \right] = \\ &= -\frac{1}{E_o} \int_0^x \left( 1 + \frac{E_o}{E(\xi)} - 1 \right) d\xi \int_0^\xi X(y) dy = -\int_0^x \frac{d\xi}{E(\xi)} \int_0^\xi X(y) dy \\ \mathbf{A}(x) &= \frac{1}{E_o} \left[ x + \int_0^L \frac{h(x-\xi)}{E(\xi)} \tilde{E}(\xi) d\xi \right] = \frac{1}{E_o} \left[ x + \int_0^x \frac{\tilde{E}(\xi)}{E(\xi)} d\xi \right] = \\ &= \frac{1}{E_o} \left[ x + \int_0^x \left( \frac{E_o}{E(\xi)} - 1 \right) d\xi \right] = \int_0^x \frac{d\xi}{E(\xi)} \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в формулу (12.12), получим точное общее решение (12.3) исходного уравнения.

## 12.2 Уравнения второго порядка общего вида.

Рассмотрим далее более сложное исходное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами общего вида [?]

$$f_2(x)u'' + f_1(x)u' + f_0(x)u + f(x) = 0, \quad x \in (a, b) \quad (12.16)$$

**Иногда такие уравнения допускают точные аналитические решения. Однако в большинстве важных случаев для решения подобных уравнений приходится прибегать к различным приближенным способам.**

Ниже излагается ещё один приближённый способ нахождения общего решения исходного уравнения. Он основан на интегральном представлении решения исходного уравнения через общее аналитическое решение уравнения с постоянными коэффициентами (сопутствующее уравнение) [?]. Осреднение дифференциальных уравнений в

частных производных с переменными коэффициентами излагается в работе [?]. Сравнение метода МГП с методом Мори-Танака проводилось в работе [?]

Итак, пусть функция  $f_2(x)$ , при любом  $x$ , не обращается в нуль, тогда уравнение (12.16) можно свести к самосопряженной форме [?, стр. 241], которое также будем называть исходным уравнением

$$[C(x)u']' + q(x)u + X(x) = 0, \quad (12.17)$$

$$C = \exp \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx, \quad q = \frac{f_0}{f_2} \exp \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx, \quad X = \frac{f_0}{f_2} \exp \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx.$$

Будем считать, что коэффициент  $C(x) > 0$ , причем  $C_{min} \leq C(x) \leq C_{max}$ , а коэффициент  $q(x)$  ограничен и может быть как положителен, так и отрицателен в зависимости от переменной  $x$ , то есть  $q_{min} \leq |q(x)| \leq q_{max}$

Пусть  $G(x, \xi)$  — фундаментальное решение уравнения (12.17), то есть  $G(x, \xi)$  удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{d}{dx} \left[ C(x) \frac{dG(x, \xi)}{dx} \right] + q(x)G(x, \xi) + \delta(x - \xi) = 0, \quad x, \xi \in (a, b), \quad (12.18)$$

Уравнение (12.18) понимается в обобщенном смысле, то есть в смысле интегрального тождества С.Л. Соболева. Уравнение (12.17) при разрывных коэффициентах  $C(x)$ ,  $q(x)$  также является обобщенным [?, стр. 30-35].

Пусть  $v(x)$  — решение сопутствующего уравнения с постоянными коэффициентами  $C_o = const.$  и  $q_o = const.$

$$C_o v''(x) + q_o v(x) + X(x) = 0, \quad x \in (a, b) \quad (12.19)$$

Во всех трех уравнениях область определения одна и та же  $[a, b]$ . В исходном и сопутствующем уравнении одинаковые свободные члены.

### 12.2.1 Интегральная формула.

Воспользуемся результатами работ [?, ?] и представим решение  $u(x)$  исходного уравнения (12.17) с переменными коэффициентами через решение сопутствующего уравнения (12.19) и фундаментальное решение (12.18) следующим образом:

$$u(x) = v(x) + \int_a^b \frac{dG(x, \xi)}{d\xi} \tilde{C}(\xi) v'(\xi) d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) v(\xi) d\xi, \quad (12.20)$$

где  $\tilde{C}(\xi) = C_o - C(\xi)$ ,  $\tilde{q}(\xi) = q_o - q(\xi)$ .

**При  $q(x) \equiv q_o$  интегральная формула (12.18) по виду в точности совпадает с интегральной формулой (12.11) предыдущего раздела. Разница заключается в том, что в первом и во втором случаях фундаментальные функции различаются, поскольку они являются решениями разных уравнений.**

Подстановкой выражения (12.20) в исходное уравнение (12.17) убеждаемся, что оно удовлетворяется. В самом деле, пусть

$$\mathcal{L}(\bullet) \equiv [C(x)(\bullet)']' + q(x)(\bullet), \quad \mathcal{L}_o(\bullet) \equiv C_o(\bullet)'' + q_o(\bullet)$$

— исходный и сопутствующий операторы. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u) + X(x) &= \mathcal{L}(v) + \int_a^b \frac{d\mathcal{L}(G(x, \xi))}{d\xi} \tilde{C}(\xi) v'(\xi) d\xi - \int_a^b \mathcal{L}(G(x, \xi)) \tilde{q}(\xi) v(\xi) d\xi + X(x) = \\ &= \mathcal{L}(v) - \int_a^b \frac{d\delta(x - \xi)}{d\xi} \tilde{C}(\xi) v'(\xi) d\xi + \int_a^b \delta(x - \xi) \tilde{q}(\xi) v(\xi) d\xi + X(x) = \\ &= \mathcal{L}(v) + \frac{d}{dx} [\tilde{C}(\xi) v'(x)] + \tilde{q}(\xi) v(x) + X(x) = \mathcal{L}(v) + \mathcal{L}_o(v) - \mathcal{L}(v) + X(x) = \\ &= \mathcal{L}_o(v) + X(x) = 0\end{aligned}$$

### 12.2.2 Общее решение сопутствующего уравнения.

Общее решение сопутствующего уравнения (12.19) имеет вид:

$$\begin{aligned}q_o \neq 0, \quad v(x) &= K_1 e^{i\lambda_o x} + K_2 e^{-i\lambda_o x} + \varphi(x); \quad \lambda_o = \sqrt{\frac{q_o}{C_o}}, \\ q_o = 0, \quad v(x) &= K_1 x + K_2 + \varphi(x)\end{aligned}\tag{12.21}$$

где  $i$  — комплексная единица,  $K_1$  и  $K_2$  — произвольные комплексные константы, а  $\varphi(x)$  — частное решение сопутствующего уравнения (12.20) с постоянными коэффициентами при  $q_o \neq 0$

$$\begin{aligned}q_o \neq 0, \quad \varphi(x) &= \frac{i}{2\lambda_o C_o} \left[ e^{i\lambda_o x} \int X(x) e^{-i\lambda_o x} dx - e^{-i\lambda_o x} \int X(x) e^{i\lambda_o x} dx \right], \\ q_o = 0, \quad \varphi(x) &= - \int \left[ \int X(x) dx \right] dx\end{aligned}\tag{12.22}$$

В формулах (12.21) и (12.22) при  $q_o \neq 0$  нужно выделить действительное решение. В случае  $q_o > 0$

$$v(x) = K_1 \cos(\lambda_o x) + K_2 \sin(\lambda_o x) + \varphi(x); \quad \lambda_o = \sqrt{\frac{q_o}{C_o}},\tag{12.23}$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\lambda_o C_o} \left[ \sin(\lambda_o x) \int X(x) \cos(\lambda_o x) dx - \cos(\lambda_o x) \int X(x) \sin(\lambda_o x) dx \right]\tag{12.24}$$

Если же  $q_o < 0$ , тогда

$$v(x) = K_1 e^{\lambda_o x} + K_2 e^{-\lambda_o x} + \varphi(x); \quad \lambda_o = \sqrt{\frac{-q_o}{C_o}},\tag{12.25}$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\lambda_o C_o} \left[ e^{\lambda_o x} \int X(x) e^{-\lambda_o x} dx - e^{-\lambda_o x} \int X(x) e^{\lambda_o x} dx \right]\tag{12.26}$$

В формулах (12.23)-(12.26)  $K_1$  и  $K_2$  — произвольные действительные константы.

### 12.2.3 Общее решение исходного уравнения.

Подставив (12.21) в интегральную формулу (12.20), получим общее решение исходного уравнения (12.17)

$$u(x) = K_1 A(x) + K_2 B(x) + \Phi(x), \quad (12.27)$$

где

$$A(x) = e^{i\lambda_0 x} + i\lambda_0 \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{i\lambda_0 \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{i\lambda_0 \xi} d\xi = \\ = \begin{cases} \cos(\lambda_0 x) - \lambda_0 \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) \sin(\lambda_0 \xi) d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) \cos(\lambda_0 \xi) d\xi, & q_0 > 0 \\ x + \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) d\xi + \int_a^b G(x, \xi) q(\xi) \xi d\xi, & q_0 = 0 \\ e^{-\lambda_0 x} - \lambda_0 \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{-\lambda_0 \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{-\lambda_0 \xi} d\xi, & q_0 < 0 \end{cases} \quad (12.28)$$

$$B(x) = e^{-i\lambda_0 x} - i\lambda_0 \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{-i\lambda_0 \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{-i\lambda_0 \xi} d\xi = \\ = \begin{cases} \sin(\lambda_0 x) - \lambda_0 \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) \cos(\lambda_0 \xi) d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) \sin(\lambda_0 \xi) d\xi, & q_0 > 0 \\ 1 + \int_a^b G(x, \xi) q(\xi) d\xi, & q_0 = 0 \\ e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{\lambda_0 \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{\lambda_0 \xi} d\xi, & q_0 < 0 \end{cases} \quad (12.29)$$

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) \varphi'(\xi) d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) \varphi(\xi) d\xi \quad (12.30)$$

### 12.2.4 Выбор коэффициентов сопутствующего уравнения.

Постоянные коэффициенты  $C_0$  и  $q_0$  сопутствующего уравнения — это любые физически допустимые константы. Целесообразно увязать их со свойствами исходной задачи, например, положить их равными эффективным характеристикам [?, 1] так, что

$$C_0 = \frac{1}{\langle 1/C \rangle}, \quad q_0 = \langle q \rangle, \quad \langle f \rangle \equiv \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (12.31)$$

В случае задачи Коши, среднее понимается как предельное значение при  $b \rightarrow \infty$  [?, стр. 247-249].

### 12.2.5 Построение фундаментального решения исходного уравнения.

Общее решение исходного уравнения находится по формулам (12.27), (12.28) если известно фундаментальное решение уравнения (12.18) с переменными коэффициентами. Однако задача отыскания точного фундаментального решения, в общем случае зависимости коэффициентов от координаты, вряд ли разрешима. Поэтому будем искать приближенное решение уравнения (12.18) методом возмущений [12, ?]. Для этого перепишем уравнение (12.18) следующим образом:

$$\frac{d}{dx} \left[ C(x) \frac{dG(x, \xi)}{dx} \right] + \varkappa q(x) G(x, \xi) + \delta(x - \xi) = 0, \quad (12.32)$$

где  $\varkappa$  — возмущающий параметр, который в окончательном результате положим равным единице. Будем искать решение уравнения (12.32) в виде ряда по степеням параметра  $\varkappa$

$$G(x, \xi, \varkappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n G_n(x, \xi) \quad (12.33)$$

Подставим ряд (12.33) в уравнение (12.32), соберем коэффициенты при одинаковых степенях  $\varkappa$  и приравняем их к нулю. В результате получаем рекуррентную последовательность уравнений

$$[C(x)G'_0(x, \xi)]' + \delta(x - \xi) = 0, \quad [C(x)G'_n(x, \xi)]' + q(x)G_{n-1}(x, \xi) = 0, \quad n > 0 \quad (12.34)$$

Или

$$\begin{aligned} G_0(x, \xi) &= - \int_a^x \frac{h(z - \xi)}{C(z)} dz, \quad G_n(x, \xi) = - \int_a^x \frac{dx_1}{C(x_1)} \int_a^{x_1} q(x_2) G_{n-1}(x_2, \xi) dx_2 = \\ &= (-1)^{n+1} \int_a^x \frac{dx_1}{C(x_1)} \int_a^{x_1} q(x_2) dx_2 \cdots \int_a^{x_{2n-2}} \frac{dx_{2n-1}}{C(x_{2n-1})} \int_a^{x_{2n-1}} q(x_{2n}) dx_{2n} \int_a^{x_{2n}} \frac{h(z - \xi) dz}{C(z)}, \quad n > 0 \end{aligned} \quad (12.35)$$

Здесь  $h(x - \xi)$  — единичная обобщенная функция Хевисайда [16]. Константы интегрирования уравнений (12.34) полагаем равными нулю, поскольку нас устраивает любое фундаментальное решение исходного уравнения. Преобразуем выражение (12.35) для функции  $G_0(x, \xi)$

$$G_0(x, \xi) = - \int_a^x \frac{h(z - \xi)}{C(z)} dz = - \begin{cases} 0, & x < \xi \\ \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)}, & x \geq \xi \end{cases} = -h(x - \xi) \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)}, \quad (12.36)$$

Дифференцируя (12.36) по  $\xi$ , найдем обобщенную производную от  $G_0(x, \xi)$  по  $\xi$ , которая нам понадобится в дальнейшем

$$\frac{\partial G_0}{\partial \xi} = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ h(x - \xi) \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)} \right] = \frac{h(x - \xi)}{C(\xi)} \quad (12.37)$$

Используя формулы (12.36) и (12.37) перепишем выражения для коэффициентов  $G_n(x, \xi)$  из (12.35) и их производных по переменным  $x$  и  $\xi$  при  $n \geq 1$

$$G_n(x, \xi) = -(-1)^n h(x - \xi) \int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)}; \quad (12.38)$$

$$\frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial x} = -(-1)^n \frac{h(x - \xi)}{C(x)} \int_{\xi}^x q(x_1) dx_1 \int_{\xi}^{x_1} \psi(x_2, \xi) dx_2 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)};$$

$$\frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \xi} = (-1)^n \frac{h(x - \xi)}{C(\xi)} \int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n, \quad x_0 \equiv x.$$

Здесь для сокращения записи введено вспомогательное обозначение

$$\psi(x, \xi) = \frac{1}{C(x)} \int_{\xi}^x q(y) dy, \quad \psi'_{\xi}(x, \xi) = -\frac{q(\xi)}{C(x)}$$

Пользуясь этим обозначением, можно записать выражение (12.38) в виде рекуррентного соотношения

$$G_n(x, \xi) = - \int_a^x \psi(y, \xi) G_{n-1}(y, \xi) dy, \quad (n > 0); \quad G_0(x, \xi) = -h(x - \xi) \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)} \quad (12.39)$$

Подставив далее выражения (12.38) для  $G_n(x, \xi)$  в ряд (12.33) и положив в нём  $\varkappa = 1$ , получим фундаментальное решение исходного уравнения в виде бесконечного ряда. Причем, если  $q(x) > 0$ , то это знакочередующийся ряд. Если же  $q(x) < 0$ , то ряд будет знакопостоянным. Итак:

$$G(x, \xi) = -h(x - \xi) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)}, \quad x_0 \equiv x; \quad (12.40)$$

$$G'_x(x, \xi) = -\frac{h(x - \xi)}{C(x)} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{\xi}^x q(x_1) dx_1 \int_{\xi}^{x_1} \psi(x_2, \xi) dx_2 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)} \right];$$

$$G'_{\xi}(x, \xi) = \frac{h(x - \xi)}{C(\xi)} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \right]$$

Пусть  $G^{(n)}(x, \xi)$  — частичная сумма ряда (12.40), тогда

$$G^{(n+1)}(x, \xi) = G^{(n)}(x, \xi) - h(x - \xi) (-1)^n \int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)}$$

Если  $C = C_0 = \text{const.}$ , а  $q = q(x)$  — переменная, тогда

$$\int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 = \frac{1}{C_0} \int_{\xi}^x dx_1 \int_{\xi}^{x_1} q(y) dy = \frac{1}{C_0} \int_{\xi}^x (x - x_1) q(x_1) dx_1,$$

следовательно

$$G(x, \xi) = -h(x - \xi) \left[ \frac{x - \xi}{C_0} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{C_0^{n+1}} \int_{\xi}^x (x - x_1) q(x_1) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} (x_{n-1} - x_n) (x_n - \xi) q(x_n) dx_n + \cdots \right]$$

Если же  $q = q_0 = \text{const.}$ , а  $C = C(x)$  — переменная, тогда

$$\psi(x, \xi) = q_0 \frac{x - \xi}{C(x)},$$

следовательно

$$G(x, \xi) = -h(x - \xi) \left[ \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q_0^n \int_{\xi}^x \frac{x_1 - \xi}{C(x_1)} dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_n} \frac{x_n - \xi}{C(x_n)} dx_n \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)} \right]$$

Пусть теперь  $C = C_0 = \text{const.}$  и  $q = q_0 = \text{const.}$ , тогда из формулы (12.38), а также с учетом того, что

$$\int_{\xi}^x (x - z)(z - \xi)^m dz = \frac{(x - \xi)^{m+2}}{(m+1)(m+2)},$$

получаем

$$G_n(x, \xi) = (-1)^{n+1} \frac{h(x - \xi) q_0^n}{(2n+1)! C_0^{n+1}} (x - \xi)^{2n+1}, \quad n \geq 0 \quad (12.41)$$

В этом случае ряд (12.40) суммируется и получается фундаментальное решение сопутствующего уравнения (12.20), которое понимается в обобщенном смысле и его можно найти, например, в книгах [?, ?]

$$G(x, \xi) = -\frac{h(x - \xi)}{C_0} \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s_0}{(2n+1)!} \left( \frac{x - \xi}{s_0} \right)^{2n+1} = s_0 \sin \frac{x - \xi}{s_0}, & s_0 = \sqrt{\frac{C_0}{q_0}}, \quad q_0 > 0, \\ x - \xi, & q_0 = 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_0}{(2n+1)!} \left( \frac{x - \xi}{s_0} \right)^{2n+1} = s_0 \operatorname{sh} \frac{x - \xi}{s_0}, & s_0 = \sqrt{\frac{C_0}{-q_0}}, \quad q_0 < 0. \end{cases}$$

В общем случае, когда коэффициенты  $C$  и  $q$  переменные, можно получить оценку абсолютной величины  $n$ -го члена ряда (12.40). Для этого воспользуемся выражением

(12.41), в соответствии с которым при  $x \geq \xi$  получаем:

$$\begin{aligned} \frac{(x - \xi)^{2n+1} |q|_{\min}^n}{(2n + 1)! C_{\max}^{n+1}} &\leq |G_n(x, \xi)| \leq \frac{(x - \xi)^{2n+1} |q|_{\max}^n}{(2n + 1)! C_{\min}^{n+1}} \leq \frac{L^{2n+1} |q|_{\max}^n}{(2n + 1)! C_{\min}^{n+1}} \leq \\ &\leq \frac{L^{2n+1} |\langle q \rangle|^n \langle 1/C \rangle^{n+1}}{(2n + 1)!} \end{aligned} \quad (12.42)$$

Мажорирующие ряды сходятся, в частности

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - \xi)^{2n+1} |q|_{\max}^n}{(2n + 1)! C_{\min}^{n+1}} = \frac{s^*}{C_{\min}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!} \left( \frac{x - \xi}{s^*} \right)^{2n+1} = \frac{s^*}{C_{\min}} \sin \frac{x - \xi}{s^*}, \quad s^* = \sqrt{\frac{C_{\min}}{|q|_{\max}}}$$

Следовательно, в соответствии с признаком Вейерштрасса, ряд (12.40) сходится равномерно на всём промежутке  $a \leq x \leq b$ .

### 12.2.6 Примеры. Уравнение Чебышева $-1 < x < 1$

Рассмотрим некоторые известные уравнения [?, стр.254 № 1140]

$x^2 u'' + xu' + (x^2 - m^2)u = 0,$	$[xu']' + \left( x - \frac{m^2}{x} \right)u = 0,$	Ур. Бесселя
$xu'' + (1 - x)u' + mu = 0,$	$[xe^{-x}u']' + me^{-x}u = 0,$	Ур. Лагерра
$u'' - 2xu' + 2mu = 0,$	$[e^{-x^2}u']' + 2me^{-x^2}u = 0,$	Ур. Эрмита
$(1 - x^2)u'' - xu' + m^2u = 0,$	$[\sqrt{1 - x^2}u']' + \frac{m^2}{\sqrt{1 - x^2}}u = 0,$	Ур. Чебышева
$(1 - x^2)u'' - 2xu' + m(m + 1)u = 0,$	$[(1 - x^2)u']' + m(m + 1)u = 0,$	Ур. Лежандра

Более подробная информация о перечисленных и других подобных уравнениях содержится, например, в справочниках [?, глава 10], [?, глава 22], [?, глава 11].

#### Уравнение Чебышева $-1 < x < 1$

Общее решение уравнения Чебышева имеет вид [?, стр.164 № 736]:

$$u(x) = K_1 T_m(x) + K_2 U_m(x), \quad (12.43)$$

где

$$T_m(x) = \cos(m \arccos x), \quad U_m(x) = \sin(m \arccos x) \quad (12.44)$$

полиномы Чебышева 1-го и 2-го рода. Функции  $T_m(x)$  и  $U_m(x)$  можно представить в виде полиномов  $m$ -й степени по от  $x$ , потому они и называются полиномами. Детальное исследование полиномов Чебышева дано в книгах [?, ?].

Рассмотрим более подробно самосопряженную форму уравнения Чебышева. В этом уравнении  $C(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $q(x) = m^2 / \sqrt{1 - x^2}$ . По формулам (12.31) найдем ко-

эффициенты  $C_o$  и  $q_o$  сопутствующего уравнения

$$C_o = \frac{1}{\langle 1/C \rangle} = \left[ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right]^{-1} = \left[ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right]^{-1} = \left[ \arcsin x \Big|_0^1 \right]^{-1} = \frac{2}{\pi},$$

$$q_o = \langle q \rangle = \frac{m^2}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = m^2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = m^2 \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{m^2 \pi}{2}$$
(12.45)

Далее по формулам (12.23) найдем общее действительное решение сопутствующего уравнения

$$v(x) = K_1 \cos \lambda_o x + K_2 \sin \lambda_o x, \quad \lambda_o = \sqrt{\frac{q_o}{C_o}} = \frac{m\pi}{2}$$
(12.46)

Здесь  $K_1$  и  $K_2$  — произвольные действительные константы. Вычислим далее функцию  $\psi(x)$

$$\psi(x, \xi) = \frac{1}{C(x)} \int_{\xi}^x q(y) dy = \frac{m^2}{\sqrt{1-x^2}} \int_{\xi}^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = m^2 \frac{\arcsin x - \arcsin \xi}{\sqrt{1-x^2}}$$
(12.47)

Далее нам понадобится интеграл следующего вида:

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^x \frac{(\arcsin y - \arcsin \xi)^n}{\sqrt{1-y^2}} dy &= \int_{\xi}^x (\arcsin y - \arcsin \xi)^n d(\arcsin y - \arcsin \xi) = \\ &= \frac{1}{n+1} (\arcsin y - \arcsin \xi)^{n+1} \Big|_{\xi}^x = \frac{1}{n+1} (\arcsin x - \arcsin \xi)^{n+1} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n+1} \arccos^{n+1} (\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\xi^2} + x\xi), & x > \xi, \\ -\frac{1}{n+1} \arccos^{n+1} (\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\xi^2} + x\xi), & x < \xi, \end{cases} [?, \text{стр.63, №5}] \end{aligned}$$

Пользуясь этими результатами и формулами (12.36), (12.38) получаем, вместо ряда (12.40) из квадратур ряд из элементарных функций, который представляет собой разложение синуса в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= -\frac{h(x-\xi)}{m} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!} (\arcsin x - \arcsin \xi)^{2n+1} = \\ &= -\frac{h(x-\xi)}{m} \sin [m \cdot (\arcsin x - \arcsin \xi)] \end{aligned}$$
(12.48)

Из (12.48) находим

$$\begin{aligned} G'_\xi(x, \xi) &= \frac{h(x-\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n}}{(2n)!} (\arcsin x - \arcsin \xi)^{2n} = \\ &= \frac{h(x-\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos [m \cdot (\arcsin x - \arcsin \xi)] \end{aligned}$$
(12.49)

В формуле (12.49) удержана только регулярная часть, не содержащая делта-функцию Дирака. Далее найдем коэффициенты

$$\tilde{C}(\xi) = C_o - C(\xi) = \frac{2}{\pi} - \sqrt{1 - \xi^2} = -\sqrt{1 - \xi^2} \left(1 - \frac{2}{\pi \sqrt{1 - \xi^2}}\right),$$

$$\tilde{q}(\xi) = q_o - q(\xi) = m^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right) = \frac{m^2 \pi}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi \sqrt{1 - \xi^2}}\right),$$

воспользуемся общими формулами (12.28), (12.29) и найдём функции  $A(x)$  и  $B(x)$

$$A(x) \equiv A_m(x) = \cos \frac{m\pi x}{2} - \frac{m\pi}{2} \int_{-1}^1 G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) \sin \frac{m\pi \xi}{2} d\xi - \int_{-1}^1 G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) \cos \frac{m\pi \xi}{2} d\xi =$$

$$= \cos \frac{m\pi x}{2} + \frac{m\pi}{2} \int_{-1}^x \left\{ \left(1 - \frac{2}{\pi \sqrt{1 - \xi^2}}\right) \cdot \left[ \sin \frac{m\pi \xi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n}}{(2n)!} \varphi^{2n}(x, \xi) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \cos \frac{m\pi \xi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!} \varphi^{2n+1}(x, \xi) \right] \right\} d\xi \quad (12.50)$$

Здесь для краткости введено обозначение

$$\varphi(x, \xi) = \arcsin x - \arcsin \xi, \quad \varphi(x, x) = 0, \quad \varphi(x, -1) = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$$

Бесконечные ряды в формуле (12.50) представляют собой разложения в ряды Тейлора тригонометрических функций  $\cos \varphi(x, \xi)$  и  $\sin \varphi(x, \xi)$ , поэтому эти ряды можно свернуть и получить точное решение уравнения Чебышева

$$\mathbf{A}_m(\mathbf{x}) = \cos \frac{m\pi x}{2} + \int_{-1}^x \left\{ \left( \frac{m\pi}{2} - \frac{m}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right) \left[ \sin \frac{m\pi \xi}{2} \cdot \cos(m\varphi) + \cos \frac{m\pi \xi}{2} \times \right. \right.$$

$$\left. \times \sin(m\varphi) \right] \right\} d\xi = \cos \frac{m\pi x}{2} + \int_{-1}^x \left( \frac{m\pi}{2} - \frac{m}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right) \cdot \sin \left[ \frac{m\pi \xi}{2} + m\varphi(x, \xi) \right] d\xi =$$

$$= \cos \frac{m\pi x}{2} + \int_{-1}^x \sin \left[ \frac{m\pi \xi}{2} + m\varphi(x, \xi) \right] d_\xi \left[ \frac{m\pi \xi}{2} + m\varphi(x, \xi) \right] =$$

$$= \cos \frac{m\pi x}{2} + \int_{-1}^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{[(m\pi \xi)/2 + m\varphi(x, \xi)]^{2n+1}}{(2n+1)!} d_\xi \left[ \frac{m\pi \xi}{2} + m\varphi(x, \xi) \right] =$$

$$= \cos \frac{m\pi x}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{[(m\pi \xi)/2 + m\varphi(x, \xi)]^{2n+2}}{(2n+2)!} \Big|_{-1}^x =$$

$$= \cos \frac{m\pi x}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} \left( \frac{m\pi x}{2} \right)^{2n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(m \arcsin x)^{2n+2}}{(2n+2)!} =$$

$$= \cos \frac{m\pi x}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left( \frac{m\pi x}{2} \right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(m \arcsin x)^{2n}}{(2n)!} = \quad (12.51)$$

$$= \cos \frac{m\pi x}{2} - \cos \frac{m\pi x}{2} + \cos(m \arcsin x) = \cos(m \arcsin x) \quad (12.52)$$

Проделав похожие преобразования в формуле (12.29), найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{B(x)} \equiv B_m(x) &= \sin \frac{m\pi x}{2} + \frac{m\pi}{2} \int_{-1}^x \left\{ \left( 1 - \frac{2}{\pi \sqrt{1-\xi^2}} \right) \cdot \left[ \cos \frac{m\pi \xi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n}}{(2n)!} \varphi^{2n}(x, \xi) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin \frac{m\pi \xi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!} \varphi^{2n+1}(x, \xi) \right] \right\} d\xi = \sin \frac{m\pi x}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left( \frac{m\pi x}{2} \right)^{2n+1} + \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(m \arcsin x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(m \arcsin x) \right. \end{aligned} \quad (12.53)$$

Функции  $A_m(x)$  и  $B_m(x)$  являются точными независимыми решениями уравнения Чебышева. Они представляют собой линейные комбинации функций Чебышева  $T_m(x)$  и  $U_m(x)$  (12.44). Для доказательства этого факта нужно всего лишь воспользоваться тождеством

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

В результате чего

$$A_m(x) = \cos \frac{m\pi}{2} T_m(x) + \sin \frac{m\pi}{2} U_m(x), \quad B_m(x) = \sin \frac{m\pi}{2} T_m(x) - \cos \frac{m\pi}{2} U_m(x)$$

Отсюда получаются формулы, приведенные в книге [?, стр. 59].

$$\begin{aligned} A_{2m} &= (-1)^m T_{2m}, & A_{2m+1} &= (-1)^m U_{2m+1}, \\ B_{2m} &= (-1)^{m+1} U_{2m}, & B_{2m+1} &= (-1)^m T_{2m+1} \end{aligned}$$

### 12.2.7 Приближенные формулы решения уравнения Чебышева. Сравнение с точными решениями.

Рассмотрим частичные суммы ряда (12.51) и затем сравним их с точным решением (12.52)

$$A_{m(I)}(x) = \cos \frac{m\pi x}{2} + \sum_{n=0}^I (-1)^n \frac{(m \arcsin x)^{2n} - \left( \frac{m\pi x}{2} \right)^{2n}}{(2n)!}, \quad (12.54)$$

$$A_{m(I)} = A_{m(I-1)} + (-1)^I \frac{(m \arcsin x)^{2I} - \left( \frac{m\pi x}{2} \right)^{2I}}{(2I)!}, \quad A_m^{(0)}(x) = \cos \frac{m\pi x}{2}$$

---


$$B_{m(I)}(x) = \sin \frac{m\pi x}{2} + \sum_{n=0}^I (-1)^n \frac{(m \arcsin x)^{2n+1} - \left( \frac{m\pi x}{2} \right)^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

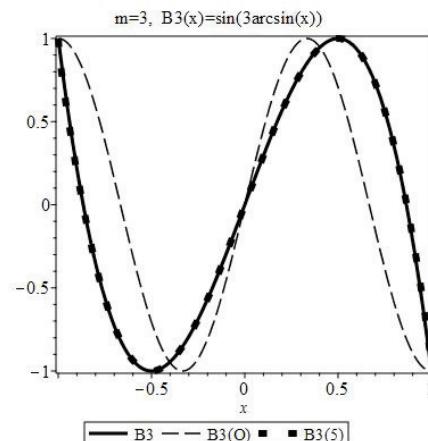
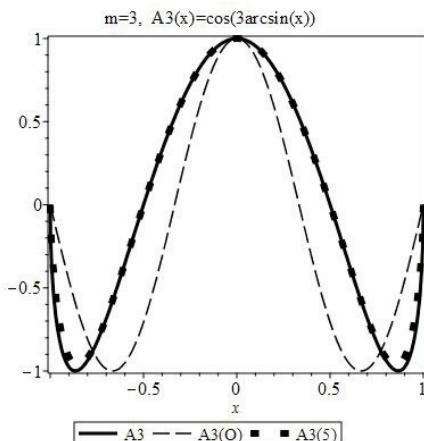
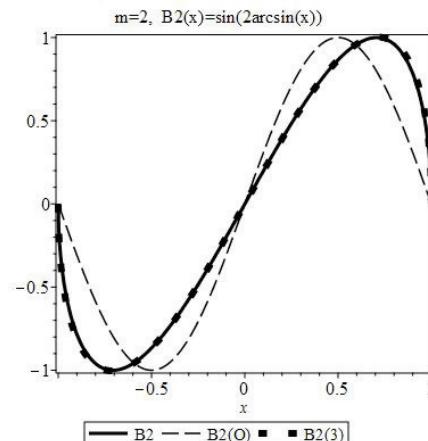
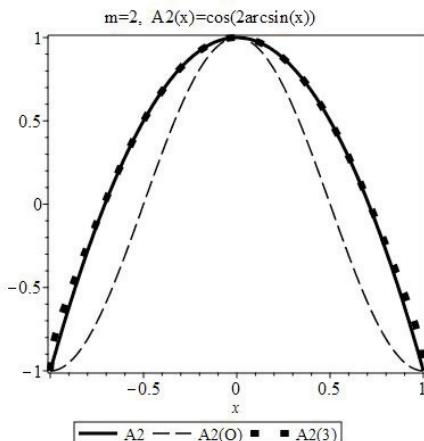

---

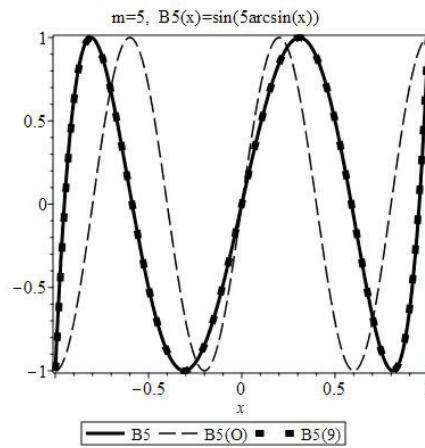
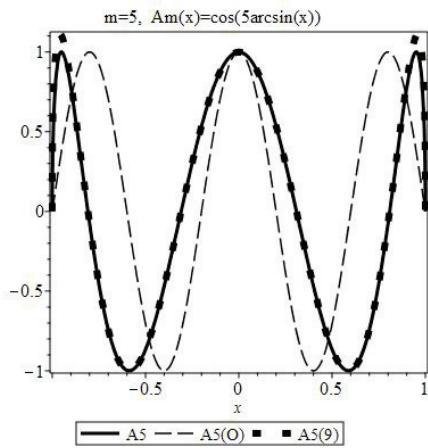
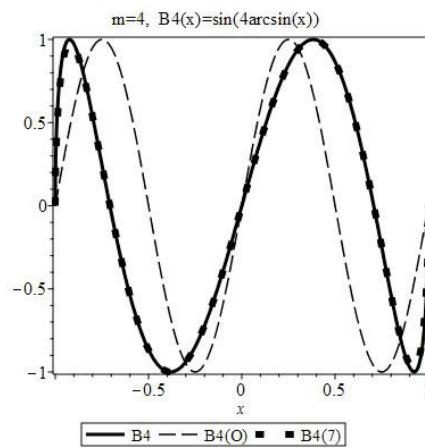
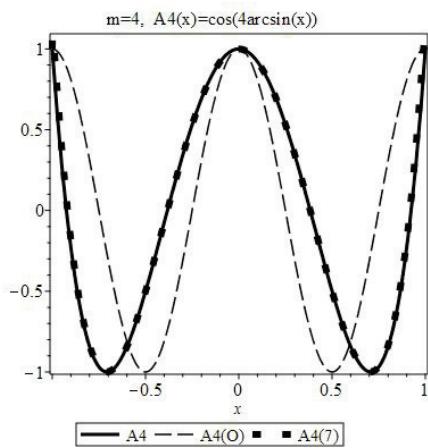
(12.55)

$$B_{m(I)} = B_{m(I-1)} + (-1)^I \frac{(m \arcsin x)^{2I+1} - (\frac{m\pi x}{2})^{2I+1}}{(2I+1)!}, \quad B_m^{(0)}(x) = \sin \frac{m\pi x}{2}$$

На представленных ниже рисунках изображены графики независимых точных  $A_m(x)$ ,  $B_m(x)$  и приближенных  $A_{m(I)}(x)$ ,  $B_{m(I)}(x)$  решений уравнения Чебышева в виде частичных сумм, вытекающих из общего интегрального представления (12.20).

Сплошной линией обозначены графики точных решений уравнения Чебышева  $A_m(x)$ , и  $B_m(x)$  при  $m=2,3,4,5$ . Штриховые линии обозначают точные решения  $A_{m(O)}(x)$ ,  $B_{m(O)}(x)$  сопутствующего уравнения (12.48) с постоянными коэффициентами, найденные по общим формулам (12.31). Кривые обозначенные прямоугольными точками соответствуют приближенным решениям  $A_{m(I)}(x)$  и  $B_{m(I)}(x)$  в виде частичных сумм, найденным по формулам (12.54), (12.55). Число ( $I$ ) в круглых скобках обозначает число членов в частичных суммах.





### Графики решений уравн. Чебышева при различных значениях параметра $m$

Как видно из рисунков лишь функция  $A_{5(9)}(x)$  визуально отличается от точного решения вблизи граничных точек  $x_1 = \pm 1$ . Функция  $A_{5(10)}(x)$ , которая является суммой из десяти членов ряда, (12.54) будет практически неотличима от точного решения.



# Лекция 14. Динамическая задача для неоднородного стержня с переменным поперечным сечением

## 14.1 Осреднение задачи о продольных колебаниях неоднородной плиты и стержня.

Осреднение динамической задачи методом Бахвалова–Победри (МБП) поясним, опять же, на примере задачи для бесконечной в плане, неоднородной по толщине плиты  $-\infty < x_1, x_2 < +\infty$  толщины  $L : 0 \leq x_3 \leq L$  из изотропного материала.

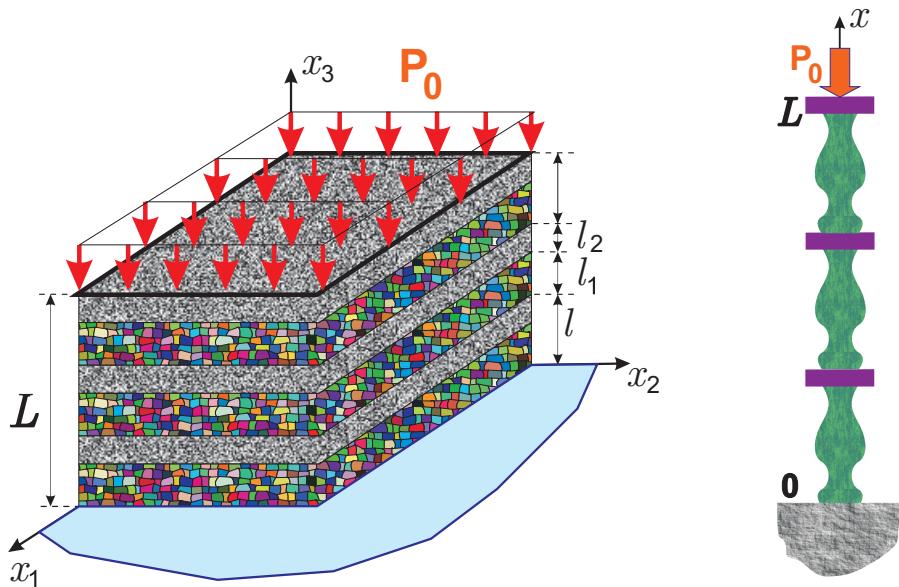


Рис. 14.10: Периодически неоднородная по толщине, бесконечная в плане плита и периодически неоднородный стержень с переменным сечением

Плита является периодически неоднородной, то есть она построена из склеенных между собой **ячеек периодичности** толщины  $l$ . В каждой ячейке периодичности модуль Юнга  $E$  и плотность  $\rho$  являются функциями локальной переменной  $0 \leq \zeta \leq 1$ . Эти функции внутри ячейки могут быть как непрерывными, так и разрывными функциями локальной переменной. Процесс колебаний плиты описывается дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами гиперболического типа.

Точно таким же уравнением описываются продольные колебания периодически неоднородного по длине стержня с периодическим переменным поперечным сечением того же периода, что и для функций  $E(\zeta)$  и  $\varrho(\zeta)$ .

**14.1.1 Постановка задачи.** Уравнение поперечных колебаний периодически неоднородной плиты толщины  $L$  и продольных колебаний периодически неоднородного стержня длины с переменным поперечным сечением имеют вид [14]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ E(\zeta) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + X(x, t) &= \varrho(\zeta) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, t)|_{x=0} &= u_0(t), \quad E(\zeta) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = -P_0(t); \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x) \end{aligned} \quad (14.1)$$

Здесь  $0 < l \leq L$  — период;  $E = E(\zeta)$ ,  $\varrho = \varrho(\zeta)$ ,  $0 \leq \zeta \equiv x/l \leq 1$  обозначают переменные по длине модуль Юнга, и плотность материала плиты. Эти величины являются периодическими функциями. Через  $X(x, t)$  обозначена переменная по толщине плиты, зависящая от времени объёмная сила. В случае стержня  $E \rightarrow E(\zeta)F(\zeta)$ ,  $\varrho \rightarrow \varrho(\zeta)F(\zeta)$ . В стержне  $X(x, t)$  — продольная сила, распределённая вдоль его прямолинейной осевой линии.

**14.1.2 Переход к безразмерным координатам.** В задаче (14.1) сделаем замену переменных [?, стр. 420], положив  $x = \bar{x}L$ , где  $\bar{x}$  в правой части — безразмерная продольная координата  $0 \leq \bar{x} \leq 1$ . Тогда  $u \rightarrow u(\bar{x})$  и

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial (\bar{x}L)} = \frac{1}{L} \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial \bar{x}}.$$

В дальнейшем *черту над  $x$  опускаем*, а дифференциальное уравнение в (14.1) примет вид:

$$[E(\zeta)u']' + L^2 X(x, t) = L^2 \varrho(\zeta) \ddot{u} \quad (14.2)$$

Штрихами обозначена производная по безразмерной переменной  $x$ , а точками — по времени  $t$ . Безразмерная переменная  $x$  связана с локальной безразмерной переменной  $\zeta$  в каждой ячейке периодичности по формуле  $x = \alpha(i - 1 + \zeta)$ , где  $\alpha = l/L \leq 1$  — малый геометрический параметр. Дифференцирование любой функции  $a(\zeta)$  локальной безразмерной переменной  $\zeta$  по безразмерной глобальной переменной  $x$  осуществляется по правилу:

$$a' \equiv \frac{da(\zeta)}{dx} = \frac{da}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dx} = \frac{1}{\alpha} \frac{da}{d\zeta} \equiv \frac{1}{\alpha} a^\parallel \quad (14.3)$$

Вертикальная черта вверху символа означает производную по локальной переменной  $\zeta$ . В дальнейшем вместо  $L^2 X$ ,  $L^2 \varrho$ ,  $LP_0$  будем писать просто  $X$ ,  $\varrho$ ,  $P_0$ . Тогда уравнения исходной задачи (14.1) в безразмерных координатах примут вид:

$$\begin{aligned} [E(\zeta)u'(x, t)]' - \varrho(\zeta)\ddot{u}(x, t) + X(x, t) &= 0; \\ u(0, t) &= u_0(t), \quad [E(\zeta)u'(x, t)]_{x=1, \zeta=1} = P_0(t); \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \dot{u}(x, 0) = g(x). \end{aligned} \quad (14.4)$$

**14.1.3 Представление решения исходного уравнения в виде ряда по степеням малого геометрического параметра.** Пусть функции  $E$  — непрерывно дифференцируемая функция локальной координаты<sup>13</sup>, тогда уравнение (14.4) может быть записано в виде:

$$E(\zeta)u'' + \frac{1}{\alpha}E^l(\zeta)u' - \varrho(\zeta)\ddot{u} + X(x, t) = 0. \quad (14.5)$$

Здесь и везде ниже  $E^l$  чертой обозначена производная по переменной  $\zeta$ . Итак в исходном уравнении (14.5) явно присутствует малый параметр, и поэтому будем искать решение исходного уравнения в виде ряда по степеням малого параметра  $\alpha$

$$u(x, t) = \sum_{\substack{p+q=0 \\ p,q \geq 0}}^{\infty} \alpha^{p+q} N_q^{(p)}(\zeta) \frac{\partial^{p+q} v(x, t)}{\partial t^p \partial x^q} = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s \sum_{q=0}^s N_q^{(s-q)} \frac{\partial^s v(x, t)}{\partial t^{s-q} \partial x^q}, \quad (14.6)$$

где  $v(x, t)$  — гладкая функция переменных  $x$  и  $t$ .  $N_0^{(0)} \equiv 1$ , а функции  $N_q^{(p)}$  при  $p+q \geq 1$  — непрерывные однопериодические функции переменной  $\zeta$ , причем  $N_q^{(p)} \equiv 0$  при  $p < 0$ , или  $q < 0$ . В силу непрерывности и периодичности N-функций

$$\langle N_q^{(p)} \rangle \equiv \int_0^1 N_q^{(p)}(\zeta) d\zeta = N_q^{(p)}(1) - N_q^{(p)}(0) = 0, \quad p+q > 0. \quad (14.7)$$

Кроме этого, потребуем также, чтобы все N-функции удовлетворяли дополнительному условию (условию нормировки)

$$\langle N_q^{(p)} \rangle \equiv \int_0^1 N_q^{(p)}(\zeta) d\zeta = 0 \Rightarrow \langle u(x, t) \rangle = \langle v(x, t) \rangle \quad \text{if } \alpha \rightarrow 0. \quad (14.8)$$

Дифференцируя ряд (14.6) по  $x$  найдем ряд для деформации

$$\varepsilon = u' = \sum_{\substack{p+q=0 \\ p,q \geq 0}}^{\infty} \alpha^{p+q-1} \left( N_q^{(p)} + N_{q-1}^{(p)} \right) \frac{\partial^{p+q} v}{\partial t^p \partial x^q}. \quad (14.9)$$

Затем находим напряжение  $\sigma = E\varepsilon$

$$\begin{aligned} \sigma = Eu' &= \sum_{\substack{p+q=0 \\ p,q \geq 0}}^{\infty} \alpha^{p+q-1} E(\zeta) \cdot \left( N_q^{(p)} + N_{q-1}^{(p)} \right) \frac{\partial^{p+q} v}{\partial t^p \partial x^q} = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^{s-1} \sum_{q=0}^s E \left( N_q^{(s-q)} + N_{q-1}^{(s-q)} \right) \frac{\partial^s v}{\partial t^{s-q} \partial x^q}. \end{aligned} \quad (14.10)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sigma' &= (Eu')' = \\ &= \sum_{\substack{p+q=0 \\ p,q \geq 0}}^{\infty} \alpha^{p+q-2} \left\{ \left[ E \left( N_q^{(p)} + N_{q-1}^{(p)} \right) \right]' + E \left( N_{q-1}^{(p)} + N_{q-2}^{(p)} \right) \right\} \frac{\partial^{p+q} v}{\partial t^p \partial x^q}. \end{aligned} \quad (14.11)$$

<sup>13</sup>Потом мы откажемся от этого ограничения

Далее найдем

$$\ddot{u} = \sum_{\substack{p+q=0 \\ p,q \geq 0}}^{\infty} \alpha^{p+q} N_q^{(p)} \frac{\partial^{p+q+2} v}{\partial t^{p+2} \partial x^q} = \sum_{\substack{p+q=0 \\ p,q \geq 0}}^{\infty} \alpha^{p+q-2} N_q^{(p-2)} \frac{\partial^{p+q} v}{\partial t^p \partial x^q}. \quad (14.12)$$

После подстановки выражений (14.11) и (14.12) в уравнение (14.4) получим:

$$\begin{aligned} & \left( E u' \right)' - \varrho \ddot{u} + X(x, t) = \\ & = \sum_{\substack{p+q=0 \\ p,q \geq 0}}^{\infty} \alpha^{p+q-2} \left\{ \left[ E \left( N_q^{(p)} + N_{q-1}^{(p)} \right) \right]' + E \left( N_{q-1}^{(p)} + N_{q-2}^{(p)} \right) - \right. \\ & \quad \left. - \varrho N_q^{(p-2)} \right\} \frac{\partial^{p+q} v}{\partial t^p \partial x^q} + X(x, t) = 0. \end{aligned} \quad (14.13)$$

**14.1.4 Рекуррентные уравнения для N-функций.** В выражении (14.13) положим равными нулю коэффициенты в фигурных скобках при отрицательных степенях параметра  $\alpha$ . Коэффициенты при  $\alpha^{-2}$  тождественно обращаются в нуль в силу ограничений, наложенных на N-функции. Коэффициенты при  $\alpha^{-1}$  обратятся в нуль в том случае, если функции  $N_1^{(0)}$  и  $N_0^{(1)}$  удовлетворяют уравнениям

$$\left[ E \left( N_1^{(0)} + 1 \right) \right]' = 0, \quad \left[ E N_0^{(1)} \right]' = 0 \quad (14.14)$$

Отсюда и из условий (14.7), (14.8) получаем, что  $\mathbf{N}_0^{(1)} \equiv \mathbf{0}$ , а

$$N_1^{(0)}(\zeta) = \int_0^\zeta \left[ \frac{1}{\langle 1/E \rangle E(\eta)} - 1 \right] d\eta - \left\langle \int_0^\zeta \left[ \frac{1}{\langle 1/E \rangle E(\eta)} - 1 \right] d\eta \right\rangle \quad (14.15)$$

Коэффициенты в фигурных скобках формулы (14.13) при  $\alpha^0$  положим равными постоянным величинам, т.е. при  $(p = 0; q = 2)$ , при  $(p = 1; q = 1)$  и при  $(p = 2; q = 0)$

$$\left[ E \left( N_2^{(0)} + N_1^{(0)} \right) \right]' + E \left( N_1^{(0)} + 1 \right) = h_2^{(0)} \equiv E_\circ = \text{const.} \quad (14.16)$$

$$\left[ E \left( N_1^{(1)} + \mathbf{N}_0^{(1)} \right) \right]' + E \mathbf{N}_0^{(1)} = h_1^{(1)} = \text{const.} \Rightarrow \mathbf{N}_1^{(1)} \equiv \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{h}_1^{(1)} = \mathbf{0} \quad (14.17)$$

$$\left[ E N_0^{(2)} \right]' - \varrho = h_0^{(2)} \equiv \varrho_\circ = \text{const.} \quad (14.18)$$

Коэффициенты при положительных степенях  $\alpha$  также приравняем постоянным величинам

$$\left[ E \left( N_q^{(p)} + N_{q-1}^{(p)} \right) \right]' + E \left( N_{q-1}^{(p)} + N_{q-2}^{(p)} \right) - \varrho N_q^{(p-2)} = h_q^{(p)} = \text{const.}, \quad p + q \geq 2 \quad (14.19)$$

Из рекуррентных уравнений (14.14)–(14.19) следует, что *все функции с нечетными значениями верхнего индекса р тождественно равны нулю*  $\mathbf{N}_q^{(2p+1)} \equiv \mathbf{0}$ , следовательно

и  $\mathbf{h}_q^{(2p+1)} = \mathbf{0}$  при  $p, q \geq 0$ . Это означает, что в разложении (14.6) участвуют только четные производные по времени, т.е. ряд (14.6) принимает вид [1, стр. 292]:

$$u(x, t) = \sum_{\substack{2p+q=0 \\ p,q \geq 0}}^{\infty} \alpha^{2p+q} N_q^{(2p)}(\zeta) \frac{\partial^{2p+q} v(x, t)}{\partial t^{2p} \partial x^q} = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^s \sum_{p=0}^{s-2p \geq 0} N_{s-2p}^{(2p)} \frac{\partial^s v}{\partial t^{2p} \partial x^{s-2p}}, \quad (14.20)$$

а рекуррентные уравнения для N-функций вместо (14.19) можно записать следующим образом:

$$\left[ E\left(N_q^{(2p)}| + N_{q-1}^{(2p)}\right) \right]^\dagger + E\left(N_{q-1}^{(2p)}| + N_{q-2}^{(2p)}\right) - \varrho N_q^{(2p-2)} = h_q^{(2p)} = \text{const.}, \quad 2p + q \geq 1 \quad (14.21)$$

Выражения  $E\left(N_q^{(2p)}| + N_{q-1}^{(2p)}\right)$  являются непрерывными однопериодическими функциями быстрой переменной  $\zeta$ , поэтому

$$\left\langle \left[ E\left(N_q^{(2p)}| + N_{q-1}^{(2p)}\right) \right]^\dagger \right\rangle = 0$$

Учитывая это обстоятельство и усредняя по периоду равенства (14.21), найдем выражения для констант  $h_q^{(2p)}$

$$h_q^{(2p)} = \left\langle E\left(N_{q-1}^{(2p)}| + N_{q-2}^{(2p)}\right) - \varrho N_q^{(2p-2)} \right\rangle, \quad 2p + q \geq 2 \quad (14.22)$$

В частности отсюда получаем

$$h_2^{(0)} \equiv E_0 = \left\langle E\left(N_1^{(0)}| + 1\right) \right\rangle = \frac{1}{\langle 1/E \rangle}, \quad h_0^{(2)} \equiv -\varrho_0 = -\langle \varrho \rangle \quad (14.23)$$

### Функции $N_2^{(0)}$ , $N_0^{(2)}$ и константы $h_3^{(0)}$ , $h_1^{(2)}$ .

N-функции вычисляются из рекуррентных уравнений (14.21). Началом рекурсии являются  $\mathbf{N}_q^{(2p)}$ -функции, у которых сумма индексов  $2p + q = 1$  (N-функции первого порядка). Отлична от нуля только функция  $N_1^{(0)}$ , представленная выражением (14.15), найденным из решения первого уравнения (14.14) при условиях (14.7) и (14.8).

После этого переходим к вычислению  $\mathbf{N}_q^{(2p)}$ -функций с суммой индексов  $2p + q = 2$  (N-функции второго порядка, то есть  $N_2^{(0)}$  и  $N_0^{(2)}$ ). Уравнения для таких ненулевых функций имеют вид (14.16), (14.18). Прежде чем решать эти уравнения, по формулам (14.23) определяем константы  $h_2^{(0)}$  и  $h_0^{(2)}$ . После этого решаем уравнения и находим функции второго порядка, удовлетворяющие условиям (14.7), (14.8)

$$N_2^{(0)}| = -N_1^{(0)}(\zeta) = -\frac{1}{\langle 1/E \rangle} \left[ \int_0^\zeta \overline{1/E(\eta)} d\eta - \left\langle \int_0^\zeta \overline{1/E(\eta)} d\eta \right\rangle \right], \quad (14.24)$$

$$N_0^{(2)}|(\zeta) = \frac{1}{E(\zeta)} \left[ \int_0^\zeta \overline{\varrho(\eta)} d\eta - \frac{1}{\langle 1/E \rangle} \left\langle \frac{1}{E} \int_0^\zeta \overline{\varrho(\eta)} d\eta \right\rangle \right] \quad (14.25)$$

Здесь и в дальнейшем волна сверху обозначает центрированную величину

$$\overline{1/E(\zeta)} \equiv \frac{1}{E(\zeta)} - \left\langle \frac{1}{E} \right\rangle, \quad \overline{\varrho(\zeta)} \equiv \varrho(\zeta) - \langle \varrho \rangle \quad (14.26)$$

Зная N-функции второго порядка можно вычислить константы третьего порядка  $h_q^{(2p)}$ , для которых  $2p + q = 3$ , т.е.  $h_3^{(0)}$  и  $h_1^{(2)}$ . Из (14.22) получаем

$$h_3^{(0)} = \left\langle E(N_2^{(0)} + N_1^{(0)}) \right\rangle = 0 \quad (14.27)$$

$$\begin{aligned} h_1^{(2)} &= \left\langle EN_0^{(2)} - \varrho N_1^{(0)} \right\rangle = \left\langle \int_0^\zeta \overline{\varrho} d\eta \right\rangle - \frac{1}{\langle 1/E \rangle} \left\langle \frac{1}{E} \int_0^\zeta \overline{\varrho} d\eta \right\rangle - \\ &- \frac{1}{\langle 1/E \rangle} \left\langle \varrho \int_0^\zeta \overline{1/E} d\eta \right\rangle + \frac{\langle \varrho \rangle}{\langle 1/E \rangle} \left\langle \int_0^\zeta \overline{1/E} d\eta \right\rangle = \\ &= -\frac{1}{\langle 1/E \rangle} \left[ \left\langle \overline{1/E} \int_0^\zeta \overline{\varrho} d\eta \right\rangle + \left\langle \overline{\varrho} \int_0^\zeta \overline{1/E} d\eta \right\rangle \right] = 0 \end{aligned} \quad (14.28)$$

Последнее равенство обусловлено следующим тождеством

$$\left\langle [\varphi(\zeta) - \langle \varphi \rangle] \int_0^\zeta [\psi(\eta) - \langle \psi \rangle] d\eta \right\rangle = - \left\langle [\psi(\zeta) - \langle \psi \rangle] \int_0^\zeta [\varphi(\eta) - \langle \varphi \rangle] d\eta \right\rangle$$

или в других обозначениях

$$\left\langle \overline{\varphi}(\zeta) \int_0^\zeta \overline{\psi}(\eta) d\eta \right\rangle = - \left\langle \overline{\psi}(\zeta) \int_0^\zeta \overline{\varphi}(\eta) d\eta \right\rangle$$

Вообще справедливо следующее утверждение: **все константы  $h_q^{(2p)}$ , для которых  $2p + q = \text{нечетное число, или иначе } q = \text{нечетное число, обращаются в нуль.}$**

**Функции  $N_3^{(0)}$ ,  $N_1^{(2)}$  и константы  $h_4^{(0)}$ ,  $h_2^{(2)}$ ,  $h_0^{(4)}$ .** Для расчета констант  $h_q^{(2p)}$  четвертого порядка нужны N-функции второго и третьего порядка, поскольку

$$h_4^{(0)} = \left\langle E(N_3^{(0)} + N_2^{(0)}) \right\rangle, \quad (14.29)$$

$$h_2^{(2)} = \left\langle E(N_1^{(2)} + N_0^{(2)}) - \varrho N_2^{(0)} \right\rangle, \quad (14.30)$$

$$h_0^{(4)} = -\left\langle \varrho N_0^{(2)} \right\rangle \quad (14.31)$$

N-функции второго порядка  $N_2^{(0)}$  и  $N_0^{(2)}$  определяются путем однократного интегрирования выражений (14.24), (14.25)

$$N_2^{(0)} = -\frac{1}{\langle 1/E \rangle} \overline{\left[ \overline{1/E} \right]^{(-1)}}, \quad (14.32)$$

$$N_0^{(2)\dagger}(\zeta) = \frac{1}{E(\zeta)} \left[ \int_0^\zeta \bar{\varrho}(\eta) d\eta - \frac{1}{\langle 1/E \rangle} \left\langle \frac{1}{E} \int_0^\zeta \bar{\varrho}(\eta) d\eta \right\rangle \right] \quad (14.33)$$

N-функции третьего порядка находим из решения уравнений

$$\left[ E(N_3^{(0)\dagger} + N_2^{(0)}) \right]^\dagger + E(N_2^{(0)\dagger} + N_1^{(0)}) = 0, \quad (14.34)$$

$$\left[ E(N_1^{(2)\dagger} + N_0^{(2)}) \right]^\dagger + EN_0^{(2)\dagger} - \varrho N_1^{(0)} = 0 \quad (14.35)$$

Учитывая результаты предшествующего этапа получаем:

$$N_3^{(0)\dagger} = -N_2^{(0)}, \quad (14.36)$$

$$N_1^{(2)\dagger} = -N_0^{(2)\dagger} - \frac{1}{E} \left[ \int_0^\zeta \varphi(\eta) d\eta - \frac{1}{\langle 1/E \rangle} \left\langle \int_0^\zeta \varphi(\eta) d\eta \right\rangle \right], \quad (14.37)$$

где функция  $\varphi$  обладает нулевым средним значением  $\langle \varphi \rangle = 0$  и имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \int_0^\zeta \bar{\varrho} d\eta - \frac{1}{\langle 1/E \rangle} \left\langle \frac{1}{E} \int_0^\zeta \bar{\varrho} d\eta \right\rangle - \\ &- \frac{\varrho}{\langle 1/E \rangle} \int_0^\zeta \overline{1/E}(\eta) d\eta + \frac{\varrho}{\langle 1/E \rangle} \left\langle \int_0^\zeta \overline{1/E}(\eta) d\eta \right\rangle \end{aligned} \quad (14.38)$$

#### 14.1.5 Уравнение для гладкой функции $v(x, t)$ .

В результате процедур и утверждений, доказанных в предыдущем разделе, исходное дифференциальное уравнение (14.12) второго порядка с переменными коэффициентами переходит в дифференциальное уравнение бесконечного порядка, но зато с постоянными коэффициентами. Запишем его, выделив члены с  $\alpha$  в нулевой степени:

$$\begin{aligned} (Eu')' - \varrho \ddot{u} + X(x, t) &= \\ = E_\circ v'' - \varrho_\circ \ddot{v} + \sum_{\substack{p+q=2 \\ p, q \geq 0}}^{\infty} \alpha^{2(p+q-1)} h_{2q}^{(2p)} \frac{\partial^{2(p+q)} v}{\partial t^{2p} \partial x^{2q}} + X(x, t) &= 0 \end{aligned} \quad (14.39)$$

#### Представление в виде степенного ряда по $\alpha$ .

Заметим, что в уравнение (14.39) входят только четные производные по координате и времени, причем высшие производные входят в уравнение (14.39) с малым параметром в соответствующей четной степени начиная с  $\alpha^2$ . Таким образом, функция  $v(x, t)$  зависит от параметра  $\alpha$ . Поэтому будем искать функцию  $v(x, t, \alpha)$  в виде ряда по степеням  $\alpha$

$$v(x, t, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n v_n(x, t), \quad (14.40)$$

где функции  $v_n(x, t)$  уже не зависят от  $\alpha$ . После подстановки ряда (14.40) в уравнение (14.39) и сбора коэффициентов при одинаковых степенях  $\alpha$ , получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[ E_0 v_n'' - \varrho_0 \ddot{v}_n + \sum_{\substack{2(p+q)=4 \\ p,q \geq 0}}^{n+2} h_{2q}^{(2p)} \frac{\partial^{2(p+q)} v_{n+2-2(p+q)}}{\partial t^{2p} \partial x^{2q}} \right] + X(x, t) = 0 \quad (14.41)$$

**Рекуррентные дифференциальные уравнения для коэффициентов ряда.** Приравнивая к нулю коэффициенты при степенях  $\alpha$  получаем рекуррентные уравнения для нахождения функций  $v_n(x, t)$

$$E_0 v_n'' - \varrho_0 \ddot{v}_n + X_n(x, t) = 0, \quad (14.42)$$

где

$$X_n(x, t) = \begin{cases} X(x, t) & \text{при } n = 0 \\ \sum_{\substack{2(p+q)=4 \\ p,q \geq 0}}^{n+2} h_{2q}^{(2p)} \frac{\partial^{2(p+q)} v_{n+2-2(p+q)}}{\partial t^{2p} \partial x^{2q}} & \text{при } n \geq 1 \end{cases} \quad (14.43)$$

**Рекуррентные граничные условия.** Для получения граничных условий преобразуем ряд (14.6) с учетом того обстоятельства, что из него выпадают члены, где присутствуют N-функции с нечетными верхними индексами

$$u(x, t) = \sum_{\substack{2p+q=0 \\ p,q \geq 0}}^{\infty} \alpha^{2p+q} N_q^{(2p)}(\zeta) \frac{\partial^{2p+q} v(x, t)}{\partial t^{2p} \partial x^q} \quad (14.44)$$

Этот ряд можно разбить на два ряда, содержащим только четные и только нечетные производные по продольной координате

$$u(x, t) = \sum_{\substack{p+q=0 \\ p,q \geq 0}}^{\infty} \alpha^{2(p+q)} N_{2q}^{(2p)}(\zeta) \frac{\partial^{2(p+q)} v(x, t)}{\partial t^{2p} \partial x^{2q}} + \sum_{\substack{p+q=0 \\ p,q \geq 0}}^{\infty} \alpha^{2(p+q)+1} N_{2q+1}^{(2p)}(\zeta) \frac{\partial^{2(p+q)+1} v(x, t)}{\partial t^{2p} \partial x^{2q+1}} \quad (14.45)$$

Подставим в (14.44) ряд (14.40), соберем коэффициенты при одинаковых степенях  $\alpha$  и получим:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[ v_n + \sum_{\substack{2p+q=1 \\ p,q \geq 0}}^n N_q^{(2p)} \frac{\partial^{2p+q} v_{n-2p-q}}{\partial t^{2p} \partial x^q} \right] \quad (14.46)$$

Аналогично преобразуются ряды (14.9) и (14.10) для продольной деформации  $\varepsilon(x, t)$

стержня и для напряжения  $\sigma(x, t)$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= u' = \sum_{\substack{2p+q=0 \\ p,q \geq 0}}^{\infty} \alpha^{2p+q-1} \left( N_q^{(2p)} + N_{q-1}^{(2p)} \right) \frac{\partial^{2p+q} v}{\partial t^{2p} \partial x^q} = \\
 &= \left( N_1^{(0)} + 1 \right) v' + \sum_{\substack{2p+q=2 \\ p,q \geq 0}}^{\infty} \alpha^{2p+q-1} \left( N_q^{(2p)} + N_{q-1}^{(2p)} \right) \frac{\partial^{2p+q} v}{\partial t^{2p} \partial x^q} = \\
 &= \frac{1}{E < 1/E >} v' + \sum_{\substack{2p+q=2 \\ p,q \geq 0}}^{\infty} \alpha^{2p+q-1} \left( N_q^{(2p)} + N_{q-1}^{(2p)} \right) \frac{\partial^{2p+q} v}{\partial t^{2p} \partial x^q} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[ \frac{1}{E < 1/E >} v'_n + \sum_{\substack{2p+q=2 \\ p,q \geq 0}}^{n+1} \left( N_q^{(2p)} + N_{q-1}^{(2p)} \right) \frac{\partial^{2p+q} v_{n+1-2p-q}}{\partial t^{2p} \partial x^q} \right];
 \end{aligned} \tag{14.47}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma &= E\varepsilon = Eu' = \sum_{\substack{2p+q=0 \\ p,q \geq 0}}^{\infty} \alpha^{2p+q-1} E \left( N_q^{(2p)} + N_{q-1}^{(2p)} \right) \frac{\partial^{2p+q} v}{\partial t^{2p} \partial x^q} = \\
 &= E \left( N_1^{(0)} + 1 \right) v' + \sum_{\substack{2p+q=2 \\ p,q \geq 0}}^{\infty} \alpha^{2p+q-1} E \left( N_q^{(2p)} + N_{q-1}^{(2p)} \right) \frac{\partial^{2p+q} v}{\partial t^{2p} \partial x^q} = \\
 &= \frac{1}{< 1/E >} v' + \sum_{\substack{2p+q=2 \\ p,q \geq 0}}^{\infty} \alpha^{2p+q-1} E \left( N_q^{(2p)} + N_{q-1}^{(2p)} \right) \frac{\partial^{2p+q} v}{\partial t^{2p} \partial x^q} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[ E_v v'_n + \sum_{\substack{2p+q=2 \\ p,q \geq 0}}^{n+1} E \left( N_q^{(2p)} + N_{q-1}^{(2p)} \right) \frac{\partial^{2p+q} v_{n+1-2p-q}}{\partial t^{2p} \partial x^q} \right]
 \end{aligned} \tag{14.48}$$

Выражения для перемещения и силы в форме (14.46) и (14.48) легко позволяют выписать граничные условия при  $x = 0$  и  $x = 1$  для каждой из функций  $v_n(x, t)$ . Рассмотрим эти граничные условия

$$\begin{aligned}
 u(0, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[ v_n + \sum_{\substack{2p+q=1 \\ p,q \geq 0}}^n N_q^{(2p)} \frac{\partial^{2p+q} v_{n-2p-q}}{\partial t^{2p} \partial x^q} \right]_{x=0} = u_0(t); \\
 [Eu'(x, t)]_{x=1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[ E_v v'_n + \sum_{\substack{2p+q=2 \\ p,q \geq 0}}^{n+1} E \cdot \left( N_q^{(2p)} + N_{q-1}^{(2p)} \right) \frac{\partial^{2p+q} v_{n+1-2p-q}}{\partial t^{2p} \partial x^q} \right]_{x=1} = P_0(t)
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$v_n(0, t) = u_{0n}(t), \quad E_v v'_n(1, t) = P_{0n}(t), \tag{14.49}$$

Где

$$u_{0n}(t) = \begin{cases} u_0(t) & \text{при } n = 0 \\ - \sum_{\substack{2p+q=1 \\ p,q \geq 0}}^n \left[ N_q^{(2p)} \frac{\partial^{2p+q} v_{n-2p-q}}{\partial t^{2p} \partial x^q} \right]_{x=0} & \text{при } n \geq 1 \end{cases} \quad (14.50)$$

$$P_{0n}(t) = \begin{cases} P_0(t) & \text{при } n = 0 \\ - \sum_{\substack{n+1 \\ 2p+q=2 \\ p,q \geq 0}} \left[ E \left( N_q^{(2p)} + N_{q-1}^{(2p)} \right) \frac{\partial^{2p+q} v_{n+1-2p-q}}{\partial t^{2p} \partial x^q} \right]_{x=1} & \text{при } n \geq 1 \end{cases} \quad (14.51)$$

**Рекуррентные начальные условия.** Дифференцируя по времени перемещение, представленное рядом (14.46) получаем скорость

$$\dot{u}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[ \dot{v}_n + \sum_{\substack{2p+q=1 \\ p,q \geq 0}}^n N_q^{(2p)} \frac{\partial^{2p+q+1} v_{n-2p-q}}{\partial t^{2p+1} \partial x^q} \right] \quad (14.52)$$

Начальные условия (14.4) принимают вид:

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[ v_n(x, 0) + \sum_{\substack{2p+q=1 \\ p,q \geq 0}}^n N_q^{(2p)} \frac{\partial^{2p+q} v_{n-2p-q}}{\partial t^{2p} \partial x^q} \Big|_{t=0} \right] = f(x);$$

$$\dot{u}(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[ \dot{v}_n(x, 0) + \sum_{\substack{2p+q=1 \\ p,q \geq 0}}^n N_q^{(2p)} \frac{\partial^{2p+q+1} v_{n-2p-q}}{\partial t^{2p+1} \partial x^q} \Big|_{t=0} \right] = g(x)$$

Отсюда находим начальные условия, накладываемые на функции  $v_n(x, t)$

$$v_n(x, 0) = f_n(x), \quad \dot{v}_n(x, 0) = g_n(x), \quad (14.53)$$

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } n = 0 \\ - \sum_{\substack{n \\ 2p+q=1 \\ p,q \geq 0}}^n N_q^{(2p)}(\zeta) \frac{\partial^{2p+q} v_{n-2p-q}(x, t)}{\partial t^{2p} \partial x^q} \Big|_{t=0} & \text{при } n \geq 1 \end{cases} \quad (14.54)$$

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } n = 0 \\ - \sum_{\substack{n \\ 2p+q=1 \\ p,q \geq 0}}^n N_q^{(2p)}(\zeta) \frac{\partial^{2p+q+1} v_{n-2p-q}(x, t)}{\partial t^{2p+1} \partial x^q} \Big|_{t=0} & \text{при } n \geq 1 \end{cases} \quad (14.55)$$

## 14.2 Установившиеся продольные колебания неоднородного стержня с переменным поперечным сечением.

Пусть объёмные и граничные воздействия в исходной задаче являются *периодическими по времени функциями*. Это означает, что они действовали со временем  $t = -\infty$  [?, стр. 11], т.е. начальные условия в установившихся процессах не рассматриваются.

Все периодические воздействия с периодом  $\tau$  могут быть разложены в ряды Фурье на периоде [11]. Поэтому, и в силу линейности динамической задачи, можно ограничиться монохроматическими входными данными, зависящими от времени по закону синуса, или косинуса с круговой (циклической) частотой  $\omega$ . Круговую частоту трактуют как скорость равномерного движения по окружности единичного радиуса, при которой один оборот осуществляется за время  $\tau$ , равное периоду гармонического колебания [?, стр. 17]. Таким образом,  $\omega\tau = 2\pi$ , следовательно

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

Удобно представить синусоидальные колебания через комплексные экспоненциальные функции, положив

$$X(x, t) = q(x)e^{i\omega t}, \quad u_0(t) = u_0 e^{i\omega t}, \quad P_0(t) = P_0 e^{i\omega t}, \quad (14.56)$$

где  $q(x)$ ,  $u_0$ ,  $P_0$  — действительные амплитуды гармонических колебаний входных данных. В конечном результате нас будут интересовать действительные величины.

Продольные перемещения точек оси стержня будут зависеть от времени по тому же закону

$$u(x, t) = u(x)e^{i\omega t} \quad (14.57)$$

Естественно, что и функция  $v(x, t)$ , а также функции  $v_n(x, t)$  имеют ту же самую зависимость от времени

$$v(x, t) = v(x)e^{i\omega t}, \quad v_n(x, t) = v_n(x)e^{i\omega t} \quad (14.58)$$

**14.2.1 Постановка задачи для амплитуд гармонических колебаний.** Соответствующие уравнения вытекают из уравнений (14.4) исходной задачи, если в них подставить выражения для  $u(x, t)$ ,  $X(x, t)$ ,  $u_0(t)$  и  $P_0(t)$  в виде (14.56), (14.57)

$$\left[ E(\zeta)F(\zeta)u'(x) \right]' + L^2\omega^2\varrho(\zeta)F(\zeta)u(x) + q(x) = 0; \quad (14.59)$$

$$u(0) = u_0, \quad [E(\zeta)F(\zeta)u'(x)]_{x=1} = P_0 \quad (14.60)$$

**14.2.2 Представление амплитуд гармонических колебаний.** Из формулы (14.44), после подстановки в неё  $v(x, t) = v(x)e^{i\omega t}$ , следует ряд для амплитуды  $u(x)$  продольных гармонических колебаний

$$u(x) = \sum_{\substack{2p+q=0 \\ p,q \geqslant 0}}^{\infty} (-1)^p \alpha^{2p+q} \omega^{2p} N_q^{(2p)}(\zeta) \frac{d^q v(x)}{dx^q}, \quad (14.61)$$

или

$$u(x) = \sum_{\substack{p+q=0 \\ p,q \geq 0}}^{\infty} (-1)^p \alpha^{2(p+q)} \omega^{2p} N_{2q}^{(2p)} \frac{d^{2q}v(x)}{dx^{2q}} + \sum_{\substack{p+q=0 \\ p,q \geq 0}}^{\infty} (-1)^p \alpha^{2(p+q)+1} \omega^{2p} N_{2q+1}^{(2p)} \frac{d^{2q+1}v(x)}{dx^{2q+1}} \quad (14.62)$$

Гладкая функция  $v(x)$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению бесконечного порядка, которое может быть получено из уравнения (14.39) при подстановке в него функции  $v(x, t) = v(x)e^{i\omega t}$

$$\begin{aligned} & \left( EFu' \right)' + L^2 \omega^2 \varrho F u + q(x) = \\ & = E_o F_o v'' + L^2 \omega^2 \varrho_o F_o v + \sum_{\substack{p+q=2 \\ p,q \geq 0}}^{\infty} (-1)^p \alpha^{2(p+q-1)} \omega^{2p} h_{2q}^{(2p)} \frac{d^{2q}v}{dx^{2q}} + q(x) = 0 \end{aligned} \quad (14.63)$$

Далее решение уравнения (14.63) ищем в виде ряда, аналогичного ряду (14.40)

$$v(x, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n v_n(x), \quad (14.64)$$

тогда

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[ v_n(x) + \sum_{\substack{2p+q=1 \\ p,q \geq 0}}^n (-1)^p \omega^{2p} N_q^{(2p)} \frac{d^q v_{n-2p-q}}{dx^q} \right], \quad (14.65)$$

то есть, решение уравнения Гельмгольца (14.59) с переменными коэффициентами представляется в виде ряда (14.65), в котором функции  $v_n(x)$  являются решениями рекуррентных уравнений Гельмгольца с постоянными коэффициентами

$$E_o F_o v_n'' + L^2 \varrho_o F_o v_n + q_n(x) = 0, \quad (14.66)$$

удовлетворяющими граничным условиям

$$v_n(0) = u_{0n}, \quad E_o F_o v_n'(1) = P_{0n} \quad (14.67)$$

Здесь

$$q_n(x) = \begin{cases} q(x) & \text{при } n = 0 \\ \sum_{\substack{2(p+q)=4 \\ p,q \geq 0}}^{n+2} (-1)^p \omega^{2p} h_{2q}^{(2p)} \frac{d^{2q}v_{n+2-2(p+q)}}{dx^{2q}} & \text{при } n \geq 1 \end{cases} \quad (14.68)$$

$$u_{0n} = \begin{cases} u_0 & \text{при } n = 0 \\ - \sum_{\substack{2p+q=1 \\ p,q \geq 0}}^n (-1)^p \omega^{2p} \left[ N_q^{(2p)} \frac{d^q v_{n-2p-q}}{dx^q} \right]_{x=0} & \text{при } n \geq 1 \end{cases} \quad (14.69)$$

$$P_{0n} = \begin{cases} P_0 & \text{при } n = 0 \\ - \sum_{\substack{2p+q=2 \\ p,q \geq 0}}^{n+1} (-1)^p \omega^{2p} \left[ EF \left( N_q^{(2p)} + N_{q-1}^{(2p)} \right) \frac{d^q v_{n+1-2p-q}}{dx^q} \right]_{x=1} & \text{при } n \geq 1 \end{cases} \quad (14.70)$$

# Литература

- [1] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. МГУ, Москва, 1984.
- [2] Пагано Н. *Роль эффективных модулей в исследовании упругих свойств слоистых композитов. В кн. Механика композиционных материалов т.2., с.13-37.* Пер с англ под ред. А.А Ильюшина и Б.Е. Победри. Мир, 1978.
- [3] Берже М. *Геометрия. Том первый*. Мир, 1984.
- [4] Победря Б.Е. *Лекции по тензорному анализу. 2-е изд.* МГУ, Москва, 1979.
- [5] Шермергор Т.Д. *Теория упругости микронеоднородных сред*. Наука, Москва, 1977.
- [6] Кристенсен Р. *Введение в теорию вязкоупругости*. Мир, Москва, 1974.
- [7] Ильюшин А.А.,Победря Б.Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. Наука, Москва, 1970.
- [8] Работнов Ю.Н. *Ползучесть элементов конструкций*. Наука, Москва, 1966.
- [9] Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. Наука, Москва, 1977.
- [10] Hashin Z., Rosen B.W. The elastic moduli of fiber-reinforced materials. Перев. Прикл. мех., серия Е (США), №2, 1964, с.223-232. *Trans ASME. J. Appl. Mech*, 31(2):223–232, 1964.
- [11] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3.* Наука, Москва, 1966.
- [12] Ломакин В.А. *Теория упругости неоднородных тел*. МГУ, Москва, 1976.
- [13] Мусхелишвили Н.И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. Наука, Москва, 1966.
- [14] Работнов Ю.Н. *Механика деформируемого твердого тела*. Наука, Москва, 1979.
- [15] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Обобщенные функции и действия над ними. Изд.2.* Физматгиз, Москва, 1959.
- [16] Кеч В., Теодореску П. *Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике*. Мир, Москва, 1978.

- [17] Победря Б.Е., Горбачев В.И. О статических задачах упругих композитов. *Вестник МГУ*, (5):101–111, 1977.
- [18] Хорошун Л.П. Зависимости между напряжениями и деформациями в слоистых средах. *Прикладная механика*, 2(2):14–19, 1966.
- [19] Лифшиц И.М., Розенцвейг Л.Н. К теории упругих свойств поликристаллов. *ЖЭТФ*, 16(2):967–980, 1946.
- [20] Мусхелишвили Н.И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. Наука, Москва, 1966.
- [21] Горбачев В.И., Олехова Л.В. Эффективные свойства при кручении неоднородного стержня. *Вестник МГУ*, (5):41–48, 2007.
- [22] Григолюк Э.И., Фильшинский А.А. *Перфорированные пластины и оболочки*. Наука, Москва, 1970.
- [23] Победря Б.Е. *Численные методы в теории упругости и пластичности*. МГУ, Москва, 1995.
- [24] Берлин А.А., Вольфсон С.А., Ошмян И.Г., Ениколопов Н.С. *Принципы создания композиционных полимерных материалов*. Химия, Москва, 1990.
- [25] Hashin Z., Strikman S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 10(4):335–343, 1962.
- [26] Ректорис К. *Вариационные методы в математической физике и технике*. Мир, Москва, 1985.
- [27] Кристенсен Р. *Введение в механику композитов*. Мир, Москва, 1982.
- [28] Hill R. Theory of mechanical properties of fiber-strengthened materials: I. elastic behavior. *J. Mech. and Phys. Solids*, 12:199, 1964.
- [29] Hashin Z. On elastic behavior of fibre reinforced materials of arbitrary transverse phase geometry. *J. Mech. and Phys. Solids*, 13:119, 1965.



МЕХАНИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ