

ОПТИКА

МИТИН
ИГОРЬ ВЛАДИМИРОВИЧ

—
ФИЗФАК МГУ



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

Семинар 1. Геометрическая оптика.

Законы геометрической оптики –

(4 шт.) – см описание задачи №411.

Принцип Ферма –

Свет между двумя произвольными точками идет так, чтобы время прохождения было минимальным. Подробнее см. Сивухин, §7.

Отражение от плоского зеркала.

Задача 1. Заданы все параметры системы плоское зеркало+точечный источник+человек (рисунок).

1) Человек перемещается перпендикулярно поверхности зеркала. Когда он увидит источник в зеркале? А как надо двигаться, чтобы увидеть источник максимально раньше?

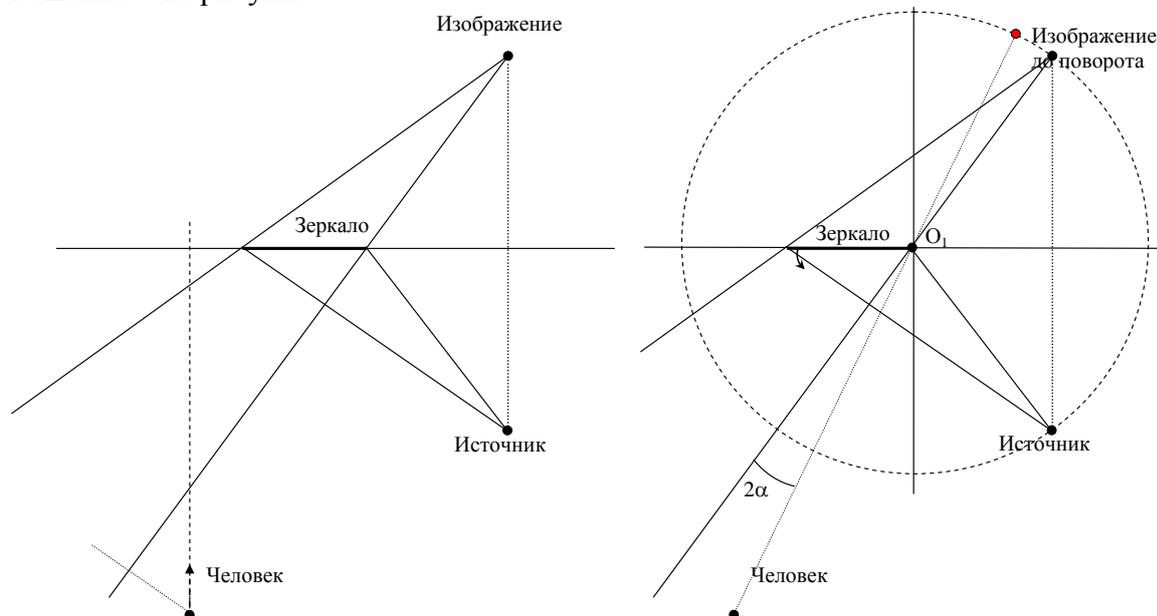
Решение – из рисунка.

2) Теперь перемещается источник, человек неподвижен. Вопросы аналогичны.

Решить самостоятельно.

3) Теперь человек и источник неподвижны. На какой угол α надо повернуть зеркало относительно точки O_1 , чтобы человек увидел источник?

Решение – из рисунка.



Задача 2. Человек едет в метро и в стекле двери видит отражение своего лица растянутым или сжатым. Объяснить, почему?

Задача 3. Под потолком висит лампа, на полу лежат два круглых зеркала. Световые зайчики образуются на потолке и на стене. Что можно сказать о форме зайчиков?

Задача 4. В прямоугольном зеркальном ящике находится объект - буква F (см. центральную часть рисунка: черная буква в сплошном прямоугольнике). Построить изображения.

Решение понятно из рисунка.

Красным выделены изображения, полученные при однократном отражении от каждого из четырех зеркал прямоугольника.

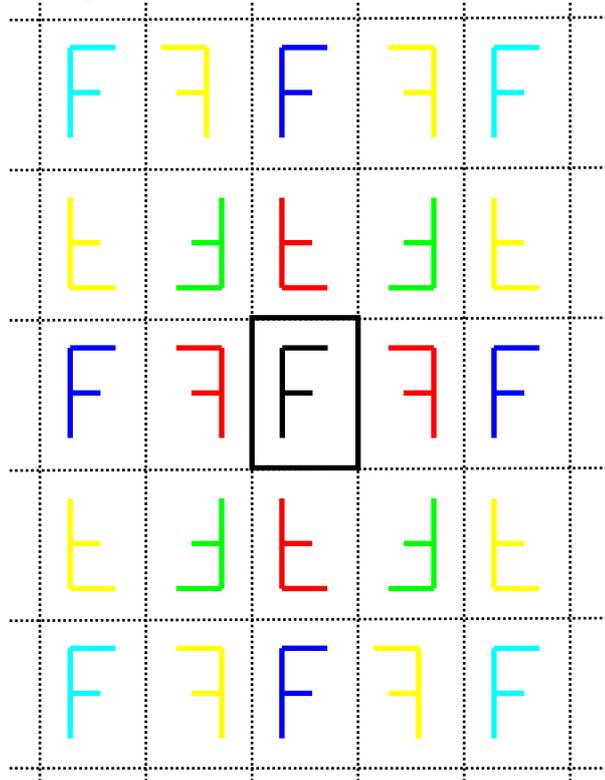
Зеленым выделены изображения, полученные при двукратном отражении от одного горизонтального и одного вертикального зеркал прямоугольника.

Синим выделены изображения, полученные при двукратном отражении от двух горизонтальных или двух вертикальных зеркал прямоугольника.

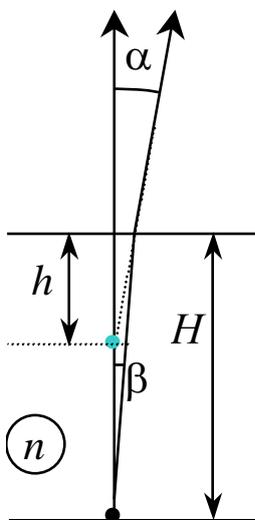
Желтым выделены изображения, полученные при трехкратном отражении (от двух горизонтальных и одного вертикального или двух вертикальных и одного горизонтального зеркал прямоугольника).

Голубым выделены изображения, полученные при четырехкратном отражении, причем от каждого из четырех зеркал прямоугольника.

Все изображения являются мнимыми, поэтому их можно наблюдать только глазом, а не на экране. Если в зеркальный ящик вместо буквы поставить человека, то он будет наблюдать многократные собственные отражения.



Преломление на границе раздела сред.



1. Камень лежит на дне водоема глубиной H . Наблюдатель смотрит вертикально вниз. На каком расстоянии от поверхности воды он видит камень? Показатель преломления воды n .

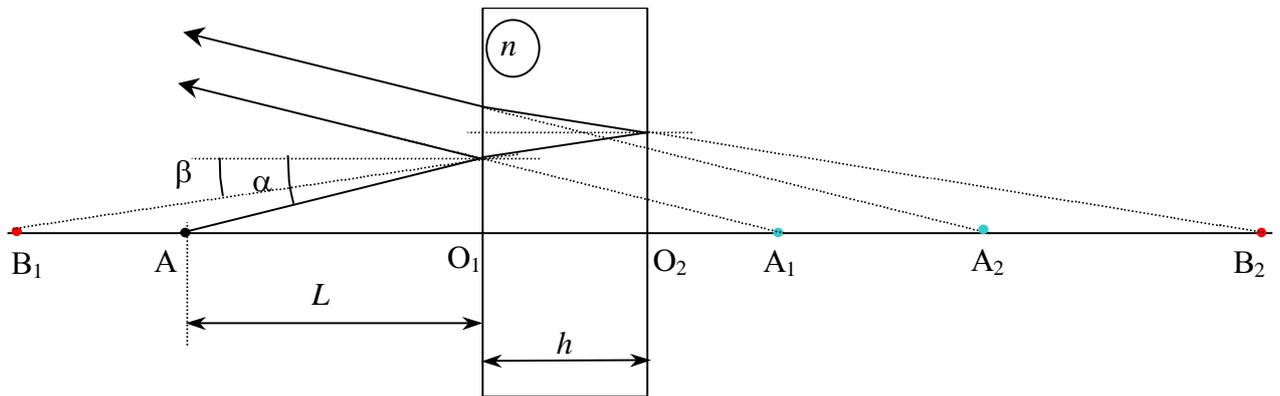
Решение.

Закон преломления: $1 \cdot \sin \alpha = n \cdot \sin \beta$.

Т.к. $\alpha \ll 1$, $\beta \ll 1$, то $\alpha \approx n \cdot \beta$.

Из $H \cdot \operatorname{tg} \beta = h \cdot \operatorname{tg} \alpha$ следует, что $h = H \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{H}{n}$.

2. Точечный источник света A находится на расстоянии L от плоскопараллельной пластины (толщина h , показатель преломления n). Найти положения изображений, полученных при отражении от двух поверхностей пластины.



Решение.

Изображение A_1 , получаемое при отражении от передней границы пластины, находится от нее на таком же расстоянии L , что и источник A , т.е.

$$AO_1 = O_1A_1 = L.$$

Для определения положения второго изображения находим последовательно изображения, получаемые при преломлении на передней границе (т. B_1), при отражении от задней границы (т. B_2) и при повторном преломлении на передней границе (т. A_2).

1) Как и в задаче 1, $\alpha \approx n \cdot \beta$.

Тогда $B_1O_1 = n \cdot AO_1 = nL$.

Луч, распространяющийся в пластине после преломления на первой границе, кажется выходящим из точки B_1 .

2) Т.к. расстояние $B_1O_2 = B_1O_1 + O_1O_2 = nL + h$, то и $O_2B_2 = B_1O_2 = nL + h$.

Луч, распространяющийся в пластине после отражения от второй границы, кажется выходящим из точки B_2 .

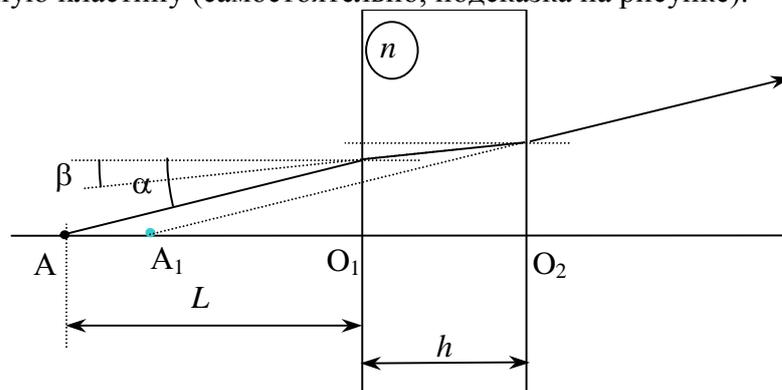
3) По аналогии с задачей 1 и п.1) задачи 2 для расстояния O_1A_2 получим:

$$O_1A_2 = \frac{O_1B_2}{n} = \frac{nL + h + h}{n} = L + \frac{2h}{n}.$$

Таким образом, расстояние между двумя изображениями A_1 и A_2 равно $A_1A_2 = \frac{2h}{n}$.

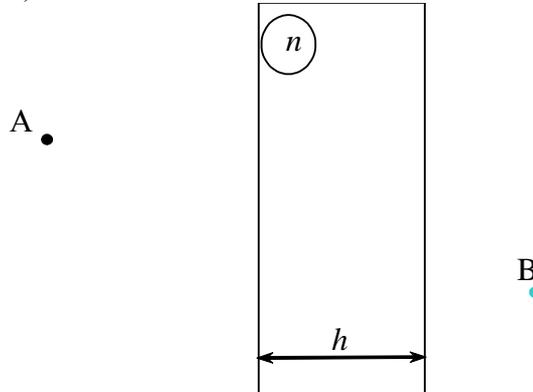
Этот результат будет в дальнейшем использован при расчете интерференционной картины, получаемой с помощью плоскопараллельной пластины.

3. Для схемы задачи 2 найти смещение изображения при прохождении света через плоскопараллельную пластину (самостоятельно, подсказка на рисунке).



Ответ. $AA_1 = h \cdot \frac{n-1}{n}$.

4. В схеме задачи 2 заданы две точки A и B, произвольно расположенные по разные стороны от пластины. Используя результаты предыдущих задач, построить луч, проходящий через обе точки (самостоятельно).



Указание. Построить изображения и сообразить, как их соединить.

5. Луч света падает на оптический клин (угол клина $\alpha \ll 1$, показатель преломления n) под малым углом $\beta \ll 1$. Найти угол между падающим лучом и лучом, прошедшим через клин.

Решение.

Записываем соотношения между углами:
преломление на передней грани:

$$\beta = n\gamma;$$

угол падения на заднюю грань:

$$\delta = \gamma + \alpha;$$

преломление на задней грани:

$$\varepsilon = n\delta;$$

угол между горизонталью и вышедшим лучом:

$$\theta = \varepsilon - \alpha;$$

искомый угол:

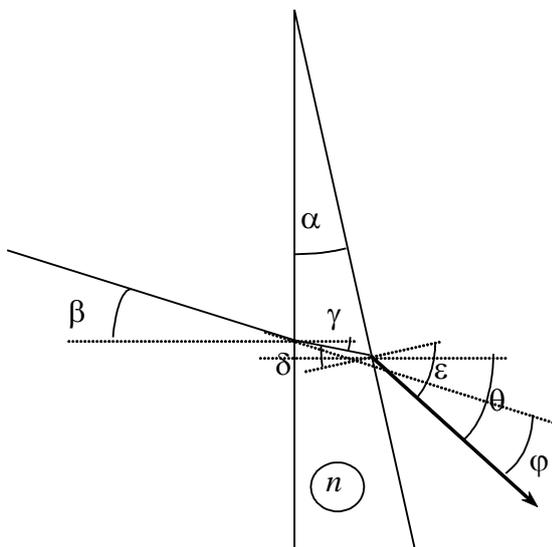
$$\varphi = \theta - \beta.$$

После подстановок получим:

$$\varphi = (n-1)\alpha,$$

т.е. не зависит от угла падения β .

Этот результат будет также использован в дальнейшем при расчете интерференции, получаемой с помощью бипризмы.



Изображения в линзах.

Способы построения изображений в тонких линзах см. в описании задачи №411 практикума. Приведем два поясняющих рисунка из описания.

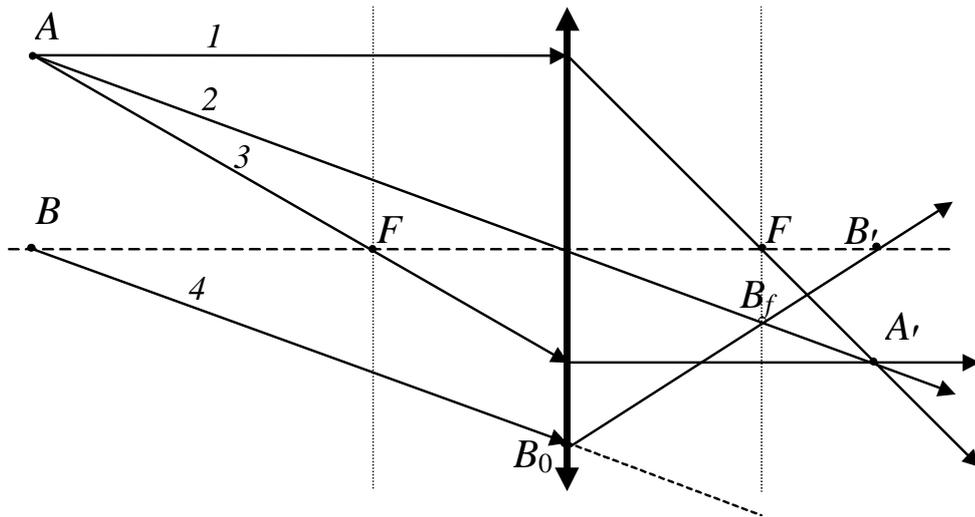


Рис. 2. Построение изображения в случае собирающей линзы

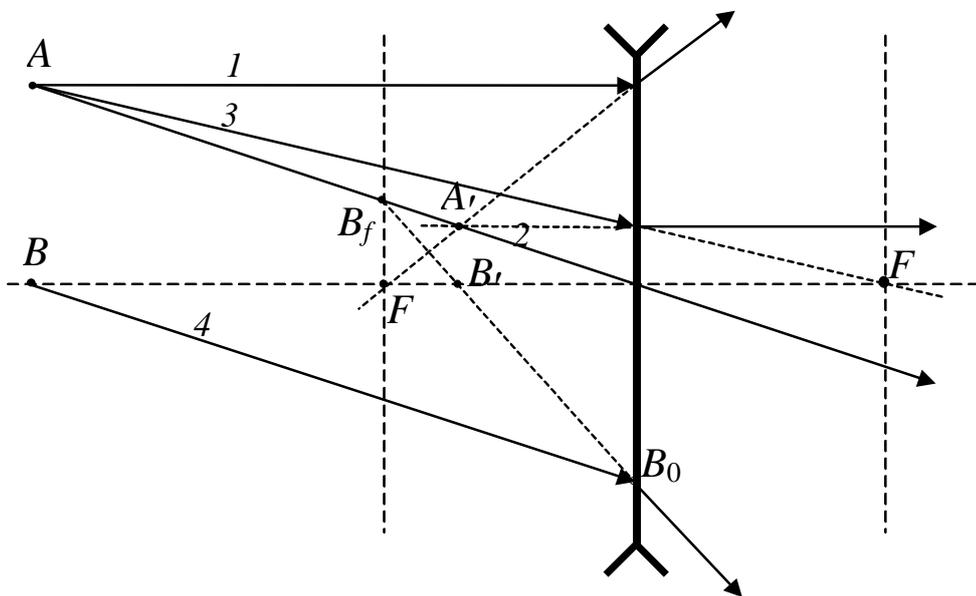


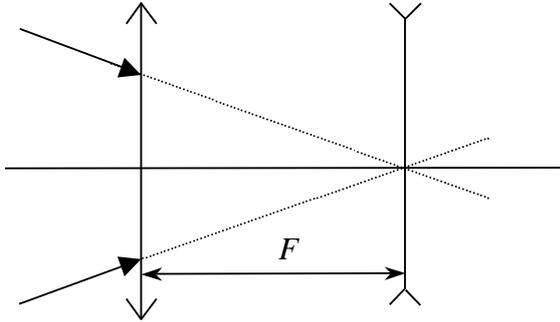
Рис.3. Построение изображения в случае рассеивающей линзы

*Искривление световых лучей в неоднородных средах –
Самостоятельно и по желанию (см. Сивухин, §4)*

Домашнее задание (Иродов, 1988 год) 5.16, 19, 20, 27, 36-38.

Семинар 2. Геометрическая оптика-2.

1. Собирающая и рассеивающая линзы с фокусными расстояниями $F_1=|F_2|=F$ находятся на расстоянии $d=F$ друг от друга. Два луча падают на собирающую линзу так, что их продолжения проходят через центр рассеивающей линзы. Найти положение изображения.



Решение.

Применяем последовательно формулу тонкой

$$\text{линзы } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}.$$

$$\text{1-я линза: } \frac{1}{-F} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}; \quad \frac{1}{b} = \frac{2}{F}; \quad b = \frac{F}{2}.$$

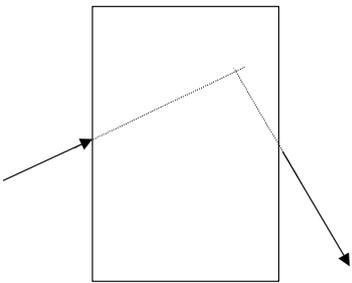
$$\text{2-я линза: } a_2 = d - b = \frac{F}{2}; \quad F_2 = -F.$$

$$\frac{1}{F/2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{-F}; \quad \frac{1}{b_2} = -\frac{3}{F}; \quad b_2 = -\frac{F}{3}.$$

Дома: меняем линзы местами. Что изменится? (задача решается в уме).

Дома решить похожую задачу:

1а. Собирающая и рассеивающая линзы с фокусными расстояниями $F_1=|F_2|=F$ находятся на расстоянии $d=F$ друг от друга (см. рисунок к предыдущей задаче). Точечный источник света находится на расстоянии $a=mF$ от собирающей линзы (m - произвольное число) и смещен на расстояние h от оптической оси. Найти координату изображения. Проанализировать результат в зависимости от m .



2. В черном ящике находится одна линза, параметры и местоположение которой неизвестны. Заданы луч, падающий на черный ящик, и луч, выходящий из него. Найти параметры линзы: местоположение, фокус. Однозначно ли решение?

Решение.

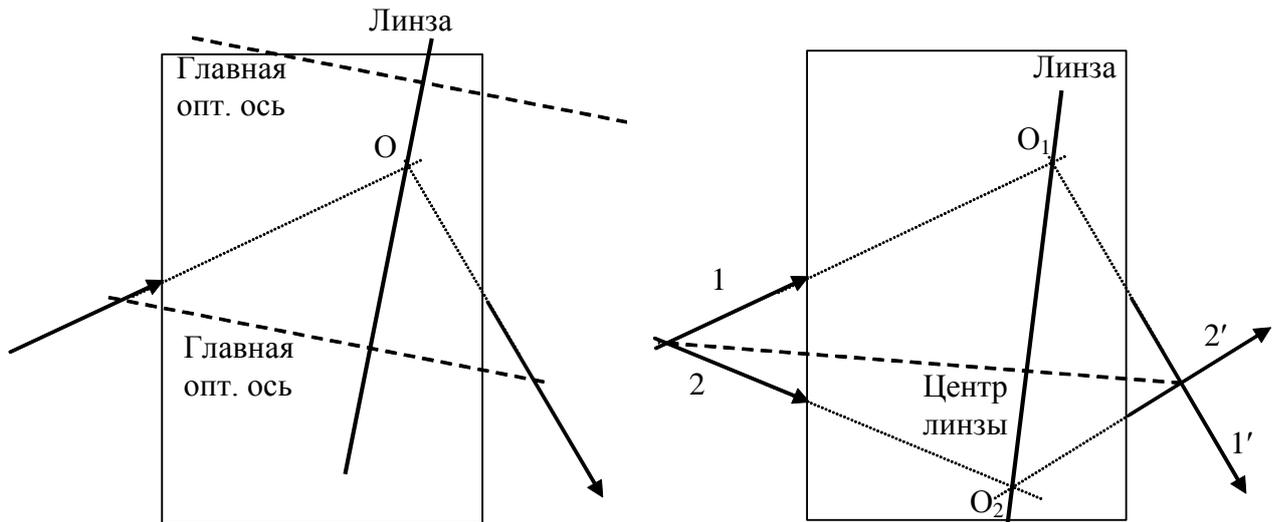
А. Продолжаем лучи до пересечения в т.О, тем самым находим одну из точек плоскости линзы.

Остальное – было на семинаре. Краткое напоминание – на рисунке.

(Линза – любая прямая, проходящая через т.О. Центр линзы – любая точка, кроме т.О. Главная оптическая ось перпендикулярна линзе. Дальнейшим построением определяется тип линзы и фокус). Решение неоднозначно.

Б. Решить задачу при условии, что задана еще и вторая пара лучей:

Решение – на рисунке.



А что будет, если неизвестно взаимное соответствие падающих и выходящих лучей?

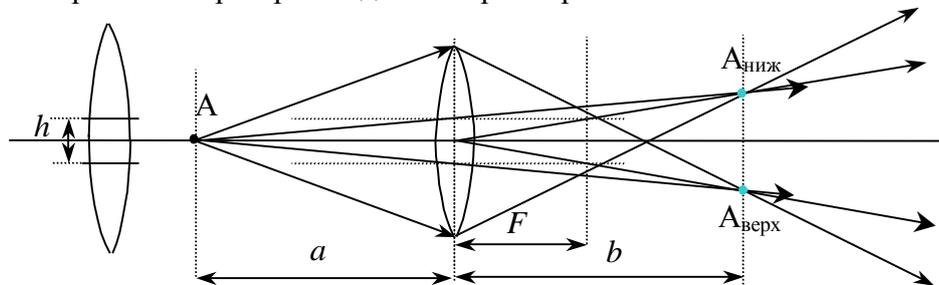
3. Из собирающей линзы с фокусом F удалили центральную часть шириной h и оставшиеся части сдвинули до соприкосновения. Точечный источник света находится на оси симметрии на расстоянии a от плоскости билинзы. Найти местоположения изображений. Изобразить ход пучков света.

Решение.

По формуле тонкой линзы находим расстояние от билинзы до плоскости изображений:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}; \quad b = \frac{aF}{a - F}.$$

Расстояние между оптическими осями верхней и нижней половин билинзы равно h . Выполняя построение в каждой половине билинзы, находим положение двух изображений $A_{\text{верх}}$ и $A_{\text{ниж}}$, построенных при прохождении через верхнюю и нижнюю половины.



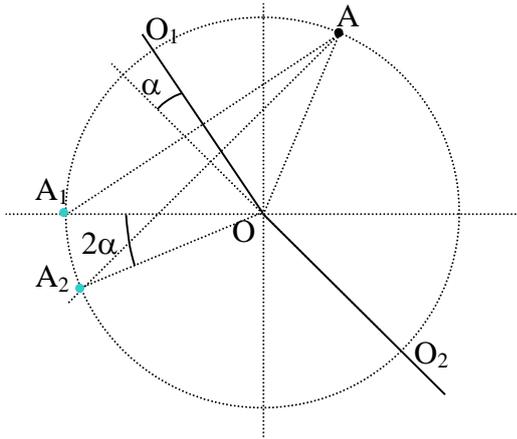
Расстояние d между изображениями A находится из пропорции:

$$\frac{d}{h} = \frac{a+b}{a}; \quad d = h \cdot \frac{a+b}{a}.$$

Из рисунка видно, что пучки света, ограниченные лучами, прошедшими через крайние точки каждой половины билинзы (вершину и середину) в области за изображениями не пересекаются. Область наложения этих пучков существует только между билинзой и изображениями, именно там можно наблюдать интерференцию.

Дома.

- 1) Проанализировать, как изменится картина, если источник разместить на расстоянии $a < F$.
- 2) Рассмотреть билинзу, полученную путем разрезания линзы и разведением половинок на расстояние h друг от друга (пространство между половинками закрыто непрозрачным экраном).



4. Бизеркало образовано двумя плоскими зеркалами OO_1 и OO_2 , угол между которыми $\alpha \ll 1$. Точечный источник света A находится на расстоянии R от ребра бизеркала O . Найти расстояние между двумя изображениями A_1 и A_2 .

Решение.

Из рисунка видно, расстояния от т. O до источника A и изображений A_1 и A_2 одинаковы и равны R . Угол A_1OA_2 равен 2α . Отсюда расстояние между источниками $A_1A_2 \approx 2\alpha R$. Подобная схема также используется для получения интерференционной картины.

5. Задача-«капкан №1».

Хорошо известно, что в оптике справедлив принцип обратимости хода лучей. Применительно к оптическим системам это означает, что источник и изображение можно поменять местами. Например, если в задаче 3 источник света из точки A перенести в точку $A_{\text{верх}}$ (или $A_{\text{ниж}}$), то его изображение (в обоих случаях) окажется в точке A .

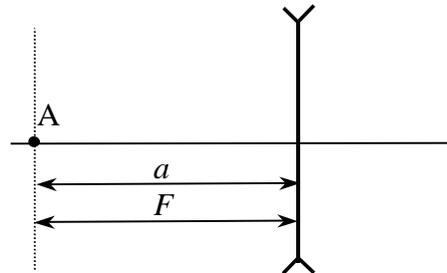
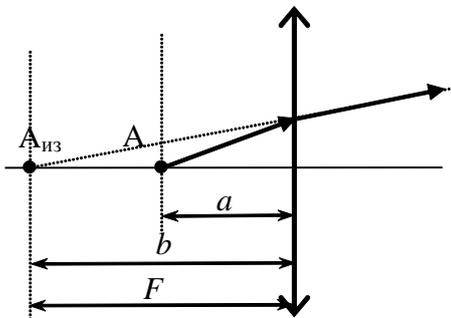
Перед собирающей линзой с фокусным расстоянием F поместим источник света A на расстоянии $a = F/2$. Тогда из формулы тонкой линзы несложно получить:

$$b = -F,$$

т.е. изображение $A_{\text{из}}$ окажется точно в фокусе (см. рисунок).

Теперь попытаемся поменять источник и изображение местами. Перенесем источник в точку $A_{\text{из}}$, т.е. в фокус. Но ведь если источник находится в фокусе собирающей линзы, то после линзы сформируется параллельный пучок света!!! Изображение окажется на бесконечности!!! А мы его ожидали увидеть в точке A !!!

В чем дело???



6. Задача-«капкан №2».

Источник света A находится точно в фокусе рассеивающей линзы (см. рисунок). Построением найти изображение.

Оптические инструменты.

1. ГЛАЗ

Основополагающим оптическим инструментом является **ГЛАЗ**. Не вдаваясь в тонкости (более полную информацию можно найти, например, в Ландсберге, §91,193), в качестве модели глаза можно взять собирающую линзу (хрусталик) с переменным фокусным расстоянием (регулируется мышечным усилием), позволяющую получить изображение какого-либо объекта на экране (сетчатке), положение которого относительно линзы фиксировано. Иными словами, в формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \quad (1)$$

величина b фиксирована (расстояние между хрусталиком и сетчаткой), а наводка (аккомодация) глаза на объекты, удаленные на самые разные расстояния a осуществляется изменением фокусного расстояния F . Из жизненного опыта человек с нормальным зрением знает, что наводка на тот или иной объект осуществляется практически без малейших усилий, можно сказать, автоматически. Таким образом, каждый человек, имеющий глаза и устремляющий взгляд на какой-либо объект, мгновенно решает уравнение (1), находит требуемое фокусное расстояние и мышечным усилием устанавливает его. При этом подавляющее число людей и не подозревают о своих действиях.

Пространство между линзой-хрусталиком и экраном-сетчаткой заполнено жидкостью, что изменяет фокусное расстояние. Чтобы избежать ненужных (но не принципиальных) усложнений, забудем про это, будем считать, что с обеих сторон от линзы глаза находится воздух. Расстояние b около 20 мм, существенно меньше, чем возможные расстояния a , поэтому на экране-сетчатке всегда получается действительное перевернутое уменьшенное изображение объекта. Но при этом из свойств линзы известно, что угловые размеры объекта и изображения одинаковы (помним, что про жидкость мы забыли!). Таким образом, для получения более крупного изображения на сетчатке необходимо увеличивать именно **угловые** (а не линейные) размеры объекта. На рисунке три объекта, имеющих разные линейные размеры, будут давать одинаковые размеры изображений (для наглядности размеры глаза существенно увеличены).

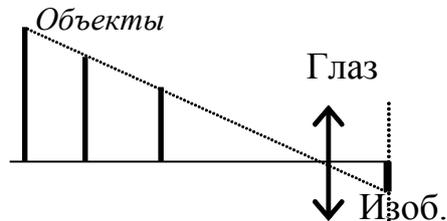


Рис. Наблюдение глазом объектов, расположенных на разных расстояниях.

Каждый человек знает, что для внимательного разглядывания какого-либо объекта его следует поднести как можно ближе к глазам, ведь при этом растут угловые размеры объекта. Но изменяется и мышечное усилие, необходимое для регулировки фокусного расстояния. Принято считать, что для нормального глаза усилия минимальны при его наведении на бесконечно удаленный объект; существует некоторый (довольно широкий) диапазон a , при которых глаз чувствует себя комфортно. Со значительным усилием можно рассматривать объекты и с расстояния 10 см. Для расчетов принято выделять *расстояние наилучшего зрения*:

$$D=25 \text{ см,}$$

это расстояние от объекта до глаза считают оптимальным для наблюдения близкорасположенного объекта.

Таким образом, при наблюдении глазом основная задача всех используемых оптических инструментов заключается в увеличении **угловых** размеров объекта.

2. ЛУПА.

Как и глаз, лупа - это собирающая линза с небольшим, но, в отличие от глаза, неизменным фокусным расстоянием ($F \sim 10-100$ мм). Чтобы получить увеличенное изображение объекта, находящегося перед наблюдателем, ее располагают между объектом и глазом на расстоянии, чуть меньшем фокусного. В результате лупа формирует мнимое прямое увеличенное изображение, именно оно и наблюдается глазом.

Из рисунка видно, что «с точки зрения» лупы угловой размер мнимого изображения такой же, как и размер самого объекта. Но для глаза при установленной лупе угловой размер изображения больше, чем без нее.

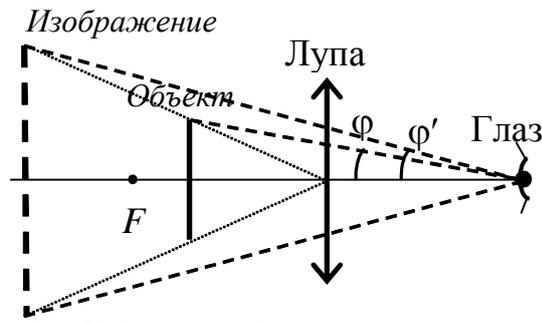


Рис. Наблюдение объекта с помощью лупы.

Рассчитаем коэффициент увеличения лупы, равный (по определению)

$$N = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi},$$

где φ и φ' - угловые размеры объекта и изображения соответственно.

Пусть объект поперечным размером $2l$ находится от глаза на расстоянии наилучшего зрения D , тогда его угловой размер для невооруженного глаза равен

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{l}{D}.$$

Поместим между ними лупу так, чтобы объект оказался практически в фокусе, т.е. расстояние $a = F$. В этом случае в соответствии с формулой тонкой линзы (1) и линейные размеры изображения $2l'$, и расстояние $|b|$ от лупы до изображения устремятся к бесконечности, но – самое главное - угловой размер изображения (по отношению к лупе) останется тем же самым, что и у объекта и равным $\frac{l}{F}$. Но нормальный глаз не боится бесконечности, он, наблюдая через лупу, видит находящееся в бесконечности изображение без малейшего напряжения. Для бесконечно удаленного изображения его угловой размер для глаза будет точно таким же, как и для лупы:

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{l}{F}.$$

Следовательно, увеличение лупы равно

$$N = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{D}{F}. \quad (2)$$

Именно эту величину и имеют в виду, когда говорят, что лупа имеет «такое-то» увеличение. Если, к примеру, увеличение четырехкратное, то фокусное расстояние лупы равно

$$F = \frac{D}{N} = \frac{25}{4} = 6,25 \text{ (см)}.$$

С помощью реальной лупы обычно получают увеличение не более шести- восьмикратного. Для большего увеличения применяют микроскоп.

Такую схему расчета увеличения лупы используют исключительно для получения формулы. При реальных наблюдениях с помощью лупы размер изображения наблюдатель выбирает сам, варьируя расстояния как от объекта до лупы, так и от лупы до глаза.

Если же лупу расположить от объекта на расстоянии, большем фокусного, то она даст действительное перевернутое изображение, которое может оказаться и за глазом, и перед ним. Его тоже можно наблюдать, но в разных ситуациях придется прикладывать определенное, иногда значительное, усилие для его наблюдения. Знание изложенных выше

фактов дает способ экспериментального определения типа линзы (собирающая или рассеивающая).

Попробуем теперь проанализировать ход лучей при наблюдении через лупу. Пусть объект с поперечным размером $2l$ находится точно в фокальной плоскости лупы диаметром d . Сначала установим вместо глаза экран. Каждая точка объекта будет давать на экране световое пятно, размер которого будет совпадать с поперечным размером самой лупы (на рисунке показан ход лучей от одной из крайних точек объекта). Если размер лупы существенно больше размера объекта, то понятно, что никакого изображения на экране не будет, будет просто световое пятно диаметром большим, чем диаметр лупы. Чтобы получить на экране четкое действительное изображение, следует объект и экран поместить так, чтобы была выполнена формула тонкой линзы (1).

Поместим теперь на место экрана глаз. Из множества лучей, прошедших через лупу, глаз будет видеть только те, что попадут непосредственно в хрусталик (на рисунке вновь показан ход лучей от крайней точки объекта). Без напряжения глаз превратит эти идущие из бесконечности лучи в точку на сетчатке. Точно также он поступит и с остальными точками объекта. В результате на сетчатке возникнет четкое изображение объекта с угловым размером φ' , определяемым из формулы

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{l}{F}.$$

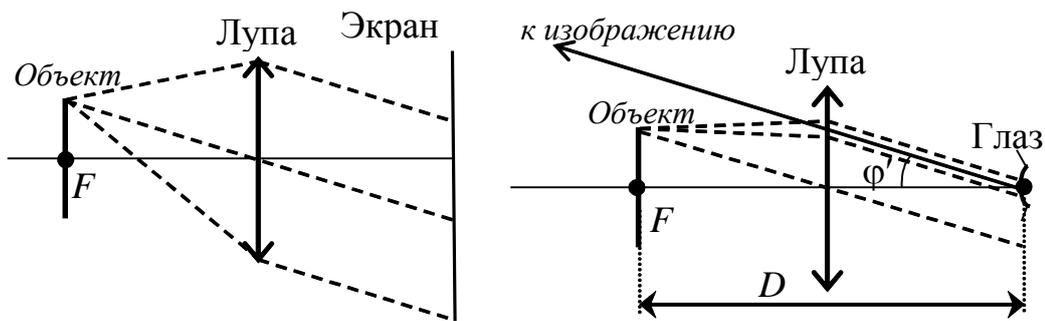


Рис. Наблюдение объекта, расположенного в фокальной плоскости лупы, на экране (слева) или глазом.

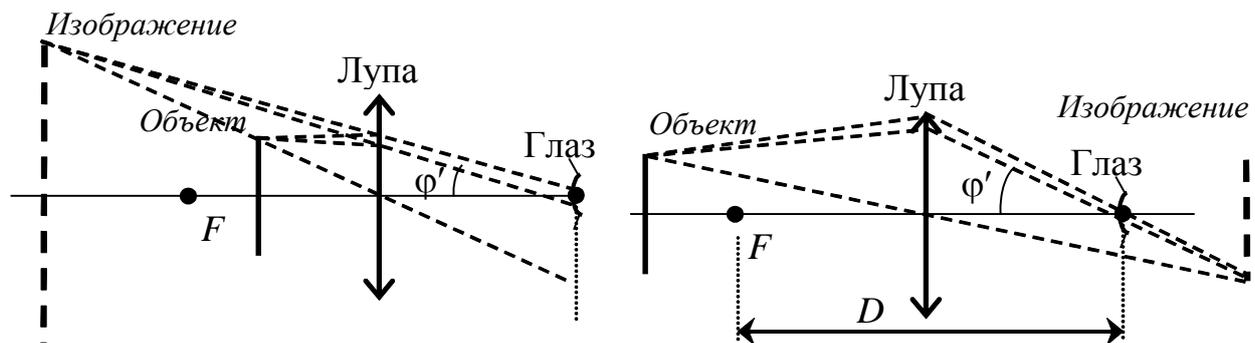


Рис. Наблюдение глазом объекта, смещенного из фокальной плоскости лупы.

Теперь сместим лупу к объекту, изображение останется мнимым, но располагаться будет уже не на бесконечном удалении от лупы (см. левый рисунок). Проводим из крайней точки изображения два луча в зрачок глаза, находя тем самым ход лучей, и видим, что угловой размер изображения практически не изменился (но все же стал чуть меньше).

Теперь чуть отдадим лупу от объекта, изображение станет действительным и окажется за глазом (см. правый рисунок). Вновь проводим лучи от крайней точки изображения через зрачок до линзы. Видим, что угловой размер изображения вырос, но на глаз падает сходящийся пучок!!! И большой вопрос: сможет ли глаз аккомодироваться, чтобы сформировать четкую точку на сетчатке. Может даже оказаться так, что при некоторых положениях глаза все лучи, вышедшие из крайней точки и прошедшие через лупу, пройдут

мимо глаза. А в глаз в этом случае попадут лучи только от центральной части объекта. Увеличение будет большим, чем то, что дается ранее полученной формулой (2). Правда, вследствие aberrаций оно может оказаться сильно искаженным. Да и глаз, возможно, не сможет получить четкого изображения. Построение хода лучей для такого случая выполнить самостоятельно.

Таким образом, для нормального глаза оптимальным является расположение объекта в фокальной плоскости лупы. Но на практике можно всегда подобрать удобное взаимное расположение объекта, лупы и глаза.

Пользуясь данным примером, подчеркнем, что ВСЕГДА при разборе формирования изображений различными оптическими системами следует различать случаи, когда наблюдения ведутся на экране ИЛИ глазом. Ведь глаз - это дополнительная оптическая система, да еще и с переменным фокусным расстоянием!!!

Особенности наблюдения через рассеивающую линзу разобрать самостоятельно (скажем только, что она ВСЕГДА уменьшает угловой размер).

3. ОЧКИ.

Очки, которые носит чуть ли не половина населения, - это дополнительная линза (собирающая или рассеивающая), позволяющая подправить отдельные незначительные дефекты зрения.

Человек с нормальным зрением способен хорошо настраивать (аккомодировать) свой глаз на наблюдение объектов, расположенных от глаза на расстоянии от бесконечности ($a_{\text{дал}}$) до 10-15 сантиметров ($a_{\text{ближ}}$). Среди дефектов зрения выделяют две большие группы: близорукость и дальнозоркость. Суть дефектов понимается из самих названий.



Близорукий глаз хорошо видит объекты, расположенные вблизи, и плохо видит вдали. Ближний и дальний пределы аккомодации глаза смещены к глазу (см. рисунок). Основное предназначение очков заключается в «перемещении» объекта, находящегося в «нехорошей» для глаза области, в «хорошую». Для близорукости это означает, что очки должны удалить на бесконечность объект «переместить» в область аккомодации глаза, т.е. приблизить его на расстояние $a'_{\text{дал}}$. Формула тонкой линзы (1) позволит нам рассчитать фокусное расстояние требуемой для этого линзы очков. Подставив в (1) $a = \infty$; $b = -a'_{\text{дал}}$ (знак «минус», т.к. изображение мнимое), получим:

$$F_{\text{оч}} = -a'_{\text{дал}},$$

т.е. необходимо использовать рассеивающую линзу с отрицательным фокусным расстоянием, равным дальнему ($a_{\text{дал}}$) пределу аккомодации близорукого глаза. В этом случае близорукий глаз будет без напряжения видеть далеко расположенные объекты, которые были «приближены» очками.

Дальнозоркий глаз, напротив, хорошо видит объекты, расположенные вдали, и плохо видит вблизи. Поэтому очки должны «переместить» объект, расположенный на расстоянии $a_{\text{ближ}}$ для нормального глаза, в область аккомодации дальнозоркого глаза, т.е. «удалить» объект от глаза на расстояние $a'_{\text{ближ}}$. Такую процедуру проделывает положительная линза, фокусное расстояние которой больше $a_{\text{ближ}}$ для нормального глаза: в результате формируется

мнимое изображение. Но у дальновзоркого глаза есть еще одна область уверенного наблюдения объектов, для которых $a < 0$ (объект мнимый). Понятно, что таких объектов в реальности не существует, ведь все объекты располагаются перед наблюдателем. Но положительные очки именно в эту область «перемещают» объекты, находящиеся от глаза на расстоянии, большем, чем фокусное расстояние очков. Т.е. после очков на дальновзоркий глаз от объекта падает сходящийся пучок лучей, который таким глазом воспринимается совершенно нормально без значительных усилий.

Таким образом, близорукие люди должны носить очки с отрицательным фокусным расстоянием, дальновзоркие – с положительным. Обычно говорят об оптической силе D очков, выражаемой в диоптриях:

$$D = \frac{1}{F}$$

(1Дп=1 м⁻¹). Поэтому фраза: «У меня очки «минус два»» означает, что их фокусное расстояние равно $F = -0,5$ м.

Каждый человек, экспериментально определив пределы отчетливого наблюдения своего глаза ($a'_{\text{дал}}$ и $a'_{\text{ближ}}$), может самостоятельно рассчитать, какие именно очки ему требуются (если, конечно, требуются).

Отметим также, что, так как очки расположены практически вплотную к глазу, то они не изменяют существенно углового размера объекта, они лишь «перемещают» его в область уверенного наблюдения глаза.

4. ТЕЛЕСКОП.

Телескоп предназначен для наблюдения объектов, расположенных очень далеко от наблюдателя, можно сказать, на бесконечности. Сами объекты могут иметь значительные линейные размеры (например, звезды), но их угловые размеры чрезвычайно малы. Поэтому основная задача телескопа, как, впрочем, и любой другой оптической системы, – это увеличение углового размера.

Простейший телескоп состоит из двух линз. Первая, расположенная ближе к объекту, собирающая, носит название *объектив*. Вторая может быть как собирающей, так и рассеивающей, ее называют *окуляр*. Глаз наблюдателя располагается практически вплотную к окуляру, поэтому диаметр окуляра лишь незначительно превосходит размеры хрусталика.

Рассмотрим, как работает телескоп (ограничимся случаем двух собирающих линз). Так как реальный объект находится на бесконечности, его изображение сформируется в фокальной плоскости объектива, его угловой размер φ совпадет с угловым размером объекта, а линейный размер будет равен

$$l_{\text{«об»}} = 2F_{\text{об}} \cdot \text{tg}\varphi.$$

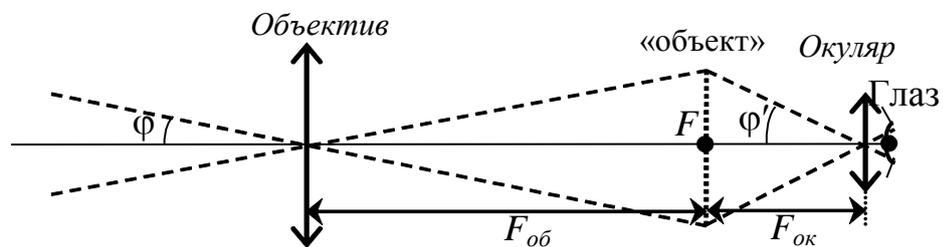


Рис. Оптическая схема телескопа.

Это изображение станет «объектом» для второй линзы – окуляра. Действие окуляра будет подобно действию лупы, но есть некоторые отличия. «Объект» должен находиться в фокальной плоскости окуляра, поэтому каждая точка «объекта» даст после прохождения окуляра параллельный пучок, который и будет легко наблюдаться глазом. Однако, в отличие от лупы, глаз будет располагаться вплотную к окуляру. Поэтому, в соответствии с формулой (2) увеличение лупы-окуляра будет равно единице!!! Ведь глаз расположен от «объекта» не на расстоянии наилучшего зрения, а на фокусном расстоянии окуляра $F_{\text{ок}}$.

Но при внимательном анализе можно заметить, что увеличение-то уже получено! Угловой размер «объекта» наблюдаемого глазом, не зависимо от того, наблюдается он через окуляр или без него, равен

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{l_{об}''/2}{F_{ок}} = \frac{F_{об}}{F_{ок}} \cdot \operatorname{tg}\varphi.$$

В итоге увеличение телескопа равно отношению фокусных расстояний объектива и окуляра:

$$N = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{F_{об}}{F_{ок}}. \quad (2)$$

При этом фокальные плоскости объектива и окуляра совпадают, т.е. расстояние L между ними равно

$$L = F_{об} + F_{ок}.$$

Может сложиться обманчивое впечатление, что окуляр не нужен, ведь он не дает никакого углового увеличения! Это действительно так, но его основное предназначение в телескопе (и в ряде других приборов) – это «сделать хорошо» глазу. Обычно фокусное расстояние окуляра составляет несколько сантиметров (чем оно меньше, тем больше увеличение прибора). Глаз не способен рассмотреть «объект» с такого расстояния. А окуляр позволяет каждую точку «объекта» превратить в параллельный пучок, что чрезвычайно удобно для глаза.

С помощью телескопа можно наблюдать и объекты, расположенные ближе, чем на бесконечном расстоянии, но при этом гораздо большем, чем $F_{об}$. В этом случае изображение объекта окажется чуть дальше фокальной плоскости объектива. Поэтому окуляр необходимо сместить от объектива, чтобы полученное в объективе изображение оказалось точно в фокальной плоскости окуляра. Именно таким образом и осуществляют наведение на резкость при наблюдении не только с помощью телескопа, но и в другие оптические приборы.

Отметим также, что окуляр можно использовать и без объектива, в качестве лупы. У окуляра и малый диаметр, и малое фокусное расстояние. Поэтому его следует, с одной стороны, прижать непосредственно к глазу, а, с другой стороны, поднести к объекту (обычно тексту) на малое расстояние, равное фокусному. Увеличение углового размера в этом случае достигается именно за счет малого расстояния между объектом и глазом (оно существенно меньше наилучшего $D=25$ см), а окуляр помогает глазу, переводя изображение на бесконечность. Пожилые люди довольно часто используют именно такой «способ» для чтения.

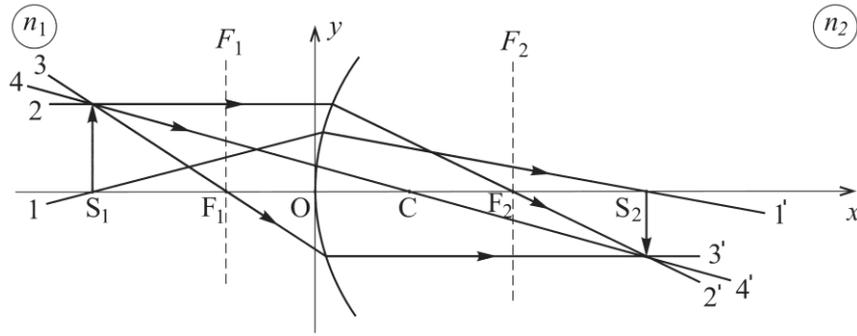
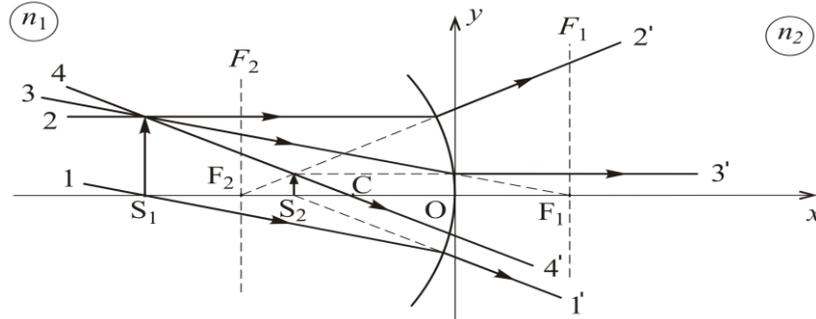
Фрагмент из «Оптика. Методика решения»

Преломление света на сферической границе раздела двух сред

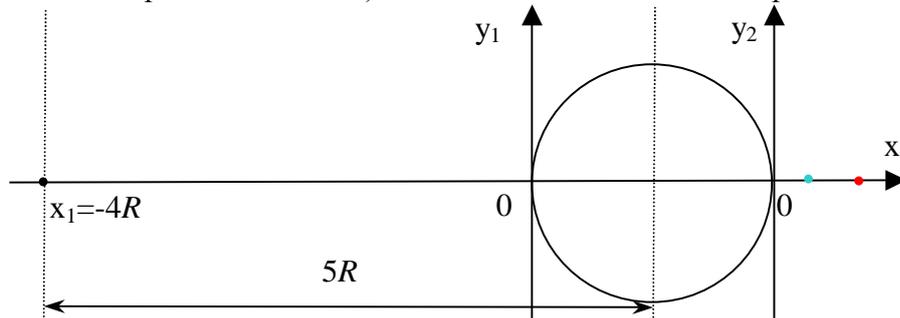
Пусть сферическая поверхность, радиус которой $OC=R$, разделяет среды с показателями преломления n_1 и n_2 (рис. 1.2 и 1.3). В параксиальном приближении (при малых углах между световым лучом и оптической осью Ox) x -координаты точек S_1 (предмет) и S_2 (изображение), отсчитываемые от вершины поверхности O , связаны соотношением:

$$\frac{n_2}{x_{S_2}} - \frac{n_1}{x_{S_1}} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \quad (1.4)$$

Для оптической системы, показанной на рис. 1.2: $n_2 > n_1$, $R > 0$, $x_{S_1} < 0$, $x_{S_2} > 0$; для оптической системы, представленной на рис. 1.3: $n_2 > n_1$, $R < 0$, $x_{S_1} < 0$, $x_{S_2} < 0$.

Рис. 1.2. Преломление лучей на сферической границе раздела двух сред ($n_2 > n_1$)Рис. 1.3. Преломление лучей на сферической границе двух сред ($n_2 > n_1$)

5. Точечный источник света расположен на расстоянии $L=5R$ от центра прозрачного шара радиуса R (показатель преломления $n=2$). Рассчитать положение изображения.



Решение.

1) Преломление на первой границе:

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{r},$$

где $x_1 = -4R$, $r = R$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$.

$$\frac{n_2}{x_2} = \frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2 - n_1}{r} = \frac{1}{-4R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{4R}, \quad x_2 = \frac{4Rn_2}{3} = \frac{8R}{3}.$$

2) Преломление на второй границе:

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{r},$$

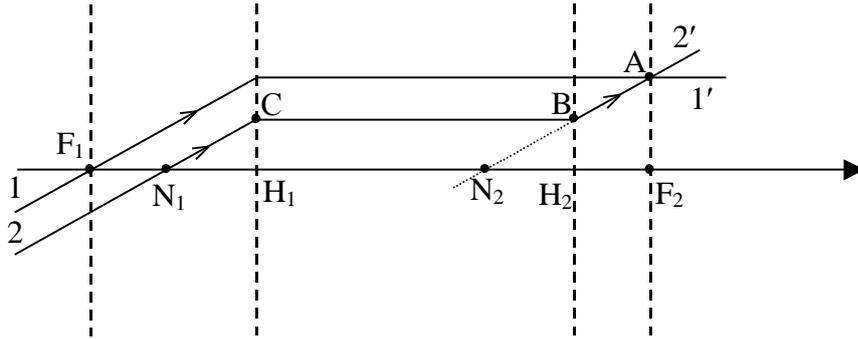
где $x_1 = \frac{8R}{3} - 2R = \frac{2R}{3}$, $r = -R$, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$.

$$\frac{n_2}{x_2} = \frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2 - n_1}{r} = \frac{3 \cdot 2}{2R} + \frac{-1}{-R} = \frac{4}{R}, \quad x_2 = \frac{R \cdot n_2}{4} = \frac{R}{4}.$$

Дополнение.

Построение по кардинальным точкам.

1. Заданы главные плоскости H_1 и H_2 и фокусы F_1 и F_2 . Найти узловые точки N_1 и N_2 .



Проводим произвольный луч 1, проходящий через фокус F_1 . После оптической системы он выйдет параллельно главной оптической оси (луч 1') и пересечет фокальную плоскость F_2 в точке А. В эту же точку А соберутся все падающие на систему лучи, параллельные лучу 1.

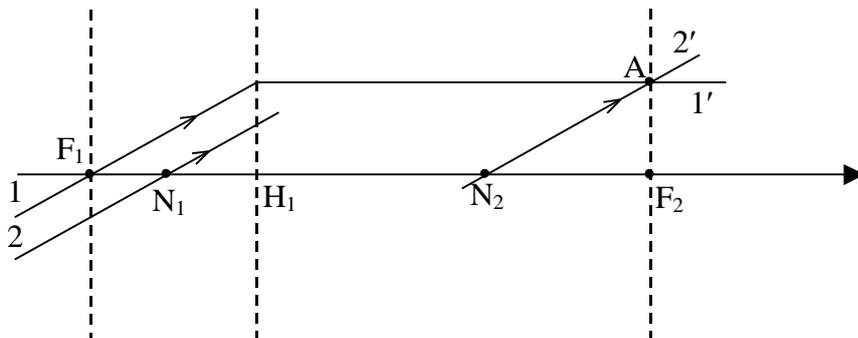
Проведем через точку А луч 2', параллельный лучу 1. Он пересечет главную плоскость H_2 в точке В и главную оптическую ось в точке N_2 . Найдем падающий на систему луч 2, который выйдет из системы как луч 2'. Проведем через точку В прямую, параллельную главной оптической оси, до пересечения с главной плоскостью H_1 (точка С). Через эту точку С проведем луч 2, параллельный лучам 1 и 2', который пересечет главную оптическую ось в точке N_1 .

Точки N_1 и N_2 и будут искомыми узловыми точками, т.к. лучи 2 и 2' параллельны друг другу.

Из геометрии видно, что фокусное расстояние F_1H_1 равно расстоянию N_2F_2 , аналогично $F_1N_1 = H_2F_2$. Кроме этого $N_1H_1 = N_2H_2$.

Отметим, что если с обеих сторон от системы находятся среды с одинаковыми показателями преломления (или одна и та же среда), то фокусные расстояния F_1H_1 и F_2H_2 одинаковы. В этом случае узловые точки N_1 и N_2 совпадают с главными H_1 и H_2 .

2. Заданы узловые точки N_1 и N_2 и фокусы F_1 и F_2 . Найти главные плоскости H_1 и H_2 .



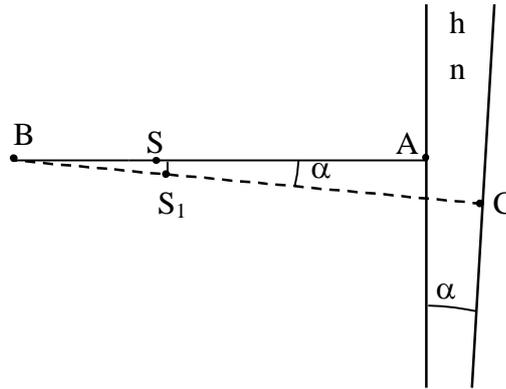
Проводим произвольный луч 2, проходящий через узловую точку N_1 . Луч 2', параллельный лучу 2 и проходящий через узловую точку N_2 , будет продолжением луча 2 после оптической системы и пересечет фокальную плоскость F_2 в точке А.

Проводим луч 1, проходящий через фокус F_1 и параллельный лучу 2. Проводим луч 1', проходящий через точку А и параллельный главной оптической оси. Пересечение лучей 1 и 1' даст положение главной плоскости H_1 .

Аналогично находится и положение главной плоскости H_2 .

Дополнение 2.

Построение изображения точечного источника при прохождении через оптический клин



Источник света S расположен на расстоянии a (отрезок SA) от передней поверхности клина (толщина h , показатель преломления n , угол $\alpha \ll 1$). Построим изображение S_1 , возникающее при последовательном преломлении на передней и задней поверхностях клина. Для этого воспользуемся формулой преломления на сферической поверхности:

$$\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}, \quad (1)$$

где s_1 и s_2 – координаты источника и изображения, излучение идет из среды с показателем преломления n_1 в среду с показателем преломления n_2 .

В нашем случае обе поверхности плоские ($R \rightarrow \infty$), поэтому при преломлении на плоской поверхности получим

$$\frac{s_2}{n_2} = \frac{s_1}{n_1}. \quad (1a)$$

В случае отражения в формуле (1) следует положить $n_1 = -n_2$, тогда

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} = \frac{2}{R}. \quad (2)$$

а для плоской поверхности

$$s_2 + s_1 = 0. \quad (2a)$$

Из формул (1a)-(2a) следует, что при преломлении источник и его изображение находятся по одну сторону от границы раздела (знаки s_1 и s_2 совпадают), а при отражении – по разные (s_1 и s_2 имеют разные знаки).

Положение изображения S_1 найдем в два этапа.

1. При преломлении на передней поверхности в соответствии с (1a), где $n_1 = 1$, $n_2 = n$, изображение будет находиться в точке B на расстоянии $BA = na$ от передней поверхности.

2. Опустим из т. B перпендикуляр на заднюю поверхность клина, длина перпендикуляра BC будет равна

$$BC = (BA + h) \cdot \cos \alpha = (na + h) \cdot \cos \alpha.$$

В соответствии с (1a) расстояние от т. C до изображения S_1 будет равно

$$CS_1 = \frac{BC}{n} = \left(a + \frac{h}{n} \right) \cdot \cos \alpha.$$

Для длины отрезка BS_1 справедливо соотношение

$$BS_1 = \frac{n-1}{n} BC = \left[(n-1)a + \frac{(n-1)h}{n} \right] \cdot \cos \alpha.$$

Опустим из т. S_1 перпендикуляр на линию BA . Теперь несложно найти, на сколько источник S и изображение S_1 смещены относительно друг друга. По вертикальной оси

$$(SS_1)_{\text{верт}} = BS_1 \sin \alpha = \left[(n-1)a + \frac{(n-1)h}{n} \right] \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha .$$

Если $\alpha \ll 1$ и $h \ll a$, то получаем хорошо знакомую формулу:

$$(SS_1)_{\text{верт}} \approx (n-1)a \cdot \alpha .$$

(смещение мнимого источника при интерференции на бипризме)

По горизонтали смещение равно

$$(SS_1)_{\text{гор}} = BS - BS_1 \cdot \cos \alpha = (n-1)a - \left[(n-1)a + \frac{(n-1)h}{n} \right] \cdot \cos^2 \alpha \approx -\frac{(n-1)h}{n}$$

(изображение S_1 чуть ближе к поверхности клина, чем источник S).

Если $h \ll a$, то смещение по горизонтали пренебрежимо мало, и можно считать, что источник и его изображение находятся на одинаковом расстоянии от передней поверхности клина.

В случае плоскопараллельной пластинки (ППП) угол α равен нулю, изображение S_1 окажется на линии SA , причем ближе к поверхности, чем источник S , на расстояние

$$(SS_1)_{\text{гор}} = \frac{(n-1)h}{n} .$$

Данное построение доказывает, что два изображения, получаемые при построении в бипризме, находятся от нее на том же расстоянии, что и источник (принято считать, что $h \ll a$).

Домашнее задание.

5.33, 34а, 35 а,б, 44 и по желанию на кардинальные элементы 5.53 а,б.

Семинары 3-4. Электромагнитные волны. Давление света.

Основной материал семинара изложен в конспекте лекций по оптике.
Здесь только дополнительные моменты.

1. В вакууме распространяется электромагнитная волна, электрическая составляющая которой изменяется по закону:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(x, t) = \mathbf{e}_y \cdot E_0 \sin(\omega t - kx),$$

где \mathbf{e}_y - единичный вектор, направленный вдоль оси Oy. Найти закон изменения $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.

Решение.

Воспользуемся одним из уравнений Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

В декартовых координатах действие оператора ∇ (набла) векторно на вектор $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ записывается в виде:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial E_y}{\partial x} = \mathbf{e}_z \cdot (-E_0 \cdot k \cdot \cos(\omega t - kx)),$$

т.к. $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ имеет только одну ненулевую компоненту E_y , которая зависит только от одной x - координаты.

В итоге:

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{e}_z \cdot (-E_0 \cdot k \cdot \cos(\omega t - kx)),$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \cdot \int E_0 \cdot k \cdot \cos(\omega t - kx) dt = \mathbf{e}_z \cdot \frac{k}{\omega} \cdot E_0 \sin(\omega t - kx) = \mathbf{e}_z \cdot \frac{k}{\omega} \cdot E_y(z, t).$$

В результате видно, что E_y и B_z изменяются в фазе, а связь между амплитудами имеет вид:

$$E_0 = B_0 \cdot \frac{\omega}{k} = B_0 \cdot c,$$

где $c = \frac{\omega}{k}$ - скорость света в вакууме.

Векторы $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ и \mathbf{k} ориентированы вдоль осей Oy, Oz и Ox соответственно, т.е. образуют правую тройку векторов.

Замечание. Если волна распространяется в однородной изотропной среде с показателем преломления $n = \sqrt{\epsilon}$, то амплитуды электрической и магнитной составляющих связаны соотношением:

$$E_0 = B_0 \cdot v,$$

где $v = \frac{c}{n}$ - скорость света в среде.

Последнюю формулу можно записать в виде:

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu \mu_0} H_0.$$

Из нее следует и равенство энергии электрической и магнитной составляющих в волне:

$$\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 H_0^2}{2}.$$

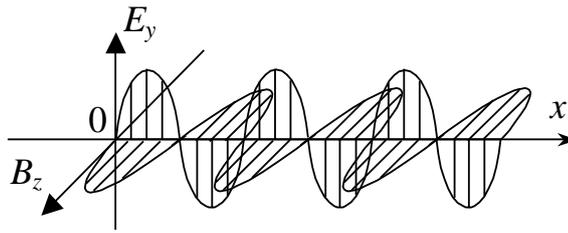


Рис. 1. Бегущая электромагнитная волна («мгновенная фотография»).

2. Воздух ионизируется при напряженности электрического поля $E \approx 30$ кВ/см. Чему равна интенсивность волны?

Решение.

Интенсивность по определению:

$$I = \langle S_n \rangle = \langle E \cdot H \rangle;$$

Так как в бегущей волне

$$E = B \cdot c = \mu_0 H \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H,$$

то

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E.$$

$$I = \langle E \cdot H \rangle = \left\langle \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E^2 \right\rangle = \left\langle \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \cdot \cos^2 \omega t \right\rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2.$$

3. В вакууме навстречу друг другу распространяются две электромагнитные одинаково поляризованные волны, электрические составляющие которых изменяются по закону:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1(z, t) = \mathbf{e}_y \cdot E_0 \cos(\omega t - kx),$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_2(z, t) = \mathbf{e}_y \cdot E_0 \cos(\omega t + kx),$$

где \mathbf{e}_y - единичный вектор, направленный вдоль оси Oy. Найти закон изменения $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.

Решение.

В соответствии с принципом суперпозиции

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_1(z, t) + \mathbf{E}_2(z, t) = \mathbf{e}_y \cdot 2E_0 \cos(\omega t) \cos(kx),$$

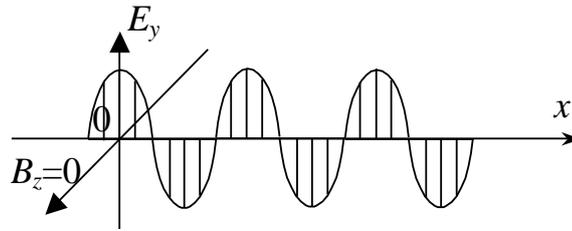
т.е. формируется стоячая волна.

Аналогично зад.1 найти закон изменения магнитной составляющей (самостоятельно).

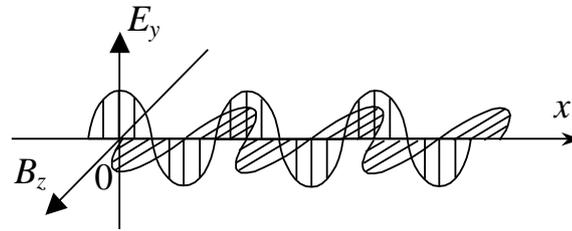
Ответ. $\mathbf{B}(z, t) = \mathbf{e}_z \cdot 2E_0 \cdot \frac{k}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \sin(kx) = \mathbf{e}_z \cdot 2E_0 \cdot \frac{1}{c} \cdot \sin(\omega t) \sin(kx).$

Иллюстрации к поведению стоячей волны в разные моменты времени.

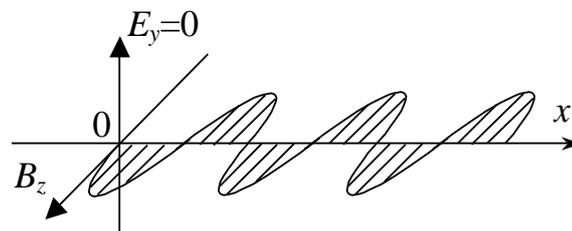
Стоячая волна ($t=0$): $E_y - \max$; $B_z = 0$.



Стоячая волна ($t=T/8$): $E_y \neq 0$; $B_z \neq 0$.



Стоячая волна ($t=T/4$): $E_y = 0$; $B_z - \text{max}$.



Замечание.

Вспомним следующие формулы:

1. Связь амплитуд в электромагнитной волне: $E = Bc$.
2. Связь плотности энергии и плотности потока энергии: $|\vec{S}| = c \cdot w_{\text{электр}} + c \cdot w_{\text{магн}}$.

Обращаем внимание, что справедливы они для одиночной *бегущей электромагнитной* волны. Если же в пространстве распространяются две (или более) волны, то данные соотношения могут нарушаться. В частности, в рассмотренной выше стоячей волне электрическая и магнитная составляющая изменяются не в фазе, и для расчета плотности энергии $w_{\text{электр}}$ и плотности потока энергии $\mathbf{S} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$ необходимо использовать исходные формулы.

В задаче 4.228 (Иродов, 1988) в вакууме две плоские волны распространяются во взаимно перпендикулярных направлениях, направления колебаний векторов \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 совпадают. Но направления колебаний векторов \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 будут взаимно ортогональны, поэтому для амплитуды электрической $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ и магнитной $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ составляющих волны уже не будет справедлива связь амплитуд в виде $E = Bc$.

Сферическая волна

Для корректного нахождения уравнения сферической волны (на самом деле, не уравнения, а закона!) надо решать волновое уравнение в сферических координатах. Но есть способ проще. Так как фронт сферической волны – сфера, то легко сообразить общую форму закона:

$$E(r, t) = E_0(r) \cos(\omega t - kr),$$

причем здесь k – не вектор, а волновое число.

Рассмотрим тонкий сферический слой толщиной dr , расположенный на расстоянии r от точечного источника, и найдем энергию электрического поля dW в нем:

$$dW = w_{\text{эл}} \cdot dV = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(r, t) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2(r) \cos^2(\omega t - kr) \cdot 4\pi r^2 dr$$

В процессе распространения данного сферического слоя со скоростью света его энергия не будет изменяться. Но не меняются также и толщина слоя dr , и фаза $(\omega t - kr)$. Следовательно,

$$dW = \text{const} \sim E_0^2(r) \cdot r^2 dr.$$

Из этого следует, что амплитуда сферической волны обратно пропорциональна расстоянию от источника:

$$E_0(r) \sim \frac{A_0}{r}.$$

Уравнение (закон!) сферической волны приобретает вид:

$$E(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr),$$

где амплитудой волны следует называть не A_0 , а $\frac{A_0}{r}$.

Иногда записывают

$$E(r, t) = \frac{E_0}{r} \cos(\omega t - kr),$$

что неверно из соображений размерности.

Характеризуя точечный источник сферической волны, обычно указывают среднюю мощность P , излучаемую им. Получим из этого знания выражение для A_0 .

Так как интенсивность есть среднее значение энергии, проходящей в единицу времени через единичную площадку, то на расстоянии r от источника

$$I = \frac{dW}{dt \cdot 4\pi r^2} = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

В то же время связь между интенсивностью и объемной плотностью энергии:

$$I = \langle w_{\text{электр}} \rangle \cdot c = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \cdot c = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A_0^2}{r^2} \cdot c.$$

В итоге получаем:

$$\frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A_0^2}{r^2} \cdot c;$$

$$A_0^2 = \frac{P}{2\pi \varepsilon_0 \cdot c}.$$

Домашнее задание

4.219, 222, 227, 228, 230, 231

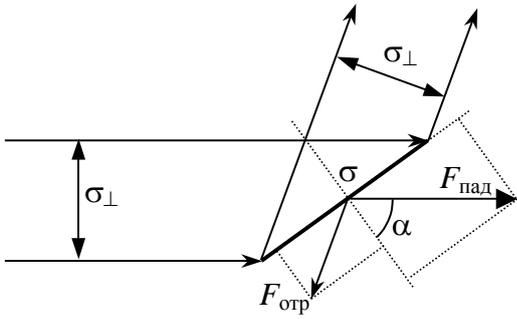
Давление света.

Как показано в Конспекте лекций, световой пучок с плотностью электромагнитной энергии $w_{\text{электр}}$ и поперечным сечением σ_{\perp} , попадая на полностью поглощающую пластинку, действует на нее с силой

$$F_{\text{пад}} = w_{\text{электр}} \cdot \sigma_{\perp}$$

независимо от ориентации пластинки. Направление действия силы совпадает с направлением падающего пучка.

Если пластинка отражает, или рассеивает, или пропускает часть падающей на нее энергии, то необходимо рассчитать дополнительную силу, которая возникает вследствие подобных действий.



Если коэффициент отражения пластинки равен R , то плотность энергии в отраженном пучке будет равна $R \cdot w_{\text{элмагн}}$, а поперечное сечение пучка останется точно таким же σ_{\perp} . В результате модуль силы, действующей на пластину за счет отражения, будет равен:

$$F_{\text{отр}} = R \cdot w_{\text{элмагн}} \cdot \sigma_{\perp},$$

а направление действия силы $F_{\text{отр}}$ будет

противоположно направлению отраженного пучка.

Угол между направлениями действия сил $F_{\text{пад}}$ и $F_{\text{отр}}$ равен 2α , где α - угол между падающим пучком и нормалью к поверхности.

Учитывая связь между площадью σ пластинки и площадью σ_{\perp} поперечного сечения пучка

$$\sigma_{\perp} = \sigma \cdot \cos \alpha,$$

для нормальной и тангенциальной составляющих суммы сил, действующих на пластину, получим:

$$F_n = F_{\text{пад}} \cdot \cos \alpha + F_{\text{отр}} \cdot \cos \alpha = (1 + R) \cdot w_{\text{элмагн}} \cdot \sigma_{\perp} \cdot \cos \alpha = (1 + R) \cdot w_{\text{элмагн}} \cdot \sigma \cdot \cos^2 \alpha;$$

$$F_{\tau} = F_{\text{пад}} \cdot \sin \alpha - F_{\text{отр}} \cdot \sin \alpha = (1 - R) \cdot w_{\text{элмагн}} \cdot \sigma_{\perp} \cdot \sin \alpha = (1 - R) \cdot w_{\text{элмагн}} \cdot \sigma \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

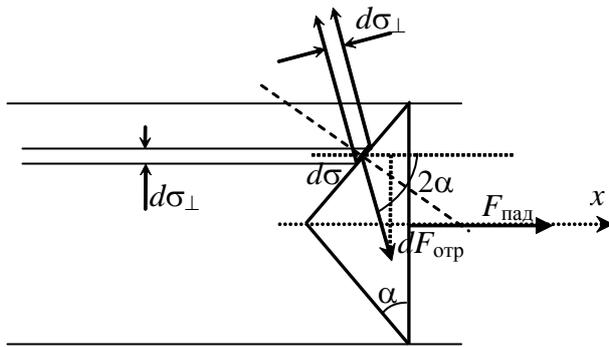
Задача. Найти силу давления света (плотность энергии $w_{\text{элмагн}}$) на зеркальный конус (коэффициент отражения R , радиус основания a , угол при основании α).

Решение.

Сила $F_{\text{пад}}$, создаваемая падающим пучком, равна

$$F_{\text{пад}} = w_{\text{элмагн}} \cdot \sigma_{\perp} = \pi a^2 \cdot w_{\text{элмагн}}$$

(такой результат соответствует любому полностью поглощающему объекту, поперечное сечение которого представляет собой окружность радиуса a).



Выделим в падающем пучке произвольное малое поперечное сечение $d\sigma_{\perp}$. Отраженный пучок будет иметь такое же поперечное сечение¹, и плотность энергии этого пучка будет равна $Rw_{\text{элмагн}}$. Угол падения равен $\theta_{\text{пад}} = \alpha$, угол между падающим и отраженным лучом в два раза больше и равен 2α , такой же угол между силами $F_{\text{пад}}$ и

$dF_{\text{отр}}$, действующими на конус со стороны падающего и отраженного пучков соответственно.

Из симметрии задачи ясно, что суммарная сила за счет отраженного пучка $F_{\text{отр}}$ должна быть направлена вдоль оси падающего пучка, т.е. необходимо взять проекцию силы $dF_{\text{отр}}$

¹ Вообще говоря, площадка $d\sigma$ не будет плоской, и в отраженном пучке по мере удаления будут изменяться и размеры, и плотность энергии. Но мы выбираем площадку $d\sigma$ достаточно малой, чтобы можно было считать ее плоской. Кроме этого, мы смотрим на параметры отраженного пучка непосредственно вблизи площадки $d\sigma$,

на ось x , в результате появится множитель $\cos 2\alpha$. Таким образом, проекция силы на нужное направление, создаваемая пучком $d\sigma_{\perp}$ будет равна:

$$dF_{отр,x} = R w_{\text{элмагн}} \cdot \cos 2\alpha \cdot d\sigma_{\perp}.$$

Т.к. угол падения α одинаков для всех элементов конуса, то интегрирование по всем поперечным сечениям $d\sigma_{\perp}$ даст вновь полное сечение падающего пучка πa^2 :

$$F_{отр,x} = R w_{\text{элмагн}} \cdot \cos 2\alpha \cdot \pi a^2.$$

В результате для силы давления получим:

$$F_{\text{дав}} = F_{\text{пад}} + F_{отр,x} = \pi a^2 \cdot w_{\text{элмагн}} (1 + R \cos 2\alpha).$$

Проверим результат соображениями «здравого смысла». Если $R=1$, а $\alpha \Rightarrow 0$, то получим плоское зеркало, а результат:

$$F_{\text{дав}}(R=1; \alpha=0) = 2\pi a^2 \cdot w_{\text{элмагн}} \text{ (все верно!).}$$

Задача. Найти силу давления света (плотность энергии $w_{\text{элмагн}}$) на зеркальный шар (коэффициент отражения R , радиус a).

Решение.

Сила $F_{\text{пад}}$, создаваемая падающим пучком, равна

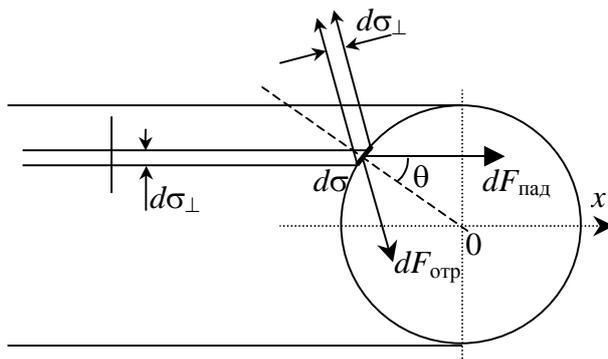
$$F_{\text{пад}} = w_{\text{элмагн}} \cdot \sigma_{\perp} = \pi a^2 \cdot w_{\text{элмагн}}$$

(такой результат соответствует любому полностью поглощающему объекту, поперечное сечение которого представляет собой окружность радиуса a).

Найдем теперь силу $dF_{отр}$, действующую на малый элемент $d\sigma$ поверхности шара за счет отраженной волны:

$$dF_{отр} = R \cdot w_{\text{элмагн}} \cdot d\sigma_{\perp} = R \cdot w_{\text{элмагн}} \cdot d\sigma \cdot \cos \theta,$$

где θ - угол падения на данный элемент; площади поперечного сечения падающего и отраженного пучков одинаковы и равны $d\sigma_{\perp} = d\sigma \cdot \cos \theta$.



Напомним, что элемент поверхности в сферических координатах равен

$$d\sigma = a^2 \cdot \sin \theta \cdot d\varphi \cdot d\theta$$

(угол отсчитывается от горизонтальной оси).

Нетрудно заметить, что вследствие симметрии задачи по углу φ суммарная сила, возникающая за счет отражения, будет ориентирована вдоль направления падающего пучка (ось Ox). Так как угол между направлениями отраженного и падающего

пучков равен 2θ , то проекция $dF_{отр}$ на ось Ox равна:

$$(dF_{отр})_x = R \cdot w_{\text{элмагн}} \cdot d\sigma \cdot \cos \theta \cdot \cos 2\theta = R \cdot w_{\text{элмагн}} \cdot a^2 \sin \theta \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot \cos \theta \cdot \cos 2\theta =$$

$$= R \cdot w_{\text{элмагн}} \cdot a^2 \cdot 2\pi \frac{\sin 2\theta}{2} \cdot \cos 2\theta \cdot d\theta = R \cdot w_{\text{элмагн}} \cdot a^2 \cdot 2\pi \frac{\sin 4\theta}{4} \cdot d\theta.$$

(интегрирование по φ дает 2π).

Т.к. угол θ изменяется в пределах от 0 до $\pi/2$, и

$$\int_0^{\pi/2} \sin 4\theta \cdot d\theta = -\frac{\cos 4\theta}{4} \Big|_0^{\pi/2} = 0,$$

то суммарная сила за счет отраженного пучка всегда равна нулю, причем независимо от коэффициента отражения R . Следовательно, сила давления на зеркальный шар точно такая же, как на полностью поглощающий диск такого же радиуса.

Задача. Точечный изотропный источник мощностью P находится в центре сферы радиуса r , внутренняя поверхность которой зеркальна (коэффициент отражения R). Половину сферы удаляют. Найти силу светового воздействия на оставшуюся полусферу.

Решение.

Прежде всего, найдем связь между мощностью P источника и объемной плотностью энергии $w_{\text{элмагн}}$. Интенсивность излучения есть средняя энергия, падающая в единицу времени на единичную (по площади) площадку. Интенсивность на расстоянии r от изотропного источника равна $I = \frac{P}{4\pi r^2}$, а плотность энергии:

$$w_{\text{элмагн}} = \frac{I}{c} = \frac{P}{4\pi r^2 c},$$

где c – скорость света.

На произвольный малый элемент $d\sigma$ сферической поверхности ($d\sigma = r^2 \cdot \sin \theta \cdot d\varphi \cdot d\theta$) излучение падает нормально и, следовательно, отражается в противоположном направлении. Для модуля силы dF в этом случае можно записать:

$$dF = w_{\text{элмагн}}(1 + R) \cdot d\sigma = \frac{P}{4\pi r^2 c} \cdot r^2 \cdot \sin \theta \cdot d\varphi \cdot d\theta = \frac{P}{4\pi c}(1 + R) \cdot \sin \theta \cdot d\varphi \cdot d\theta$$

(угол θ отсчитывается от оси симметрии полусферы).

Из симметрии следует, что суммарная сила светового воздействия будет направлена по оси симметрии, поэтому следует взять соответствующую проекцию:

$$dF_x = dF \cdot \cos \theta = \frac{P}{4\pi c}(1 + R) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\varphi \cdot d\theta.$$

Осталось проинтегрировать по φ от 0 до 2π и по θ от 0 до $\pi/2$:

$$F_x = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{P}{4\pi c}(1 + R) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta = \frac{P}{2c}(1 + R) \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cdot d(\sin \theta) =$$

$$= \frac{P}{2c}(1 + R) \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{P}{4c}(1 + R).$$

Задача. (Иродов, 5.284) На оси круглой абсолютно зеркальной пластинки находится точечный изотропный источник, световая мощность которого P . Расстояние между источником и пластинкой в n раз больше ее радиуса. Найти силу светового давления на пластинку.

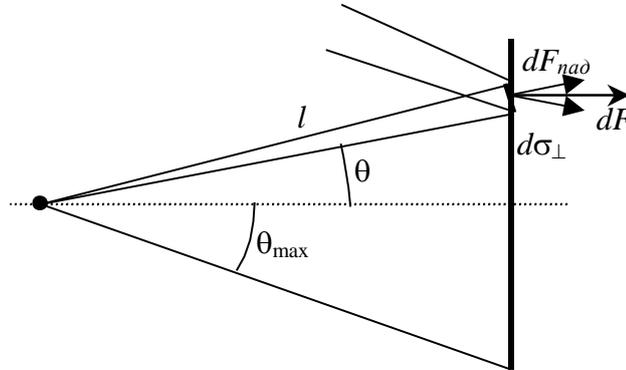
Решение.

Прежде всего, найдем связь между мощностью P источника и объемной плотностью энергии $w_{\text{элмагн}}$. Интенсивность излучения есть средняя энергия, падающая в единицу времени на

единичную (по площади) площадку. Интенсивность на расстоянии l от изотропного источника равна $I = \frac{P}{4\pi l^2}$, а плотность энергии:

$$w_{\text{элмагн}} = \frac{I}{c} = \frac{P}{4\pi l^2 c},$$

где c – скорость света.



Введем сферическую систему координат, угол θ отсчитывается от оси симметрии системы. Так как расстояние между источником и пластинкой в n раз больше ее радиуса, то угол θ изменяется в пределах от нуля до $\theta_{\text{max}} = \text{arctg} \frac{1}{n}$.

Рассмотрим пучок излучения с поперечным сечением $d\sigma_{\perp} = l^2 \cdot \sin \theta \cdot d\varphi \cdot d\theta$ (это выражение для малого элемента площади в сферических координатах), где l -расстояние от источника до соответствующей точки площадки. Сила светового давления такого пучка по модулю равна

$$dF_{\text{над}} = w_{\text{элмагн}} \cdot d\sigma_{\perp}.$$

С такой же силой будет действовать и отраженный пучок, сумма этих сил будет направлена параллельно оси симметрии и равна:

$$\begin{aligned} dF &= 2 \cdot dF_{\text{над}} \cdot \cos \theta = 2 \cdot w_{\text{элмагн}} \cdot d\sigma_{\perp} \cdot \cos \theta = \\ &= 2 \cdot \frac{P}{4\pi l^2 c} \cdot l^2 \sin \theta \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot \cos \theta = \frac{P}{2\pi c} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\varphi \cdot d\theta. \end{aligned}$$

Осталось проинтегрировать по углам:

$$F = \frac{P}{2\pi c} \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\theta_{\text{max}}} \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta = \frac{P}{c} \cdot \frac{\sin^2 \theta_{\text{max}}}{2} = \frac{P}{c} \cdot \frac{1}{2(n^2 + 1)}.$$

Домашнее задание

5.280, 281, 283, 284.

Приложение.

Как запомнить систему уравнений Максвелла? (те, кто ее знает, могут не читать).

Следует помнить, что:

- 1) в систему входят 4 уравнения;
- 2) в них входят 4 полевых вектора: 2 «электрических» (\vec{E} и \vec{D}) и 2 «магнитных» (\vec{B} и \vec{H});
- 3) в правой части стоят дифференциальные операторы div и rot , действующие на «электрические» и «магнитные» векторы.

Итак, структура уравнений следующая:

«электрические» (\vec{E} и \vec{D})	«магнитные» (\vec{B} и \vec{H})
$div ? = ?$	$div ? = ?$
$rot ? = ?$	$rot ? = ?$

Сначала правильно расставим векторы в левой части уравнений. Для этого разобьем div и rot на буквы и поищем эти буквы среди векторов. В div входят буквы: «d», «i» и «v» (по-русски «в»), а в векторах есть \vec{D} и \vec{B} (пишется как русская «В»). Именно на эти векторы и будет действовать оператор div . Оставшимся векторам остается подвергнуться действию rot . Кстати, разбив rot по буквам, не найдем ни одного соответствия с векторами.

В результате получим:

«электрические» (\vec{E} и \vec{D})	«магнитные» (\vec{B} и \vec{H})
$div \vec{D} = ?$	$div \vec{B} = ?$
$rot \vec{E} = ?$	$rot \vec{H} = ?$

Теперь вспомним, что поля в некоторой степени «антиподы»: электрическое (точнее, электростатическое) потенциально – работа по замкнутому контуру равна нулю; магнитное вихревое – линии поля замкнуты. Работа связана с интегралом по контуру, т.е. с rot , замкнутость линий говорит о нулевом потоке через замкнутую поверхность, т.е. о div .

Новый результат:

«электрические» (\vec{E} и \vec{D})	«магнитные» (\vec{B} и \vec{H})
$div \vec{D} = ?$	$div \vec{B} = 0$
$rot \vec{E} = 0 + ?$	$rot \vec{H} = ?$

Теперь вспомним, что электрическое поле создается электрическими зарядами, а магнитное – токами. Но, т.к. уравнения дифференциальные, то следует говорить о плотности заряда ρ и тока \vec{j} . И подставить их в пока «не использованные» уравнения:

«электрические» (\vec{E} и \vec{D})	«магнитные» (\vec{B} и \vec{H})
$div \vec{D} = \rho$	$div \vec{B} = 0$
$rot \vec{E} = 0 + ?$	$rot \vec{H} = \vec{j} + ?$

Теперь вспомним, что переменное электрическое поле создает переменное магнитное и наоборот. Это приводит к появлению производных по времени $\frac{\partial}{\partial t}$, но в каких уравнениях? В тех, у которых в названии оператора есть буква «t», т.е. в уравнениях с rot . А действуют они все на те же «настырные» вектора \vec{D} и \vec{B} , которые уже «влезли» под div , а теперь устремились к rot :

«электрические» (\vec{E} и \vec{D})	«магнитные» (\vec{B} и \vec{H})
$div \vec{D} = \rho$	$div \vec{B} = 0$
$rot \vec{E} = ? \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$rot \vec{H} = \vec{j} + ? \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Осталась «проблема знака» перед производными. Заметим, что в правой части уравнения для $rot \vec{E}$ стоит одно слагаемое, а правой части уравнения для $rot \vec{H}$ – два слагаемых. Поэтому и поставим перед производными одну и две черточки соответственно (они дадут знаки «минус» и «плюс»):

«электрические» (\vec{E} и \vec{D})	«магнитные» (\vec{B} и \vec{H})
$div \vec{D} = \rho$	$div \vec{B} = 0$

$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
---	--

Система уравнений Максвелла получена (точнее, записана). Подчеркнем, что приведенное правило запоминания не есть доказательство правильности самих уравнений. Просто подсказка на «черный» день, неизбежно наступающий в день экзамена.

Семинар 5. Поляризация света.

Основной материал семинара изложен в конспекте лекций по оптике.
Примеры решения задач представлены в Методике решения задач...
Здесь только дополнительные моменты.

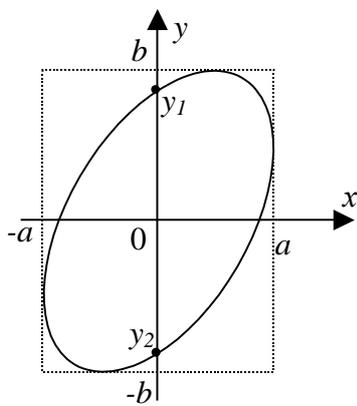
Пусть вдоль оси z распространяется эллиптически поляризованная монохроматическая волна. В некоторой точке z_0 задан закон изменения x - и y -компонент:

$$E_x(t) = a \cdot \sin(\omega t); \quad (1)$$

$$E_y(t) = b \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

где a и b – амплитуды волн, φ — разность фаз.

1. Как по эллипсу поляризации найти разность фаз?



Решение. Выделим два момента времени t_1 и t_2 , такие, что $\omega t_1 = 0$ и $\omega t_2 = \pi$. Для них

$$E_x(t_1) = E_x(t_2) = 0;$$

$$E_y(t_1) = b \cdot \sin \varphi, \quad E_y(t_2) = -b \cdot \sin \varphi$$

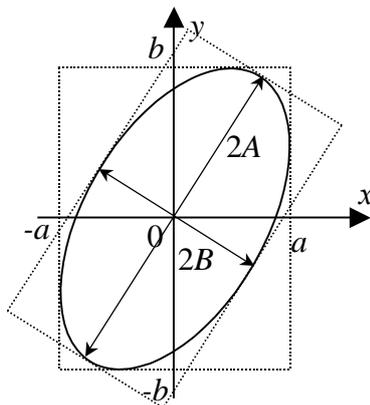
(точки y_1 и y_2 на рисунке соответственно).

Разность фаз можно найти по отношению:

$$\sin \varphi = \frac{y_1 - y_2}{2b}.$$

Данный способ обычно используется в электротехнике, когда по эллипсу на экране осциллографа требуется определить разность фаз.

2. Как экспериментально определить отношение полуосей эллипса?



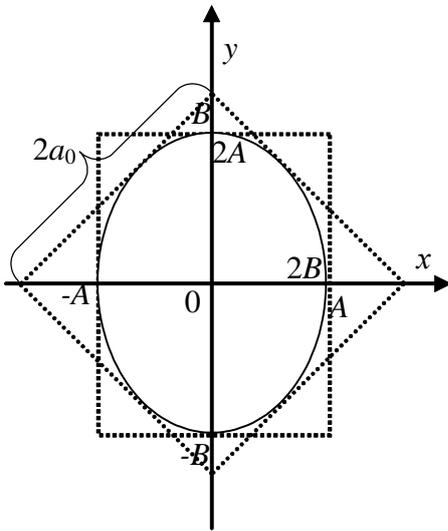
Решение. Направим эллиптически поляризованную волну на поляроид-анализатор, размещенный во вращающейся оправе (напомним, что поляроид пропускает только одну из компонент поля). Вращая анализатор, найдем максимальное I_{\max} и минимальное I_{\min} значения интенсивностей. Так как интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды поля, то отношение полуосей эллипса определяется по формуле:

$$\frac{A}{B} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{I_{\min}}}.$$

В системе координат, ориентированной вдоль полуосей эллипса, амплитуды компонент будут равны A и B , а разность фаз равна $\pi/2$.

3. Можно ли представить эллипс поляризации как сумму двух линейно поляризованных волн одинаковой амплитуды?

Решение. Действительно, представление эллипса поляризации в виде (1)-(2) зависит от выбора осей Ox и Oy . Чтобы найти амплитуды a и b и разность фаз φ следует вписать эллипс в прямоугольник, ориентированный по осям Ox и Oy , размеры которого и будут равны $2a$ и $2b$.



Для решения нашей задачи следует найти квадрат, в который будет вписан эллипс. Сначала ориентируем оси координат строго по полуосям эллипса, которые равны A и B .

Теперь повернем оси координат на 45° . Именно при таком выборе осей, вписывая эллипс в прямоугольник, заметим, что прямоугольник окажется квадратом. Данный факт вытекает из симметрии рисунка. Строгое математическое доказательство провести самостоятельно.

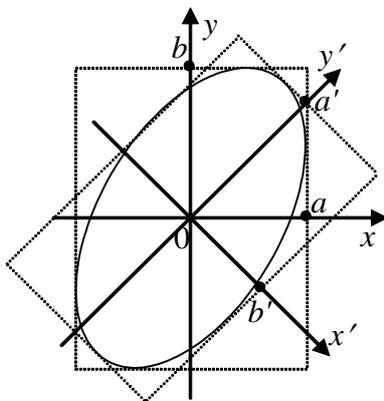
Стороны квадрата $2a_0$ найдем из сохранения энергии. Для интенсивности света запишем:

$$I \sim A^2 + B^2 = a_0^2 + a_0^2,$$

откуда $a_0 = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{2}}$.

Разность фаз находится в соответствие с п.1.

4. Представление эллиптической поляризации как суммы двух линейно поляризованных волн не является однозначным. На



рисунке показано разложение эллипса по осям (x, y) и (x', y') . Для математической записи эллипса с помощью формул (1)-(2) необходимо вписать эллипс в прямоугольник, оси которого параллельны выбранным осям координат. При этом понятно, что изменятся и амплитуды компонент, и разность фаз между ними: a, b, φ и a', b', φ' соответственно. Но так как интенсивность эллиптически поляризованной волны не зависит от выбора системы координат, то

справедливо соотношение:

$$I \sim a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2. \quad (3)$$

Отметим также, что интенсивность эллиптически поляризованной волны, как видно из формулы (7), не зависит от разности фаз φ .

5. Обычно понятие степени поляризации частично поляризованного света вводят следующим образом.

Пусть в пучке частично поляризованного света присутствуют естественный свет с интенсивностью $I_{ест}$ и линейно поляризованный свет с интенсивностью $I_{лн}$. Направим этот пучок на анализатор (пропускает только одну компоненту электрического поля волны). Вращая анализатор, определим максимальное $I_{макс}$ и минимальное $I_{мин}$ значения прошедшей интенсивности.

Выражение для интенсивности прошедшего через анализатор света задается формулой:

$$I(\alpha) = I_{ecm} / 2 + I_{лн} \cdot \cos^2 \alpha, \quad (4)$$

где α - угол между линейно поляризованной компонентой и плоскостью пропускания анализатора. Отсюда нетрудно получить выражения для максимальной и минимальной интенсивностей:

$$I_{макс} = I_{ecm} / 2 + I_{лн}; \quad I_{мин} = I_{ecm} / 2. \quad (5)$$

Степень поляризации в литературе часто определяют как отношение вида

$$P = \frac{I_{макс} - I_{мин}}{I_{макс} + I_{мин}}. \quad (6)$$

Подставляя (5) в (6), получим:

$$P = \frac{I_{лн}}{I_{лн} + I_{ecm}} = \frac{I_{лн}}{I_0}, \quad (7)$$

где $I_0 = I_{лн} + I_{ecm}$ - суммарная интенсивность пучка.

Однако правильнее определять степень поляризации не по формуле (6), а по формуле (7), как отношение интенсивности поляризованной составляющей к суммарной интенсивности пучка. Ведь в исходный волновой пучок в качестве поляризованной компоненты может входить не только линейная, но и эллиптически поляризованная, и циркулярно поляризованная волны. В этом случае формула (6) уже не даст правильного ответа на вопрос о степени поляризации, которую, повторяем, следует определять по формуле (7). Этот факт необходимо учитывать при решении задач.

6. Задача.

Пучок, состоящий из естественного и линейно поляризованного света, падает на идеальный поляризатор, установленный так, что интенсивность прошедшего света минимальна. При повороте поляризатора на угол $\beta = 60^\circ$ интенсивность возрастает в $\eta = 4$ раза. Найти степень поляризации пучка.

Решение.

В положении минимума направления пропускания поляризатора и плоскости линейной поляризации в пучке ортогональны, т.е. в формуле (4) $\alpha = 90^\circ$ и

$$I_{мин} = I_{ecm} / 2.$$

При повороте поляризатора на угол $\beta = 60^\circ$ угол α становится равным

$$\alpha_n = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \text{ или } \alpha_n = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ,$$

а интенсивность

$$\begin{aligned} I(\alpha_n) &= I_{ecm} / 2 + I_{лн} \cdot \cos^2 \alpha_n = I_{ecm} / 2 + I_{лн} \cdot \sin^2 \beta = \\ &= I_{ecm} / 2 + I_{лн} \cdot \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Из соотношения

$$\frac{I(\alpha_H)}{I_{\min}} = \frac{I_{\text{ecm}}/2 + I_{\text{лн}} \cdot \sin^2 \beta}{I_{\text{ecm}}/2} = 1 + \frac{2I_{\text{лн}}}{I_{\text{ecm}}} \cdot \sin^2 \beta = \eta$$

получаем:

$$\frac{I_{\text{лн}}}{I_{\text{ecm}}} = \frac{(\eta - 1)}{2 \sin^2 \beta} = \frac{3}{3/2} = 2.$$

Степень поляризации:

$$P = \frac{I_{\text{лн}}}{I_{\text{лн}} + I_{\text{ecm}}} = \frac{I_{\text{лн}}/I_{\text{ecm}}}{I_{\text{лн}}/I_{\text{ecm}} + 1} = \frac{2}{3}.$$

7. Задача.

Два пучка естественного и эллиптически поляризованного света одинаковой интенсивности, распространяясь в одном направлении, падают на анализатор. При вращении анализатора обнаружено, что отношение максимальной интенсивности прошедшего через анализатор света к минимальной равно $\eta > 1$. Найти отношение полуосей эллиптически поляризованного пучка.

Решение.

Обозначим полуоси эллипса через A и B (для определенности пусть $A > B$), а их отношение $\frac{A}{B} = \beta > 1$. По условию интенсивности пучков равны, т.е.

$$I_{\text{ecm}} = I_{\text{элл}} = A^2 + B^2.$$

После анализатора максимальная и минимальная интенсивности равны соответственно

$$I_{\max} = I_{\text{ecm}}/2 + A^2; \quad I_{\min} = I_{\text{ecm}}/2 + B^2.$$

В результате получим:

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \eta = \frac{I_{\text{ecm}}/2 + A^2}{I_{\text{ecm}}/2 + B^2} = \frac{(A^2 + B^2)/2 + A^2}{(A^2 + B^2)/2 + B^2} = \frac{3A^2 + B^2}{A^2 + 3B^2} = \frac{3\beta^2 + 1}{\beta^2 + 3};$$

$$(\beta^2 + 3)\eta = 3\beta^2 + 1; \quad \beta^2(3 - \eta) = 3\eta - 1;$$

$$\beta^2 = \frac{3\eta - 1}{3 - \eta}.$$

Из ответа видно, что задача имеет решение только при $1 \leq \eta < 3$. Причем, если $\eta = 1$, то и $\beta = 1$ (волна циркулярно поляризована).

Домашнее задание

5.191, 171, 172, 174, 176.

Преобразование Фурье в оптике.

В математике доказывается, что периодическую функцию $f(t)$ с периодом T , удовлетворяющую определенным требованиям, можно представить **рядом Фурье**:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

$$\text{где } \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt,$$

a_n и b_n - коэффициенты ряда Фурье.

Непериодическую функцию нельзя представить в виде ряда Фурье. Но если эта функция абсолютно интегрируемая на интервале $(-\infty, \infty)$, то ее представляют в виде **интеграла Фурье** в комплексной форме:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (1)$$

$$\text{где} \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (2)$$

- **фурье-образ** функции $f(t)$, или ее спектр (комплексный спектр, Фурье-спектр). Соотношение (1) принято называть обратным преобразованием Фурье, соотношение (2) - прямым преобразованием Фурье

Особенности фурье-представления.

Функция $f(t)$ - действительная функция, заданная на бесконечном временном интервале $(-\infty, \infty)$; функция $F(\omega)$ - комплексная функция, заданная на бесконечном частотном интервале $(-\infty, \infty)$. Несомненно, странно, что для описания одной «бесконечной» функции (действительной $f(t)$) требуется задать две «бесконечные» (комплексную $F(\omega)$), и наоборот. Но из формулы (2) следует:

$$F^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{+i\omega t} dt;$$

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i(-)\omega t} dt = F^*(\omega).$$

где звездочка означает знак комплексного сопряжения. Следовательно

$$F(-\omega) = F^*(\omega) \text{ или } F(\omega) = F^*(-\omega), \quad (3)$$

т.е. достаточно знать значения функции $F(\omega)$ только для положительных частот $\omega > 0$, отрицательные частоты не имеют физического смысла, это чисто математическая форма записи. Теперь с точки зрения «бесконечности» все в порядке, одна «бесконечная» функция описывается двумя «полубесконечными»:

$$\infty = \frac{\infty}{2} + \frac{\infty}{2}.$$

Комплексную функцию $F(\omega)$ можно представить в виде:

$$F(\omega) = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)},$$

где $A(\omega)$ - спектральная амплитуда, $\varphi(\omega)$ - спектральная фаза.

Из (3) следует, что $A(\omega)$ является четной функцией, а $\varphi(\omega)$ - нечетной.

Необходимость фурье-представления в оптике.

Электромагнитные волны в оптическом диапазоне характеризуются частотами порядка 10^{15} Гц. Экспериментальное измерение изменяющейся во времени с такой частотой функции практически неосуществимо, да и не требуется. Самый «главный» оптический инструмент – глаз – реагирует на «светло-темно», т.е. на интенсивность излучения. Но к

тому же глаз распознает цвета, т.е. осуществляет разложение энергии светового пучка по частотам. Кроме этого, существуют оптические приборы, называемые **спектральными**, которые осуществляют фактическое разложение излучения по частотам (**разложение в спектр**).

Фурье-преобразование от временной функции позволяет представить реальную электромагнитную волну как суперпозицию монохроматических волн.

Энергетическая характеристика в спектральном представлении.

Вспомним, что для электромагнитной волны

$$f(t) = E(t)$$

энергия, падающая на единичную по площади площадку в единицу времени (плотность потока энергии) пропорциональна квадрату $f^2(t) = E^2(t)$. Воспользуемся фурье представлением для нахождения полной энергии $W_{полн}$:

$$\begin{aligned} W_{полн} &\approx \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega \cdot F(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Полученное соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

носит название **теоремы Планшереля**. Она показывает, что для нахождения энергетических характеристик электромагнитной волны достаточно знать спектральное разложение этой волны по частотам.

Величину $S(\omega) \sim |F(\omega)|^2$ принято называть **спектральной плотностью интенсивности** (иногда говорят о спектральной плотности энергии, излучения и пр.). Указанное выше свойство (3) позволяет утверждать, что $S(\omega)$ - **всегда** четная функция.

Интенсивность электромагнитной волны принято выражать через интеграл от спектральной плотности интенсивности:

$$I = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (4)$$

(это позволяет не думать о нормировочных коэффициентах).

Замечание. Так как $S(\omega)$ - четная функция, то интеграл (4) принято брать только по положительным частотам. По мнению автора, в ряде случаев интегрирование по всему диапазону частот от «минус» до «плюс» бесконечности позволяет обнаружить некоторые любопытные свойства. Поэтому в дальнейшем в ряде случаев вместо (4) будем использовать

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (4a)$$

Вспоминая, что интенсивность I есть энергия, падающая в единицу времени на единичную площадку, то спектральная плотность $S(\omega)$ есть отношение интенсивности dI , приходящейся на узкий спектральный интервал $d\omega$, к величине этого интервала:

$$S(\omega) = \frac{dI(\omega)}{d\omega}.$$

В экспериментах спектральные приборы, как правило, регистрируют величины, пропорциональные $S(\omega)$, хотя довольно часто на графиках вместо $S(\omega)$ пишут I . Это, несомненно, ошибка, т.к. в определении интенсивности отсутствует упоминание о спектральных свойствах излучения.

Заметим, что, зная $F(\omega)$, можно полностью восстановить $f(t)$, т.е. узнать форму сигнала. Однако по измеренной $S(\omega) \sim |F(\omega)|^2$ восстановление $f(t)$ невозможно, так как потеряна информация о фазе сигнала:

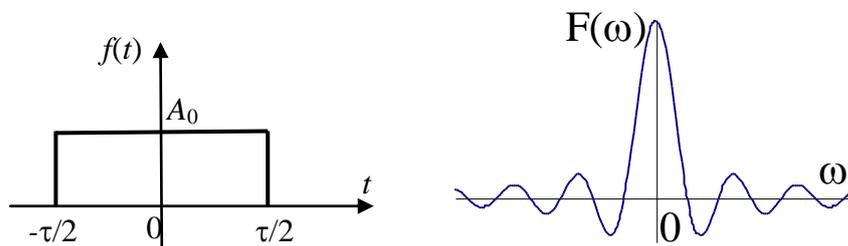
$$F(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{i\varphi(\omega)},$$

$$\text{но } S(\omega) \sim F(\omega) \cdot F^*(\omega) = |F(\omega)|^2.$$

Примеры вычисления фурье-образа.

1) Прямоугольный импульс $f(t) = \begin{cases} A_0, & |t| < \tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2, \end{cases}$ τ -длительность импульса.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A_0 \cdot e^{-i\omega t} dt = \left. \frac{A_0 \cdot e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \\ &= \frac{A_0 \cdot \left(e^{-i\omega \tau/2} - e^{i\omega \tau/2} \right)}{-i\omega} = \frac{-A_0 \cdot 2i \sin(\omega \tau/2)}{-i\omega} = \frac{A_0 \cdot 2 \sin(\omega \tau/2)}{\omega \cdot \tau/2} \cdot \tau/2 = \\ &= A_0 \tau \cdot \text{sinc}(\omega \tau/2). \end{aligned}$$



Первый нуль $F(\omega)$ можно найти из соотношения

$$\omega \tau/2 = \pi.$$

Шириной спектра $\Delta\omega$ называют расстояние от центра линии до первого нуля функции, т.е. $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}$, или $\Delta\nu = \frac{1}{\tau}$. Можно сказать, что основная часть энергии такого сигнала

сосредоточена именно в спектральном интервале $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}$. В итоге получаем соотношение между длительностью сигнала τ и шириной спектра $\Delta\nu$ по частотам:

$$\tau \cdot \Delta\nu = 1.$$

Это соотношение широко применяется в оптике, причем не только для сигнала прямоугольной формы.

Отметим, что в точке $\omega_{ul} = \pm \frac{\Delta\omega}{2}$ значение функции $\text{sinc}(\omega \tau/2)$ равно:

$$\text{sinc}\left(\omega_{ul} \tau/2\right) = \text{sinc}\left(\pm \frac{\Delta\omega \tau}{4}\right) = \text{sinc}\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \approx 0,64$$

2) Пусть для сигнала $f(t)$ известен его спектр $F(\omega)$, найдем спектр этого же сигнала, заполненного высокой частотой ω_0 :

$$f_{зан}(t) = f(t) \cdot \cos \omega_0 t = f(t) \cdot \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}.$$

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{i\omega_0 t} \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt = F(\omega - \omega_0).$$

Следовательно,

$$F_{зан}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{зан}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)}{2}, \quad (5)$$

т.е. спектр сдвигается по шкале частот на $\pm \omega_0$, при этом его форма не изменяется.

3) Прямоугольный импульс, заполненный высокой частотой ω_0 (**волновой цуг**):

$$f(t) = \begin{cases} A_0 \cdot \cos(\omega_0 t), & |t| < \tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2, \end{cases} \quad \text{где } \omega_0 \gg \frac{2\pi}{\tau}.$$

Используя представление $\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$ и рассчитанный выше спектр $F_{прям}(\omega)$ прямоугольного импульса, несложно получить

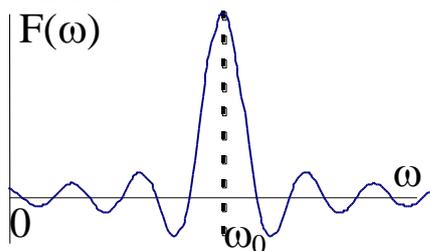
$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{A_0 \tau}{2} \cdot \left(\text{sinc}\left(\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}\right) + \text{sinc}\left(\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} (F_{прям}(\omega - \omega_0) + F_{прям}(\omega + \omega_0)). \end{aligned}$$

Так как $\omega_0 \gg \frac{2\pi}{\tau}$, то в области положительных частот $F_{прям}(\omega + \omega_0) \approx 0$, в итоге

$$F(\omega) \approx \frac{1}{2} F_{прям}(\omega - \omega_0),$$

т.е. максимум спектра смещается из нуля на частоту ω_0 . Ширина спектральной линии определяется из соотношения $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}$, т.е. $\omega_0 \gg \Delta\omega$.

Замечание. В приведенной формуле мы опять «забыли» об отрицательных частотах, как это часто делают в учебной (и не только) литературе. Но мы-то знаем, что можно и не забывать и пользоваться общей формулой (5)



4) Затухающий (квази)гармонический сигнал:

$$f(t) = \begin{cases} A_0 \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

В отсутствие гармонической составляющей имеем:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_0^{\infty} A_0 e^{-\delta t} \cdot e^{-i\omega t} dt = A_0 \cdot \frac{e^{-(\delta+i\omega)t}}{-(\delta+i\omega)} \Big|_0^{\infty} = \\ &= A_0 \cdot \frac{1}{\delta+i\omega} = A_0 \frac{\delta-i\omega}{\delta^2+\omega^2}. \end{aligned}$$

Так как исходная функция не симметричная, то (в отличие от разобранных ранее случаев) ее спектр является комплексной функцией. В этом случае принято рассчитывать спектральную плотность сигнала:

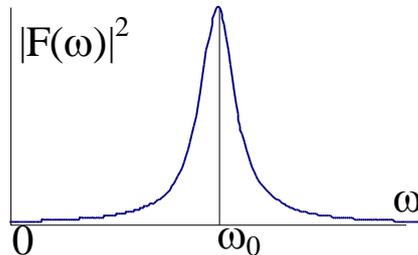
$$|F(\omega)|^2 = \frac{A_0^2}{\delta^2} \cdot \frac{\delta^2}{\delta^2+\omega^2} = \frac{A_0^2}{\delta^2} \cdot L\left(\frac{\omega}{\delta}\right) = (A_0\tau)^2 \cdot L\left(\frac{\omega}{\delta}\right),$$

где $L(x) \equiv \frac{1}{1+x^2}$ – функция Лоренца. Эта функция, как и отмечалось выше, является четной.

При наличии гармонической составляющей спектр, не изменяя формы, сдвигается на ω_0 , спектральная плотность излучения равна

$$S(\omega) \sim F(\omega) \cdot F^*(\omega) = |F(\omega)|^2 = \frac{A_0^2}{4} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2}.$$

Данный спектр принято называть **лоренцевым**. Он имеет резко выраженный максимум на частоте ω_0 и ширину на полувысоте, равную $\Delta\omega = 2\delta$.



Если считать, что длительность импульса $\tau \approx \frac{1}{\delta}$, то $\Delta\omega \cdot \tau \approx 2$ и $\Delta\nu \cdot \tau \approx 1$, т.е. справедливо уже упоминавшееся ранее соотношение между длительностью сигнала τ и шириной спектра $\Delta\nu$ по частотам

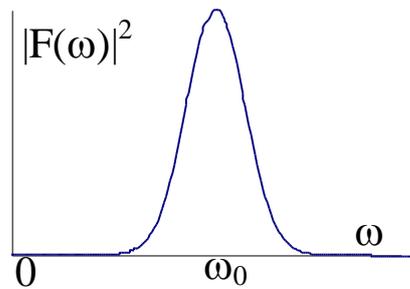
5) Гауссов (квази)гармонический сигнал:

$$f(t) = A_0 e^{-t^2/\tau^2} \cos(\omega_0 t)$$

Спектральная плотность излучения равна

$$S(\omega) = F(\omega) \cdot F^*(\omega) = |F(\omega)|^2 = \frac{A_0^2}{4} \pi\tau^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\tau^2(\omega - \omega_0)^2\right).$$

Данный спектр принято называть **гауссовым**. Он имеет резко выраженный максимум на частоте ω_0 и ширину на полувысоте, равную $\Delta\omega = 2\sqrt{2 \cdot \ln 2} / \tau$. И в данном случае $\Delta\nu \cdot \tau \approx 1$.



б) Бесконечный гармонический сигнал:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t); \quad -\infty \leq t \leq +\infty.$$

Фурье спектр такого сигнала

$$F(\omega) = \pi \cdot A_0 \cdot (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)),$$

где дельта-функция:

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt$$

- бесконечно узкий и бесконечно высокий «выброс» в нуле. При этом

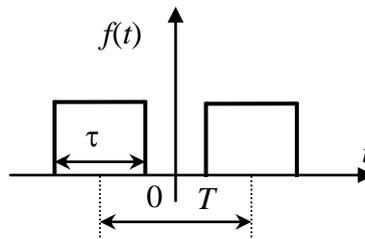
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 1.$$

7) Если для сигнала $f(t)$ его спектр $F(\omega)$, то для спектра сигнала $f(t-T)$, смещенного на $T = \text{const}$ по времени, получим:

$$F_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-T) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-T) \cdot e^{-i\omega(t-T)} \cdot e^{-i\omega T} dt = F(\omega) \cdot e^{-i\omega T}.$$

Т.е. в спектре появляется фазовый множитель $\cdot e^{-i\omega T}$, однако $|F_T(\omega)| = |F(\omega)|$ - спектральная плотность не меняется.

8) Определите спектр двух одинаковых прямоугольных импульсов длительностью τ каждый, смещенных по времени на T .



Решение

Функцию, описывающую два прямоугольных импульса одинаковой полярности, можно представить в виде:

$$f(t) = f_0 \left(t - \frac{T}{2} \right) + f_0 \left(t + \frac{T}{2} \right),$$

где функция $f_0(t)$ - одиночный прямоугольный симметричный импульс длительностью τ , спектр $F_0(\omega)$ которого был найден в п.1:

$$F_0(\omega) = A_0 \cdot \tau \cdot \text{sinc} \left(\frac{\omega \tau}{2} \right).$$

В соответствии с п.7.

$$F(\omega) = A_0 \cdot \tau \cdot \text{sinc} \left(\frac{\omega \tau}{2} \right) \cdot \left(e^{-i\omega \frac{T}{2}} + e^{i\omega \frac{T}{2}} \right) =$$

$$= A_0 \cdot \tau \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \cdot 2 \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

В общем случае для последовательности из N импульсов длительностью τ каждый, следующих с временной периодичностью T , спектр имеет вид:

$$F(\omega) = A_0 \cdot \tau \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{N\omega T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}.$$

Подобная формула нам встретится позднее при рассмотрении дифракции Фраунгофера на N щелях.

9) Случайная последовательность одинаковых волновых цугов $f_0(t) = \sum_{i=1}^N f(t - t_i)$:

$$F_0(\omega) = \sum_{i=1}^N F(\omega) \cdot e^{-i\omega t_i} = F(\omega) \cdot \sum_{i=1}^N e^{-i\omega t_i}.$$

Для спектральной плотности имеем:

$$\begin{aligned} S_0(\omega) &= F_0(\omega) \cdot F_0^*(\omega) = F(\omega) \cdot F^*(\omega) \left(\sum_{i=1}^N e^{-i\omega t_i} \cdot \sum_{j=1}^N e^{i\omega t_j} \right) = \\ &= F(\omega) \cdot F^*(\omega) \left(\sum_{i=1}^N e^{-i\omega t_i} \cdot \sum_{j=1}^N e^{i\omega t_j} \right) = S(\omega) \cdot \left(N + \sum_{i,j=1; i \neq j}^N e^{-i\omega(t_i - t_j)} \right) = NS(\omega) \end{aligned}$$

(перекрестное произведение в среднем равно нулю). Спектральная плотность N цугов возрастает в N раз, однако, если бы последовательность была регулярной (через одинаковые промежутки), то для некоторых частот увеличение было бы в N^2 раз.

В заключении вновь вернемся к рассуждениям о диапазоне частот – формулам (4) и (4а). В п.2 была получена формула (5) для спектра произвольного временного сигнала $f(t)$, заполненного высокой частотой ω_0 . Ограничимся привычным для оптики случаем: $f(t)$ это импульс, длительность τ которого существенно превышает период T колебаний поля в сигнале. Тогда диапазон $\Delta\omega$ спектра $F(\omega)$ сигнала существенно меньше ω_0 :

$$\Delta\omega \approx \frac{2\pi}{\tau} \ll \omega_0. \quad (6)$$

При вычислении спектральной плотности $S_{зан}(\omega)$ заполненного сигнала (5) получим:

$$S_{зан}(\omega) = F_{зан}(\omega) \cdot F_{зан}^*(\omega) = \frac{F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)}{2} \cdot \frac{F^*(\omega - \omega_0) + F^*(\omega + \omega_0)}{2}.$$

Из (6) следует:

$$F(\omega - \omega_0) \cdot F^*(\omega + \omega_0) = 0; \quad F(\omega + \omega_0) \cdot F^*(\omega - \omega_0) = 0,$$

поэтому

$$S_{зан}(\omega) = \frac{S(\omega - \omega_0) + S(\omega + \omega_0)}{4}.$$

т.е. и спектральная плотность $S_{зан}(\omega)$ при заполнении высокой частотой «прыгает» на $\pm\omega_0$.

Вспомним, что независимо от вида $f(t)$ спектральная плотность $S(\omega)$ – всегда четная функция, поэтому и «совершившие прыжки» функции $S(\omega - \omega_0)$ и $S(\omega + \omega_0)$ также симметричны относительно своих центров.

Полученная информация будет полезна в дальнейшем.

$$F_{3an}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{3an}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)}{2}$$

Интерференция света.

Определения из различных источников.

•(БСЭ, т. 18, с. 307) *Интерференция* (от лат. *inter* - взаимно и *ferio* - ударяю) - сложение в пространстве двух (или нескольких) волн с одинаковым периодом, в результате чего в разных точках пространства получается усиление или ослабление амплитуды результирующей волны в зависимости от соотношения между фазами складывающихся волн.

•(ФЭ, т. 2) *Интерференция* света - пространственное перераспределение энергии светового излучения при наложении двух или нескольких световых волн.

•(Сивухин) Если в каких-либо точках пространства, где перекрываются два пучка света, результирующая интенсивность не равна (больше или меньше) сумме интенсивностей пучков, то это явление называют *интерференцией* волн, или интерференцией колебаний.

•(Ландсберг) Волны интерферируют, если $I \neq I_1 + I_2$.

•(Бутиков) Под *интерференцией* света обычно понимают широкий круг явлений, в которых при наложении пучков света результирующая интенсивность не равна сумме интенсивностей отдельных пучков: в одних местах она больше, в других - меньше, т.е. возникают чередующиеся светлые и темные участки – интерференционные полосы.

•(Матвеев) *Интерференцией* называется изменение средней плотности потока энергии, обусловленное суперпозицией электромагнитных волн.

•(Ахманов) Если при наложении двух световых пучков интенсивность света на экране оказывается не равной сумме интенсивностей, а периодически меняется от точки к точке, образуя систему темных и светлых линий, то говорят, что имеет место интерференция света.

•(Алешкевич) Под интерференцией понимают явление наложения волн, приводящего к перераспределению в пространстве плотности энергии электромагнитного поля.

•(Иродов) Интерференция - это одно из явлений, где проявляются волновые свойства света.

•(Ахиезеры) Явление, при котором [в области перекрывания] интенсивность результирующей волны отличается от суммы интенсивностей исходных волн, называют интерференцией волн.

•(Кандидов) Интерференция это перераспределение интенсивности в пространстве при наложении двух или более волн. Явление интерференции имеет место для волн любой природы. В основе интерференции лежит принцип суперпозиции, то есть линейного наложения волн.

•(ИВМ) Под *интерференцией* понимают круг явлений, в которых при наложении двух или нескольких световых волн происходит пространственное перераспределение энергии излучения; при этом, как правило, возникают устойчивые во времени чередующиеся светлые и темные участки – *интерференционные полосы*.

•(Грачев, школа) *Интерференцией* называют такое сложение в пространстве двух (или нескольких) волн, при котором в разных точках пространства получается усиление или ослабление амплитуды колебаний результирующей волны..

Пусть в некоторую точку приходят две гармонические волны, напряженности поля в которых изменяются по закону:

$$\vec{E}_1(t) = \vec{E}_{10} \cdot \cos(\omega_1 t); \quad \vec{E}_2(t) = \vec{E}_{20} \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi).$$

В соответствии с принципом суперпозиции напряженность результирующей волны будет равна их сумме. Для интенсивности результирующей волны, пропорциональной усредненному по времени квадрату напряженности, имеем:

$$I \sim \langle (\vec{E}_1(t) + \vec{E}_2(t))^2 \rangle = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + 2 \cdot \langle \vec{E}_1(t) \cdot \vec{E}_2(t) \rangle \sim I_1 + I_2 + 2 \cdot \langle \vec{E}_1(t) \cdot \vec{E}_2(t) \rangle.$$

Слагаемое $2 \cdot \langle \vec{E}_1(t) \cdot \vec{E}_2(t) \rangle$ называют **интерференционным членом**. Он обращается в нуль, если:

1) плоскости поляризации обеих волн взаимно перпендикулярны;

2) частоты колебаний ω_1 и ω_2 не равны друг другу.

В этих случаях говорят, что волны **не когерентны** (не интерферируют): интенсивность результирующей волны равна сумме интенсивностей падающих волн.

Пусть обе волны имеют одинаковые частоты и одинаково линейно поляризованы. В комплексной форме записи получим:

$$E_1(t) = A_1 \cdot e^{i\omega t} + \text{к.с.} \text{ и } E_2(t) = A_2 \cdot e^{i(\omega t + \varphi)} + \text{к.с.} = A_2 \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} + \text{к.с.},$$

где A_1 и $A_2 \cdot e^{i\varphi}$ - комплексные амплитуды волн, φ - разность фаз между волнами, запись «к.с.» - означает «комплексно сопряженное». Найдем амплитуду результирующей волны с помощью векторной диаграммы (рис. 1). По теореме косинусов:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi,$$

или

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi \quad (1)$$

(если между плоскостями поляризации волн угол ψ , то $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi \cdot \cos \psi$).

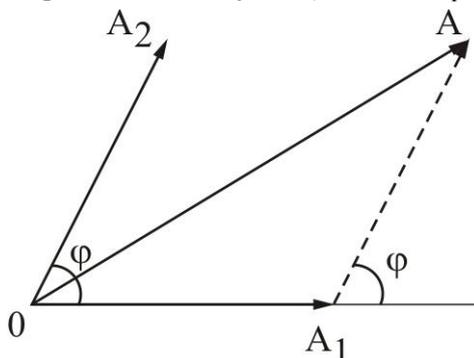


Рис. 1. Сложение комплексных амплитуд двух гармонических волн

Если интенсивности обеих волн одинаковы $I_1 = I_2 = I_0$, то формула (1) преобразуется к виду:

$$I = 2I_0 \cdot (1 + \cos \varphi). \quad (2)$$

Таким образом, интенсивность в точке наблюдения зависит **исключительно от разности фаз φ** между волнами.

Связь между разностью хода и разностью фаз.

Пусть вдоль направления s распространяется монохроматическая волна

$$E(s, t) = E_0 \cos(ks - \omega t + \psi_0).$$

Для двух точек с координатами s_1 и s_2 , находящихся на расстоянии $\Delta s = s_2 - s_1$ друг от друга, разность фаз, зафиксированная в один момент времени, равна

$$\Delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = (ks_2 - \omega t + \psi_0) - (ks_1 - \omega t + \psi_0) = k(s_2 - s_1) = k \cdot \Delta s.$$

Если две монохроматические волны, выйдя из одной точки источника, прошли до точки встречи разные пути s_1 и s_2 , то разность хода между ними равна $\Delta s = s_2 - s_1$.

Отметим, что разность хода одинакова для всех частот и длин волны, в то время как разность фаз $\Delta \Phi = k \cdot \Delta s$ зависит от частоты и длины волны, т.к. $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}$, c - скорость света.

Интерференция монохроматического света. Схема Юнга.

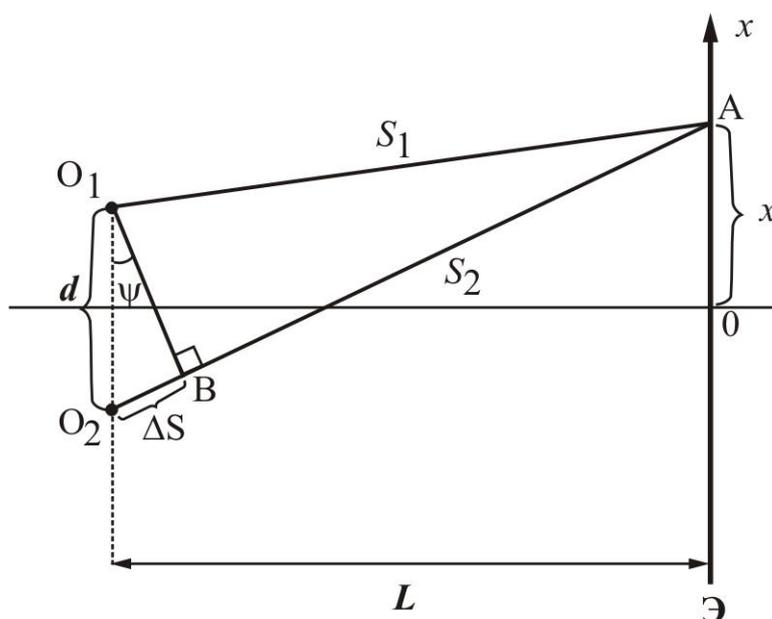


Рис. 2. Интерференционная схема Юнга

В классической схеме Юнга точечный монохроматический источник света (на рисунке не показан) находится перед непрозрачным препятствием с двумя точечными отверстиями, расположенными в точках O_1 и O_2 . Эти отверстия становятся точечными монохроматическими источниками (длина волны λ , интенсивность каждого I_0), расположенными на расстоянии d друг от друга. Экран для наблюдения удален от источников на расстояние $L \gg d$. Найдем разность хода $\Delta s = s_2 - s_1$ между лучами от источников в зависимости от координаты x на экране, используя теорему Пифагора.

$$s_1^2 = L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2;$$

(аналогично для s_2).

$$s_2^2 - s_1^2 = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 = 2x \cdot d.$$

С другой стороны,

$$s_2^2 - s_1^2 = (s_2 + s_1)(s_2 - s_1) \approx 2L \cdot \Delta s.$$

Отсюда получаем, что разность хода равна

$$\Delta s = \frac{x \cdot d}{L},$$

а разность фаз:

$$\varphi = k \cdot \Delta s = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{x \cdot d}{L} = 2\pi \cdot \frac{x \cdot d}{\lambda \cdot L}.$$

Таким образом, интенсивность на экране задается формулой

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left(2\pi \cdot \frac{x \cdot d}{\lambda \cdot L} \right) \quad (1a)$$

Если интенсивности обеих волн одинаковы $I_1 = I_2 = I_0$, то

$$I(x) = 2I_0(1 + \cos \varphi) = 2I_0 \cdot \left(1 + \cos \left(2\pi \cdot \frac{x \cdot d}{\lambda \cdot L} \right) \right). \quad (2a)$$

Максимум интенсивности: $I_{\max}(x) = 4I_0$ при разности фаз $\varphi = 2\pi n$;
разности хода $\Delta s = \lambda n$,

Минимум интенсивности: $I_{\min}(x) = 0$ при разности фаз $\varphi = 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$;
разности хода $\Delta s = \lambda\left(n + \frac{1}{2}\right)$,

$n=0,1,2,\dots$ - **порядок интерференции**.

На экране наблюдаются **интерференционные полосы**, расстояние между которыми Δx можно найти из соотношения $\lambda = \frac{\Delta x \cdot d}{L}$ (изменение разности хода при переходе от любого максимума к соседнему равно λ):

$$\Delta x = \frac{\lambda \cdot L}{d}.$$

В схеме Юнга в центре находится максимум **нулевого** порядка, затем следуют максимумы **первого, второго, третьего** и т.д. порядков.

(Формулы $\Delta s = \frac{x \cdot d}{L}$ и $\Delta x = \frac{\lambda \cdot L}{d}$ легко запомнить, используя следующее правило. В

эти формулы входят четыре величины одинаковой размерности – [метр]. Произведение двух из них (самой большой и самой маленькой) равно произведению двух оставшихся. Самая большая – это L , самая маленькая – это Δs или λ).

Для характеристики четкости интерференционной картины вводится понятие **видности**:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

равной отношению разности интенсивностей в соседних максимуме и минимуме к их сумме.

Из (1а) следует, что

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2;$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2,$$

откуда

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}.$$

Видность принимает максимальное значение, равное единице, если $I_1 = I_2$. Если же, к примеру, $I_1 \gg I_2$, то

$$V \approx \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1} = 2\sqrt{\frac{I_2}{I_1}} \ll 1.$$

Это означает, что при интерференции двух волн с существенно различными интенсивностями видность картины значительно ухудшается даже в случае монохроматических источников.

Формулу для разности хода можно получить и из других соображений. Так как $d \ll L$, то углы, образованные лучами s_1 и s_2 с горизонтальной осью (рис. 2), примерно одинаковы и равны:

$$\psi \approx \sin \psi \approx \operatorname{tg} \psi = \frac{x}{L}.$$

Опустим из точки O_1 перпендикуляр на луч s_2 . Тогда для длины отрезка O_2B получим:

$$O_2B \approx d \cdot \sin \psi \approx \frac{d \cdot x}{L} = \Delta s,$$

что совпадает с формулой для разности хода. Такой подход позволяет довольно просто находить разность хода для любой точки интерференционной картины. Однако еще раз отметим, что так можно действовать только при условии $d \ll L$.

Из формулы $\Delta s \approx d \cdot \sin \psi$ следует, что если из точки, расположенной точно посередине между источниками O_1 и O_2 провести произвольную линию, образующую небольшой угол ψ с горизонтальной осью, то для всех точек этой линии разность хода будет одной и той же. Такую линию можно назвать линией **одинаковой** (или **равной**) **разности хода**, или **одного и того же порядка интерференции**. Подобное утверждение будет очень полезно в дальнейшем при рассмотрении интерференции от протяженного источника.

Полученные формулы можно использовать и в случае интерференции двух плоских волн, сходящихся под малым углом θ (угол между векторами \vec{k}_1 и \vec{k}_2). Можно заметить, что угол схождения лучей от источников O_1 и O_2 в центр экрана равен $\theta \approx \frac{d}{L}$ (рис. 3).

Начнем мысленно удалять источники вдоль лучей на бесконечность, не изменяя угла схождения. В итоге получим две плоские волны, и для расстояния между полосами имеем:

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d} = \frac{\lambda}{\theta},$$

где угол θ - это угол, под которым видны источники от экрана. Видно, что в этом случае расстояние между полосами не зависит от положения экрана.

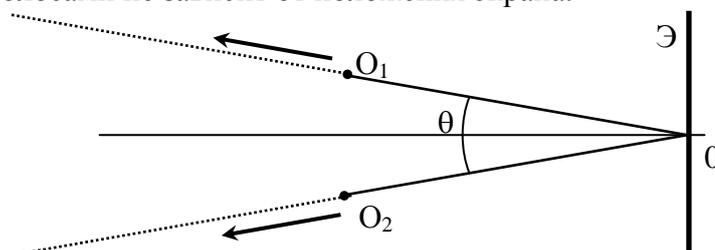


Рис. 3. К интерференции плоских волн

В оптическом диапазоне вследствие высокой частоты излучения ($\nu \approx 10^{15}$ Гц) практически невозможно создать два монохроматических источника, излучающих на одной и той же частоте. Поэтому для получения интерференции используют **один** источник света (причем не обязательно монохроматический!), излучение которого сначала с помощью различных оптических схем разделяют на **две** волны, а затем вновь соединяют. При этом между волнами возникает разность хода, что и приводит к появлению интерференционной картины. Если разность хода не превышает длины волнового цуга, то случайные изменения амплитуды и фазы волн происходят **согласованно**, про такие пучки (или источники) говорят, что они **когерентны**.

Разделение света от источника можно осуществить двумя способами:

- 1) методом деления волнового фронта (билинза, бипризма, бизеркало, схема Юнга);
- 2) методом деления амплитуды (кольца Ньютона, тонкие пленки, интерферометры Майкельсона, Жамена и др.).

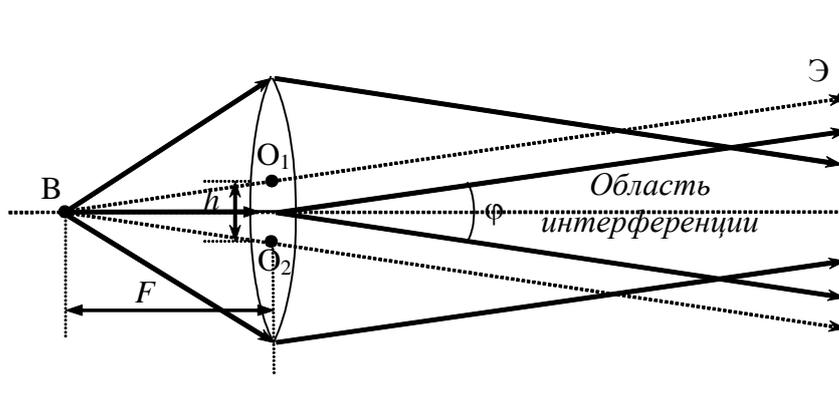
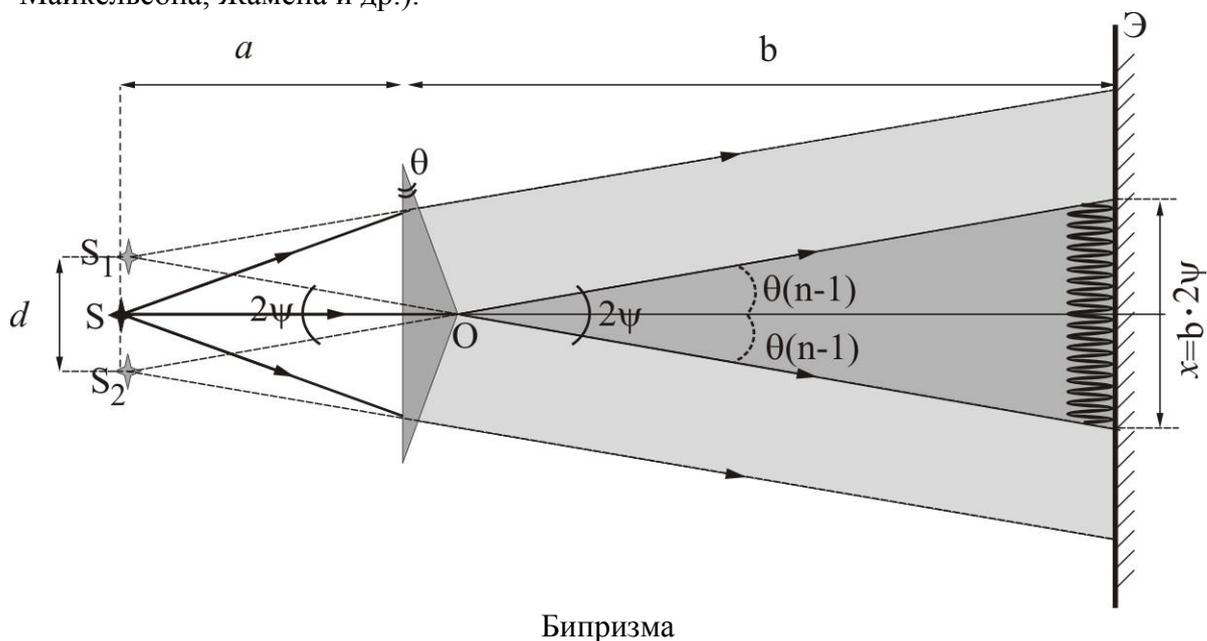


Рис. 4. Примеры интерференционных схем: Билинза (источник света в фокальной плоскости, h – размер удаленного фрагмента линзы, $\varphi = h/F$ – угол схождения параллельных пучков).

Если источник света **точечный**, то в результате применения оптической схемы любого из методов деления (волнового фронта или амплитуды) возникнут **два точечных изображения источника**, которые станут новыми (когерентными – при небольшой разности хода) источниками (рис. 5). Излучение от этих новых источников будет распространяться, вообще говоря, не во всех направлениях (это зависит от оптической схемы). Интерференция будет наблюдаться в области наложения световых пучков от обоих источников (**в области интерференции**) при любом расположении экрана. В этом случае говорят, что интерференционная картина **не локализована**.

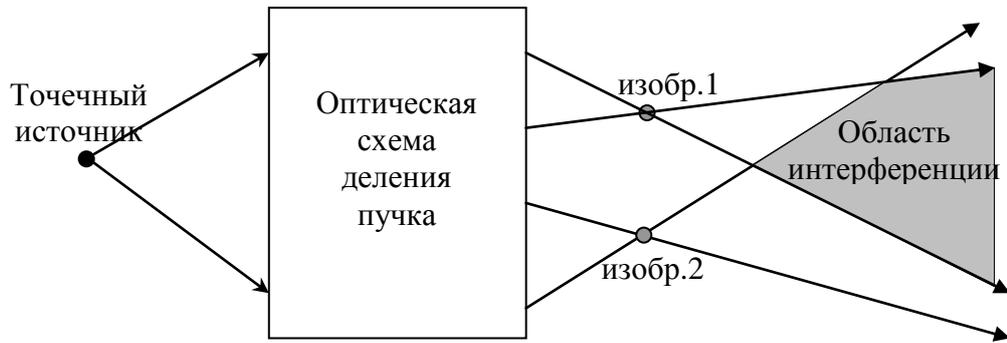


Рис.5 Схема формирования интерференционной картины

Вид интерференционной картины зависит от взаимного расположения **линии**, соединяющей источники (имеются в виду изображения 1 и 2), и **плоскости** экрана. Если линия **параллельна** плоскости экрана (схема Юнга, рис. 2), то наблюдаются полосы. Если линия **перпендикулярна** плоскости экрана (см. рис. 6), то наблюдается система колец, при этом для центрального (светлого или темного) пятна порядок интерференции будет максимальным и равным $m_{\max} = d/\lambda$, где d - расстояние между источниками. При этом интенсивность в центре может быть произвольной от I_{\max} (если m_{\max} - целое число) до I_{\min} (если m_{\max} - полуцелое число)

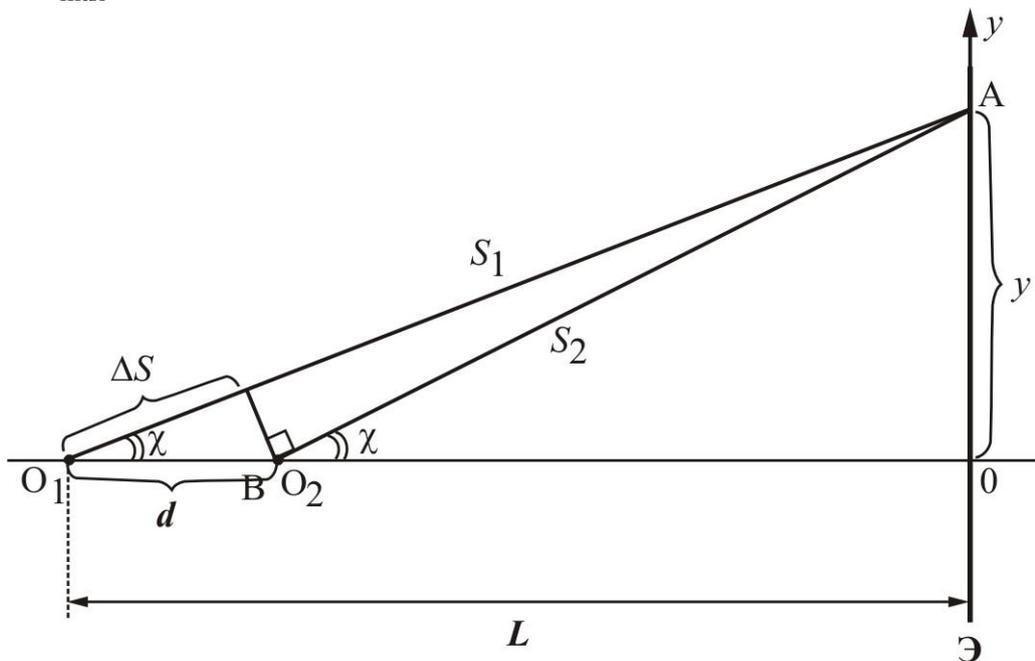


Рис. 6. Интерференционная схема для наблюдения интерференционных колец

Для разности хода в этом случае можно записать:

$$\Delta S \approx d \cdot \cos \chi \approx d \cdot \left(1 - \frac{\chi^2}{2}\right) \approx d \cdot \left(1 - \frac{y^2}{2L^2}\right).$$

Дальнейшие преобразования этой формулы позволят найти радиусы темных и светлых колец.

Однако для реальных **протяженных** источников картина наблюдается в определенном месте, т.е. **локализована**. Для протяженного источника интерференционная картина легко наблюдается в схемах деления амплитуды, и практически не наблюдается в схемах деления волнового фронта.

В частности, при интерференции в тонких пленках непостоянной толщины картина **локализована на поверхности** пленки и наблюдается при любом размере источника (радужные пятна на поверхности) и даже в белом (немонохроматичном) свете. Тот или иной цвет полос зависит от толщины пленки, наблюдаемые полосы называют **полосами равной толщины**.

Если же толщина пленки постоянна (плоскопараллельная пластина), то интерференционную картину можно наблюдать при различных углах падения лучей. Картина **локализована на бесконечности**, наблюдаемые полосы называют **полосами равного наклона** (подробнее см. ниже в материалах семинара по тонким пленкам).

Разность хода в плоскопараллельной пластине толщиной h с показателем преломления n при угле падения света θ и угле преломления θ' (рис. 7):

$$\Delta = 2hn \cos\theta' + \frac{\lambda}{2}$$

(появление слагаемого $\frac{\lambda}{2}$ связано с изменением на π фазы волны, отраженной от оптически более плотной среды)

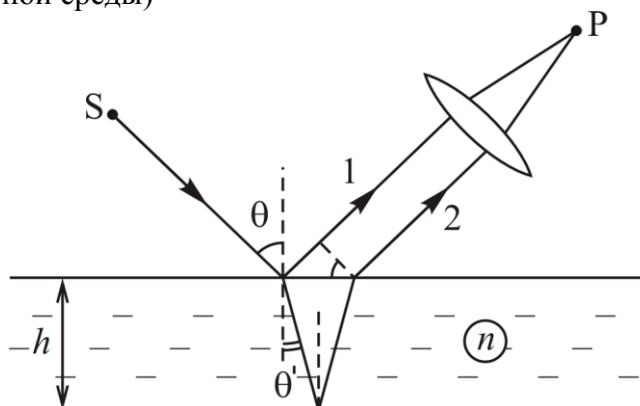


Рис. 7. Интерференция, наблюдаемая на бесконечности (полосы равного наклона).

Этой же формулой можно пользоваться и для тонкой пластины переменной толщины. Это связано с тем, что два интерферирующих луча (на рисунке это отраженный от первой поверхности пластины луч 1 и луч 2, прошедший в пластину, отразившийся от второй поверхности) должны:

1) выйти из **одной точки протяженного источника** (только в этом случае они будут когерентны)- точка А на рисунке 8;

2) встретиться **в одной точке на поверхности** (только в этом случае они проинтерферируют) - точка В на рисунке 8.

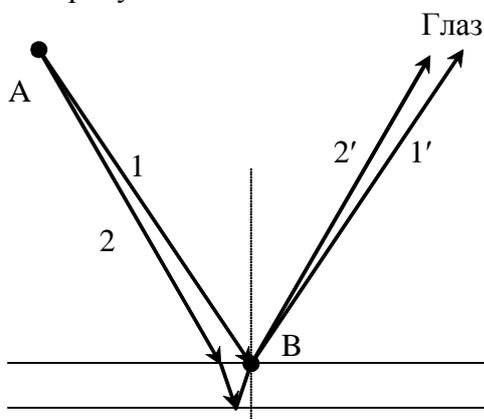


Рис. 8. Интерференция, наблюдаемая на поверхности пленки (полосы равной толщины).

Точки падения этих лучей на пластинку различны, но из-за малой толщины пластины они близки друг к другу, и обычно изменением толщины пластины на таком расстоянии

можно пренебречь. При этом **полосы равной толщины** (к примеру, радужные пятна на поверхности лужи) прекрасно наблюдаются глазом даже в белом свете и при любом размере источника (излучение падает на лужу со всевозможных направлений). Это связано с тем, что оба отраженных луча $1'$ и $2'$ должны попасть в зрачок глаза, только в этом случае наблюдатель увидит их интерференцию. Таким образом, глаз «выбирает» лишь определенные лучи из множества лучей, исходящих из точки В. Так как длины волн излучения охватывают весь видимый диапазон, то даже при небольшой толщине пленки условия максимума будут выполняться для нескольких длин волн, что приводит к появлению радужной окраски. Заметим, что с увеличением толщины пластины угол между отраженными лучами будет также расти, и шансы этих лучей вместе попасть в глаз уменьшаются.

Для наблюдения **полос равного наклона** на плоскопараллельной пластине размеры источника также **не важны**. Так как картина локализована на бесконечности, то для ее наблюдения используют собирающую линзу, при этом картина наблюдается в фокальной плоскости линзы (см. рис. 9). Поэтому картины, полученные от различных точек источника, абсолютно одинаковы, и, складываясь друг с другом (без интерференции, так как образованы разными **некогерентными** точками!), дают яркую систему колец (в случае монохроматического источника).

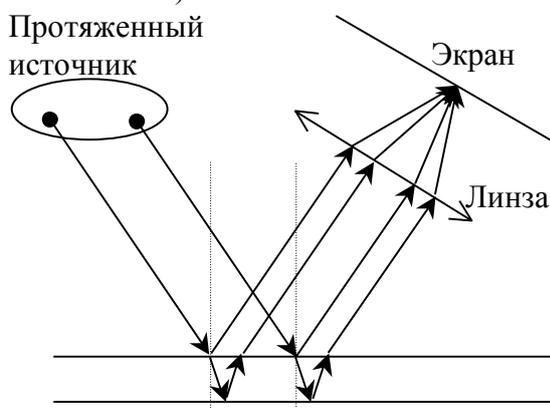


Рис. 9. Интерференция от протяженного источника, наблюдаемая в фокальной плоскости линзы (полосы равного наклона).

Если же источник **точечный**, то интерференционные кольца можно наблюдать и без линзы. На рисунке 10 точечный источник формируется собирающей линзой, установленной на пути лазерного пучка. В экране Э сделано отверстие для «точечного источника» О. Построив два точечных мнимых изображения O_1 и O_2 источника О, формируемых при отражении от поверхностей пластики, получим две сферические волны, излучение от которых падает на экран под различными углами. На экране наблюдаются интерференционные кольца (полосы равного наклона).

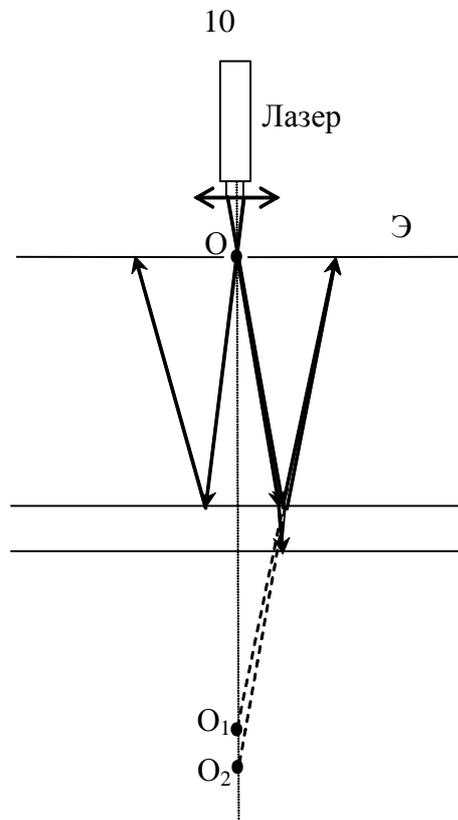


Рис. 10. Интерференция от точечного источника, наблюдаемая на экране (полосы равного наклона).

Линза как интерференционный прибор.

Из геометрической оптики известно, что если на линзу падает пучок света от какого-либо точечного источника (неважно: действительного или мнимого), то после прохождения линзы сформируется изображение (неважно: действительное или мнимое). Это связано с **таутохронностью** линзы: время прохождения света от источника до изображения одно и то же, независимо от места прохождения через линзу. С точки зрения волновой оптики это означает, что все пучки (лучи) света, вышедшие из единого точечного источника и прошедшие через линзу, соберутся в точке изображения **в одной фазе!** Поэтому и интенсивность света в этой точке будет довольно большой. Можно сказать, что с помощью линзы осуществляется интерференция **ВСЕХ** прошедших через нее пучков, идущих от точечного источника.

Если же источник протяженный (но расположен в плоскости, параллельной плоскости тонкой линзы), то его можно представить как совокупность точечных источников. Тогда получаемое с помощью линзы изображение есть совокупность интерференционных картин для каждого точечного источника.

Интерференция квазимонохроматического света.

(изложение идейно схоже с книгой Е.И. Бутикова «Оптика», п.5.4)

Квазимонохроматическое излучение – это излучение, удовлетворяющее условию

$$\frac{\bar{\lambda}}{\delta\lambda} \gg 1,$$

где $\bar{\lambda}$ - среднее значение длины волны источника, $\delta\lambda$ - диапазон длин волн.

Аналогичные соотношения можно написать и для частот, и волновых чисел:

$$\frac{\bar{\lambda}}{\delta\lambda} = \frac{\bar{\omega}}{\delta\omega} = \frac{\bar{k}}{\delta k} \gg 1.$$

Волны с различными частотами (длинами волн) **не интерферируют**, поэтому для нахождения интерференционной картины необходимо записать распределение интенсивности для каждой частоты и просуммировать (проинтегрировать) по всем частотам.

Рассмотрим схему Юнга с различными источниками.

1) источник, излучающий две близкие длины волны λ_1 и λ_2 , $\Delta\lambda = (\lambda_1 - \lambda_2) \ll \lambda_1, \lambda_2$, интенсивности каждого из вторичных источников одинаковы и поровну делятся по длинам волн (бихроматический источник).

Для каждой длины волны

$$I_j(\Delta s) = I_0 \cdot (1 + \cos(k_j \cdot \Delta s)).$$

Суммарная интенсивность равна сумме интенсивностей:

$$\begin{aligned} I(\Delta s) &= I_1(\Delta s) + I_2(\Delta s) = 2I_0 + I_0 \cdot (\cos(k_1 \cdot \Delta s) + \cos(k_2 \cdot \Delta s)) = \\ &= 2I_0 + I_0 \cdot \left(2 \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} \cdot \Delta s\right) \cdot \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} \cdot \Delta s\right) \right). \end{aligned}$$

Вводим обозначения: $k = \frac{k_1 + k_2}{2}$, $\Delta k = k_1 - k_2$, получим

$$I(\Delta s) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{\Delta k}{2} \cdot \Delta s\right) \cdot \cos(k \cdot \Delta s) \right).$$

Полученная формула отличается от формулы для монохроматического источника наличием перед $\cos(k \cdot \Delta s)$ медленно изменяющегося множителя $\cos\left(\frac{\Delta k}{2} \cdot \Delta s\right)$.

Зависимость интенсивности интерференционной картины от разности хода показана на рисунке.

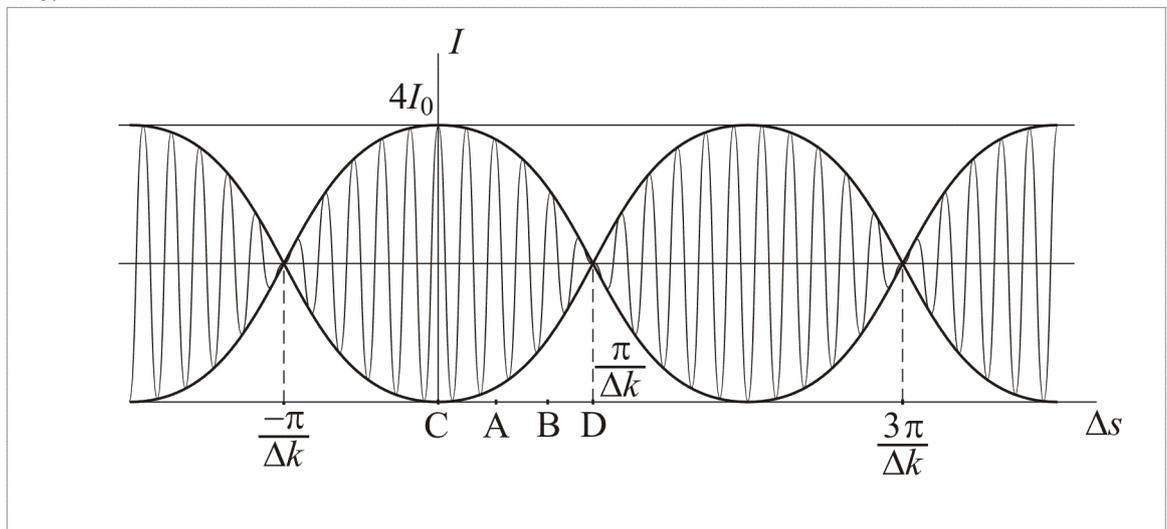


Рис. Интерференционная картина от бихроматического источника

Введем понятие **видности интерференционной картины**:

$$V(x) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где I_{\max} и I_{\min} - значения интенсивности картины в соседних максимуме и минимуме.

Для монохроматического источника видность всюду равна единице $V=1$, т.к. $I_{\min} = 0$ для всех минимумов. Для источника, излучающего две длины волны, из формулы для интенсивности следует, что

$$I_{\max} = 4I_0 \left(1 + \left| \cos \left(\frac{\Delta k}{2} \cdot \Delta s \right) \right| \right); \quad I_{\min} = 4I_0 \left(1 - \left| \cos \left(\frac{\Delta k}{2} \cdot \Delta s \right) \right| \right).$$

Отсюда для видности имеем:

$$V(x) = \left| \cos \left(\frac{\Delta k}{2} \cdot \Delta s \right) \right|.$$

Видность равна нулю (интерференционная картина пропадает), когда $\frac{\Delta k}{2} \cdot \Delta s = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$. Из соотношения $\Delta k = \frac{2\pi}{\lambda^2} \Delta \lambda$ получим для первого нуля видности:

$$\Delta s_1 = \frac{\lambda^2}{2\Delta \lambda}$$

Вспомня, что порядок интерференции n задается соотношением $\Delta s = n\lambda$, получим, что интерференция пропадет в порядке n_1 , равном

$$n_1 = \frac{\lambda}{2\Delta \lambda}.$$

Это выражение можно получить из простых соображений: максимум для одной длины волны должен совпасть с минимумом для другой:

$$n_1 \left(\lambda - \frac{\Delta \lambda}{2} \right) = \left(n_1 - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\lambda + \frac{\Delta \lambda}{2} \right).$$

Видность максимальна в центре интерференционной картины, по мере удаления от центра она уменьшается, становится равной нулю в порядке $n_1 = \frac{\lambda}{2\Delta \lambda}$, затем растет и становится равной единице в порядке $n_2 = 2n_1$ и т.д.

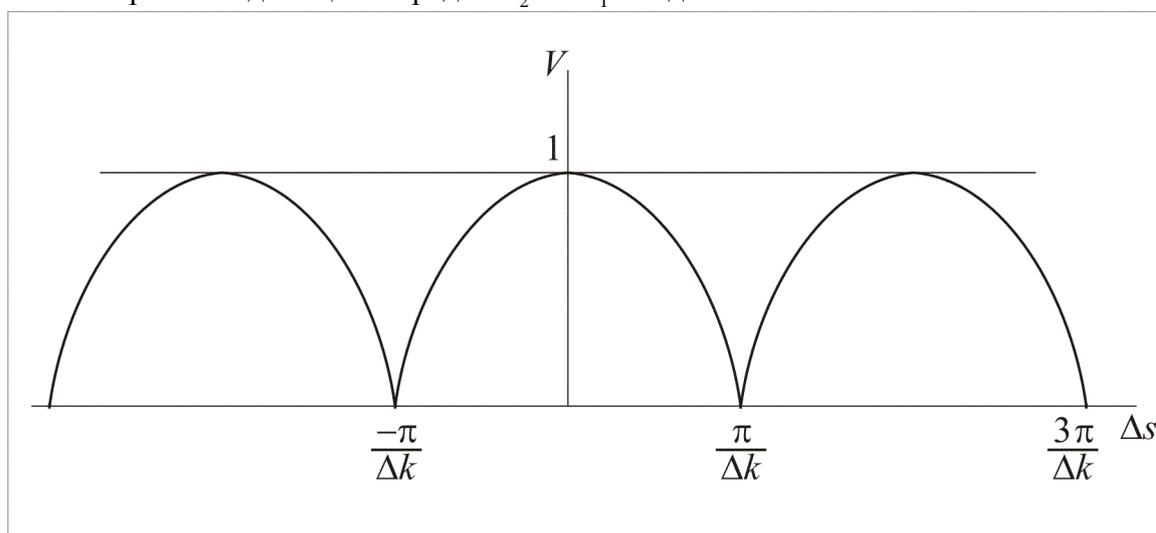


Рис. Видность интерференционной картины от бихроматического источника

Зависимость видности интерференционной картины от разности хода показана на рисунке.

2) источник, излучающий в узком спектральном диапазоне от $\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}$ до $\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}$.

В этом случае координаты интерференционных максимумов одного и того же порядка для различных длин волн будут отличаться друг от друга. Видность по-прежнему максимальна в центре интерференционной картины, т.к. максимумы и минимумы для всех длин волн практически совпадают. По мере удаления от центра максимумы для различных длин волн расходятся. Из рис. видно, что полное размывание картины произойдет, когда расстояние между максимумами m -го порядка для крайних длин волн диапазона станет равным ширине интерференционной полосы Δx (ширину Δx можно считать одинаковой для всего диапазона $\Delta\lambda$). В этом случае максимум m -го порядка для длины волны $\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}$ совпадет с максимумом $(m-1)$ -го порядка для длины волны $\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}$, т.е. для разности хода Δs в точке исчезновения полос имеем:

$$\Delta s = \left(\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2} \right) \cdot m = \left(\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2} \right) \cdot (m-1).$$

Спектр источника

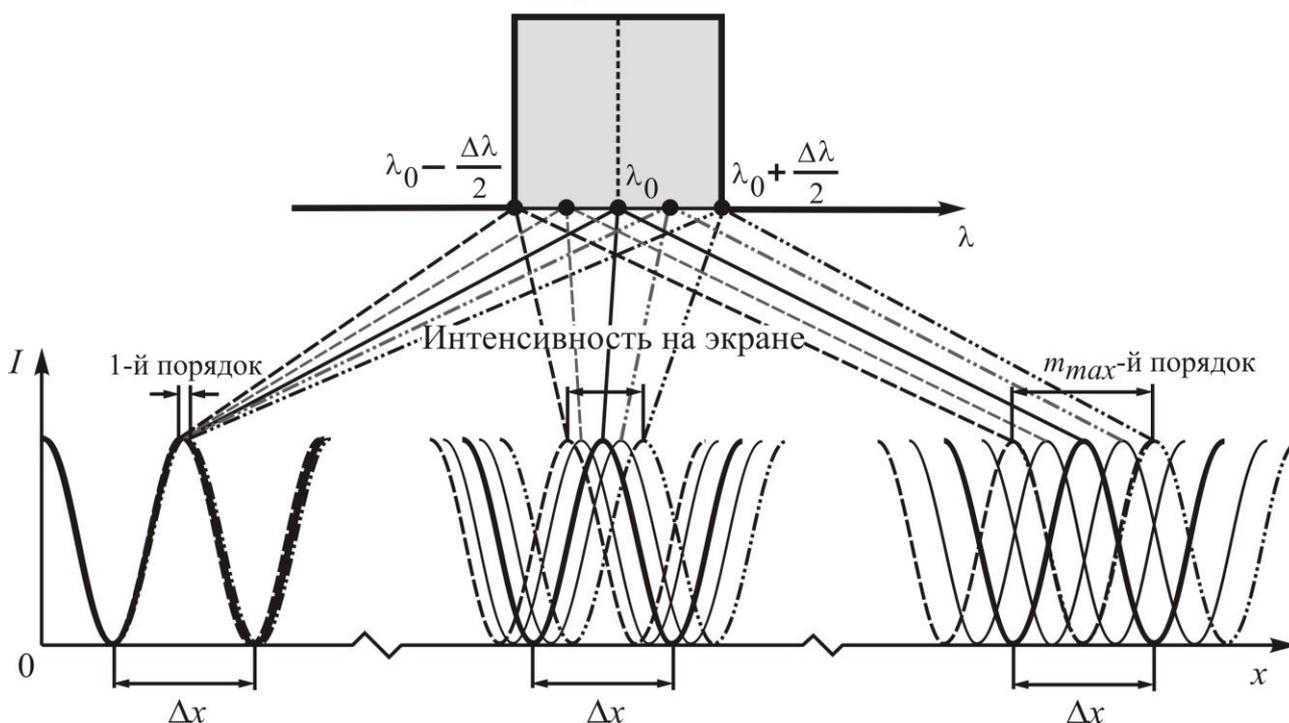


Рис. Размывание интерференционной картины в случае квазимонохроматического источника ($\Delta\lambda \ll \lambda_0$). Показано распределение интенсивности для пяти различных длин волн из диапазона $\Delta\lambda$.

Отсюда получаем, что порядок интерференции m_{max} , при котором полностью пропадают интерференционные полосы, равен

$$m_{max} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}.$$

Способность двух квазимонохроматических пучков интерферировать называют **временной когерентностью**. Максимальная разность хода, при которой возможна

интерференция, называется **длиной когерентности** $l_{\text{ког}}$, а соответствующее время запаздывания – **временем когерентности** $t_{\text{ког}} = l_{\text{ког}}/v$. Длина когерентности

$l_{\text{ког}} = m\lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ равна длине цуга, а время когерентности – длительности цуга Δt .

Интерференция возможна, если запаздывание волновых цугов τ меньше длин цугов Δt . На рис. показаны три возможных случая наложения двух цугов. В первом случае оба цуга идут без отставания, и в этом случае наблюдается интерференционная картина с видностью $V=1$. Во втором случае один цуг отстает от другого на время τ . Интерferируют только перекрывающиеся участки цугов. В течение времени $(\Delta t - \tau)$ наблюдается интерференционная картина, а в течение времени 2τ на экран падает только одна из волн, давая равномерную засветку. Условия для интерференции хуже (видность меньше). В третьем случае интерференции нет вообще, т.к. отставание $\tau > \Delta t$.

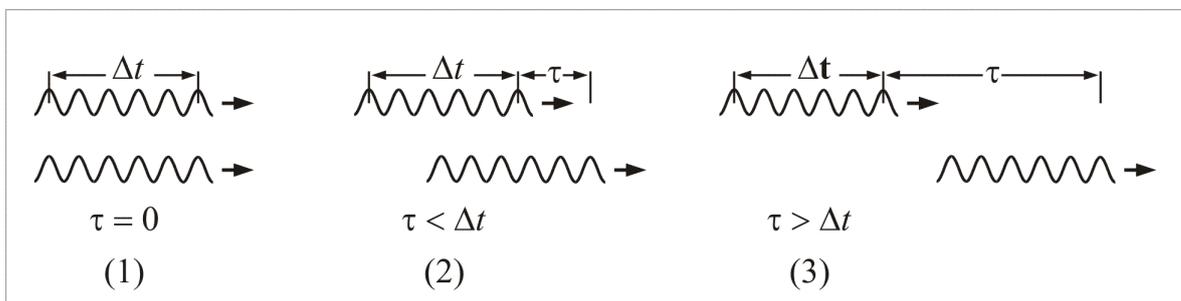


Рис. Наложение волновых цугов при интерференции

Докажем, что длительность цуга Δt и есть время когерентности: $\Delta t \cong \frac{1}{\Delta\nu} = \tau_{\text{ког}}$. Так

как $\frac{v}{\Delta\nu} = \frac{c}{\lambda\Delta\nu} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, то $\tau_{\text{ког}} = \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}$. Длина когерентности $l_{\text{ког}} = c \cdot \tau_{\text{ког}} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$.

Найдем распределение интенсивности на экране в схеме Юнга, если задано спектральное распределение излучения по частотам $S(\omega)$. Если источник квазимонохроматичный, то пусть максимум $S(\omega)$ соответствует частоте ω_0 , а диапазон излучаемых частот $\Delta\omega \ll \omega_0$ (напомним, что функция $S(\omega)$ четная).

Для монохроматического источника распределение интенсивности на экране в зависимости от разности хода Δs задается формулой:

$$I(\Delta s) = I_0 \cdot (1 + \cos(k \cdot \Delta s)).$$

Перейдем от пространственного представления к временному:

$$k \cdot \Delta s = kc \cdot \frac{\Delta s}{c} = \omega \cdot \Delta t,$$

где c - скорость света, $\Delta t = \frac{\Delta s}{c}$ - временное запаздывание.

Интенсивность света источника представим в виде:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega,$$

тогда для узкого спектрального диапазона $d\omega$ можно записать:

$$dI(\Delta t) = S(\omega) \cdot (1 + \cos(\omega \cdot \Delta t)) d\omega.$$

Интегрируем по частотам:

$$\begin{aligned} I(\Delta t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot (1 + \cos(\omega \cdot \Delta t)) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega = \\ &= I_0 + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega. \end{aligned}$$

Таким образом, для нахождения интерференционной картины необходимо вычислить интеграл вида $\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega$

Замечание. Довольно часто в литературе (например, Матвеев, §26, формула (26.20), или Алешкевич, лекция 8, формула (8.23)) интегрируют только по положительным частотам, пользуясь четностью функции $S(\omega)$. По мнению автора данного изложения, это менее удобно, т.к. интегрирование в бесконечных пределах сразу приводит к классическим интегралам типа интеграла Фурье. И это позволяет в дальнейшем использовать свойства преобразования Фурье.

Вспомним из фурье-преобразований, что $S(\omega) \sim F(\omega) \cdot F^*(\omega)$ - функция вещественная и четная, поэтому интеграл вида $\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \sin(\omega \cdot \Delta t) d\omega$ равен нулю (интеграл от нечетной функции в симметричных пределах). В итоге можно написать:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot \Delta t} d\omega - \quad (1)$$

т.е. интересующий нас **интерференционный член есть фурье – преобразование от спектральной плотности.**

Таким образом, распределение интенсивности интерференционной картины $I(\Delta t)$ есть фурье-преобразование от спектральной плотности $S(\omega)$ плюс константа I_0 .

Из свойств фурье-преобразования вспомним, что если известен спектр $F(\omega)$ сигнала $f(t)$, то при его заполнении высокой частотой ω_0

$$f_{зан}(t) = f(t) \cdot \cos \omega_0 t$$

спектр заполненного сигнала представляется в виде:

$$F_{зан}(\omega) = \frac{1}{2} (F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)).$$

Для спектральной плотности заполненного сигнала получим:

$$\begin{aligned} S_{зан}(\omega) &= F_{зан}(\omega) \cdot F_{зан}^*(\omega) = \frac{1}{2} (F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)) \cdot \frac{1}{2} (F^*(\omega - \omega_0) + F^*(\omega + \omega_0)) = \\ &= \frac{1}{4} (F(\omega - \omega_0) F^*(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0) F^*(\omega + \omega_0) + \\ &\quad + F(\omega - \omega_0) F^*(\omega + \omega_0) + F(\omega + \omega_0) F^*(\omega - \omega_0)) \end{aligned}$$

Если ширина спектра $F(\omega)$ сигнала $f(t)$ много меньше частоты ω_0 , то слагаемые $F(\omega - \omega_0)F^*(\omega + \omega_0)$ и $F(\omega + \omega_0)F^*(\omega - \omega_0)$ равны нулю, в итоге для спектральной плотности получим (см. рис.):

$$S_{зан}(\omega) = \frac{1}{4}(S_0(\omega - \omega_0) + S_0(\omega + \omega_0)).$$

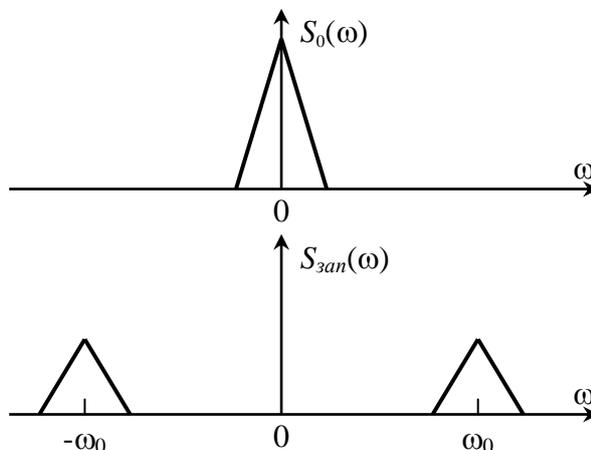


Рис. Спектр заполненного сигнала.

Используем это свойство для вычисления интерференционного члена (1), при этом учтем, что структура указанного в (1) спектра $S(\omega)$ такая же, как структура приведенного на рисунке спектра $S_{зан}(\omega)$. Поэтому вместо $S(\omega)$ необходимо использовать спектральную плотность реального источника, т.е. $S_{зан}(\omega)$:

$$\text{Инт.член} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{зан}(\omega) \cdot e^{i\omega\Delta t} d\omega = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (S_0(\omega - \omega_0) + S_0(\omega + \omega_0)) \cdot e^{i\omega\Delta t} d\omega.$$

где $S_0(\omega)$ - спектр, максимум которого соответствует $\omega=0$.

Вспомним еще одно свойство фурье-преобразования: если известен спектр $F(\omega)$ сигнала $f(t)$, то спектр сигнала $f(t - T)$, смещенного на T , отличается появлением фазового множителя:

$$F_T(\omega) = F(\omega) \cdot e^{i\omega T}.$$

В нашем случае это свойство используется для сравнения сигналов вида $S_0(\omega)$ и $S_0(\omega - \omega_0)$, т.е. смещение не по времени, а по частоте на ω_0 . Если для фурье-преобразования спектральной плотности $S_0(\omega)$ ввести обозначение

$$g(\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega) \cdot e^{i\omega\Delta t} d\omega,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega - \omega_0) \cdot e^{i\omega\Delta t} d\omega = g_{\omega_0}(\Delta t) = g(\Delta t) \cdot e^{i\omega_0\Delta t}.$$

Если функция $S_0(\omega)$ четная, то $g(\Delta t)$ - действительная. В этом случае для интерференционного члена получим:

$$\text{Инт.член} = \frac{1}{2} (g(\Delta t) \cdot e^{i\omega_0\Delta t} + g(\Delta t) \cdot e^{-i\omega_0\Delta t}) = g(\Delta t) \cdot \cos(\omega_0\Delta t).$$

Итоговый результат для распределения интенсивности приобретает вид:

$$I(\Delta t) = I_0 + \text{инт.член} = I_0 \cdot \left(1 + \frac{g(\Delta t)}{I_0} \cdot \cos(\omega_0 \Delta t) \right), \quad (2)$$

где $g(\Delta t)$ есть фурье-образ от спектральной плотности $S_0(\omega)$ сигнала, не заполненного высокой частотой.

Вспомним, что видность $V(\Delta t)$ интерференционной картины определяется формулой:

$$V(\Delta t) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где I_{\max} и I_{\min} - значения интенсивности в соседних максимуме и минимуме соответственно.

Из структуры формулы следует, что видность $V(\Delta t)$ интерференционной картины равна:

$$V(\Delta t) = \left| \frac{g(\Delta t)}{I_0} \right| = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot \Delta t} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega) d\omega} \right| \leq 1,$$

т.е. равна модулю нормированного фурье- преобразования от формы линии в спектральной плотности сигнала, не заполненного высокой частотой ω_0 .

Видность принимает максимальное значение, равное 1, при $\Delta t = 0$, т.е. в центре интерференционной картины, где $\Delta s = 0$. С ростом разности хода $\Delta s = c \cdot \Delta t$ видность уменьшается.

Таким образом, находя порядок интерференции, при котором пропадает интерференционная картина, можно оценить ширину линии излучения.

Повторим кратко (заодно еще раз напомним, что изложение сходно с книгой Бутикова, п.5.4).

Если квазимонохроматичный источник излучает на частоте ω_0 , и известна форма линии в спектре (например, прямоугольник или лоренц), то видность интерференционной картины есть фурье-преобразование от формы линии.

Рассмотрим типичные формы линии излучения и сопоставим им графики видностей.

формы линии излучения	Видность
прямоугольник	синк
лоренц	затухающая экспонента
гаусс	гаусс

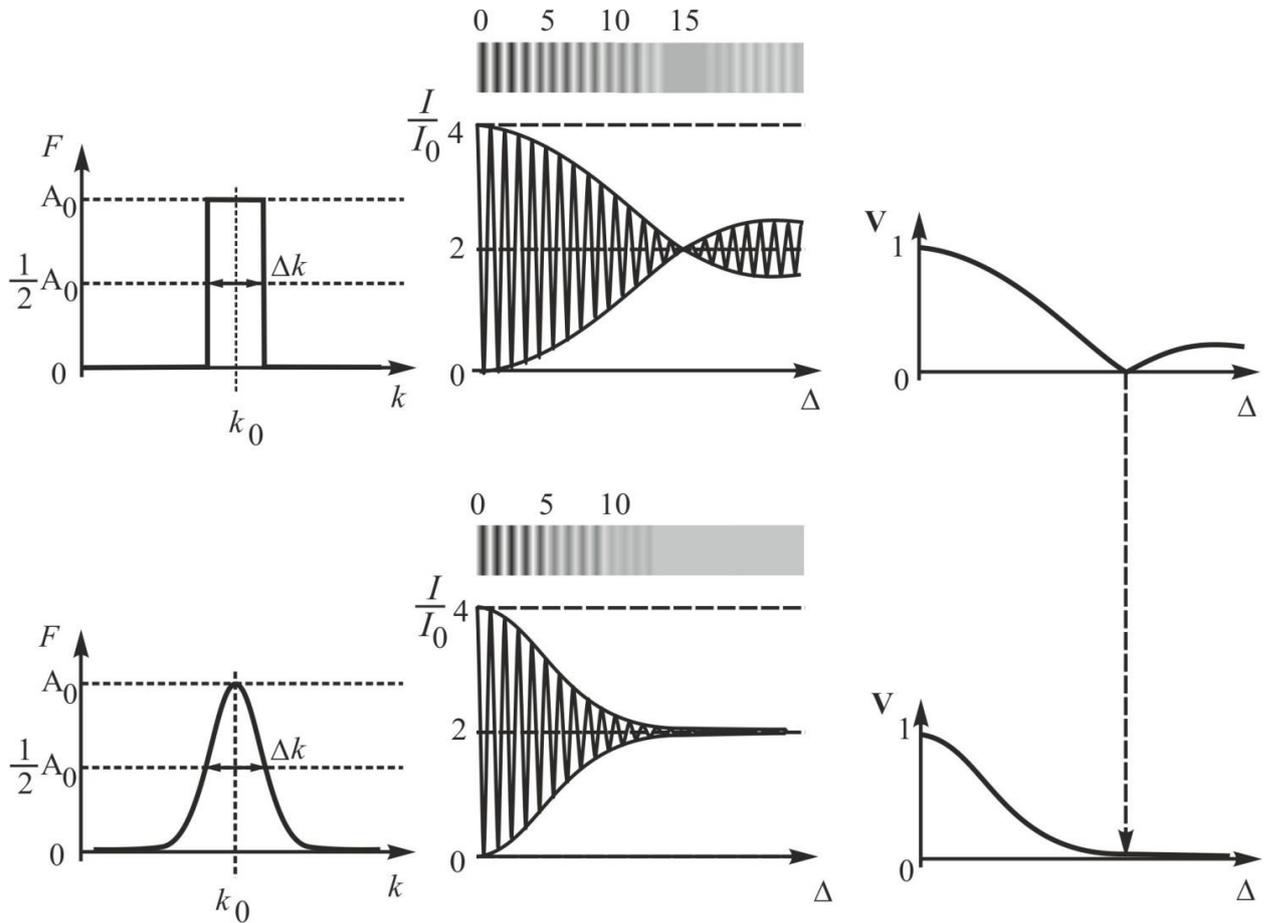


Рис. Зависимости видимостей и распределения интенсивностей интерференционной картины для различных форм линий спектра (прямоугольной и гауссовой)

Для белого света (диапазон длин волн от 400 до 700 нм) порядок, в котором пропадает интерференция, примерно равен $n \approx 1-2$. Но глаз человека различает не общую интенсивность, как приемник, а цветовую окраску, поэтому при освещении белым светом наблюдается порядка десятка цветных интерференционных полос. В центре картины наблюдается белая (неокрашенная) полоса – это нулевой порядок интерференции, а затем в первом порядке наблюдаются цвета в последовательности цветов радуги. Далее порядки перемешиваются, и картина пропадает. Иногда, если в оптической схеме интерференции между волнами возникает дополнительная разность фаз, равная π (обычно при отражении одной из волн от оптически более плотной среды), в нулевом порядке наблюдается темная полоса.

Использование светофильтра позволяет уменьшить спектральный диапазон падающего излучения. Чем *уже* полоса пропускания светофильтра, тем *меньше* число *цветов* представлено в интерференционной картине, но тем *больше* число наблюдаемых интерференционных полос.

Замечание.

При нахождении интерференционной картины для квазимонохроматического света нам потребовалось вычислять интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega,$$

где спектр излучения $S(\omega)$ задается зависимостью от частоты ω . Однако спектр можно задавать и в зависимости от длины волны $S(\lambda)$, и от волнового числа $S(k)$. Выясним, каким образом осуществляется переход от одной переменной к другой.

Прежде всего, напомним, что

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c},$$

Тогда связи между спектральными плотностями находятся из соотношений

$$dI = S(\omega)d\omega = S(k)dk = S(\lambda)d\lambda.$$

Так как переменные ω и k пропорциональны, то формы спектров $S(\omega)$ и $S(k)$ подобны друг другу. Кроме этого, аргумент косинуса в интеграле

$$\omega \cdot \Delta t = \frac{\omega}{c} \cdot c\Delta t = k \cdot \Delta s,$$

и интеграл для вычисления имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(k) \cos(k \cdot \Delta s) dk.$$

Т.е. переход между переменными ω и k осуществляется легко и просто. А с переменной λ возникают проблемы. Во-первых,

$$S(\lambda) = S(k) \frac{dk}{d\lambda} = -S(k) \frac{2\pi}{\lambda^2},$$

(форма изменяется). Во-вторых, интеграл по λ имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta s\right) d\lambda,$$

и взять подобный интеграл – непростая задача.

Поэтому в спектроскопии основными переменными являются **частота ω** и **волновое число k** . А *длину волны* принято выражать в обратных сантиметрах, т.е. длиной волны на самом деле называют не λ , а величину, обратную к ней $\frac{1}{\lambda}$. Хотя в привычной жизни, говоря, например, о диапазоне видимого глазом света, принято называть длины волн (при этом обычно забывают добавить «в вакууме»).

Приложение 1.

Несколько иной вывод формулы для интерференции от квазимонохроматического источника (менее корректный, но, возможно, более понятный).

Найдем распределение интенсивности на экране в схеме Юнга, если задано спектральное распределение излучения по частотам $S(\omega)$.

Для монохроматического источника распределение интенсивности на экране в зависимости от разности хода Δs задается формулой:

$$I(\Delta s) = I_0 \cdot (1 + \cos(k \cdot \Delta s)).$$

Перейдем от пространственного представления к временному:

$$k \cdot \Delta s = kc \cdot \frac{\Delta s}{c} = \omega \cdot \Delta t,$$

где c - скорость света, $\Delta t = \frac{\Delta s}{c}$ - временное запаздывание.

Интенсивность света источника представима в виде:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega,$$

тогда

$$dI(\Delta t) = S(\omega) \cdot (1 + \cos(\omega \cdot \Delta t)) d\omega.$$

Интегрируем по частотам:

$$\begin{aligned} I(\Delta t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot (1 + \cos(\omega \cdot \Delta t)) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega = \\ &= I_0 + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega. \end{aligned}$$

Таким образом, для нахождения интерференционной картины необходимо вычислить интеграл вида $\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega$

Пусть функция $S(\omega)$ симметрична относительно некоторой частоты ω_0 . (рассматривается только положительная ветвь частот $\omega > 0$). Введем новую переменную $\Omega = \omega - \omega_0$,

тогда

$$S(\omega) = S(\Omega + \omega_0) = f(\Omega),$$

где $f(\Omega)$ - симметрична относительно нуля.

Кроме того

$$\cos(\omega \cdot \Delta t) = \cos((\Omega + \omega_0) \cdot \Delta t) = \cos(\Omega \cdot \Delta t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \Delta t) - \sin(\Omega \cdot \Delta t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot \Delta t).$$

Из симметрии $f(\Omega)$ следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) \sin(\Omega \cdot \Delta t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot \Delta t) d\Omega = 0.$$

В результате

$$\begin{aligned} I(\Delta t) &= I_0 + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega = I_0 + \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) \cos(\Omega \cdot \Delta t) d\Omega \right] \cdot \cos(\omega_0 \cdot \Delta t) = \\ &= I_0 \left(1 + \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) \cos(\Omega \cdot \Delta t) d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) d\Omega} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \Delta t) \right) \end{aligned}$$

так как $I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) d\Omega$.

Вспомним, что видность $V(\Delta t)$ интерференционной картины определяется формулой:

$$V(\Delta t) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где I_{\max} и I_{\min} - значения интенсивности в соседних максимуме и минимуме соответственно.

Из структуры формулы следует, что видность $V(\Delta t)$ интерференционной картины равна:

$$V(\Delta t) = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) \cos(\Omega \cdot \Delta t) d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) d\Omega} \right|,$$

т.е. равна модулю нормированного фурье преобразованию от формы линии в спектре излучения.

Видность принимает максимальное значение, равное 1, при $\Delta t = 0$, т.е. в центре интерференционной картины, где $\Delta s = 0$.

В итоге, формула для распределения интенсивности при интерференции света от квазимонохроматического источника имеет вид:

$$I(\Delta t) = 2I_0(1 + C(\Delta t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \Delta t)).$$

где

$$C(\Delta t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) \cos(\Omega \cdot \Delta t) d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) d\Omega}$$

(косинус-фурье преобразование – это обычное фурье преобразование с отбрасываемой мнимой частью, для симметричных функций мнимая часть всегда равна нулю).

Видность картины задается этим коэффициентом:

$$V = |C(\Delta t)|.$$

Таким образом, находя порядок интерференции, при котором пропадает интерференционная картина, можно оценить ширину линии излучения.

Приложение 2.

Автокорреляционная функция. Теорема Винера -Хинчина.

Пусть вследствие реализации какой-либо интерференционной схемы (например, схемы Юнга) в точку наблюдения приходят две волны, вышедшие из одного источника. Разности хода Δs между волнами соответствует временной интервал $\tau = \frac{\Delta s}{c}$, где c – скорость света.

Волны в этом случае представимы в виде:

$$E_1(t) = E(t); \quad E_2(t) = E(t + \tau).$$

Интенсивность пропорциональна среднему значению квадрата напряженности поля:

$$I(\tau) \sim \langle (E_1(t) + E_2(t))^2 \rangle = \langle E_1^2(t) \rangle + \langle E_2^2(t) \rangle + 2\langle E_1(t)E_2(t) \rangle = 2\langle E^2(t) \rangle + 2\langle E(t)E(t + \tau) \rangle$$

Функцию

$$B(\tau) = \langle E(t)E(t + \tau) \rangle$$

называют *автокорреляционной функцией*.

Считая интенсивность каждой из волн равной I_0 , в итоге получим:

$$I(\tau) = 2I_0 + 2B(\tau).$$

Вспомним, что если задана спектральная плотность $S(\omega)$ излучения, то для интенсивности справедливо соотношение

$$I(\tau) = 2I_0 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot \cos(\omega\tau) \cdot d\omega.$$

Вследствие симметричности $S(\omega)$ можно записать:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot \Delta t} d\omega$$

Таким образом, автокорреляционная функция $B(\tau)$ и спектральная плотность $S(\omega)$ излучения связаны преобразованием Фурье:

$$B(\Delta\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot \Delta\tau} \cdot d\omega.$$

Полученное выражение называют **теоремой Винера-Хинчина**.
С другой стороны

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\Delta\tau) \cdot e^{-i\omega \cdot \Delta\tau} \cdot d\Delta\tau.$$

В общем случае $B(\Delta\tau)$ и $S(\omega)$ - вещественные четные функции своих аргументов.

Приложение 3.

О комплексной степени когерентности.

(см. Бутиков, п.5.4).

Представим квазимонохроматическую волну в виде

$$E(t) = \frac{1}{2} E_0(t) \cdot e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.},$$

где $E_0(t)$ - медленно меняющаяся комплексная амплитуда волны, запись «к.с.» означает комплексно сопряженную величину.

В этом случае для интерференционного члена (автокорреляционной функции $B(\tau) = \langle E(t)E(t+\tau) \rangle$) получим:

$$\begin{aligned} \langle E(t)E(t+\tau) \rangle &= \left\langle \left(\frac{1}{2} E_0(t) e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2} E_0^*(t) e^{-i\omega_0 t} \right) \left(\frac{1}{2} E_0(t+\tau) e^{i\omega_0(t+\tau)} + \frac{1}{2} E_0^*(t+\tau) e^{-i\omega_0(t+\tau)} \right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{4} \langle E_0(t)E_0(t+\tau) e^{i\omega_0(2t+\tau)} + E_0^*(t)E_0(t+\tau) e^{i\omega_0\tau} + \text{к.с.} \rangle = \frac{1}{4} \left(0 + \langle E_0^*(t)E_0(t+\tau) \rangle e^{i\omega_0\tau} + \text{к.с.} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[\langle E_0^*(t)E_0(t+\tau) \rangle e^{i\omega_0\tau} \right] = I_0 \cdot \text{Re} \left[\gamma(\tau) \cdot e^{i\omega_0\tau} \right], \end{aligned}$$

где

$$\gamma(\tau) = \frac{\langle E_0^*(t)E_0(t+\tau) \rangle}{2I_0}$$

- **комплексная степень когерентности**. Функцию

$$B^k(\tau) = I_0 \cdot \gamma(\tau) \cdot e^{i\omega_0\tau}$$

называют **комплексной функцией корреляции**.

Если использовать представление

$$\gamma(\tau) = |\gamma(\tau)| \cdot e^{i\delta},$$

то для интенсивности получим:

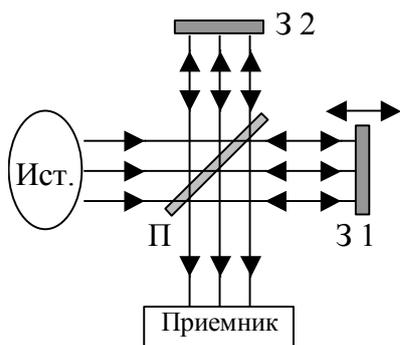
$$I(\tau) = 2I_0 (1 + |\gamma(\tau)| \cos(\omega_0\tau + \delta)).$$

Из данной формулы следует формула для видности:

$$V(\tau) = |\gamma(\tau)|.$$

Приложение 4. Фурье-спектрометр.

Фурье-спектрометр применяется для нахождения спектра слабых источников с использованием малочувствительных приемников. В отличие от дифракционных приборов, использующих узкую входную щель, в данном случае на прибор поступает весь световой поток.



Основным элементом фурье-спектрометра является интерферометр Майкельсона. Излучение от источника разделяется на два примерно равных по интенсивности пучка на светоделительной пластине П. Каждый из пучков, отражаясь от своего зеркала (31 и 32), возвращается к светоделительной пластине, и от нее поступает в приемник.

Оба пучка вышли из одного источника, разность хода между ними определяется разностью длин плеч интерферометра Δl , а временное запаздывание τ равно $\tau = \frac{2 \cdot \Delta l}{c}$. Интенсивность, регистрируемая приемником,

задается формулой

$$I(\tau) = 2I_0 + 2B(\tau),$$

где I_0 - интенсивность каждой из волн, $B(\tau)$ - автокорреляционная функция (см. Приложение 2).

Перемещая одно из зеркал 31 интерферометра с постоянной скоростью и, тем самым, изменяя τ , можно экспериментально измерить $B(\tau)$. Выполняя фурье-преобразование, на основе теоремы Винера-Хинчина можно найти спектральную плотность $S(\omega)$ излучения источника.

Приложение 5. Особенности фурье-преобразования от спектральной плотности.

Для нахождения видности интерференционной картины необходимо вычислить интеграл вида:

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega.$$

Вспомним, что

$$1) F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \cdot e^{-i\omega t'} dt';$$

$$2) F^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i(-\omega)t} dt = F(-\omega).$$

В результате получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \cdot e^{-i\omega t'} dt' \cdot F(-\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega =$$

(меняем порядок интегрирования)

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t'} \cdot F(-\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} F(-\omega) \cdot e^{i\omega(t-t')} d\omega = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega(t'-t)} d\omega = 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t') f(t'-t) dt'.
\end{aligned}$$

Данное соотношение носит название **уравнения свертки**.

Отметим, что функция

$$\psi(t) = 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t') f(t'-t) dt'.$$

является четной:

$$\begin{aligned}
\psi(-t) &= 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t') f(t'+t) dt' = 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t'+t-t) f(t'+t) dt' = \\
&\quad (\text{делаем замену переменных } t'+t = \tau) \\
&= 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau-t) f(\tau) d\tau = \psi(t).
\end{aligned}$$

Более общее утверждение имеет вид:

Если $F_1(\omega)$ и $F_2(\omega)$ есть фурье-образы от $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то произведение $F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$

есть фурье-образ от $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-t') f_2(t') dt'$.

Пример. Для лоренцевой формы линии функция $f(t)$ имеет вид затухающей экспоненты:

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t}; t \geq 0 \\ 0; t < 0 \end{cases}.$$

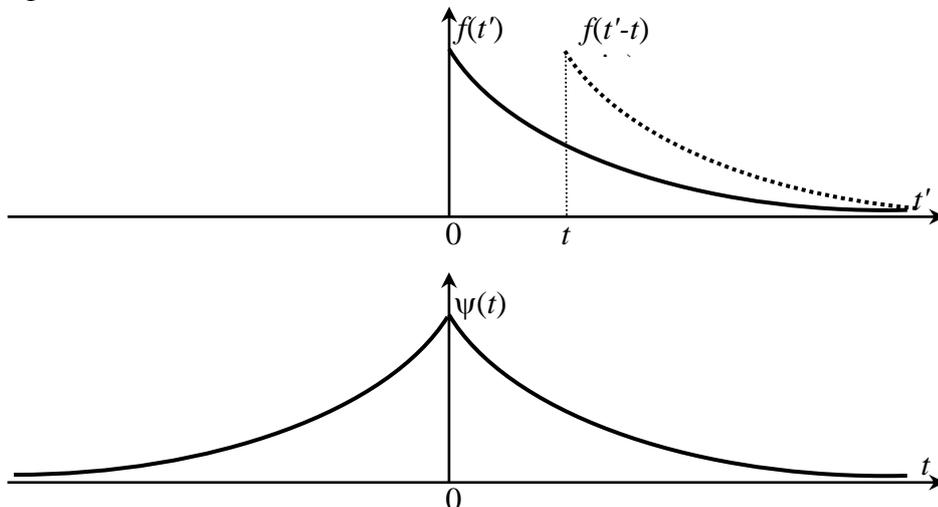
Вычислим

$$\psi(t) = 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t') f(t'-t) dt' = 2\pi \cdot \int_t^{\infty} A^2 \cdot e^{-\alpha t'} \cdot e^{-\alpha(t'-t)} dt' =$$

(при условии $t > 0$ нижний предел интегрирования равен t , см. рис.)

$$= 2\pi \cdot A^2 e^{\alpha t} \cdot \left. \frac{e^{-2\alpha t'}}{-2\alpha} \right|_t^{\infty} = 2\pi \cdot A^2 e^{\alpha t} \cdot \frac{e^{-2\alpha t}}{2\alpha} = \frac{\pi}{\alpha} \cdot A^2 e^{-\alpha t}.$$

т.е. фурье-образ – вновь затухающая экспонента. Вспомня про четность функции $\psi(t)$ получим график вида:



Интерференция от протяженного источника света.

1. Получение интерференционной картины в оптическом диапазоне возможно только в случае, когда интерферирующие волны исходят из одного источника. В схеме Юнга свет от точечного источника падает на плоскость с двумя бесконечно узкими щелями: именно они и являются вторичными когерентными источниками, дающими на экране интерференционную картину. Вопрос: как изменится картина, если источник станет **протяженным**? Протяженный источник представляет собой совокупность некогерентных точечных источников, поэтому для расчета интерференции необходимо **просуммировать интенсивности**, даваемые каждым из точечных (бесконечно малых) фрагментов источника.

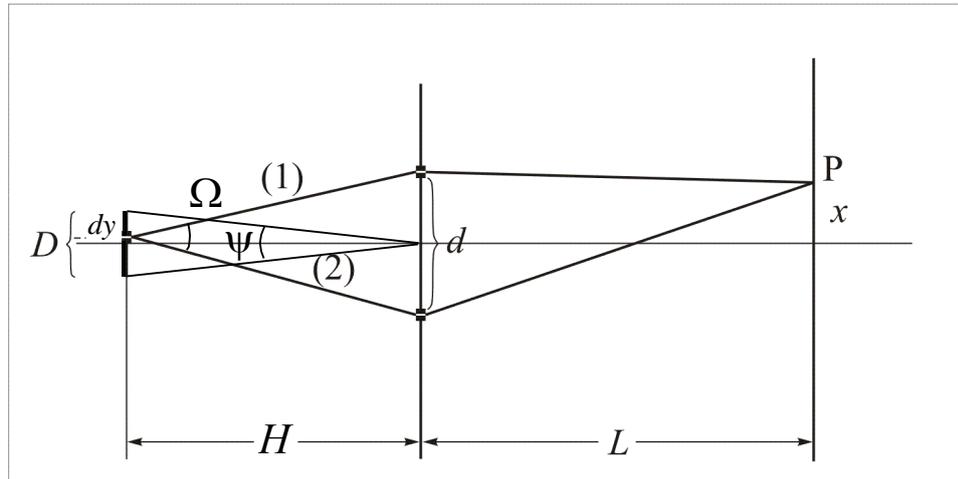


Рис. 1. К расчету интерференции от протяженного источника.

Пусть расстояние от протяженного монохроматического источника интенсивностью I_0 до плоскости со щелями равно $H \gg d$, размер равномерно светящегося источника D (рис. 1). Обозначим за y координату какой либо точки источника (источник расположен в области $|y| < \frac{D}{2}$). Дополнительная разность хода Δs_y между лучами, идущими от точки y к двум щелям, рассчитывается точно также, как и в схеме Юнга:

$$\Delta s_y = \frac{y \cdot d}{H},$$

интенсивность источника длиной dy равна $dI_{ист} = I_0 \frac{dy}{D}$.

Тогда суммарная разность хода равна $\Delta s = \Delta s_x + \Delta s_y = \frac{x \cdot d}{L} + \frac{y \cdot d}{H}$, интенсивность интерференционной картины от такого источника дается формулой:

$$dI_{экp} = dI_{ист} \cdot (1 + \cos(k(\Delta s_x + \Delta s_y))).$$

Раскрываем $\cos(k(\Delta s_x + \Delta s_y)) = \cos(k\Delta s_x) \cdot \cos(k\Delta s_y) + \sin(k\Delta s_x) \cdot \sin(k\Delta s_y)$ и интегрируем по y в пределах от $-\frac{D}{2}$ до $\frac{D}{2}$. Интеграл от $\sin(k\Delta s_y)$ в симметричных пределах дает ноль, поэтому остается:

$$I_{экp} = \frac{I_0}{D} \cdot \left(D + \cos(k\Delta s_x) \cdot \int_{-D/2}^{D/2} \cos(k\Delta s_y) dy \cdot \right) = \frac{I_0}{D} \cdot \left(D + \cos(k\Delta s_x) \cdot \frac{\sin\left(k \frac{yd}{H}\right)}{k \frac{d}{H}} \Bigg|_{-D/2}^{D/2} \cdot \right) =$$

$$= \frac{I_0}{D} \cdot \left(D + \cos(k\Delta s_x) \cdot \frac{\sin\left(k \frac{Dd}{2H}\right)}{k \frac{Dd}{2H}} \cdot D \right) = I_0 \cdot \left(1 + \frac{\sin\left(k \frac{Dd}{2H}\right)}{k \frac{Dd}{2H}} \cdot \cos(k\Delta s_x) \right).$$

Структура полученной формулы такая же, как и для квазимонохроматического вида, следовательно, видность картины равна

$$V(x) = \left| \frac{\sin\left(k \frac{Dd}{2H}\right)}{k \frac{Dd}{2H}} \right| = \left| \text{sinc}\left(k \frac{Dd}{2H}\right) \right|,$$

причем видность **не зависит** от x . Это означает, что по мере увеличения размеров источника видность уменьшается во ВСЕХ точках экрана, а не только по краям, как в случае с квазимонохроматическим источником (рис. 2). Видность станет равной нулю, когда

$$k \frac{Dd}{2H} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{Dd}{2H} = \pi \cdot \frac{Dd}{\lambda H} = \pi,$$

откуда условие полного пропадания интерференции запишется в виде:

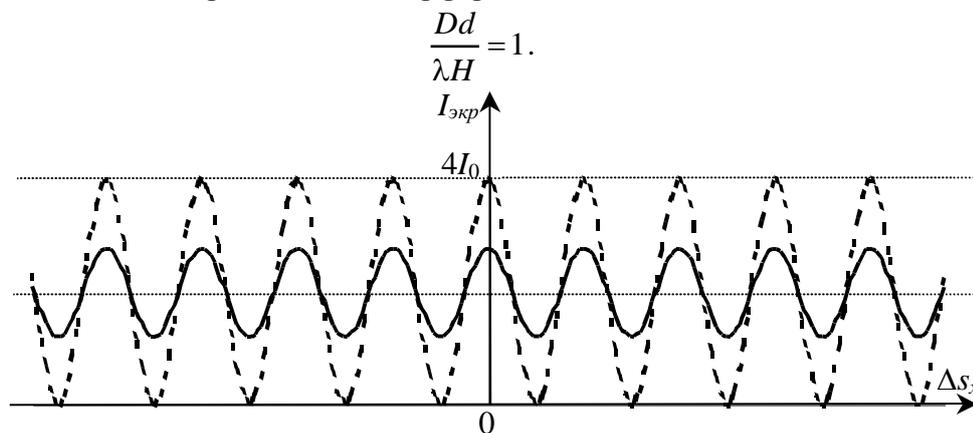


Рис. 2. Зависимость интенсивности от разности хода в случае протяженного (сплошная линия) и точечного (штриховая линия) источника.

Заметим, что часто фразу «полное пропадание интерференционной картины» ошибочно трактуют как отсутствие какой-либо освещенности на экране. Как следует из формул, это не так: интерференционный член становится равным нулю, а интенсивность на экране равна сумме интенсивностей каждого из источников, т.е. наблюдается равномерно засвеченное поле.

На рис. 3 приведен график зависимости видности интерференционной картины от размера источника D . Видность равна нулю при

$$D_{\text{прон}} = \frac{\lambda H}{d}.$$

Часто в литературе встречается условие на размер источника, при котором интерференционная картина еще видна:

$$D_{\text{еще_видна}} = \frac{D_{\text{прон}}}{2} = \frac{\lambda H}{2d}.$$

Нетрудно подсчитать, что $V(D_{\text{еще_видна}}) = \frac{2}{\pi}$.

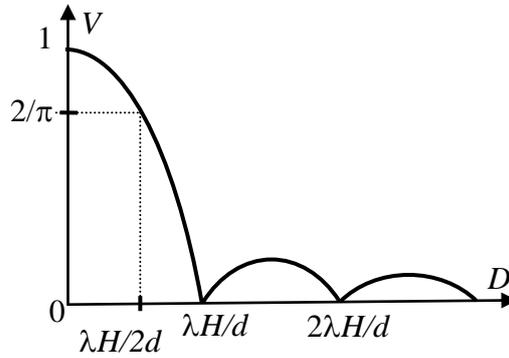


Рис. 3. График зависимости видности от размера источника D .

Расстояние между щелями $d_0 = \frac{\lambda H}{D}$, при котором пропадает интерференционная картина, называют **радиусом когерентности**. Вводя $\psi = \frac{D}{H}$ - угол, под которым виден протяженный источник от плоскости щелей (или **угловой размер источника**), получаем для радиуса когерентности

$$d_0 = \frac{\lambda}{\psi}.$$

Введем также понятие **угловой апертуры интерференции** Ω - угла, под которым из центра источника видны щели:

$$\Omega = \frac{d}{H}.$$

С учетом введенных обозначений условие нулевого значения видности можно записать в следующих видах:

$$\frac{\lambda H}{Dd} = \frac{\lambda}{D \cdot \Omega} = \frac{\lambda}{\psi \cdot d} = 1.$$

Иными словами, видность будет ненулевой, если выполнены условия:

$$D \leq \frac{\lambda}{\Omega} \text{ или } d \leq \frac{\lambda}{\psi}.$$

Формулу $\frac{Dd}{\lambda H} = 1$ легко запомнить, используя привычную схему: произведение самой большой (H) из величин на самую маленькую (λ) равно произведению двух остальных (Dd), к тому же еще эти величины обозначены одной и той же буквой.

Если источник не протяженный, а состоит из двух точечных некогерентных источников, находящихся на расстоянии D друг от друга, то картина пропадает при условии $d_0 = \frac{\lambda}{2\psi}$. Данный факт используется в звездном интерферометре Майкельсона для определения угловых расстояний между двумя близко расположенными звездами.

2. Обратим внимание на тот факт, что при вычислениях у нас появилась функция СИНК, которая ранее возникала при вычислении фурье-преобразования от прямоугольного импульса. «Поискем» его и здесь.

Действительно, СИНК появился при вычислении интеграла

$$\int_{-D/2}^{D/2} \cos(k\Delta s_y) dy.$$

Введем понятие функции излучения источника $U(y)$, характеризующей распределение излучаемой энергии по различным «точкам» источника, т.е. суммарная интенсивность, излучаемая источником, будет выражаться формулой:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot dy.$$

$$\text{(в рассмотренном выше случае } U(y) = \begin{cases} I_0/D, & |y| \leq D/2, \\ 0, & |y| > D/2. \end{cases}.)$$

Тогда появляется интеграл вида

$$\int_{-D/2}^{D/2} \cos(k\Delta s_y) dy \sim \int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cos(k\Delta s_y) dy,$$

или, если потребовать четности функции $U(y)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot e^{ik\Delta s_y} \cdot dy$$

Данное выражение есть не что иное, как пространственное преобразование Фурье от функции излучения источника. В таком случае для видности в случае произвольного (но симметричного) распределения излучаемой источником энергии, можно записать общую формулу:

$$V_{\text{прот}} = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot e^{ik\Delta s_y} \cdot dy}{\int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot dy} \right|.$$

Вспомним, что для точечного квазимонохроматического источника со спектральной плотностью интенсивности $S(\omega)$ ранее была получена формула:

$$V_{\text{кваз}}(\Delta t) = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{i\omega \Delta t} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega} \right|$$

(и здесь имеет место фурье-преобразование!)

Так как в обоих случаях при вычислении распределения интенсивности на экране интегрирование ведется по разным переменным (по пространственной y и по частоте ω), то нетрудно сообразить, что для квазимонохроматического протяженного источника, используемого в схеме Юнга, видность на экране будет произведением полученных ранее видностей:

$$V_{\text{кваз_прот}} = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot e^{ik\Delta s_y} \cdot dy}{\int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot dy} \right| \cdot \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{i\omega \Delta t} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega} \right|.$$

Обратим еще раз внимание, что множитель $V_{\text{прот}}$ не зависит от пространственной переменной x (координаты точек на экране), поэтому он одинаково влияет на видность картины на всем экране сразу. В множителе $V_{\text{кваз}}(\Delta t)$ есть переменная Δt , однозначно связанная с координатой x :

$$\Delta t = \frac{\Delta s_x}{c} = \frac{x \cdot d}{L \cdot c}.$$

Так как в центре интерференционной картины (в нулевом порядке интерференции) $V_{\text{квaz}}(\Delta t = 0) \equiv 1$, то, измеряя видность в центре, можно получить оценку для размера источника D . В свою очередь, определяя, в каком порядке $m_{\text{прон}}$ интерференционная картина размывается, можно оценить степень монохроматичности источника:

$$m_{\text{прон}} \approx \frac{\lambda}{\Delta \lambda}.$$

Пространственно-временная когерентность

Ранее для случая квазимонохроматического точечного источника вводилось понятие **комплексной степени когерентности**:

$$\gamma(\tau) = \frac{\langle E_0^*(t) E_0(t + \tau) \rangle}{2I_0},$$

связанное с вычислением автокорреляционной функции

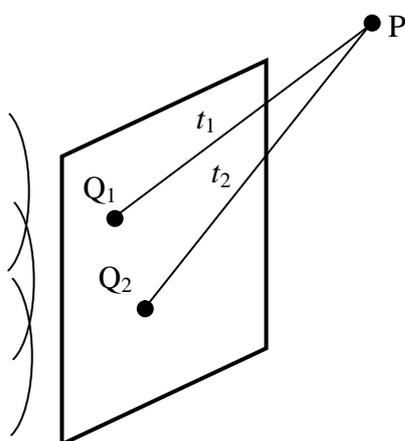
$$B(\tau) = \langle E(t) E(t + \tau) \rangle$$

(напомним, что $E(t) = \frac{1}{2} E_0(t) \cdot e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.}$).

Излучение выходило из одной точки (точечного источника) и приходило разными путями опять же в одну точку (точку наблюдения) с временной разницей τ . Величина $\gamma(\tau)$ характеризовала временную когерентность двух колебаний в одной точке пространства.

В случае протяженного источника говорят о когерентности одного и того же волнового поля в двух различных пространственно – временных точках.

В общем случае поле излучения создается множеством произвольных (по пространственно-временным характеристикам) источников. Выберем в поле излучения



две точки Q_1 и Q_2 пространства и мысленно поместим непрозрачный экран с двумя малыми отверстиями в этих точках. Эти отверстия станут вторичными источниками волн $E_1(Q_1, t)$ и $E_2(Q_2, t)$.

Выберем точку наблюдения P , в которую излучение от заданных точек Q_1 и Q_2 , вышедшее в моменты времени t_1 и t_2 соответственно, приходит одновременно.

Пространственно-временная корреляционная функция имеет вид:

$$B_{12}(\tau) = \langle E_1(Q_1, t) E_2(Q_2, t + \tau) \rangle,$$

где $\tau = t_2 - t_1$.

Аналогично случаю временной когерентности, запишем

$$E_i(t) = \frac{1}{2} E_{i0}(Q_i, t) \cdot e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.},$$

где $E_{i0}(Q_i, t)$ - комплексные амплитуды сигналов от точек Q_1 и Q_2 .

В результате получим:

$$B_{12}(\tau) = \sqrt{I_1 I_2} \cdot \text{Re} \left[\frac{\langle E_{10}(Q_1, t) E_{20}(Q_2, t + \tau) \rangle}{2\sqrt{I_1 I_2}} \cdot e^{i\omega_0 \tau} \right],$$

где I_1, I_2 - интенсивности волн, приходящих из точек Q_1 и Q_2 соответственно.

Под комплексной степенью пространственно-временной когерентности понимают

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\langle E_{10}(Q_1, t) E_{20}(Q_2, t + \tau) \rangle}{2\sqrt{I_1 I_2}}$$

Если расстояния от точек Q_1 и Q_2 до точки P одинаковы, т.е. моменты времени $t_1 = t_2$, то в точке P определяют степень пространственной когерентности. Изменяя расстояние между точками Q_1 и Q_2 и наблюдая за видностью интерференционной картины в точке P , можно определить радиус пространственной когерентности. Если видность картины близка к единице и не зависит от положения точек Q_1 и Q_2 , то говорят о полной пространственной когерентности (источник излучения, скорее всего, точечный). Если же с ростом расстояния между точками видность падает, то источник протяженный. Расстояние между источниками, при котором видность становится нулевой, и есть радиус пространственной когерентности.

Многоволновая интерференция.

Интерферометр Фабри-Перо (ИФП) представляет собой плоскопараллельную стеклянную пластину, на поверхности которой нанесены высокоотражающие покрытия (или два плоских зеркала, разделенные воздушным промежутком). Падающая волна частично отражается и частично проходит через первую границу. Такое же разделение происходит при каждом пересечении любой из отражающих поверхностей. В результате возникает большое (бесконечное) число отраженных и прошедших волн. Если на пути отраженных или прошедших волн установить собирающую линзу, то в ее фокальной плоскости сформируется интерференционная картина в виде колец равного наклона. Для расчета необходимо просуммировать **амплитуды** (а не интенсивности, потому что волны когерентны и интерferируют!) всех волн с учетом разности фаз между ними.

Введем амплитудные коэффициенты отражения ρ_{12} и ρ_{21} (в первом случае свет падает из среды 1 на границу со средой 2, во втором – наоборот) и пропускания τ_{12} и τ_{21} (обозначения аналогичны). Разность фаз δ между двумя соседними лучами, прошедшими через пластину толщины h с показателем преломления n под углом θ , задается формулой

$$\delta = k\Delta s = 2khncos\theta'.$$

где θ' - угол, определяемый из закона преломления $\sin \theta = n \sin \theta'$.

В результате для прошедшей волны имеем сумму комплексных амплитуд в виде:

$$E_{прош} = E_0 \tau_{12} \tau_{21} \cdot \left(1 + \rho_{21}^2 e^{i\delta} + \rho_{21}^4 e^{i2\delta} + \dots \right) = \frac{E_0 \tau_{12} \tau_{21}}{1 - \rho_{21}^2 e^{i\delta}},$$

а для отраженной волны:

$$E_{omp} = E_0 \rho_{12} + E_0 \tau_{12} \tau_{21} \rho_{21} e^{i\delta} \cdot \left(1 + \rho_{21}^2 e^{i\delta} + \rho_{21}^4 e^{i2\delta} + \dots \right) = E_0 \rho_{12} \left(1 - \frac{\rho_{21}^2 \tau_{12} \tau_{21}}{1 - \rho_{21}^2 e^{i\delta}} \right).$$

При выводе формул учтено, что при нормальном падении (а в ИФП исходная волна падает практически нормально) для коэффициентов отражения по амплитуде справедливо соотношение:

$$\rho_{12} = -\rho_{21},$$

причем, если $n_1 < n_2$, (свет падает из менее оптически плотной среды в более оптически плотную), то $\rho_{12} < 0$.

для отраженной волны надо учесть изменение фазы на π при первом отражении).

Для интенсивностей получаем **формулы Эйри**:

$$I_{прош} = I_0 \cdot \frac{1}{1 + \left[\frac{4R}{(1-R)^2} \right] \cdot \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)},$$
$$I_{omp} = I_0 \cdot \frac{\left[\frac{4R}{(1-R)^2} \right] \cdot \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}{1 + \left[\frac{4R}{(1-R)^2} \right] \cdot \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)},$$

где $R = |\rho_{12}|^2 = |\rho_{21}|^2$ - коэффициент отражения по энергии, $T = 1 - R = \tau_{12} \tau_{21}$ - коэффициент пропускания по энергии.

Замечание. В учебной литературе иногда вводят амплитудные коэффициенты отражения ρ и пропускания τ независимо от направления падения волны на границу раздела. При этом делается утверждение $T = \tau^2$. Это неверно хотя бы потому, что $\tau_{12} \neq \tau_{21}$, что

следует из формул Френеля для прохождения света через границу раздела (будет рассмотрено позднее).

Отметим также, что в приведенном выше выражении для разности фаз δ часто добавляют π . Следует быть внимательным, так как появление π связано с отражением от оптически более плотной среды, что в ИФП имеет место только для первой волны, падающей, как правило, из воздуха.

Отсюда имеем условия минимумов и максимумов:

Максимум прошедшего света (минимум отраженного света):

$$I_{\text{прош}} = I_0 \quad (I_{\text{отр}} = 0), \text{ если } \delta/2 = \pi m \quad (m=0,1,2,\dots);$$

Минимум прошедшего света (максимум отраженного света):

$$I_{\text{прош}} = \frac{I_0}{1 + \left[\frac{4R}{1-R^2} \right]} \left(I_{\text{отр}} = \frac{I_0 \cdot \frac{4R}{1-R^2}}{1 + \left[\frac{4R}{1-R^2} \right]} \right), \text{ если } \delta/2 = \pi(m + 1/2) \quad (m=0,1,2,\dots);$$

В центре интерференционной картины (угол падения $\theta=0$) разность фаз $\delta_0 = k\Delta s = 2kh\eta$ принимает любые значения, интенсивность прошедшего света равна

$$I_{\text{прош}} = I_0 \cdot \frac{1}{1 + \left[\frac{4R}{1-R^2} \right] \cdot \sin^2(\delta_0/2)}.$$

Из условия $\delta/2 = \pi m$ следует, что разность хода Δs между соседними прошедшими лучами равна целому числу длин волн $\Delta s = \frac{\delta}{k} = m\lambda$, т.е. эти лучи в результате

интерференции усиливают друг друга. Такое же условие справедливо и для всех отраженных лучей, кроме первого, т.к. для него при отражении фаза изменяется на противоположную. В результате имеем, что при $\Delta s = m\lambda$ интенсивность отраженной волны равна нулю, т.к. амплитуда первого отраженного луча равна сумме амплитуд всех остальных лучей.

Пусть на интерферометр Фабри-Перо падает свет от точечного монохроматического источника, а наблюдение интерференции ведется на экране, установленном в фокальной плоскости линзы, размещенной за интерферометром. Картина представляет собой совокупность концентрических колец, расстояние между которыми максимально в центральной части и уменьшается к периферии картины. Особенностью ИФП (как и интерференции в тонких пленках) является то, что максимальный порядок интерференции соответствует нулевому углу падения света (разность хода $\Delta s = 2h\eta \cos \theta'$ убывает с ростом угла θ'). Поэтому в случае квазимонохроматического источника с ростом диапазона излучаемых длин волн будет размываться центральная часть картины.

На самом деле, в случае точечного источника (например, сфокусированного лазерного пучка) интерференционная картина будет наблюдаться и без линзы и при произвольном положении экрана, установленного параллельно зеркалам. Для объяснения этого достаточно построить систему изображений источника, формируемую при отражении от зеркал интерферометра (рис. 1). Число таких изображений будет бесконечным, причем те из них, которые будут находиться с той же стороны от ИФП, что и источник, будут формировать интерференционную картину в проходящем свете. Изображения, получаемые за зеркалами ИФП, дадут интерференцию в отраженном свете. В этом случае картина, как говорят, не локализована (наблюдается всюду в области интерференции)

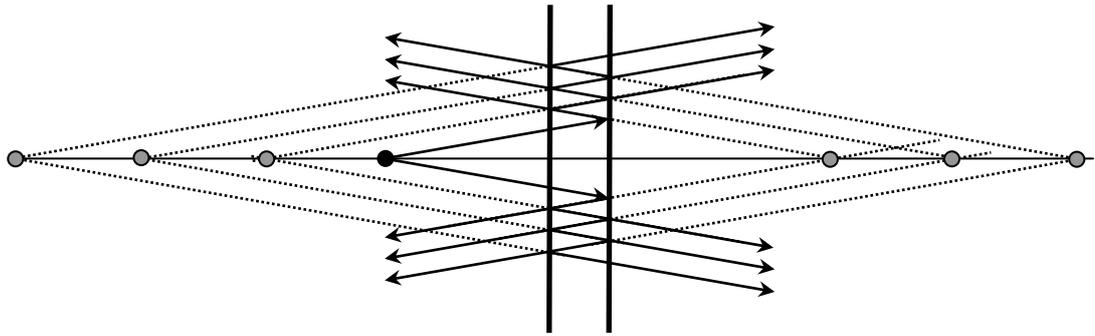


Рис. 1. Формирование изображений в интерферометре Фабри-Перо

В случае протяженного источника наличие линзы обязательно! Любая точка протяженного источника будет давать систему интерференционных колец в фокальной плоскости линзы. Точно такую же картину и в том же самом месте сформируют и все остальные точки источника. Поэтому интерференционная картина (полосы равного наклона) будет очень яркой и отчетливой, и она локализована в бесконечности.

Подробнее рассказ об интерферометре Фабри-Перо будет в теме «Спектральные приборы».

Многоволновая интерференция применяется также при изготовлении интерференционных зеркал (с высоким коэффициентом отражения до 100 процентов) и просветляющих покрытий (с практически нулевым отражением). Для этого на стеклянную подложку ($n_{\text{стекла}}=1,5$) напыляют тонкие диэлектрические прозрачные слои из веществ с показателями преломления выше ($n_{\text{в}} > n_{\text{стекла}}$) и ниже ($n_{\text{н}} < n_{\text{стекла}}$) стекла.

При однослойном покрытии с низким показателем преломления $n_{\text{н}}$ и оптической толщине $\lambda/4$ волны, отраженные от поверхностей покрытия, будут приходить в противофазе и, следовательно, гасить друг друга (вследствие различных амплитуд волн гашение будет неполным). Действительно, на обеих границах волны отражаются от оптически более плотной среды, поэтому разность хода будет равна удвоенной оптической толщине слоя, т.е. $\lambda/2$.

При многослойном покрытии (последовательно наносятся слои с показателями преломления $n_{\text{в}}-n_{\text{н}}-n_{\text{в}}-n_{\text{н}}-\dots-n_{\text{в}}-n_{\text{н}}-n_{\text{в}}$, всего нечетное число слоев) с оптической толщиной $\lambda/4$. Для каждой пары соседних границ на одной из них всегда будет скачок фазы на π . Поэтому к удвоенной оптической толщине слоя $\lambda/2$ следует каждый раз добавлять $\lambda/2$ за счет скачка фазы. Поэтому все отраженные волны будут, как принято говорить, «в фазе» (на самом деле разность фаз кратна 2π). При этом коэффициент отражения резко возрастает и приближается к 100 процентам. Таким образом изготавливают интерференционные зеркала для лазеров.

Отметим, что зеркала обладают высоким коэффициентом отражения для довольно узкого диапазона длин волн, на который они и рассчитаны. Для других длин волн зеркала могут оказаться прозрачными. При изменении угла падения света на зеркало оптическая толщина слоя изменяется, что приводит к смещению диапазона длин волн, отражаемых зеркалом.

Семинары 8-9. Интерференция монохроматического света. Схема Юнга.

Основной материал семинара изложен в конспекте лекций по оптике по теме «Интерференция монохроматического света».
Здесь только дополнительные моменты.

Перечислим порядок решения типичных задач по интерференции:

- 1) Рисуем схему эксперимента: источник, объект, на котором осуществляется интерференция, экран;
- 2) Строим два изображения, формирующиеся при прохождении света от источника через объект, они и станут новыми «источниками» для интерференции;
- 3) Из геометрии находим все расстояния, необходимые для нахождения параметров интерференционной картины;
- 4) Для нахождения области интерференции от новых «источников» проводим лучи, проходящие через крайние точки объекта, что позволит найти границы реальных пучков. Область их наложения друг на друга и даст область интерференции.

1. Об интерференции плоских волн.

Расчеты для схемы Юнга дают выражение для ширины Δx интерференционных полос:

$$\Delta x = \frac{\lambda \cdot L}{d},$$

где d – расстояние между источниками, L – расстояние от источников до экрана.

Начнем мысленно удалять источники O_1 и O_2 вдоль прямых O_1O и O_2O на бесконечность (см. рис.). При этом будут расти и d , и L , но отношение этих величин остается неизменным:

$$\frac{d}{L} \approx \theta.$$

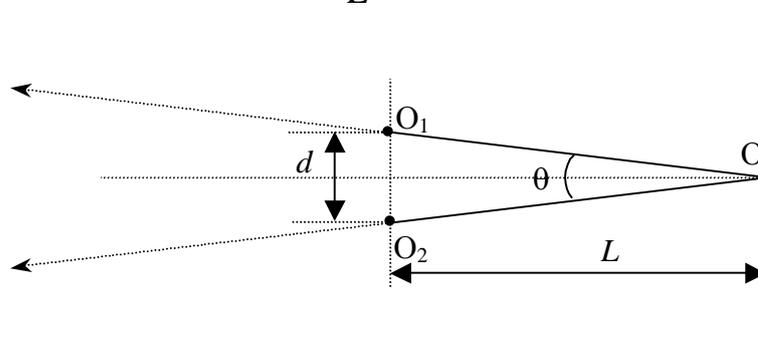


Рис. 1. К интерференции плоских волн

Удаление источников на бесконечность эквивалентно переходу к интерференции двух плоских волн, угол схождения которых (угол между векторами \vec{k}_1 и \vec{k}_2) равен θ . В результате получим:

$$\Delta x = \frac{\lambda \cdot L}{d/L} \approx \frac{\lambda}{\theta}$$

Как видим, ширина полос не зависит от положения экрана.

2. Интерференция с помощью билинзы.

Билинза существует в двух модификациях (см. рис.): в первом случае линзу разрезают пополам и половинки раздвигают на расстояние h ; во втором случае из линзы удаляют центральную часть шириной h и сдвигают оставшиеся части до соприкосновения.

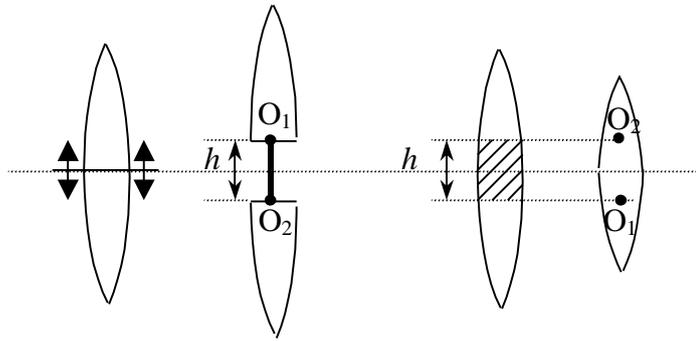


Рис. 2. Две модификации бипризмы.

Основные моменты расчета интерференционной картины заключаются в нахождении положения изображений источника, построении хода лучей, идущих от изображений, нахождении области интерференции. Основные формулы – формулы для схемы Юнга:

$$\Delta s = \frac{x \cdot d}{L}; \quad \Delta x = \frac{\lambda \cdot L}{d}.$$

2А. Задано: источник В, величины a , $F < a$, h и L_0 . Найти параметры интерференционной картины.

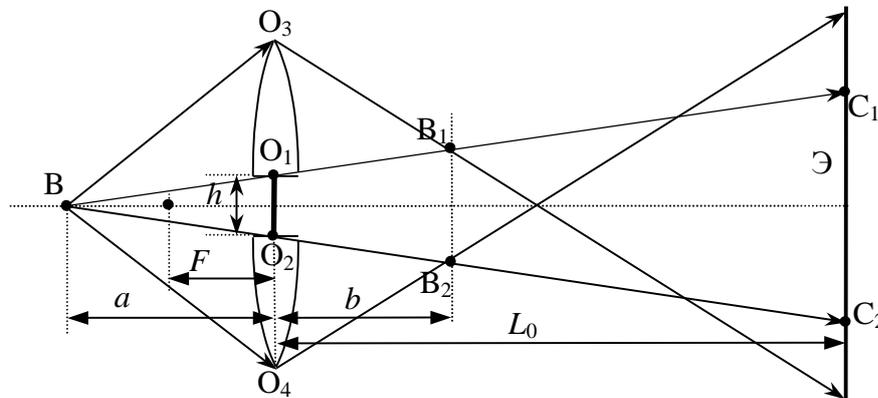


Рис. 3. Схема интерференции, получаемой с помощью билинзы

1) По формуле тонкой линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ находим расстояние $b > 0$ от билинзы до изображений (действительных).

2) Лучи, выходящие из источника В и проходящие через оптические центры O_1 и O_2 каждой из половинок билинзы, не преломляются, что позволяет легко определить положения изображений B_1 и B_2 и расстояние между ними:

$$d = B_1 B_2 = h \cdot \frac{a+b}{a}.$$

3) Расстояние от изображений до экрана равно:

$$L = L_0 - b.$$

4) Для нахождения области интерференции проводим лучи BO_1 и BO_3 от источника до крайних точек верхней половинки билинзы. Далее они пойдут через изображение B_1 , формируя конус лучей, расходящихся от B_1 . Аналогичное построение выполняется и для нижней половинки билинзы.

Область интерференции на экране Э – это область наложения световых конусов, в данном случае это отрезок $C_1 C_2$, равный

$$c = C_1 C_2 = h \cdot \frac{a+L_0}{a}.$$

Полученные результаты позволяют найти и расстояние Δx между интерференционными полосами, и число N полос на экране.

$$\Delta x = \frac{\lambda \cdot L}{d} = \frac{\lambda \cdot (L_0 - b) \cdot a}{h \cdot (a + b)}; \quad N = \frac{c}{\Delta x}.$$

2В. Задано: источник В, величины a , $F > a$, h и L_0 . Найти параметры интерференционной картины.

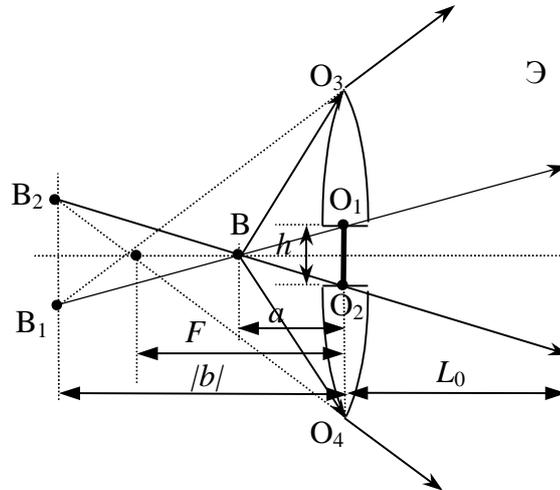


Рис. 4. Схема интерференции, получаемой с помощью билинзы

1) По формуле тонкой линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ находим расстояние $b < 0$ от билинзы до изображений (мнимых).

2) Лучи, выходящие из источника В и проходящие через оптические центры O_1 и O_2 каждой из половинок билинзы, не преломляются, что позволяет легко определить положения изображений V_1 и V_2 и расстояние между ними:

$$d = V_1 V_2 = h \cdot \frac{|b|}{a}.$$

3) Расстояние от изображений до экрана равно:

$$L = L_0 + |b|.$$

4) Для нахождения области интерференции проводим лучи VO_1 и VO_3 от источника до крайних точек верхней половинки билинзы. Далее они пойдут так, чтобы их продолжение прошло через изображение V_1 . Аналогичное построение выполняется и для нижней половинки билинзы.

Из рисунка видно, что пучки, прошедшие через половинки бипризмы, не пересекаются. Следовательно, интерференционной картины не будет.

2С. Если источник В будет находиться в фокальной плоскости билинзы ($a=F$), то после прохождения сформируются два параллельных пучка света, угол расхождения θ которых будет равен

$$\theta \approx \frac{h}{F}.$$

Так как области наложения пучков не будет, то не будет и интерференционной картины.

Аналогичные случаи со второй модификацией билинзы (рис. 2) разобрать самостоятельно.

3. Интерференция с помощью бипризмы.

А) Источник света S находится на расстоянии a от бипризмы (угол при вершине θ , показатель преломления n). Обычно при нахождении изображений S_1 и S_2 в бипризме легко находится угловое расстояние между ними, равное $2\theta \cdot (n-1)$. При этом делается утверждение, что изображения S_1 и S_2 будут находиться от бипризмы на таком же расстоянии a , что и источник S (рис. 5).

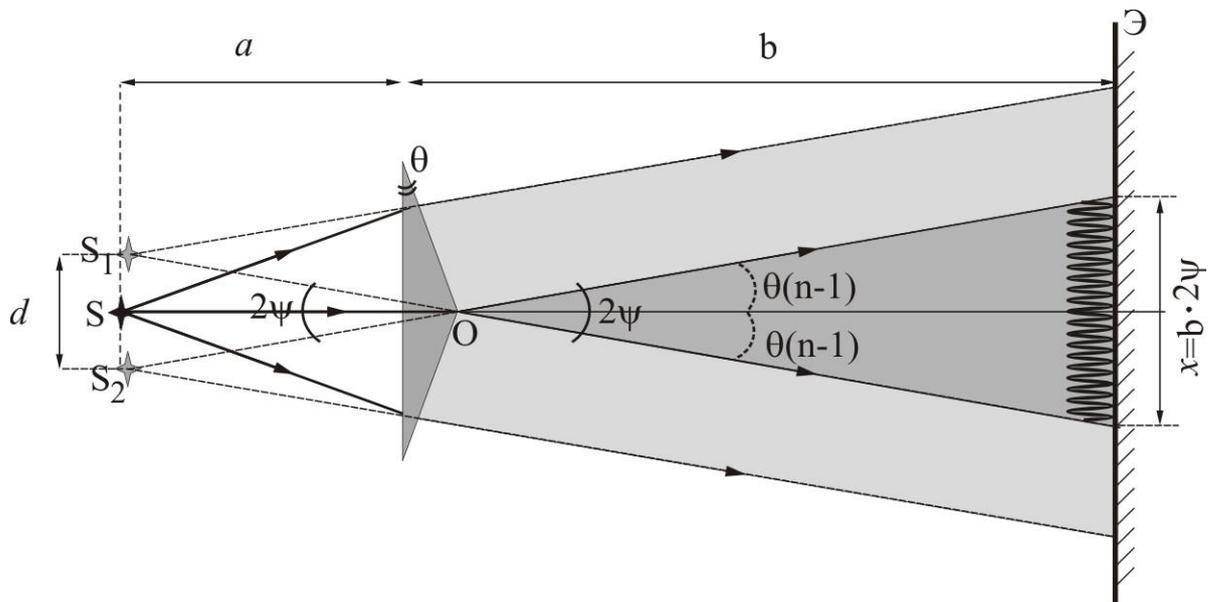


Рис. 5. Схема интерференции, получаемой с помощью бипризмы

Обоснуем это утверждение. Для этого построим изображения точечного источника при прохождении через оптический клин.

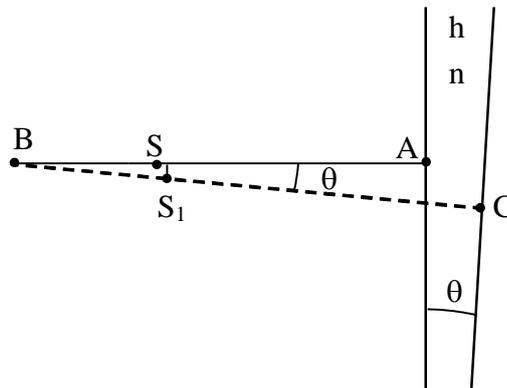


Рис. 6. Построение изображения при прохождении излучения через оптический клин

Источник света S расположен на расстоянии a (отрезок SA) от передней поверхности клина (толщина h , показатель преломления n , угол $\theta \ll 1$). Построим изображение S_1 , возникающее при последовательном преломлении на передней и задней поверхностях клина (рис. 6). Для этого воспользуемся формулой преломления на сферической поверхности:

$$\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}, \quad (1)$$

где s_1 и s_2 – координаты источника и изображения, излучение идет из среды с показателем преломления n_1 в среду с показателем преломления n_2 .

В нашем случае обе поверхности плоские ($R \rightarrow \infty$), поэтому при преломлении на плоской поверхности получим

$$\frac{s_2}{n_2} = \frac{s_1}{n_1}. \quad (1a)$$

В случае отражения в формуле (1) следует положить $n_1 = -n_2$, тогда

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} = \frac{2}{R}. \quad (2)$$

а для плоской поверхности

$$s_2 + s_1 = 0. \quad (2a)$$

Из формул (1a)-(2a) следует, что при преломлении на плоской поверхности раздела источник и его изображение находятся по одну сторону от границы раздела (знаки s_1 и s_2 совпадают), а при отражении – по разные (s_1 и s_2 имеют разные знаки).

Положение изображения S_1 найдем в два этапа.

1. При преломлении на передней поверхности в соответствии с (1a), где $n_1 = 1$, $n_2 = n$, изображение будет находиться в точке В на расстоянии $BA=na$ от передней поверхности. Это означает, что в среде с показателем преломления n лучи кажутся выходящими из точки В.

2. Опустим из т.В перпендикуляр на заднюю поверхность клина, длина перпендикуляра ВС будет равна

$$BC = (BA + h) \cdot \cos\theta = (na + h) \cdot \cos\theta.$$

В соответствии с (1a) расстояние от т.С до изображения S_1 будет равно

$$CS_1 = \frac{BC}{n} = \left(a + \frac{h}{n} \right) \cdot \cos\theta.$$

Для длины отрезка BS_1 справедливо соотношение

$$BS_1 = \frac{n-1}{n} BC = \left[(n-1)a + \frac{(n-1)h}{n} \right] \cdot \cos\theta.$$

Опустим из т. S_1 перпендикуляр на линию ВА. Теперь несложно найти, на сколько источник S и изображение S_1 смещены относительно друг друга. По вертикальной оси

$$(SS_1)_{\text{верт}} = BS_1 \sin\alpha = \left[(n-1)a + \frac{(n-1)h}{n} \right] \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta.$$

Если $\theta \ll 1$ и $h \ll a$, то получаем хорошо знакомую формулу:

$$(SS_1)_{\text{верт}} \approx (n-1)\theta \cdot a.$$

(смещение мнимого источника при интерференции на бипризме)

По горизонтали смещение равно

$$(SS_1)_{\text{гор}} = BS - BS_1 \cdot \cos\alpha = (n-1)a - \left[(n-1)a + \frac{(n-1)h}{n} \right] \cdot \cos^2\alpha \approx -\frac{(n-1)h}{n}$$

(изображение S_1 чуть ближе к поверхности клина, чем источник S).

Если $h \ll a$, то смещение по горизонтали пренебрежимо мало, и можно считать, что источник и его изображение находятся на одинаковом расстоянии от передней поверхности клина.

В случае плоскопараллельной пластинки (ППП) угол α равен нулю, изображение S_1 окажется на линии SA, причем ближе к поверхности, чем источник S, на расстояние

$$(SS_1)_{\text{гор}} = \frac{(n-1)h}{n}.$$

Таким образом, можно считать, что мнимые источники при интерференции на бипризме смещены вверх-вниз на расстояние

$$\frac{d}{2} = (n-1)\theta \cdot a,$$

что и показано на рис. 5.

Второй, более простой способ обоснования.

Направим от источника на верхнюю половину бипризмы два луча (рис. 7).

Первый направим практически горизонтально, чуть выше оси, чтобы попасть на верхнюю половину. После бипризмы он преломится чуть вниз, на угол $\psi = (n-1)\theta$.

Второй луч направим чуть вверх, под таким же углом ψ к горизонтальной оси. Тогда после прохождения бипризмы он пойдёт горизонтально!

Найдем точку пересечения, продолжая оба прошедших луча. Нетрудно заметить, что точка пересечения (мнимое изображение) будет смещена вверх от источника на расстояние

$$\frac{d}{2} = \psi \cdot a.$$

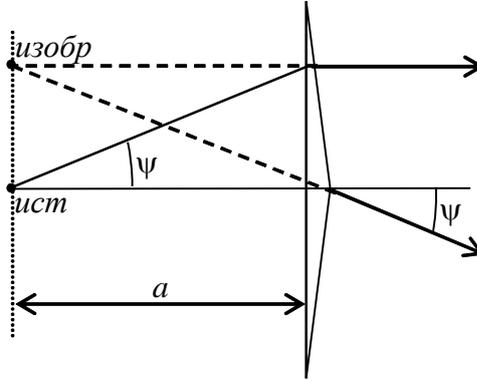


Рис. 7. Интерференция с помощью бипризмы

Б) На бипризму (показатель преломления n , угол при вершине $\theta \ll 1$, поперечный размер H) нормально падает плоская волна с длиной волны λ . Найти максимальное число интерференционных полос, которое можно наблюдать на экране.

Решение.

После прохождения бипризмы сформируются две плоские волны, сходящиеся под углом

$$\beta = 2(n-1)\theta,$$

поэтому ширина полос не зависит от положения экрана и равна

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\beta} = \frac{\lambda}{2(n-1)\theta}.$$

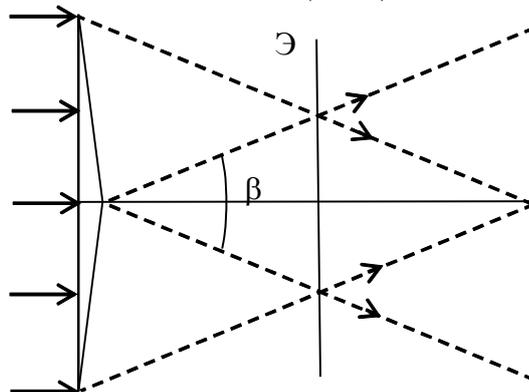


Рис. 8. Интерференция при падении плоской волны на бипризму

Из рис. 8 видно, что область интерференции представляет собой ромб, для получения максимального числа полос экран следует установить по диагонали ромба, равной $\frac{H}{2}$.

Число полос на экране равно

$$N = \frac{H}{2\Delta x} = \frac{H(n-1)\theta}{\lambda}.$$

Задача. Свет от точечного монохроматического (длина волны λ) источника падает на билинзу (конструкция и параметры неизвестны!), находящуюся на расстоянии a от источника. Экран помещают за билинзой и начинают его отодвигать. При расстоянии ma от билинзы на экране наблюдаются две четкие яркие точки, расстояние между которыми равно l_0 . На какое расстояние от билинзы надо отодвинуть экран, чтобы в этих же точках экрана наблюдались интерференционные максимумы 1-го порядка? Сколько всего полос будет видно на экране? Найти также параметры билинзы.

Решение. (рисунок сообразить самостоятельно!)

Наблюдение двух четких точек на экране означает, что это изображения источника, полученные в двух половинках билинзы. Из формулы тонкой линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{ma} = \frac{1}{f}$$

можно найти фокусное расстояние билинзы: $f = \frac{m}{m+1}a$.

Выполняя построение хода лучей, нетрудно убедиться (было на семинаре!), что область интерференции при дальнейшем удалении экрана появится только, если половинки билинзы **раздвинуты** на некоторое расстояние h друг от друга. Его можно найти их подобия треугольников:

$$\frac{h}{l_0} = \frac{a}{(m+1)a}; \quad h = \frac{l_0}{(m+1)}.$$

Из условия наблюдения максимумов 1-го порядка следует, что расстояние между соседними максимумами равно $\Delta x = \frac{l_0}{2}$. Используя формулу $L \cdot \lambda = \Delta x \cdot d$, получим

$$L \cdot \lambda = \frac{l_0}{2} \cdot l_0; \quad L = \frac{l_0^2}{2\lambda}.$$

Искомое расстояние b от билинзы до экрана будет равно

$$b = ma + L = ma + \frac{l_0^2}{2\lambda}.$$

Ширину области интерференции S можно найти опять же из подобия треугольников

$$\frac{S}{a+b} = \frac{l_0}{(m+1)a}$$

Число полос (если не ошибся!):

$$N = 2 + \frac{l_0^2}{(m+1)a\lambda}.$$

Семинар 10. Интерференция квазимонохроматического света.

Основной материал семинара изложен в конспекте лекций по оптике для ФНМ.
Здесь только дополнительные моменты.

1. Найти распределение интенсивности на экране в схеме Юнга, если задано спектральное распределение излучения по частотам $S(\omega)$, симметричного относительно некоторой частоты ω_0 .

Для монохроматического источника распределение интенсивности на экране в зависимости от разности хода Δs задается формулой:

$$I(\Delta s) = I_0 \cdot (1 + \cos(k \cdot \Delta s)).$$

Перейдем от пространственного представления к временному:

$$k \cdot \Delta s = kc \cdot \frac{\Delta s}{c} = \omega \cdot \Delta t,$$

где c - скорость света, $\Delta t = \frac{\Delta s}{c}$ - временное запаздывание.

Интенсивность света источника представима в виде:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega,$$

тогда

$$dI(\Delta t) = S(\omega) \cdot (1 + \cos(\omega \cdot \Delta t)) d\omega.$$

Интегрируем по частотам:

$$\begin{aligned} I(\Delta t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot (1 + \cos(\omega \cdot \Delta t)) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega = \\ &= I_0 + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega. \end{aligned}$$

Вспомним, что функция $S(\omega)$ симметрична относительно некоторой частоты ω_0 .
Введем новую переменную

$$\Omega = \omega - \omega_0,$$

тогда

$$S(\omega) = S(\Omega + \omega_0) = f(\Omega),$$

где $f(\Omega)$ - симметрична относительно нуля.

Кроме того

$$\cos(\omega \cdot \Delta t) = \cos((\Omega + \omega_0) \cdot \Delta t) = \cos(\Omega \cdot \Delta t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \Delta t) - \sin(\Omega \cdot \Delta t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot \Delta t).$$

Из симметрии $f(\Omega)$ следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) \sin(\Omega \cdot \Delta t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot \Delta t) d\Omega = 0.$$

В результате

$$I(\Delta t) = I_0 + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega = I_0 + \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) \cos(\Omega \cdot \Delta t) d\Omega \right] \cdot \cos(\omega_0 \cdot \Delta t) =$$

$$= I_0 \left(1 + \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) \cos(\Omega \cdot \Delta t) d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) d\Omega} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \Delta t) \right)$$

так как $I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) d\Omega$.

Вспомним, что видность $V(\Delta t)$ интерференционной картины определяется формулой:

$$V(\Delta t) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где I_{\max} и I_{\min} - значения интенсивности в соседних максимуме и минимуме соответственно.

Из структуры формулы следует, что видность $V(\Delta t)$ интерференционной картины равна:

$$V(\Delta t) = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) \cos(\Omega \cdot \Delta t) d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) d\Omega} \right|,$$

т.е. равна модулю нормированного фурье преобразованию от формы линии в спектре излучения.

Видность принимает максимальное значение, равное 1, при $\Delta t = 0$, т.е. в центре интерференционной картины, где $\Delta s = 0$.

Графики видности и распределения интенсивностей в зависимости от формы линии приведены в Лекциях.

2. Пусть вследствие реализации какой-либо интерференционной схемы (например, схемы Юнга) в точку наблюдения приходят две одинаковые по амплитуде волны, вышедшие из одного источника. Разности хода Δs между волнами соответствует временной интервал

$$\tau = \frac{\Delta s}{c}, \text{ где } c - \text{ скорость света.}$$

Волны в этом случае представимы в виде:

$$E_1(t) = E_0(t); \quad E_2(t) = E_0(t + \tau).$$

Интенсивность пропорциональна среднему значению квадрата амплитуды:

$$I(\tau) \sim \langle (E_1(t) + E_2(t))^2 \rangle = \langle E_1^2(t) \rangle + \langle E_2^2(t) \rangle + 2\langle E_1(t)E_2(t) \rangle = 2\langle E_0^2(t) \rangle + 2\langle E_0(t)E_0(t + \tau) \rangle$$

Функцию

$$B(\tau) = \langle E_0(t)E_0(t + \tau) \rangle$$

называют *автокорреляционной функцией*.

Считая интенсивность каждой из волн равной I_0 , в итоге получим:

$$I(\tau) = 2I_0 + 2B(\tau).$$

Вспомним, что если задана спектральная плотность $S(\omega)$ излучения, то для интенсивности справедливо соотношение

$$I(\tau) = 2I_0 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot \cos(\omega\tau) \cdot d\omega.$$

Таким образом, автокорреляционная функция $B(\tau)$ и спектральная плотность $S(\omega)$ излучения связаны соотношением:

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot \cos \omega \tau \cdot d\omega.$$

3. О комплексной степени когерентности.

Представим волну в виде

$$E(t) = \frac{1}{2} E_0(t) \cdot e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.},$$

где $E_0(t)$ - медленно меняющаяся амплитуда волны, запись «к.с.» означает комплексно сопряженную величину.

В этом случае

$$\begin{aligned} \langle E(t)E(t+\tau) \rangle &= \left\langle \left(\frac{1}{2} E_0(t) e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2} E_0^*(t) e^{-i\omega_0 t} \right) \left(\frac{1}{2} E_0(t+\tau) e^{i\omega_0(t+\tau)} + \frac{1}{2} E_0^*(t+\tau) e^{-i\omega_0(t+\tau)} \right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{4} \langle E_0(t) E_0(t+\tau) e^{i\omega_0(2t+\tau)} + E_0^*(t) E_0(t+\tau) e^{i\omega_0 \tau} + \text{к.с.} \rangle = \frac{1}{4} (0 + \langle E_0^*(t) E_0(t+\tau) \rangle e^{i\omega_0 \tau} + \text{к.с.}) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\langle E_0^*(t) E_0(t+\tau) \rangle e^{i\omega_0 \tau} \right] = I_0 \cdot \operatorname{Re} \left[\gamma(\tau) \cdot e^{i\omega_0 \tau} \right], \end{aligned}$$

где

$$\gamma(\tau) = \frac{\langle E_0^*(t) E_0(t+\tau) \rangle}{2I_0}$$

- **комплексная степень когерентности**. Функцию

$$B^k(\tau) = I_0 \cdot \gamma(\tau) \cdot e^{i\omega_0 \tau}$$

называют **комплексной функцией корреляции**.

Если использовать представление

$$\gamma(\tau) = |\gamma(\tau)| \cdot e^{i\delta},$$

то для интенсивности получим:

$$I(\tau) = 2I_0 (1 + |\gamma(\tau)| \cos(\omega_0 \tau + \delta)).$$

Из данной формулы следует формула для видности:

$$V(\tau) = |\gamma(\tau)|.$$

Семинар. Интерференция от протяженного источника света.

В данном тексте повторяется и материал из конспекта лекций

1. Получение интерференционной картины в оптическом диапазоне возможно только в случае, когда интерферирующие волны исходят из одного источника. В схеме Юнга свет от точечного источника падает на плоскость с двумя бесконечно узкими щелями: именно они и являются вторичными когерентными источниками, дающими на экране интерференционную картину. Вопрос: как изменится картина, если источник станет **протяженным**? Протяженный источник представляет собой совокупность некогерентных точечных источников, поэтому для расчета интерференции необходимо **просуммировать интенсивности**, даваемые каждым из точечных (бесконечно малых) фрагментов источника.

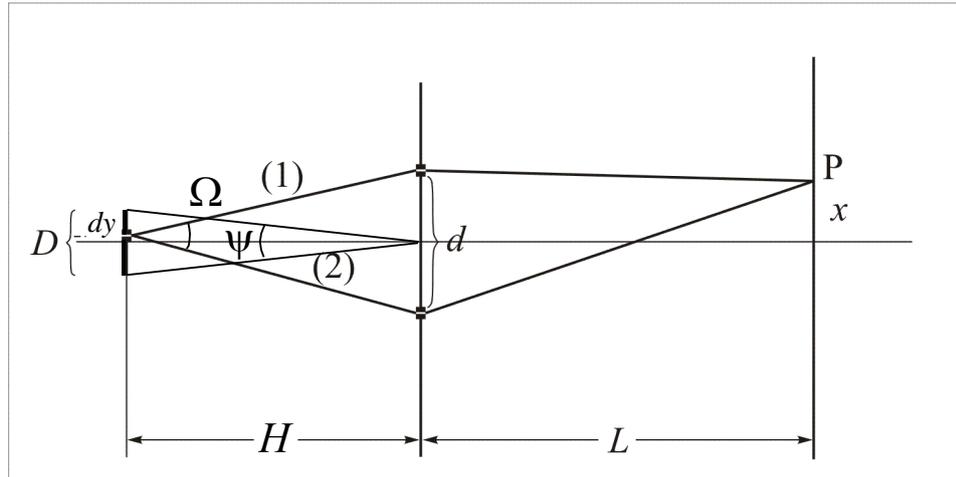


Рис. 1. К расчету интерференции от протяженного источника.

Пусть расстояние от протяженного монохроматического источника интенсивностью I_0 до плоскости со щелями равно $H \gg d$, размер равномерно светящегося источника D (рис. 1). Обозначим за y координату какой либо точки источника (источник расположен в области $|y| < \frac{D}{2}$). Дополнительная разность хода Δs_y между лучами, идущими от точки y к двум щелям, рассчитывается точно также, как и в схеме Юнга:

$$\Delta s_y = \frac{y \cdot d}{H},$$

интенсивность источника длиной dy равна $dI_{\text{ист}} = I_0 \frac{dy}{D}$.

Тогда суммарная разность хода равна $\Delta s = \Delta s_x + \Delta s_y = \frac{x \cdot d}{L} + \frac{y \cdot d}{H}$, интенсивность интерференционной картины от такого источника дается формулой:

$$dI_{\text{экp}} = dI_{\text{ист}} \cdot (1 + \cos(k(\Delta s_x + \Delta s_y))).$$

Раскрываем $\cos(k(\Delta s_x + \Delta s_y)) = \cos(k\Delta s_x) \cdot \cos(k\Delta s_y) + \sin(k\Delta s_x) \cdot \sin(k\Delta s_y)$ и интегрируем по y в пределах от $-\frac{D}{2}$ до $\frac{D}{2}$. Интеграл от $\sin(k\Delta s_y)$ в симметричных пределах дает ноль, поэтому остается:

$$I_{\text{экp}} = \frac{I_0}{D} \cdot \left(D + \cos(k\Delta s_x) \cdot \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \cos(k\Delta s_y) dy \cdot \right) = \frac{I_0}{D} \cdot \left(D + \cos(k\Delta s_x) \cdot \frac{\sin\left(k \frac{yd}{H}\right)}{k \frac{d}{H}} \Big|_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \cdot \right) =$$

$$= \frac{I_0}{D} \cdot \left(D + \cos(k\Delta s_x) \cdot \frac{\sin\left(k \frac{Dd}{2H}\right)}{k \frac{Dd}{2H}} \cdot D \right) = I_0 \cdot \left(1 + \frac{\sin\left(k \frac{Dd}{2H}\right)}{k \frac{Dd}{2H}} \cdot \cos(k\Delta s_x) \right).$$

Структура полученной формулы такая же, как и для квазимонохроматического вида, следовательно, видность картины равна

$$V(x) = \left| \frac{\sin\left(k \frac{Dd}{2H}\right)}{k \frac{Dd}{2H}} \right| = \left| \text{sinc}\left(k \frac{Dd}{2H}\right) \right|,$$

причем видность **не зависит** от x . Это означает, что по мере увеличения размеров источника видность уменьшается во ВСЕХ точках экрана, а не только по краям, как в случае с квазимонохроматическим источником (рис. 2). Видность станет равной нулю, когда

$$k \frac{Dd}{2H} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{Dd}{2H} = \pi \cdot \frac{Dd}{\lambda H} = \pi,$$

откуда условие полного пропадания интерференции запишется в виде:

$$\frac{Dd}{\lambda H} = 1.$$

Заметим, что часто фразу «полное пропадание интерференционной картины» ошибочно трактуют как отсутствие какой-либо освещенности на экране. Как следует из формул, это не так: интерференционный член становится равным нулю, а интенсивность на экране равна сумме интенсивностей каждого из источников, т.е. наблюдается равномерно засвеченное поле.

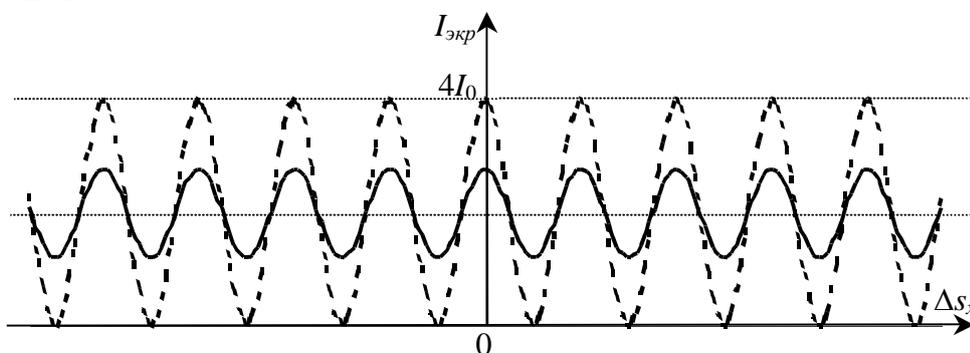


Рис. 2. Зависимость интенсивности от разности хода в случае протяженного (сплошная линия) и точечного (штриховая линия) источника.

Расстояние между щелями $d_0 = \frac{\lambda H}{D}$, при котором пропадает интерференционная картина, называют **радиусом когерентности**. Вводя $\psi = \frac{D}{H}$ - угол, под которым виден протяженный источник от плоскости щелей (или **угловой размер источника**), получаем для радиуса когерентности

$$d_0 = \frac{\lambda}{\psi}.$$

Введем также понятие **угловой апертуры интерференции** Ω - угла, под которым из центра источника видны щели:

$$\Omega = \frac{d}{H}.$$

С учетом введенных обозначений условие нулевого значения видности можно записать в следующих видах:

$$\frac{Dd}{\lambda H} = \frac{D \cdot \Omega}{\lambda} = \frac{\psi \cdot d}{\lambda} = 1.$$

Иными словами, видность будет ненулевой, если выполнены условия:

$$D \leq \frac{\lambda}{\Omega} \text{ или } d \leq \frac{\lambda}{\psi}.$$

Формулу $\frac{Dd}{\lambda H} = 1$ легко запомнить, используя привычную схему: произведение самой большой (H) из величин на самую маленькую (λ) равно произведению двух остальных (Dd), к тому же еще эти величины обозначены одной и той же буквой.

Если источник не протяженный, а состоит из двух точечных некогерентных источников, находящихся на расстоянии D друг от друга, то картина пропадает при условии $d_0 = \frac{\lambda}{2\psi}$. Данный факт используется в звездном интерферометре Майкельсона для определения угловых расстояний между двумя близко расположенными звездами.

2. Обратим внимание на тот факт, что при вычислениях у нас появилась функция СИНК, которая ранее возникала при вычислении фурье-преобразования от прямоугольного импульса. «Поискем» его и здесь.

Действительно, СИНК появился при вычислении интеграла

$$\int_{-D/2}^{D/2} \cos(k\Delta s_y) dy.$$

Введем понятие функции излучения источника $U(y)$, характеризующей распределение излучаемой энергии по различным «точкам» источника, т.е. суммарная интенсивность, излучаемая источником, будет выражаться формулой:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot dy.$$

(в рассмотренном выше случае $U(y) = \begin{cases} I_0/D, & |y| \leq D/2, \\ 0, & |y| > D/2 \end{cases}$).

Тогда появляется интеграл вида

$$\int_{-D/2}^{D/2} \cos(k\Delta s_y) dy \sim \int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cos(k\Delta s_y) dy,$$

или, если потребовать четности функции $U(y)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot e^{ik\Delta s_y} \cdot dy$$

Данное выражение есть не что иное, как пространственное преобразование Фурье от функции излучения источника. В таком случае для видности в случае произвольного (но

симметричного) распределения излучаемой источником энергии, можно записать общую формулу:

$$V_{\text{прот}} = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot e^{ik\Delta s_y} \cdot dy}{\int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot dy} \right|.$$

Вспомним, что для точечного квазимонохроматического источника со спектральной плотностью интенсивности $S(\omega)$ ранее была получена формула:

$$V_{\text{кваз}}(\Delta t) = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot \Delta t} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega} \right|$$

(и здесь имеет место фурье-преобразование!)

Так как в обоих случаях при вычислении распределения интенсивности на экране интегрирование ведется по разным переменным (по пространственной y и по частоте ω), то нетрудно сообразить, что для квазимонохроматического протяженного источника, используемого в схеме Юнга, видность на экране будет произведением полученных ранее видностей:

$$V_{\text{кваз_прот}} = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot e^{ik\Delta s_y} \cdot dy}{\int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot dy} \right| \cdot \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot \Delta t} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega} \right|.$$

Обратим еще раз внимание, что множитель $V_{\text{прот}}$ не зависит от пространственной переменной x (координаты точек на экране), поэтому он одинаково влияет на видность картины на всем экране сразу. В множителе $V_{\text{кваз}}(\Delta t)$ есть переменная Δt , однозначно связанная с координатой x :

$$\Delta t = \frac{\Delta s_x}{c} = \frac{x \cdot d}{L \cdot c}.$$

Так как в центре интерференционной картины (в нулевом порядке интерференции) $V_{\text{кваз}}(\Delta t = 0) \equiv 1$, то, измеряя видность в центре, можно получить оценку для размера источника D . В свою очередь, определяя, в каком порядке $m_{\text{прот}}$ интерференционная картина размывается, можно оценить степень монохроматичности источника:

$$m_{\text{прот}} \approx \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

3. Рассмотрим формирование интерференционной картины от протяженного источника в схеме Юнга с другой позиции. Как отмечалось ранее, разность хода между волнами, идущими от двух отверстий O_1 и O_2 к точке экрана A с координатой x , равна:

$$\Delta s_x = \frac{d \cdot x}{L} = d \cdot \sin \psi$$

где ψ - угол между направлением OA на точку наблюдения и горизонтальной осью OA_0 (рис. 3). Отсюда следует, что для всех точек, лежащих на линии OA , разность хода Δs_x одна и та же, независимо от положения экрана.

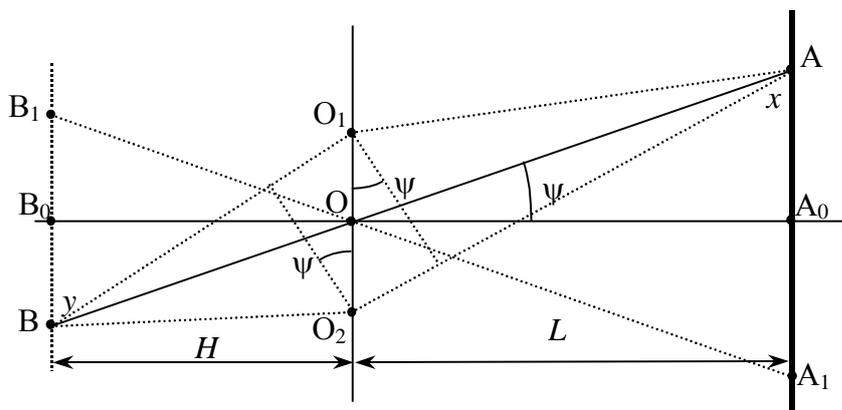


Рис. 3. К нахождению нулевого порядка интерференции при смещении источника

Поместим источник света в точку B , лежащую на продолжении линии OA . В этом случае разность хода между волнами, идущими от источника B с координатой y до отверстий O_1 и O_2 будет точно такой же и равной

$$\Delta s_y = \frac{d \cdot y}{H} = d \cdot \sin \psi = \Delta s_x$$

(не забудем, что соотношение для разности хода справедливо при условиях $d \ll L$, $d \ll H$).

Таким образом, разность хода между путями BO_1A и BO_2A равна нулю. Это справедливо для произвольных положений источника и точки наблюдения, лежащих на одной прямой BA , проходящей через середину отрезка O_1O_2 (точку O). Таким образом, при смещении источника B от оси симметрии B_0A_0 на расстояние y , точка наблюдения A , соответствующая положению максимума нулевого порядка, смещается на расстояние

$$x = \frac{L}{H} \cdot y.$$

Следовательно, любую прямую, проходящую через точку O , можно условно назвать линией «источник - нулевой порядок интерференции». Для любого положения источника на этой прямой слева от точки O максимум нулевого порядка будет находиться в любой точке прямой справа от точки O .

Полученный результат позволяет очень просто решать задачу об условии размывания интерференционной картины для протяженного источника.

За. Пусть, к примеру, имеются два точечных монохроматических ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$), но некогерентных источника B_0 и B (рис. 3). Интерференционные картины для каждого из источников будут идентичны, но максимумы нулевого порядка будут смещены друг от друга на расстояние $x = \frac{L}{H} \cdot y$. Вследствие некогерентности источников результирующая

картина будет суммой интенсивностей каждой из картин. Нетрудно сообразить, что полное пропадание картины будет тогда, когда интерференционный максимум для одного из источников придется на интерференционный минимум для другого. Это означает, что в точке A (максимуме нулевого порядка для источника B) должен находиться минимум для источника B_0 , что соответствует разности хода $\Delta s_x = \frac{\lambda}{2} + m\lambda$.

Для расстояния между источниками (координаты y) получаем:

$$\Delta s_y = \frac{d \cdot y}{H} = \Delta s_x = \frac{\lambda}{2} + m\lambda,$$

$$y = \frac{H\lambda}{2d} + m \frac{H\lambda}{d}.$$

Минимальное расстояние между источниками, при котором полностью пропадает интерференционная картина, равно

$$y_0 = \frac{H\lambda}{2d}.$$

36. Теперь рассмотрим случай протяженного источника шириной D , занимающего область от B до B_1 (симметрично относительно точки B_0) (рис. 3). Максимум нулевого порядка для любого из точечных источников B' из области D будет находиться между точками A и A_1 на экране (в точке пересечения прямой, проходящей через B' и O , и экраном)

Нетрудно сообразить, что интерференционная картина пропадет, если область AA_1 на экране будет равна ширине интерференционной полосы, т.е. максимумы нулевого порядка равномерно заполнят данную область. А это означает, что в точках A и A_1 должны находиться минимумы для источника B_0 , ближайšie к максимуму нулевого порядка. Этот вывод совпадает с результатом, полученным в предыдущей задаче, в итоге имеем:

$$y_0 = \frac{H\lambda}{2d}.$$

Но ширина источника $D = 2y_0$, в результате условие пропадания интерференционной картины принимает вид:

$$D = \frac{H\lambda}{d},$$

что совпадает с результатом, полученным при интегрировании.

4. Рассмотрим конкретный интерференционный объект – бипризму (рис. 4). Напомним, что для получения характеристик интерференционной картины требовалось свести задачу к построению схемы Юнга. Ранее было получено, что изображения S_1 и S_2 точечного источника S будут находиться на расстоянии

$$d = 2\psi \cdot a = 2\theta \cdot (n-1) \cdot a$$

друг от друга. Расстояние от источников до экрана \mathcal{E} равно $L = a + b$, в итоге для ширины интерференционной полосы Δx получим:

$$\Delta x = \frac{L\lambda}{d} = \frac{(a+b)\lambda}{2\theta(n-1)a}.$$

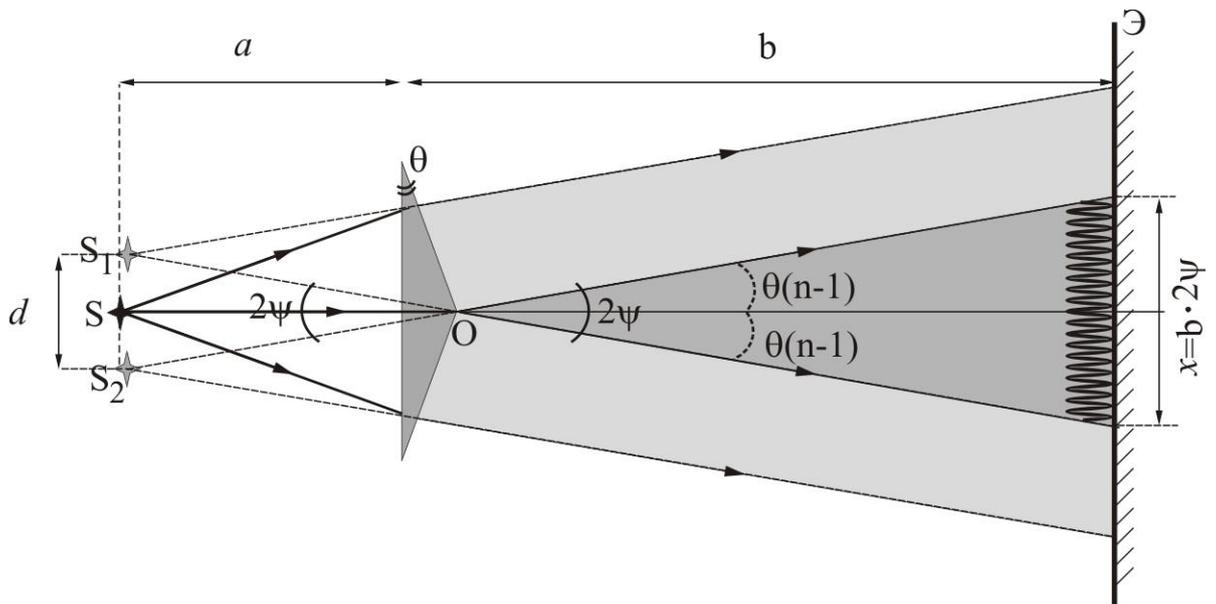


Рис. 4. Схема интерференции, получаемой с помощью бипризмы

Пусть источник S теперь имеет размер D . Рассмотрим лучи, выходящие из центра источника S и из его крайней точки B , смещенной на $D/2$ вверх от S , приходящие в центр O бипризмы (рис. 5). Угол SOB между направлениями на S и B равен

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{D}{2a},$$

именно на такой же угол повернутся и все лучи, вышедшие из B и прошедшие через бипризму (по отношению к лучам, вышедшим из S). Как следствие, вторичные источники B_1 и B_2 также сместятся вверх на $D/2$ от S_1 и S_2 . Где же для этих источников окажется максимум нулевого порядка?

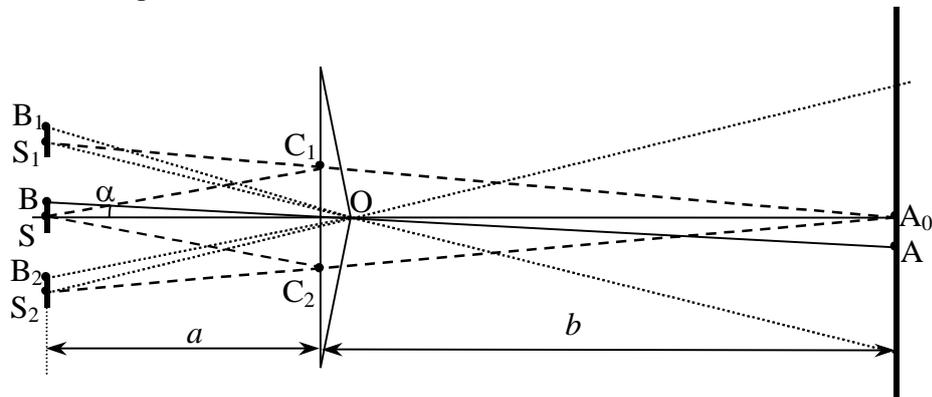


Рис. 5. К расчету интерференции от протяженного источника

На первый взгляд кажется, что и он сместится вверх на $D/2$, оказавшись на оси симметрии между источниками B_1 и B_2 . Однако это не так. Дело в том, что вследствие симметрии первоначальной задачи можно было утверждать, что источники S_1 и S_2 излучают в одинаковой фазе. Но про источники B_1 и B_2 этого сказать нельзя.

Рассмотрим лучи B_1O и B_2O , идущие от вторичных источников B_1 и B_2 до ребра бипризмы O . С точки зрения геометрии, между ними есть разность хода:

$$\Delta s_o \approx B_1O - B_2O \neq 0.$$

Однако в действительности разность хода между ними должна быть равна НУЛЮ! Ведь от реального источника B к точке O идет один единственный луч, и только после прохождения бипризмы он раздваивается, преломляясь на гранях чуть выше и чуть ниже

точки O . Следовательно, лучи «вышедшие» из изображений B_1 и B_2 , находятся в точке O в фазе. Это означает, что между самими источниками B_1 и B_2 есть разность фаз, равная

$$\Delta\varphi_o = -k\Delta s_o,$$

компенсирующая разность хода, найденную при геометрических построениях. И эту разность фаз необходимо учитывать при расчетах.

Но можно заметить более простой способ расчета. Продолжим линию BO до пересечения с плоскостью экрана в точке A . Эта линия проходит точно посередине между источниками B_1 и B_2 , следовательно, для каждой ее точки, как отмечалось в п.2, разность хода между лучами, идущими от B_1 и B_2 , одна и та же. Но в точке O эта разность хода равна нулю, следовательно, она равна нулю и для остальных точек, включая точку A . Следовательно максимум нулевого порядка для источников B_1 и B_2 окажется в точке A .

Все остальные рассуждения полностью идентичны приведенным в п.2б. Для полного размывания картины в A должен оказаться интерференционный минимум для источника S , т.е. расстояние от центра картины A_0 до A равно половине ширины полосы $\frac{\Delta x}{2}$. Из пропорции

$$\frac{D/2}{a} = \frac{\Delta x/2}{b}$$

получим:

$$D = \frac{a}{b} \Delta x,$$

$$D = \frac{(a+b)\lambda}{2\theta(n-1)b}.$$

5. Возникает ощущение, что при решении задачи нам совсем не понадобились результаты, полученные в п.1 для схемы Юнга, в частности, формула $\frac{Dd}{\lambda H} = 1$.

Действительно, при выводе данной формулы рассчитывалась разность хода между лучами, идущими сначала от реального источника к отверстиям (вторичным источникам), а затем от них к точке наблюдения. Здесь же вторичные источники S_1 и S_2 находятся в одной плоскости с реальным источником S . И что же, лучи из S пойдут сначала к S_1 и S_2 , а затем в точку наблюдения на экране? Конечно, нет! Необходимо найти истинный путь, по которому лучи от источника S доходят до центра экрана.

Для этого соединим вторичные источники S_1 и S_2 с центром интерференционной картины A_0 (рис. 6). Эти линии пересекут плоскость бипризмы в точках C_1 и C_2 . Следовательно, после прохождения бипризмы лучи в точку A_0 придут именно из точек C_1 и C_2 . Значит и лучи, вышедшие из реального источника S и пришедшие затем в центр экрана A_0 , пройдут через точки C_1 и C_2 бипризмы. Таким образом, два луча проходят путями SC_1A_0 и SC_2A_0 соответственно.

Мы получили схему Юнга, идентичную рис.1, где расстояние d_0 между «источниками» C_1 и C_2 находится из пропорции:

$$\frac{d_0}{b} = \frac{d}{a+b},$$

$$d_0 = \frac{b}{a+b} d = \frac{b}{a+b} \cdot 2\theta(n-1)a.$$

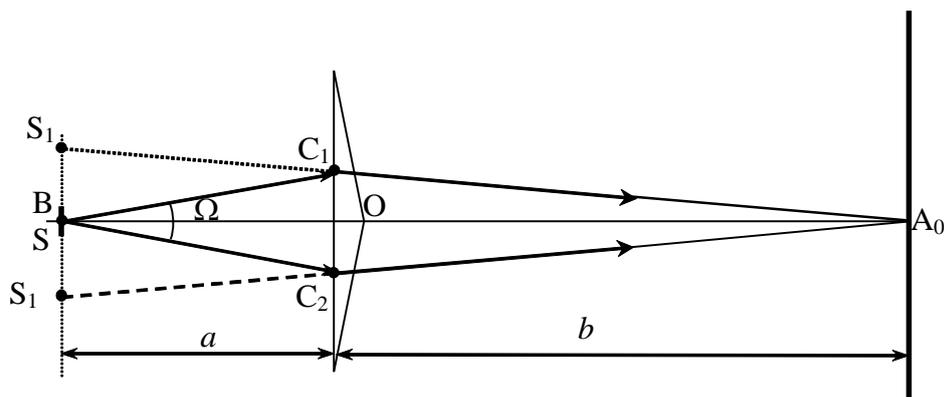


Рис. 6. Ход лучей в бипризме

В формулу для условия пропадания картины $\frac{\lambda H}{Dd} = 1$ подставим a вместо H и «расстояние между источниками» d_0 вместо d , в итоге получим:

$$\lambda a = D \cdot \frac{b}{a+b} \cdot 2\theta(n-1)a,$$

$$D = \frac{(a+b)\lambda}{2\theta(n-1)b}.$$

Результат тот же самый, что и полученный ранее.

Заметим следующее. Ранее при расчете параметров интерференционной картины от точечного источника наша цель заключалась в нахождении положения вторичных источников – изображений. При этом мы забывали про реальный источник и считали, что интерферирующие волны «исходят» из изображений, находили расстояние между ними, расстояние от изображений до экрана и определяли параметры картины.

Для протяженного источника требуется иной подход. Необходимо найти ход лучей, идущих от реального источника к объекту и от него на экран. Положение вторичных источников позволяет найти лучи, уже прошедшие через объект, тем самым, задав и точки объекта, через которые проходят лучи. Соединив реальный источник с этими точками объекта, мы найдем апертуру интерференции. Таким образом, в формуле для условия пропадания интерференционных полос $\frac{Dd}{\lambda H} = 1$ расстояние H - это всегда расстояние от реального источника до объекта, а расстояние d - это всегда расстояние между двумя точками на объекте, через которые проходят реальные лучи, приходящие затем в центр картины.

Подобный подход можно использовать и при рассмотрении других интерференционных схем с протяженным источником. Для этого следует изобразить ход лучей, выходящих из центральной точки реального источника и приходящих в центр интерференционной картины. Точки пересечения этих лучей с плоскостью объекта и дадут два вторичных источника, расстояние d_0 между которыми и следует подставлять в формулу $\frac{Dd_0}{\lambda H} = 1$.

Очень часто при решении задач используют понятие **угловой апертуры интерференции** Ω - угла, под которым из центра реального источника S расходятся лучи, которые затем придут в максимум нулевого порядка:

$$\Omega = \frac{d_0}{a}.$$

Условие пропадания картины в этом случае запишется в виде:

$$D = \frac{\lambda}{\Omega}.$$

Формула очень простая, показывающая, что ограничение на размер источника можно задать всего одним параметром: угловой апертурой Ω .

Этот прием эффективен и при рассмотрении интерференции, получаемой с помощью билинзы, когда источник света находится не в фокальной плоскости. Как и для бипризмы, в этом случае вторичные источники, полученные не для центральной точки реального источника, будут излучать не в фазе.

Билинзу рассмотреть самостоятельно.

6. Рассмотрим случай, когда излучение от протяженного источника, находящегося в фокальной плоскости линзы с фокусом F , падает на бипризму. Напомним, что в случае точечного источника S за бипризмой возникали две плоские волны, сходящиеся под углом

$$2\psi = 2\theta(n-1),$$

расстояние между полосами равно:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\psi} = \frac{\lambda}{2\theta(n-1)}.$$

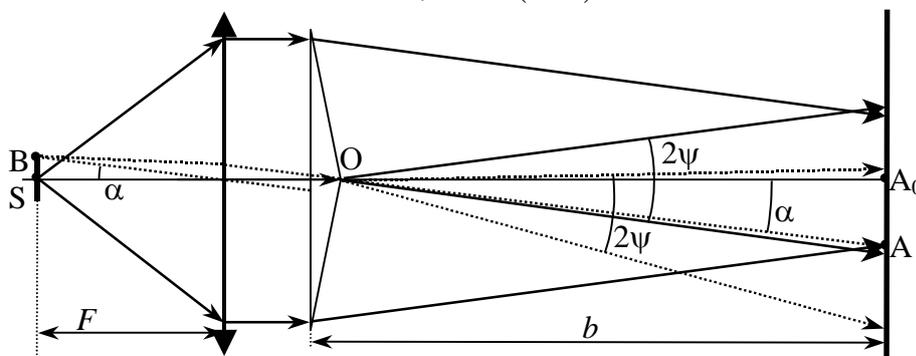


Рис. 6. Интерференция при падении параллельного пучка на бипризму.

Для источника B , смещенного от оси симметрии на $D/2$, сформированный после прохождения линзы параллельный пучок повернет на угол

$$\alpha = \frac{D}{2F}.$$

Угол схождения параллельных пучков после бипризмы будет тем же самым, а направление на максимум нулевого порядка OA будет повернуто относительно OA_0 на тот угол α .

Картина пропадет когда этот максимум попадет на минимум для центральной точки S источника, т.е. расстояние AA_0 равно половине ширины полосы $\Delta x/2$. Если расстояние от бипризмы до экрана равно b , то из условия

$$\alpha = \frac{\Delta x}{2b}$$

получим для размера источника:

$$D = \frac{F\Delta x}{b} = \frac{F\lambda}{2\theta(n-1)b}.$$

Отметим, что ширина полос Δx не зависит от положения экрана, что характерно для интерференции плоских волн. Но размер источника D , при котором пропадает интерференционная картина, обратно пропорционален расстоянию b от бипризмы до экрана.

Семинар 12. Интерференция методом деления амплитуды.
Формирование интерференционных колец.

Основной материал семинара изложен в конспекте лекций по оптике по теме «Интерференция монохроматического света».
Здесь только дополнительные моменты.

1. Об интерференционных кольцах.

Пусть плоскость экрана для наблюдения интерференции **перпендикулярна** линии, проходящей через точечные когерентные источники O_1 и O_2 (рис. 1). Для разности хода между лучами, приходящими в точку А (координата y), получим:

$$\Delta s = d \cdot \cos \chi \approx d \cdot \left(1 - \frac{\chi^2}{2}\right),$$

где $\chi \approx \operatorname{tg} \chi = \frac{y}{L}$.

В точке $y=0$ порядок интерференции максимален и равен $m_{\max} = d/\lambda$. При этом интенсивность в центре может быть произвольной от I_{\max} (если m_{\max} - целое число) до $I_{\min} = 0$ (если m_{\max} - полуцелое число)

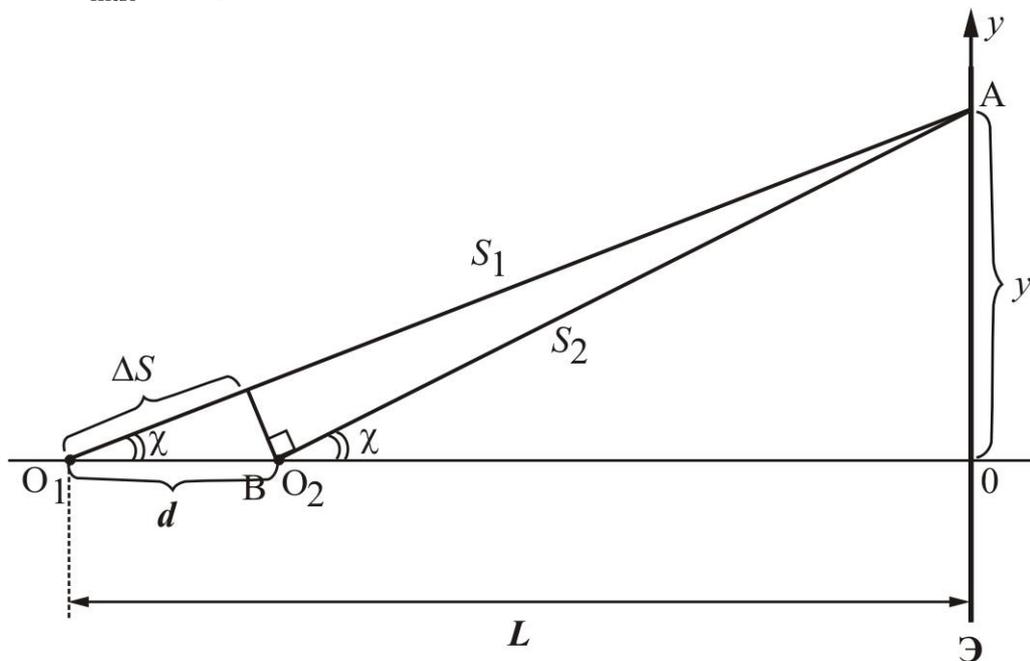


Рис. 1. Интерференционная схема для наблюдения интерференционных колец

Вследствие симметрии интерференционная картина будет представлять систему колец. Найдем выражение для радиусов.

Пусть в центре картины наблюдается светлое пятно (m_{\max} - целое число). Для i -го светлого кольца (порядок интерференции $m = m_{\max} - i$) запишем:

$$\Delta s_i = (m_{\max} - i) \cdot \lambda \approx d \cdot \left(1 - \frac{\chi^2}{2}\right) = d \cdot \left(1 - \frac{y^2}{2L^2}\right);$$

$$i \cdot \lambda \approx d \cdot \frac{y^2}{2L^2}; \quad y_i^2 \approx \frac{2L^2 \lambda}{d} \cdot i,$$

т.е. квадрат радиуса кольца пропорционален его номеру. Аналогичное выражение получится и для темных колец, если в центре будет наблюдаться темное пятно. В произвольном случае,

когда интенсивность в центре $I_{\max} > I_{\text{центр}} > 0$ структура формулы для радиусов колец будет иметь вид:

$$y_i^2 \approx \frac{2L^2 \lambda}{d} \cdot (i - \Delta i),$$

где поправка Δi находится из соотношения d и λ .

2. Схема для наблюдения интерференционных колец.

Плоская монохроматическая волна (пучок света от лазера) падает на собирающую линзу, в фокусе которой формируется точечный источник света S . Расходящийся пучок падает на плоскопараллельную пластину ППП (толщина h , показатель преломления n). В результате отражения от передней и задней поверхностей ППП возникают две отраженные волны. Для наблюдения интерференционной картины экран \mathcal{E} устанавливается параллельно поверхностям ППП, в нем делается отверстие, в котором «располагается» точечный источник.

Найдем положение вторичных источников.

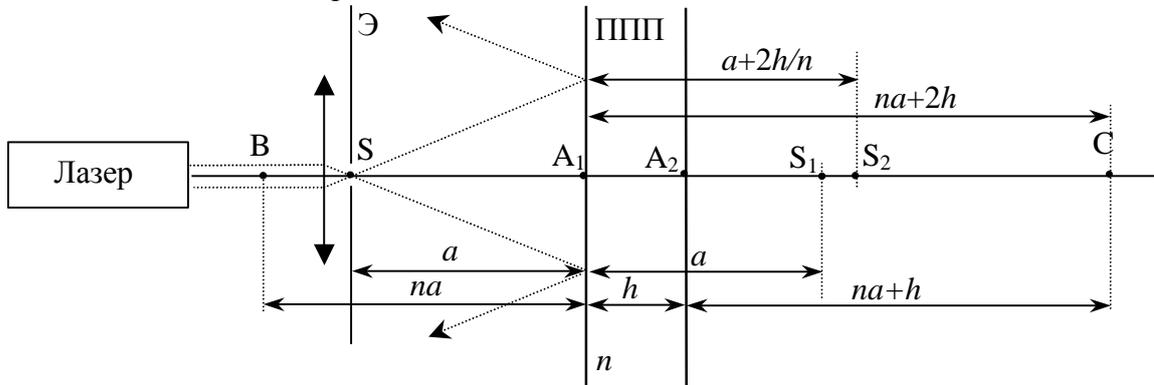


Рис. 2. Построение изображений при отражении излучения от ППП

Источник света S расположен на расстоянии a (отрезок SA_1) от передней поверхности ППП. Изображение S_1 , возникающее при отражении от передней поверхности ППП, будет находиться на таком же расстоянии: $S_1A_1 = SA_1 = a$.

Построение второго изображения выполним в три этапа:

1) при преломлении на передней поверхности изображение B источника S будет находиться на расстоянии $BA_1 = na$ от нее (данная формула была получена ранее).

2) при отражении от задней поверхности ППП изображение C окажется от нее на таком же расстоянии, что и «источник» B : $CA_2 = BA_2 = na+h$.

3) при преломлении отраженной волны на передней поверхности изображение S_2 «источника» C будет находиться на расстоянии в n раз меньшем расстояния $CA_1 = na+2h$, т.е. $S_2A_1 = (na+2h)/n = a+2h/n$.

Таким образом, расстояние между вторичными источниками S_1 и S_2 равно

$$d = \frac{2h}{n},$$

а расстояние L от источников до экрана

$$L \approx 2a.$$

Радиусы колец R_i на экране находятся по формуле:

$$R_i^2 \approx \frac{2(2a)^2 \lambda}{2h/n} \cdot i = \frac{4na^2 \lambda}{h} \cdot i.$$

Обратим внимание на следующий момент. В центре картины оптическая разность хода между отраженными лучами равна удвоенной оптической толщине ППП:

$$\Delta s_{\text{центр}} = 2h \cdot n,$$

в то время как расстояние между источниками S_1 и S_2 равно $d = \frac{2h}{n}$. В таком несоответствии нет никакой ошибки. Это означает, что источники S_1 и S_2 излучают не в фазе. Разность фаз найти довольно просто:

$$\Delta\varphi = k\Delta s = k(\Delta s_{\text{центр}} - d) = k \cdot 2h \left(n - \frac{1}{n} \right).$$

где k – волновое число. Однако, как уже отмечалось ранее, это не скажется на выражении для радиусов светлых (темных) колец при условии, что в центре наблюдается светлое (темное) пятно.

Таким образом, порядок интерференции в центре картины определяется именно оптической разностью хода:

$$m_{\text{max}} = \frac{\Delta s_{\text{центр}}}{\lambda} = \frac{2h \cdot n}{\lambda},$$

в то же время для расчета радиуса колец необходимо знать расстояние между источниками

$$d = \frac{2h}{n}.$$

Вспомним, что в случае квазимонохроматического источника в схеме Юнга видность интерференционной картины в центре была максимальной и постепенно уменьшалась по мере удаления от центра (с ростом порядка интерференции). В рассмотренной выше схеме, наоборот, картина размывается как раз в центре, т.к. именно там порядок интерференции максимален (напомним, что порядок, в котором исчезает интерференция, равен $m_{\text{исч}} \approx \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$).

Эта особенность присуща для разных интерференционных схем, приводящих к появлению колец, за исключением схемы колец Ньютона (для них порядок интерференции минимален в центре).

3. Расчет разности хода в плоскопараллельной пластине (ППП).

Луч света от точечного источника S падает на ППП. Найти разность хода между лучами, отраженными от поверхностей пластины.

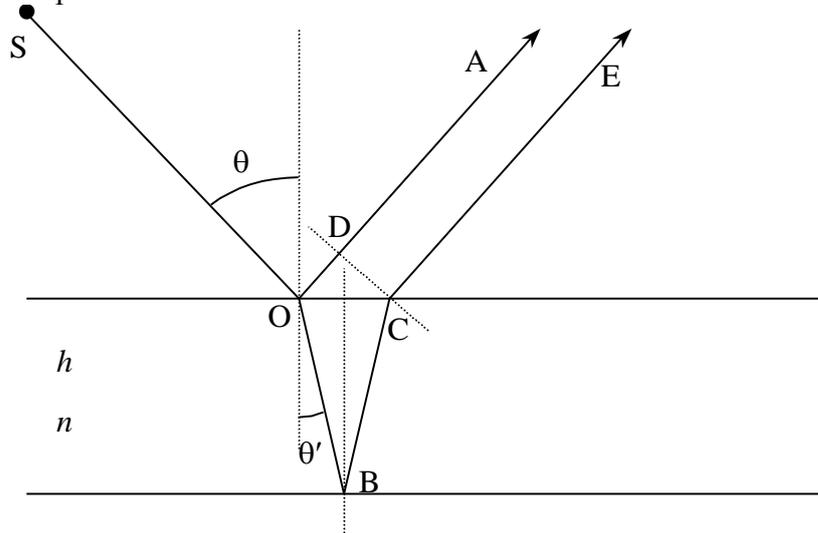


Рис. 3. Расчет разности хода в ППП.

Луч SO падает под углом θ на переднюю грань ППП, частично отражаясь в направлении OA , и преломляясь в направлении OB . Преломленный луч после отражения от задней грани в точке B вновь преломляется и выходит в направлении CE параллельно первому отраженному лучу.

Оптическая разность хода между лучами OA и CE равна:

$$\Delta s_0 = n \cdot (OB + BC) - OD = 2n \frac{h}{\cos\theta'} - OC \cdot \sin\theta = 2n \frac{h}{\cos\theta'} - 2h \cdot \operatorname{tg}\theta' \cdot n \cdot \sin\theta' =$$

$$= 2n \frac{h}{\cos\theta'} (1 - \sin^2 \theta') = 2nh \cos\theta' = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}.$$

Кроме этого, следует учесть изменение на π фазы отраженного луча ОА вследствие отражения от оптически более плотной среды. Это эквивалентно появлению дополнительной разности хода $\frac{\lambda}{2}$:

$$\Delta s = \Delta s_0 + \frac{\lambda}{2} = 2nh \cos\theta' + \frac{\lambda}{2} = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} + \frac{\lambda}{2},$$

$$\Delta\varphi = k \cdot \Delta s = k \cdot 2nh \cos\theta' + \pi = k \cdot 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} + \pi.$$

Поясним понятие «оптическая разность хода». Она равна разности хода, умноженной на показатель преломления n среды. Дело в том, что при интерференции основной характеристикой является разность фаз $\Delta\varphi$ между волнами, которая связана с разностью хода соотношением:

$$\Delta\varphi = k \cdot \Delta s.$$

При распространении света в среде с показателем преломления n длина волны λ_n уменьшается в n раз по сравнению с длиной волны λ_0 в вакууме: $\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n}$.

В результате получаем:

$$\Delta\varphi = k_n \cdot \Delta s = \frac{2\pi}{\lambda_n} \cdot \Delta s = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n\Delta s = k_0 \cdot \Delta s_{\text{онм}},$$

где $\Delta s_{\text{онм}} = n\Delta s$. Иными словами, прохождение волной в среде с показателем преломления n пути Δs эквивалентно прохождению этой волной в вакууме пути $\Delta s_{\text{онм}} = n\Delta s$. Этот прием широко используется при расчете интерференции, дифракции и других явлений.

4. Интерференция в тонкой пленке.

Типовая задача 5.84 (Иродов).

Найти минимальную толщину пленки с показателем преломления $n=1,33$, при которой свет с длиной волны $\lambda_1=0,64$ мкм испытывает максимальное отражение, а свет с длиной волны $\lambda_2=0,40$ мкм не отражается совсем. Угол падения равен $\theta=30$ градусов.

Решение.

Вспомним формулу для разности хода между волнами, отраженными от двух поверхностей пленки:

$$\Delta s = 2nh \cos\theta' + \frac{\lambda}{2}.$$

Вспомним, что означают для разности хода слова «максимум» и «минимум»:

$$\Delta s_{\text{макс}} = 2nh \cos\theta' + \frac{\lambda_1}{2} = m_1 \lambda_1; \quad \Delta s_{\text{мин}} = 2nh \cos\theta' + \frac{\lambda_2}{2} = \left(m_2 + \frac{1}{2}\right) \lambda_2.$$

Подчеркнем, что порядки максимума и минимума для разных длин волн в общем случае не обязаны совпадать, поэтому и записано: m_1 и m_2 .

Выражая одну и ту же величину $2nh \cos\theta'$ в обеих формулах, получим:

$$m_1 \lambda_1 - \frac{\lambda_1}{2} = \left(m_2 + \frac{1}{2}\right) \lambda_2 - \frac{\lambda_2}{2};$$

$$\left(m_1 - \frac{1}{2}\right) \lambda_1 = m_2 \lambda_2.$$

Далее вступает в силу знание арифметики: необходимо подобрать два целых числа m_1 и m_2 , при которых указанное равенство будет выполнено. Подбор осуществляется исключительно перебором, начиная с малых целых чисел: 1, 2, 3 и т.д.

После того, как искомые числа подобраны, возвращаемся к формуле для разности хода и определяем нужную величину.

5. Что наблюдается при интерференции в плоскопараллельной пластине?

1) Точечный монохроматический источник S находится в фокальной плоскости линзы $L1$. Плоская волна падает на ППП. На пути отраженных лучей установлена собирающая линза $L2$. Что будет наблюдаться на экране \mathcal{E} , установленном в ее фокальной плоскости?

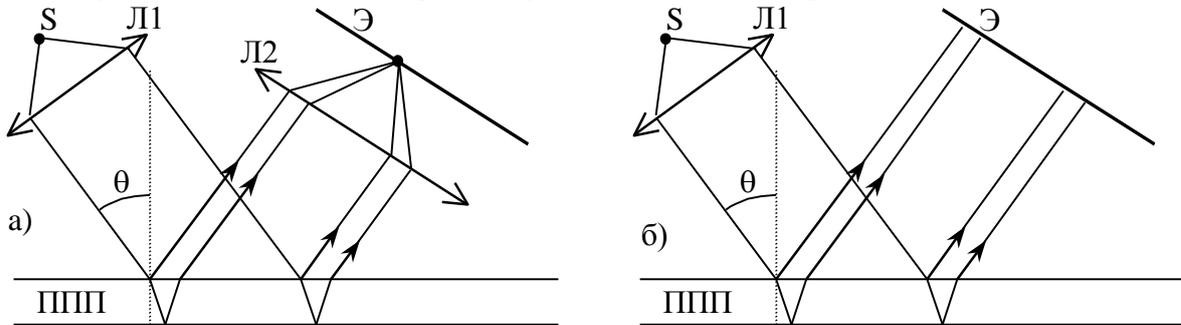


Рис. 4. Интерференционная картина в случае падения плоской волны на ППП.

а) Для всех лучей, прошедших через линзу $L1$, угол падения θ на ППП будет один и тот же, как и разность хода Δs (рис. 4а). После прохождения линзы $L2$ все лучи соберутся в **одной** точке экрана \mathcal{E} в фокальной плоскости. Интенсивность света в этой точке зависит от разности хода Δs . Никакой интерференционной картины наблюдаться не будет.

Вопрос. Предположим, что $\Delta s = (m + \frac{1}{2})\lambda$, тогда интенсивность света в точке равна нулю. А куда делась энергия?

б) Уберем линзу $L2$ (рис. 4б). На экран \mathcal{E} падают две плоские когерентные (вышли из одного источника S) волны, идущие в одном направлении. На экране наблюдается равномерная засветка, интенсивность которой зависит от разности хода Δs . Никакой интерференционной картины наблюдаться также не будет.

в) Уберем и линзу $L1$. Подобная схема подробно рассмотрена в п.2. Будут интерферировать две сферические волны, «вышедшие» из мнимых источников S_1 и S_2 (рис. 2). Интерференционная картина наблюдается в любом месте (**не локализована**) и представляет собой систему колец, центр которой лежит на перпендикуляре, опущенном из точки S на ППП.

Рассмотрим случай протяженного источника, отдельные точки которого не когерентны. Наблюдение ведется в фокальной плоскости линзы $L2$ (линзы $L1$ нет).

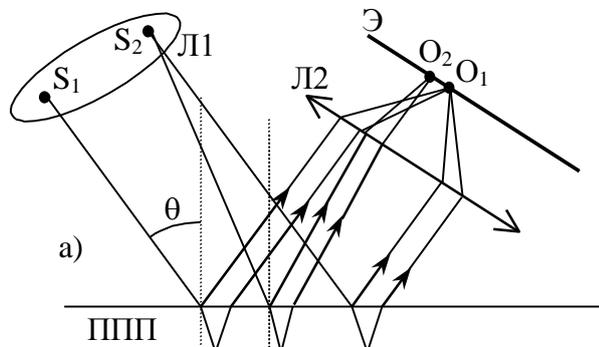


Рис. 5. Интерференция от протяженного источника, локализованная на бесконечности

Как уже отмечалось, луч от источника S_1 , падающий под углом θ на ППП, в результате отражения и преломления разобьется на два, которые проинтерферируют в т. O_1 фокальной плоскости (рис. 5). Интенсивность света в этой точке зависит от разности хода $\Delta s(\theta)$. Лучи, вышедшие из той же точки под другими углами, соберутся в других точках фокальной

плоскости, их интенсивность будет зависеть от угла падения. В результате волна, вышедшая из точки S_1 источника, сформирует интерференционную картину в виде колец (или дуг) в фокальной плоскости.

Но абсолютно точно такую же картину сформируют и волны, вышедшие из других (некогерентных) точек источника (S_2 и др.). В результате сложения интенсивностей (а не амплитуд, т.к. источники не когерентны!) на экране будет наблюдаться яркая четкая интерференционная картина. Угловой радиус θ_m темного кольца m -го порядка рассчитывается из условия:

$$\Delta s_m = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_m} + \frac{\lambda}{2} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda,$$

$$2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_m} = m\lambda,$$

при этом радиус R_m кольца равен

$$R_m = \theta_m \cdot F,$$

где F - фокусное расстояние линзы Л2.

Если же линзу Л2 убрать, то четкая картина пропадет, так как каждая точка источника будет давать интерференционную картину в своем месте.

Так как одному и тому же углу падения волн от разных точек протяженного источника соответствует одна и та же разность хода, то наблюдаемые полосы называют **полосами равного наклона**. Интерференционная картина может наблюдаться только в фокальной плоскости линзы, ее называют **локализованной на бесконечности**.

6. Что наблюдается при интерференции в оптическом клине?

1) Точечный монохроматический источник S находится в фокальной плоскости линзы Л1. Плоская волна падает на оптический клин ОК, угол клина β мал. На пути отраженных лучей установлена собирающая линза Л2. Что будет наблюдаться на экране Э, установленном в ее фокальной плоскости?

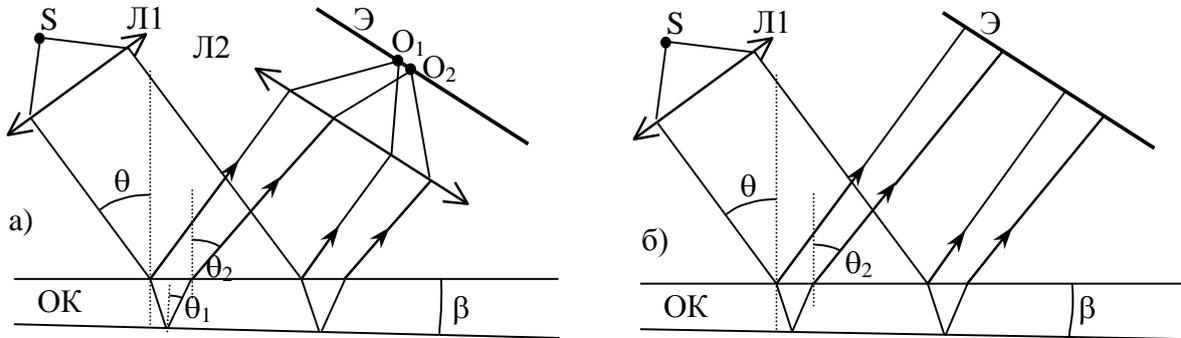


Рис. 6. Интерференционная картина в случае падения плоской волны на оптический клин.

а) Для всех лучей, прошедших через линзу Л1, угол падения θ на ОК будет один и тот же, от передней грани волна отразится под тем же углом θ (рис. 6а). Вторая волна после преломлений и отражений останется плоской, но вследствие клина идти будет уже в направлении $\theta_2 \neq \theta$. В результате после прохождения линзы Л2 все лучи каждой из волн соберутся в разных точках O_1 и O_2 экрана Э в фокальной плоскости. Волны не интерферируют.

б) Уберем линзу Л2 (рис. 6б). На экран Э падают две плоские когерентные (вышли из одного источника S) волны, идущие в разных направлениях. Найдем угол схождения волн при условии $\theta \approx 0$. После преломления угол падения второй волны на заднюю грань будет равен β , после отражения на переднюю грань волна упадет под углом 2β . Преломившись на передней грани, волна пойдет под углом $\theta_2 = 2\beta n$. В результате возникают две плоские волны,

расходящиеся под углом $2\beta n$. На экране будут наблюдаться полосы на расстоянии $\Delta x = \frac{\lambda}{2\beta n}$

Интерференционная картина не локализована, наблюдается в любом месте.

Рассмотрим случай произвольного $\theta \neq 0$. Первая волна отражается под тем же углом θ . Для нахождения угла θ_2 для второй волны запишем дважды закон преломления:

$$\sin \theta = n \sin \theta_1; \quad n \sin(\theta_1 + 2\beta) = \sin \theta_2 = \sin(\theta + \gamma).$$

Вследствие малости углов β и γ , можно записать:

$$\sin(\theta_1 + 2\beta) \approx \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \cdot 2\beta; \quad \sin(\theta + \gamma) \approx \sin \theta + \cos \theta \cdot \gamma.$$

В итоге получим:

$$n(\sin \theta_1 + \cos \theta_1 \cdot 2\beta) = \sin \theta + \cos \theta \cdot \gamma;$$

$$\gamma = 2\beta n \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta}.$$

На экране будут наблюдаться полосы на расстоянии $\Delta x = \frac{\lambda}{\gamma}$.

в) в случае протяженного источника интерференционная картина может наблюдаться (**локализована**) только на поверхности клина (**полосы равной толщины**). Подробнее см. в литературе и в конспекте лекций.

Полосы равной толщины и полосы равного наклона – это интерференционные полосы, наблюдаемые при падении излучения от протяженного источника на тонкую пленку. Интерференционная картина возникает при наложении волн, отраженных от двух границ тонкой пленки.

Полосы равной толщины локализованы (наблюдаются) на поверхности пленки, каждая из полос соответствует определенной (фиксированной) разности хода, обусловленной одной и той же толщиной пленки.

Так как наблюдается система полос, то толщина пленки изменяется, а угол падения излучения на пленку, как правило, остается неизменным.

Наблюдение ведется непосредственно глазом или оптической системой, сфокусированной на поверхность пленки.

Для клиновидной пластинки полосы равной толщины параллельны ребру клина. В кольцах Ньютона в качестве тонкой пленки выступает воздушный зазор между сферической поверхностью линзы и плоской поверхностью, на которой линза лежит. Полосы равной толщины в этом случае – кольца.

Полосы равного наклона локализованы (наблюдаются) на бесконечности, каждая из полос соответствует определенной (фиксированной) разности хода, обусловленной одним и тем же углом падения (наклона) излучения на пленку.

Так как наблюдается система полос, то угол падения (наклона) излучения на пленку изменяется, а толщина пленки, как правило, остается неизменной.

Наблюдение ведется или непосредственно глазом, аккомодированным на бесконечность, или через зрительную трубу, настроенную на бесконечность.

7. Задача.

Протяженный монохроматический источник находится над тонкой пленкой переменной толщины. При каких условиях на поверхности пленки будут наблюдаться **полосы равной толщины**? Наблюдение ведется глазом с большого расстояния, источник также находится на большом расстоянии.

Решение.

Сначала рассмотрим схему: точка источника – точка на поверхности пленки – глаз, смотрящий на эту точку. Т.к. глаз – это собирающая линза, то все лучи из точки на поверхности соберутся в точке на сетчатке, пройдя одно и то же оптическое расстояние (свойство таутохронности линзы). Следовательно, разность хода возникает на пути от точки источника S до точки O на пленке.

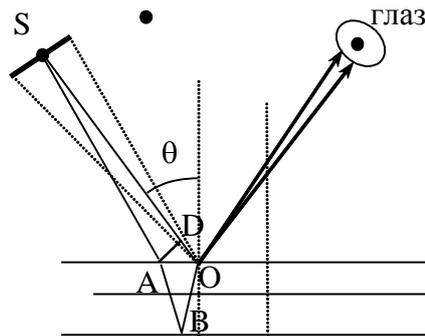


Рис. 7. Интерференция от протяженного источника, локализованная на поверхности тонкой пленки

Пусть луч SO падает на пленку под углом θ . Второй путь, каким излучение от S придет в точку O после отражения от второй поверхности пленки – это $SABO$. Для нахождения оптической разности хода поступаем стандартно: опускаем перпендикуляр AD из т.А на линию SO (источник находится ооооочень далеко от пленки). И видим, что схема в точности совпадает со схемой для расчета разности хода в плоскопараллельной пластине. Поэтому воспользуемся готовой формулой:

$$\Delta s = 2nh \cos \theta'.$$

Замечания.

1) Слагаемое $\lambda/2$ в формуле опустим как непринципиальное – просто светлые полосы поменяются на темные, и наоборот.

2) Толщина пленки, в которой глазом наблюдается интерференция, обычно не более 5-7 длин волн видимого диапазона (будет получено ниже), поэтому изменением толщины пленки в точках O и A можно пренебречь.

Так как источник протяженный, то угол падения θ от разных точек источника в точку O на пленке будет меняться. Если размер источника D , а расстояние $SO=H \gg D$, то

$$d\theta = \frac{D}{H} = \psi,$$

где ψ - угловой размер источника.

Для упрощения расчетов сделаем еще одно допущение: пусть пленка – воздушная, т.е. $n=1$:

$$\Delta s = 2h \cos \theta.$$

Тогда изменение разности хода с изменением угла равно

$$d(\Delta s) = 2h \cdot d(\cos \theta) = 2h \cdot \sin \theta \cdot d\theta = 2h \cdot \sin \theta \cdot \psi.$$

Чтобы интерференционная картина от протяженного источника была видна, необходимо, чтобы дополнительная разность хода $d(\Delta s)$ не превышала длины волны λ . Т.е. условие пропадания запишется в виде:

$$d(\Delta s) = 2h \cdot \sin \theta \cdot \psi = \lambda,$$

откуда для углового размера $\psi_{\text{проп}}$ получим:

$$\psi_{\text{проп}} = \frac{\lambda}{2h \cdot \sin \theta}.$$

Видим, что при нормальном падении ограничений на угловой размер источника практически нет ($\sin \theta \rightarrow 0$). Даже если $\theta \approx \pi/2$, то $\psi_{\text{проп}} \approx \frac{\lambda}{2h}$. Если толщина пленки $h \approx 5 - 10\lambda$, то $\psi_{\text{проп}} \approx 0,05 - 0,1$ - это в радианах – большая величина!

А теперь вспомним, что наблюдение ведется глазом (диаметр зрачка $d \approx 5$ мм) с большого расстояния (как правило, несколько метров), т.е. угловой размер зрачка $\beta_{\text{зр}} \approx 0,001$. Тем самым, в зрачок попадет отраженный пучок от части протяженного источника того же углового размера! Таким образом, т.к. $\beta_{\text{зр}} < \psi_{\text{проп}}$, то на видность интерференционной картины на поверхности пленки протяженность источника никоим образом не влияет! Решающую роль играет угловой размер зрачка!

А как быть с некохроматичностью – ведь на пленку падает свет всего видимого диапазона? Вспомним условия максимумов для разности хода:

$$\Delta s = 2nh \cos \theta' + \frac{\lambda}{2} = m\lambda,$$

(здесь мы добавляем $\lambda/2$, хотя и это не принципиально). Если толщина пленки h будет порядка 5-10 длин волн видимого диапазона, то и условие максимума будет выполнено для примерно такого числа длин волн (и даже больше!). Поэтому глаз будет воспринимать свет как смесь многих длин волн, т.е. будет практически обычный белый цвет с каким-либо оттенком. А если условие максимума будет выполнено для одной, максимум двух длин волн видимого диапазона, то и цвет картины будет достаточно насыщенным.

Таким образом, оптическая толщина пленки для наблюдения яркой интерференционной картины в белом цвете должна быть порядка 1-2 длин волн видимого диапазона, т.е. около 1 микрометра. Разность хода в основном зависит от толщины пленки, поэтому интерференционные полосы, наблюдаемые на поверхности пленки, называют **полосами равной толщины**.

Необходимо признать неудачность данного общепринятого термина. Ведь слыша его, неопытный физик (а уж обыватель тем более!) ожидает увидеть систему полос, толщина которых примерно одна и та же. А на самом деле это интерференционные полосы, соответствующие одной и той же толщине тонкой пленки!

Дополнение.

Попробуем решить задачу о допустимом размере источника через формулу, полученную для схемы Юнга:

$$\frac{Dd}{\lambda H} = 1.$$

В ней $\frac{D}{H} = \psi$ - это угловой размер источника, а в качестве d следует взять длину отрезка

AD, потому что отношение $\frac{AD}{H}$ есть апертура интерференции. Из геометрии несложно

получить:

$$AD = OA \cdot \cos \theta = 2h \cdot \operatorname{tg} \theta \cdot \cos \theta = 2h \cdot \sin \theta.$$

В результате получаем тот же самый ответ:

$$\Psi_{\text{прон}} = \frac{D}{H} = \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{2h \sin \theta}.$$

Т.е. подход к решению задач о протяженном источнике через схему Юнга также работает!

Дифракция света.

(основную часть текста составляют описание задачи №403 практикума и Глава 4 из «Методики решения...»)

Определения из различных источников.

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА - в узком, но наиболее употребительном смысле — огибание лучами света границы непрозрачных тел и, следовательно, проникновение света в область геометрической тени; в широком смысле — проявление волновых свойств света в предельных условиях перехода от волновой оптики к геометрической. – Физическая энциклопедия в 5 томах.

Волна с конечным поперечным сечением пучка не может распространяться строго в одном направлении, характеризуемом вектором k : имеется некоторый разброс направлений волновых векторов от среднего направления. Это явление называется дифракцией. – Матвеев.

До сих пор никому не удалось удовлетворительным образом определить разницу между дифракцией и интерференцией. Дело здесь только в привычке, а существенного физического различия нет. Единственное, что можно сказать по этому поводу, - это следующее: когда источников мало, например, два, то результат их совместного действия обычно называют интерференцией, а если источников много, то чаще говорят о дифракции. – Фейнман.

Арнольд Зоммерфельд определил дифракцию как «любое отклонение распространения света от прямолинейного, не связанное с отражением или преломлением». В более узком смысле дифракцией называют явление огибания волной препятствия. – Ахманов.

Дифракция (от лат. diffractus – разломанный) – неотъемлемое свойство волн любой природы стремиться распространяться во всех направлениях, заходя в область геометрической тени, огибая препятствия и т.д. – Алешкевич.

Под дифракцией света понимают всякое уклонение от прямолинейного распространения света, если оно не может быть истолковано как результат отражения, преломления или изгибания световых лучей в средах с непрерывно меняющимся показателем преломления – Сивухин.

Ландсберг – не дает ответа.

Дифракция света – это совокупность физических явлений, обусловленных волновой природой света, наблюдаемых при распространении ограниченных в пространстве пучков света, а также в среде с резко выраженной оптической неоднородностью (например, при прохождении через отверстия в экранах, вблизи границ непрозрачных тел и т.п.). В более узком смысле этого слова под дифракцией понимают: огибание светом различных препятствий; проникновение волны в область геометрической тени; т.е. отклонение от законов геометрической оптики.

Для описания этого явления Гюйгенс, впервые обосновавший волновую теорию света, предложил следующее построение. Каждая точка волнового фронта принимается за источник вторичных волн, распространяющихся во все стороны, при этом волновой фронт

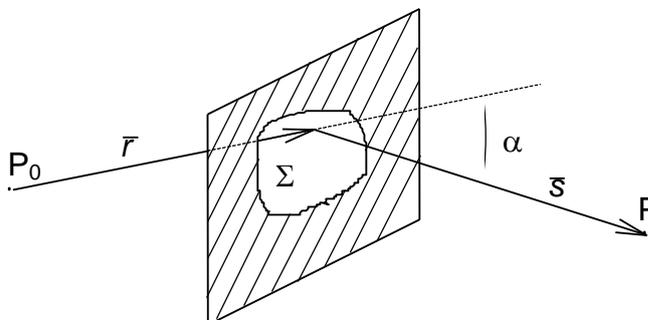


Рис. 1. Схема наблюдения дифракционных явлений.

в любой последующий момент времени есть огибающая этих вторичных волн.

Френель дополнил принцип Гюйгенса утверждением, что в любой момент времени световое поле в рассматриваемой точке есть результат интерференции вторичных волн. Это сочетание построения Гюйгенса с принципом интерференции называется **принципом Гюйгенса-Френеля**, который позволяет количественно описать дифракционные явления.

Пусть на пути сферической монохроматической световой волны, исходящей из точечного источника P_0 , находится плоский непрозрачный объект с отверстием Σ , размеры которого велики по сравнению с длиной волны (рис. 1). В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля напряженность поля в точке P за объектом определяется суперпозицией волн от вторичных источников, расположенных в плоскости отверстия Σ . При этом амплитуда и фаза вторичных сферических волн, приходящих в точку P , зависят как от расстояния \vec{r} (от источника P_0 до соответствующих участков объекта на поверхности Σ), так и от расстояния \vec{s} (от этих участков до точки P).

В соответствие с принципом Гюйгенса-Френеля комплексная амплитуда поля $U(P)$ может быть найдена с помощью интегральной **формулы Френеля**:

$$U(P) = \iint_{\Sigma} \frac{A \exp(ikr)}{r} \cdot \frac{\exp(iks)}{s} \cdot K(\alpha) \cdot dS \quad (1)$$

где λ - длина волны;

$k = 2\pi/\lambda$ - волновое число;

α - угол между векторами \vec{r} и \vec{s} ;

$K(\alpha)$ - коэффициент, описывающий зависимость амплитуды вторичных волн от угла α между направлениями распространения падающей и вторичных волн;

dS - элемент площади в плоскости отверстия Σ ;

A - константа, задаваемая мощностью излучения от источника P_0 ;

интегрирование ведется по поверхности Σ отверстия в объекте.

В этой формуле множитель $A \exp(ikr)/r$ описывает сферическую волну, распространяющуюся из точки P_0 до некоторого вторичного источника, расположенного на поверхности Σ , множитель $\exp(iks)/s$ - сферическую волну, идущую от вторичного источника до точки наблюдения P .

В общем случае комплексная амплитуда поля $U(P)$ может быть найдена с помощью интегральной **формулы Френеля-Кирхгофа** (подробнее см. ниже):

$$U(P) = -\frac{iA}{2\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp(ikr)}{r} \cdot \frac{\exp(iks)}{s} \cdot (\cos \theta_0 - \cos \theta) \cdot dS \quad (1a)$$

где θ_0 и θ - углы, образованные векторами \vec{r} и \vec{s} с вектором нормали в поверхности Σ . Таким образом,

$$K(\alpha) = -\frac{i}{2\lambda} \cdot (\cos \theta_0 - \cos \theta).$$

Наиболее интересным для рассмотрения является случай, когда характерный линейный размер отверстия мал по сравнению с расстояниями r и s от точек P_0 и P до объекта. В этом случае как множитель $K(\alpha)$, так и множитель $\frac{1}{r \cdot s}$ незначительно изменяются при интегрировании по отверстию Σ и основную роль в вычислении дифракционной картины по формуле (1) играет интеграл от быстро осциллирующего множителя вида $\exp[ik(r+s)]$. Разложение в ряд этого множителя позволяет существенно упростить формулу (1). Явления, описываемые в рамках такого приближения, носят название **дифракции Френеля**, или **дифракции в ближней зоне**. При $r \rightarrow \infty$ фронт падающей волны можно считать плоским. Если $s \rightarrow \infty$, то и вторичные волны, распространяющиеся под некоторым углом α к первоначальному направлению, образуют плоский волновой фронт. Дифракционные явления, наблюдаемые при этих условиях, носят название **дифракции Фраунгофера**, или **дифракции в дальней зоне**. Количественный критерий, позволяющий различать приближения Френеля и Фраунгофера, будет приведен ниже после введения понятия **зон Френеля**.

Дифракция Френеля на круглом отверстии.

Задача Между точечным источником P_0 монохроматического света и точечным приемником излучения P расположен непрозрачный экран с круглым отверстием радиуса R , центр которого находится на линии P_0P (рис. 1.1). В соответствии с принципом Гюйгенса – Френеля найти комплексную амплитуду поля U в точке P , если расстояние от источника P_0 до экрана равно a , а расстояние от экрана до приемника P равно b .

Решение:

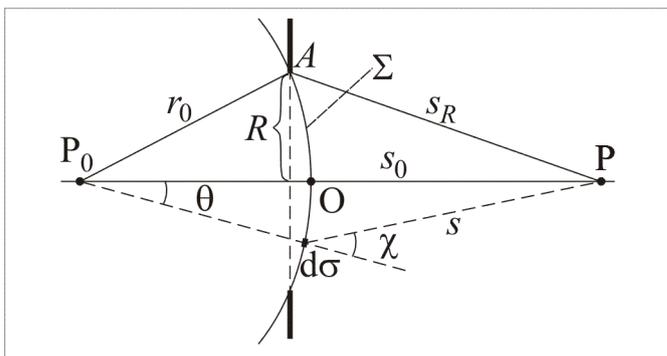


Рис. 1.1. Распространение световой волны от точечного источника P_0 через отверстие в экране радиуса R

Выберем в качестве вспомогательной поверхности сферу радиуса r_0 , где r_0 – расстояние от P_0 до крайних точек отверстия. Вторичные источники будут располагаться на части Σ сферы, ограниченной краями отверстия.

Комплексная амплитуда поля в любой точке поверхности Σ задается формулой

$$U_{\Sigma} = \frac{U_0 \cdot e^{ikr_0}}{r_0}$$

где U_0 – амплитуда на единичном расстоянии от источника (загадочная фраза, отсутствующая в учебниках !!!).

Вклад от произвольного элемента $d\sigma$, являющегося в соответствии с принципом Гюйгенса – Френеля источником вторичных сферических волн, представим в виде

$$dU(P) = U_{\Sigma} \cdot \frac{e^{iks}}{s} d\sigma \cdot K(\chi), \quad (1)$$

где s – расстояние от элемента $d\sigma$ до т. P , $K(\chi)$ – угловой коэффициент, учитывающий изменение амплитуды вторичных волн от направления, χ – угол между нормалью к волновому фронту и направлением излучения от $d\sigma$ к т. P .

Амплитуда поля в т. P есть интеграл вида

$$U(P) = \frac{U_0 \cdot e^{ikr_0}}{r_0} \int_{\Sigma} \frac{e^{iks}}{s} K(\chi) d\sigma. \quad (2)$$

Подобный интеграл принято называть **интегралом Френеля**.

В сферических координатах

$$d\sigma = r_0^2 \sin \theta \cdot d\varphi \cdot d\theta. \quad (3)$$

По теореме косинусов:

$$s^2 = r_0^2 + (r_0 + s_0)^2 - 2r_0(r_0 + s_0)\cos \theta,$$

откуда

$$2s \cdot ds = -2r_0(r_0 + s_0) \cdot d(\cos \theta) = 2r_0(r_0 + s_0) \sin \theta \cdot d\theta. \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (2), получим:

$$\begin{aligned} U(P) &= \frac{U_0 \cdot e^{ikr_0}}{r_0} \int_{\Sigma} \frac{e^{iks}}{s} K(\chi) \cdot \frac{r_0}{r_0 + s_0} s ds d\varphi = \\ &= \frac{U_0 \cdot e^{ikr_0}}{r_0} \cdot \frac{r_0}{r_0 + s_0} \cdot 2\pi \int_{s_0}^{s_R} K(\chi) \cdot e^{iks} ds, \end{aligned}$$

где учтена симметрия по φ .

В первом приближении можно считать, что $K(\chi) = K_0 = const$, поэтому

$$U(P) = U_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0 + s_0} 2\pi \cdot K_0 \cdot \frac{1}{ik} e^{iks} \Big|_{s_0}^{s_R} =$$

$$= U_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0 + s_0} 2\pi \cdot K_0 \cdot \frac{1}{ik} e^{iks_0} \cdot (e^{ik(s_R - s_0)} - 1)$$

Пусть $\Delta s = s_R - s_0$ – разность хода между крайним и центральным лучами, идущими соответственно из точек А и О. Так как $\psi = k \cdot \Delta s$ – разность фаз между этими же лучами в т. Р, то

$$U(P) = U_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0 + s_0} \cdot K_0 \cdot \frac{2\pi}{ik} \cdot e^{iks_0} \cdot (e^{i\psi} - 1) =$$

$$= U_0 \frac{e^{ik(r_0 + s_0)}}{r_0 + s_0} \cdot K_0 \cdot \lambda \cdot \left(\frac{e^{i\psi} - 1}{i} \right) = C \cdot \Gamma, \quad (5)$$

где $C = U_0 K_0 \cdot \lambda \cdot \frac{e^{ik(r_0 + s_0)}}{r_0 + s_0}$ – множитель, физический смысл которого будет пояснен

ниже;

$\Gamma = \frac{e^{i\psi} - 1}{i} = i \cdot (1 - e^{i\psi})$ – комплексный множитель, который на комплексной плос-

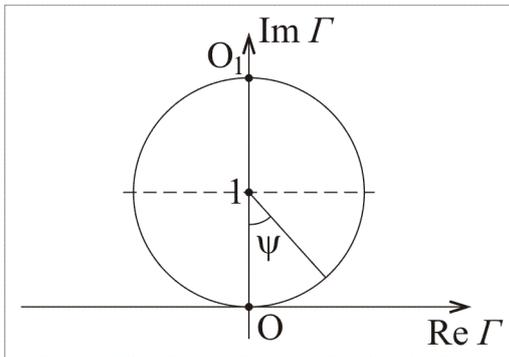


Рис. 1.2. Представление множителя Γ на комплексной плоскости

кости (рис. 1.2) описывает окружность единичного радиуса с центром в точке с координатами (0, 1) (угол ψ отсчитывается от вертикальной оси в направлении против часовой стрелки).

Из рисунка 1.2 видно, что при

$$\psi_{\max} = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots, 2\pi(2n+1)$$

$|\Gamma| = 2$ (вектор OO_1), а комплексная амплитуда волны будет максимальной и равной $U_{\max} = 2C$.

Значениям ψ_{\max} соответствует разность хода $\Delta s_{\max} = \frac{\psi_{\max}}{k} = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \dots, \frac{\lambda}{2}(2n+1)$. С

другой стороны, при $\psi_{\min} = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots, 2\pi n$ разность хода $\Delta s_{\min} = \frac{\psi_{\min}}{k} = \lambda n$, а амплитуда волны равна нулю.

С учетом полученных результатов можно выполнить следующее построение (рис. 1.3). Построим концентрические сферы с центром в т. Р и радиусами $s_0, s_0 + \frac{\lambda}{2}, s_0 + 2\frac{\lambda}{2}, \dots, s_0 + n\frac{\lambda}{2}$, которые разобьют сферическую поверхность Σ на кольцевые зоны, называемые зонами Френеля. Соответствующие границам зон Френеля значения разности фаз ψ будут равны $\psi = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots, n\pi, \dots$. Если для т. Р отверстие открывает нечетное число зон Френеля, то амплитуда волны в т. Р будет максимальной, если же открыто четное число зон Френеля, то амплитуда равна нулю.

$$S_n = \pi R_n^2 - \pi R_{n-1}^2 = \pi \left(\frac{n\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} - \frac{(n-1)\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \right) = \frac{\pi\lambda}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = const,$$

т.е. площади всех зон Френеля равны. С учетом (6):

$$\psi_R = k \cdot \Delta s_R = \frac{kR^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), \quad (8)$$

т.е. разность фаз ψ_R между крайним и центральным лучами пропорциональна квадрату радиуса отверстия (запомним это!). Формулу (8) можно преобразовать к виду:

$$\psi_R = \frac{kR^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{\pi R^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \pi \frac{R^2}{R_1^2} = \pi \frac{S}{S_1}. \quad (9)$$

Выполним еще одно построение. Разобьем первую зону Френеля на m подзон

(рис. 1.5) так, чтобы разность фаз $d\psi_m$ между лучами, идущими от границ каждой подзоны, была равна

$$d\psi_m = \frac{\pi}{m}.$$

Из формулы (8) следует, что $d\psi \sim d(R^2) = R \cdot dR$, т.е. площади всех подзон одинаковы.

Построим векторную диаграмму для нахождения амплитуды поля в точке Р (рис. 1.5). Вклады от 1-й, 2-й, ..., m -й подзон отображаются векторами $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$, ..., $\overrightarrow{A_{m-1}O_1}$, которые имеют одну и ту же длину и повернуты друг относительно друга на один и тот же угол $d\psi_m$ (на рис. 1.5 это соответствует разбиению дуги OO_1 на m равных частей).

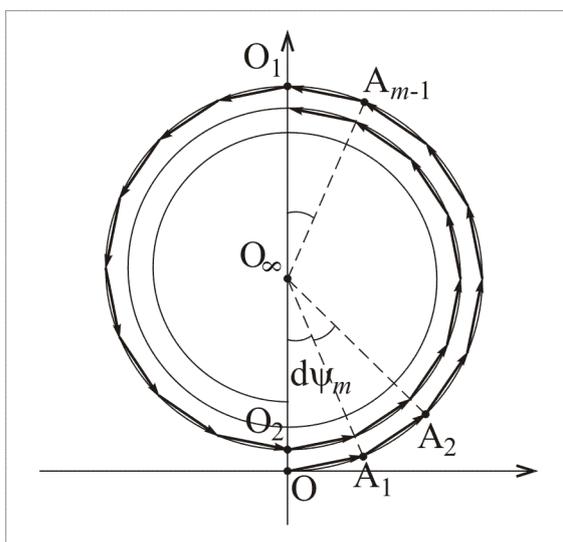


Рис. 1.5. Построение векторной диаграммы для нахождения амплитуды светового поля в точке Р

При увеличении m ломаная $OA_1A_2...A_{m-1}O_1$ все больше будет походить на дугу окружности.

Проводя аналогичные рассуждения для второй зоны, получим вторую ломаную, которая замкнута бы первой, если бы амплитуды складываемых элементарных векторов действительно были бы равны. Однако следует помнить о коэффициенте $K(\chi)$, который учитывает зависимость амплитуды излучаемых вторичных волн от угла χ между лучом, идущим от источника P_0 к вторичному источнику, и лучом, идущим от вторичного источника к точке наблюдения Р. Так как коэффициент $K(\chi)$ монотонно уменьшается с ростом угла χ , то конец ломаной, соответствующей второй зоне, попадает не в т. О, а в близкую к ней т. O_2 . Таким образом, вклад от второй зоны характеризуется вектором $\overrightarrow{O_1O_2}$, который по длине примерно равен вектору $\overrightarrow{OO_1}$, но направлен в противоположную сторону. В результате вклад в $U(P)$ от первой и второй зон Френеля пропорционален длине малого вектора $\overrightarrow{OO_2}$.

Учитывая третью, четвертую и все последующие зоны, получим векторную диаграмму в виде скручивающейся спирали $OO_1O_2O_3...O_\infty$, где точка O_∞ совпадает с центром спирали (вектор $\overrightarrow{OO_\infty}$ соответствует случаю, когда препятствие отсутствует и открыты все зоны Френеля). Полученную спираль называют спиралью Френеля. Как видно из рис. 1.5, вектор $\overrightarrow{OO_\infty}$ в два раза меньше вектора $\overrightarrow{OO_1}$. Следовательно, если для

точки Р открыта только первая зона Френеля, то напряженность поля в центре экрана будет в два раза больше, чем в отсутствие препятствия. А так как интенсивность пропорциональна квадрату напряженности электрического поля, то для интенсивностей отношение будет равно четырем.

Поскольку в отсутствие препятствия амплитуда волны задается формулой:

$$U(P) = U_0 \frac{e^{ik(r_0+s_0)}}{r_0 + s_0},$$

то предельный переход в формуле (5) позволяет найти коэффициент K_0 . Из спирали Френеля следует, что, так как при $R \rightarrow \infty$ коэффициент $\Gamma \rightarrow i$, то отсюда:

$$K_0 = \frac{1}{i\lambda} = -\frac{i}{\lambda}. \quad (10)$$

Теперь становится понятной роль коэффициента C в формуле (5): модуль $|C|$ равен амплитуде поля в точке наблюдения Р в отсутствие препятствия, а квадрат модуля $|C|^2$ (для упрощения расчетов) полагают равным интенсивности I_0 в отсутствие препятствия. Таким образом, длина вектора $\overline{OO_\infty}$ на рис. 1.5 равна $|C|$. Если число открытых зон Френеля невелико ($n \sim 5 \div 10$), то радиус спирали можно считать мало отличающимся от $|C|$, а интенсивность в точке наблюдения Р рассчитывать по формуле:

$$I = I_0 \cdot |\Gamma|^2$$

(см. формулу (5) и рис. 1.2).

Для заданных a , b и R по формуле (8) находим ψ_R . Как видно из рис. 1.2:

$$\operatorname{Re} \Gamma = \sin \psi;$$

$$\operatorname{Im} \Gamma = 1 - \cos \psi;$$

$$|\Gamma|^2 = \sin^2 \psi + (1 - \cos \psi)^2 = 2(1 - \cos \psi);$$

поэтому:

$$I(\psi) = 2I_0 \cdot (1 - \cos \psi) = 4I_0 \cdot \sin^2 \frac{\psi}{2}. \quad (11)$$

Метод зон Френеля (и построение векторных диаграмм) позволяет упростить решение многих задач по дифракции на круглых отверстиях или дисках. Приведем еще раз важные для дальнейшего соотношения:

1. Радиус n -й зоны Френеля:

$$R_n^2 = \frac{n\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}. \quad (7)$$

2. Площади всех зон Френеля можно считать одинаковыми.

3. Разность фаз ψ_R между крайним и центральным лучами для отверстия радиусом R :

$$\psi_R = \frac{kR^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{\pi R^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \pi \frac{R^2}{R_1^2} = \pi \frac{S}{S_1}, \quad (8)$$

где R_1 и S_1 – радиус и площадь первой зоны Френеля.

4. При небольшом числе m открытых зон любая точка на спирали Френеля может быть задана с помощью только одной переменной – разности фаз ψ_R . Угол ψ (на рис. 1.2.) задается формулой

$$\psi = m\pi. \quad (12)$$

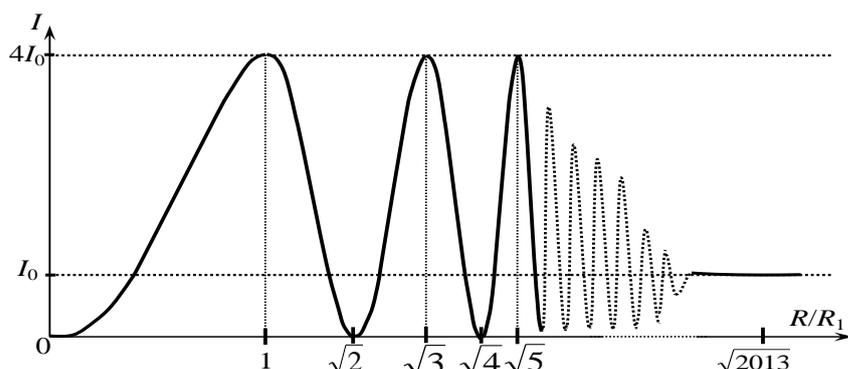


Рис. 4. Зависимость интенсивности в центре картины при дифракции на круглом отверстии от радиуса отверстия.

На рис. 4 приведен график зависимости интенсивности в центре экрана от радиуса R отверстия (интенсивность нормирована на интенсивность I_0 , регистрируемую в отсутствии препятствия; радиус нормирован на радиус R_1 первой зоны Френеля). Максимумы на нем соответствуют случаю, когда открыто нечетное число зон Френеля, минимумы - когда четное. Обратим внимание на то, что с ростом радиуса R расстояние между максимумами и минимумами уменьшается. Это связано с тем, что радиус n -ой зоны пропорционален квадратному корню из номера зоны n , т.е. при увеличении радиуса, например, в два раза число открытых зон увеличивается в четыре.

Следовательно, при изменении числа открытых зон Френеля в центре картины будет наблюдаться то темное, то светлое пятно. Из формулы (7) видно, что число открытых зон зависит не только от радиуса отверстия. Число зон изменяется и при перемещении точки наблюдения P , что легко осуществить экспериментально. Если определить положения точек P_i , для которых при дифракции на круглом отверстии в центре наблюдаются светлые и темные пятна, то можно рассчитать размер отверстия.

На рис. 5 приведен график зависимости интенсивности в центре экрана от расстояния b в случае падения плоской волны ($a \rightarrow \infty$) интенсивностью I_0 . Для наглядности по горизонтальной оси отложена величина $\frac{b\lambda}{R^2} = \frac{1}{m}$, где m - число открытых зон Френеля.

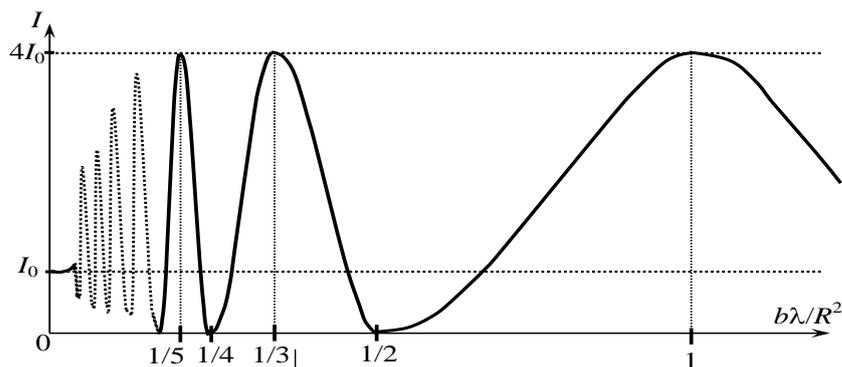


Рис.5. Зависимость интенсивности в центре картины при дифракции плоской волны на круглом отверстии от расстояния b .

С помощью спирали Френеля можно найти напряженность поля в центре картины при дифракции на непрозрачном диске. Если, например, диск закрывает лишь первую зону Френеля, то на спирали должен отсутствовать участок от точки O до точки O_1 , а результирующим будет вектор O_1O_∞ . Если диск закрывает две зоны Френеля, то результирующим будет вектор O_2O_∞ и т.д. В этом случае зависимость интенсивности в центре картины от радиуса непрозрачного диска является монотонно убывающей функцией (рис. 6).

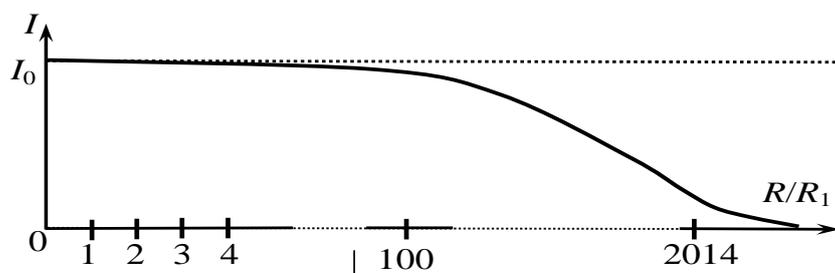


Рис.6. Зависимость интенсивности в центре картины при дифракции на непрозрачном диске радиуса R (R_1 - радиус первой зоны Френеля).

Отметим еще одну особенность дифракционной картины на непрозрачном диске – в центре картины всегда наблюдается небольшое светлое пятно, называемое **ПЯТНОМ ПУАССОНА** (рис. 7). Именно это экспериментально наблюдаемое явление и стало одним из решающих фактов в пользу применимости принципа Гюйгенса-Френеля при расчете дифракционных картин.

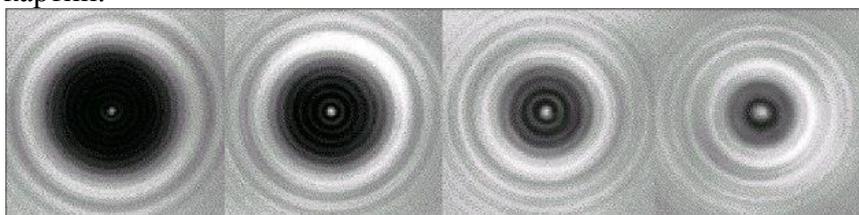


Рис.7. Пятно Пуассона.

Дифракция Френеля на круглом отверстии с использованием собирающей линзы.

Рассмотрим, как изменяется интенсивность в центре дифракционной картины, получаемой на круглом отверстии, если в отверстие поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием f .

Можно показать, что собирающая линза вносит дополнительную разность хода

$$\Delta s_{\text{л}}(r) = -\frac{r^2}{2f} < 0, \quad (13)$$

т.к. толщина собирающей линзы в центре больше, чем на периферии. С учетом этого факта для вторичного источника, находящегося в плоскости отверстия на расстоянии r от его центра, разность хода $\Delta s(r)$ равна:

$$\Delta s = \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right). \quad (14)$$

Пусть фокусное расстояние линзы таково, что справедливо соотношение

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Это означает, что в соответствии с законами геометрической оптики для точечного источника P_0 , находящегося на расстоянии a от линзы, его изображение окажется в точке P на расстоянии b за линзой. Таким образом, все лучи, вышедшие из источника и прошедшие через линзу в точку, где формируется изображение, проходят один и тот же оптический путь. Т.е., яркое изображение P точки источника P_0 с точки зрения волновой теории есть результат интерференции всех лучей, прошедших через линзу.

В рамках дифракционной теории это означает, что участок спирали Френеля, соответствующий круглому отверстию, с помощью линзы «раскрутится» и вытянется в прямую линию.

Пусть круглое отверстие открывало для точки наблюдения небольшое число зон Френеля m . Длина участка спирали равна $m \cdot \pi A_0$ где $A_0 = |OO_\infty|$ - радиус спирали. Таким образом, в случае установленной линзы интенсивность в точке наблюдения станет равной

$$I_l = (m\pi)^2 \cdot I_0 \gg I_0.$$

Если же точка наблюдения Р находится не в точке, где получается изображение с помощью линзы, то разность хода (14) может быть как больше, так и меньше нуля. В первом случае ($\Delta s > 0$) участок спирали Френеля не раскрутится до прямой линии, во втором ($\Delta s < 0$) – «перераскрутится» (подробнее см. зад.4.2.5 в Методике решения ...)

Оценка интенсивности в фокусе линзы

Полученный результат позволяет оценить интенсивность в фокусе линзы радиуса r_0 в случае падения на нее плоской волны интенсивностью I_0 . Пусть радиусу линзы соответствует очень большое число N зон Френеля:

$$N = \frac{r_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{r_0^2}{\lambda f} \gg 1.$$

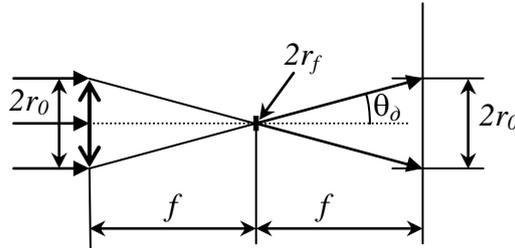


Рис. 8. Фокусировка плоской волны линзой

Комбинируя открытые зоны попарно (первую с последней, вторую – с предпоследней, и т.д.) и считая вклад от последней зоны равным нулю, длину всех получившихся пар будем считать одинаковой и равной πA_0 .

В результате для интенсивности в точке фокуса получим

$$I_f = \left(\frac{N}{2} \pi \right)^2 \cdot I_0 = \frac{\pi^2}{4} N^2 I_0.$$

Оценка размера перетяжки в фокусе линзы

Из закона сохранения энергии получим оценку для поперечного размера r_f изображения, получаемого в фокусе линзы (перетяжки). Считая, что вся энергия, упавшая на линзу, будет сосредоточена в перетяжке:

$$\pi r_0^2 \cdot I_0 = \pi r_f^2 \cdot I_f,$$

получим

$$r_0^2 \cdot I_0 = r_f^2 \cdot \frac{\pi^2}{4} N^2 I_0 = r_f^2 \cdot \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{r_0^2}{\lambda f} \right)^2 I_0;$$

$$r_f = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\lambda f}{r_0} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\lambda f}{d_0} \approx \frac{\lambda f}{d_0}, \quad (15)$$

где d_0 - диаметр линзы.

Из формулы следует, что для получения минимальной ширины перетяжки (и, следовательно, максимальной интенсивности), следует взять короткофокусную линзу и осветить ее максимально широким параллельным пучком. Отметим также, что, так как величины r_0 и f примерно одного порядка, то минимально возможный размер перетяжки сравним с длиной волны λ .

Формулу (15) легко запомнить, следуя правилу, сформулированному при запоминании формул интерференции в схеме Юнга. Все четыре величины, входящие в (15), имеют одинаковую размерность и входят в первой степени. Произведение самой маленькой из них λ на самую большую f равно произведению остальных r_f и d_0 . К тому же величины r_f и d_0 изображаются на рисунке вертикальными отрезками, а фокусное расстояние f - горизонтальным (длина волны λ на рисунке отсутствует). Чтобы избежать путаницы, в какой же из величин r_f и d_0 взять диаметр, а в какой радиус, следует вспомнить рисунок для схемы Юнга (рис. 9). На нем расстояние d между отверстиями аналогично диаметру d_0 линзы, а координата x на экране или ширина Δx интерференционной полосы аналогичны радиусу r_f перетяжки.

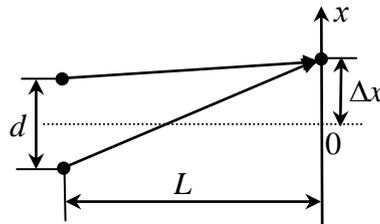


Рис. 9. Схема Юнга

Оценка дифракционной расходимости

После прохождения линзы плоская волна преобразуется в сходящуюся сферическую. По законам геометрической оптики изображение должно было бы быть точечным, но мы только что получили формулу (15) для поперечного размера «точки», теперь называемой перетяжкой. Поэтому будем считать, что фронт волны непосредственно в перетяжке становится *плоским*. Знание того, как распространяется пучок после линзы (по законам геометрической оптики), позволит довольно просто оценить расходимость параллельного пучка света диаметром $d_f = 2r_f$.

После перетяжки пучок расходится и, пройдя расстояние f , вновь будет иметь радиус r_0 (рис. 8). Оценим угловую (дифракционную) расходимость θ_Δ пучка исходя из размера перетяжки (15):

$$\theta_\Delta = \frac{r_0}{f} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{r_f} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{d_f} \approx \frac{\lambda}{d_f}. \quad (16)$$

Получилась простая и легко запоминаемая формула (из трех букв), определяющая дифракционную расходимость θ_Δ монохроматического (длина волны λ) узкого пучка диаметром d_f . Подобный результат ранее уже был упомянут в случае гауссова пучка.

Оценка дифракционной длины

Пусть плоская волна падает на непрозрачное препятствие с отверстием диаметром d_f . Если экран для наблюдений установить непосредственно за препятствием, то мы в соответствии с законами геометрической оптики увидим изображение в виде освещенного круга такого же диаметра. Отодвигая экран от препятствия, мы перейдем в область наблюдения дифракции Френеля на круглом отверстии. Число зон Френеля, соответствующих отверстию, будет постепенно уменьшаться, в центре будут последовательно наблюдаться то светлое, то темное пятно. Но в целом, как показывает численное моделирование, размер дифракционной картины будет по-прежнему примерно равным диаметру отверстия.

Но при некотором расстоянии размер дифракционной картины вследствие дифракционной расходимости (16) превысит диаметр отверстия. Это расстояние, называемое *дифракционной длиной* l_d , можно оценить из простой геометрической модели (рис. 10).

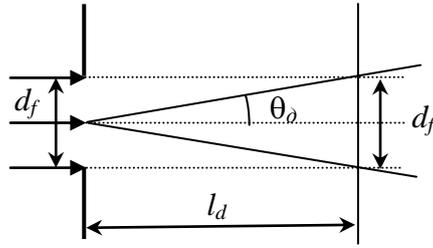


Рис. 8. К оценке дифракционной длины

Из центральной точки отверстия проведем два луча, угол между которыми равен удвоенному углу дифракционной расходимости θ_θ . На расстоянии l_d от плоскости отверстия лучи выйдут в область геометрической тени. Будем считать, что именно с данного момента и становится заметным уширение пучка. Из соотношения

$$l_d \cdot \operatorname{tg} 2\theta_\theta \approx l_d \cdot 2\theta_\theta = d_f$$

и формулы (16) получим:

$$l_d \approx \frac{d_f}{2\theta_\theta} = \frac{d_f^2}{2\lambda}. \quad (17)$$

Вспомянув формулу для числа зон Френеля

$$r_f^2 = \frac{d_f^2}{4} = m\lambda b$$

и подставляя вместо b величину l_d (17), получим

$$\frac{d_f^2}{4} = m\lambda \cdot \frac{d_f^2}{2\lambda}, \quad m = \frac{1}{2}$$

т.е. на расстоянии l_d (17) открыта половина первой зоны Френеля. Можно считать, что именно с этого момента и начинается дифракционное уширение пучка.

Мы получили оценку из простых геометрических соотношений. В литературе чаще встречаются несколько другие выражения (более простые) для дифракционной длины:

1) $l_d \approx \frac{r_f^2}{2\lambda}$, что соответствует открытой первой зоне Френеля. При этом указывается, что дифракционная расходимость наблюдается при расстояниях $l \gg l_d$.

2) $l_d \approx \frac{rd_f^2}{2\lambda}$, что соответствует числу открытых зон Френеля $m = \frac{1}{4}$. Компьютерное моделирование показывает, что именно с данного положения и начинается уширение.

Дифракция Френеля на прямолинейном крае экрана. Спираль Корню.

В случае дифракции Френеля на препятствии в виде полубесконечной непрозрачной плоскости с прямолинейным краем вторичные источники занимают полупространство, т.е. размер области интегрирования в интегральной формуле (1) не является малым по сравнению с расстоянием до источника или до точки наблюдения. Однако оказывается, что формальное применение принципа Гюйгенса-Френеля для такого объекта приводит к результатам, которые в значительной мере подтверждаются при экспериментальных исследованиях. Подробное теоретическое рассмотрение дифракции Френеля для такого класса объектов дается в литературе, в настоящем описании будут приведены основные результаты.

Пусть линия, соединяющая источник света P_0 и точку наблюдения P , проходит через точку A на крае экрана и перпендикулярна краю (на рис. 7 линия края перпендикулярна плоскости рисунка). Для удобства рассмотрения введем следующую систему координат. Ось абсцисс обозначим OZ , при этом точка $z=0$ будет соответствовать точке P_0 , тогда все точки в плоскости препятствия будут иметь координату $z=a$, а все точки в плоскости наблюдения - координату $z=a+b$. Ось OY направлена на нас - перпендикулярно плоскости

рисунка. В плоскости наблюдения ось ординат обозначим Ox , при этом x -координата точки наблюдения P (как и точки P_0) будет равна нулю. X -координаты точек в плоскости препятствия будем обозначать ξ .

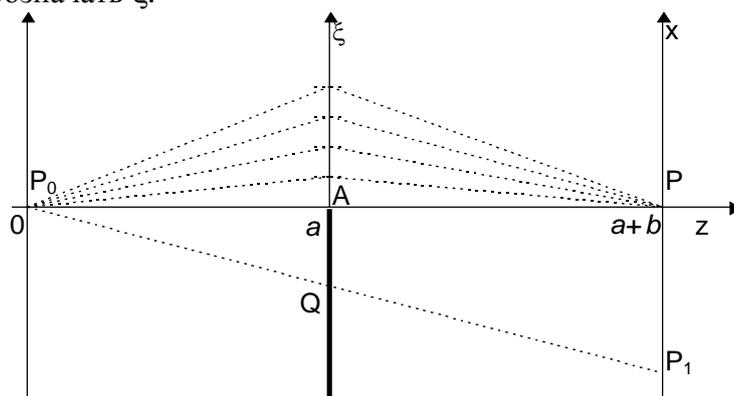


Рис 7. Схема дифракции на крае экрана.

Пусть непрозрачный экран закрывает полупространство $\xi < 0$. Разобьем область интегрирования $\xi > 0$, как и при рассмотрении дифракции на круглом отверстии, на равные по площади подзоны. В данном случае подзоны будут представлять собой узкие (ширина $\Delta\xi$ много меньше характерных размеров a и b) бесконечно длинные ($-\infty < y < \infty$) полоски, параллельные краю, причем ширина всех полосок должна быть одной и той же. Для нахождения поля в точке наблюдения построим векторную диаграмму, на которой будут суммироваться вклады от каждой подзоны. Отметим, что в данном случае независимо от ширины подзоны нельзя считать, что излучение от всех вторичных источников какой-либо подзоны приходит в точку наблюдения в одной и той же фазе. Чтобы найти фазу волны, приходящей от подзоны, необходимо проинтегрировать по координате y (длине подзоны).

Векторы, характеризующие вклад каждой подзоны, будут иметь одинаковую длину, однако разность фаз для соседних подзон уже не будет одной и той же, как при расчете дифракции на круглом отверстии. Эта разность фаз будет близкой к нулю для первых подзон, расположенных в центральной части, и расти по мере удаления от центра. В результате векторная диаграмма будет иметь вид спирали (рис. 8), называемой **спиралью Корню**. Эта спираль позволяет достаточно просто рассчитывать распределение поля при дифракции Френеля не только на крае экрана, но и на щели, проволоке. Поэтому остановимся подробнее на ее свойствах.

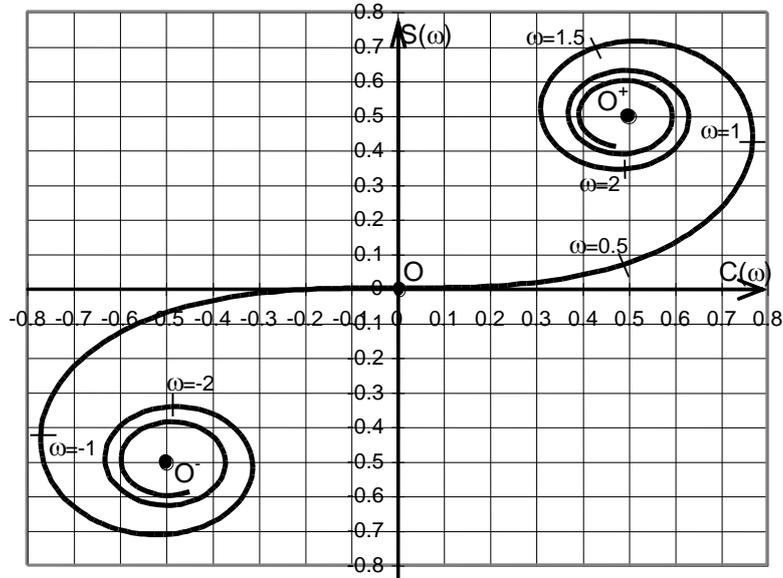


Рис. 8. Спираль Корню.

Спираль Корню задается в параметрическом виде с помощью **интегралов Френеля**:

$$C(\omega) = \int_0^{\omega} \cos\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau$$

$$S(\omega) = \int_0^{\omega} \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau$$

где ω - параметр спирали Корню (обоснованность применения этих формул для дифракции в данном случае можно найти в литературе). Интегралы Френеля не могут быть вычислены аналитически, для них существуют таблицы.

Так как спираль состоит из маленьких векторов, соответствующих вкладу от каждой подзоны, то ее длина от начала координат до любой ее точки пропорциональна координате ξ (см. рис. 7). Можно показать, что безразмерный параметр ω равен длине участка спирали, отсчитываемой от начала координат, при этом он связан с координатой ξ следующим соотношением (вывод этого соотношения можно найти в литературе):

$$\omega(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \cdot \xi. \quad (3)$$

Это выражение можно преобразовать (см. формулу (2)) к виду

$$\omega(\xi) = \frac{\sqrt{2}\xi}{R_1}, \quad (3')$$

где R_1 – радиус первой зоны Френеля. Отметим, что длина спирали от начала координат до каждого из фокусов бесконечна.

Найдем с помощью спирали Корню поле в точке наблюдения P. Если препятствие отсутствует, то “работают” все подзоны на обеих ветвях спирали, в этом случае поле в точке наблюдения соответствует вектору $\mathbf{O}^-\mathbf{O}^+$. Если же экран закрывает ровно половину пространства, то открытой является половина спирали (“работают” подзоны на положительной ветви спирали), поэтому суммарный вклад будет соответствовать вектору \mathbf{OO}^+ . Длина этого вектора в два раза меньше длины вектора $\mathbf{O}^-\mathbf{O}^+$, поэтому и поле будет в два раза меньше. Интенсивность же будет в четыре раза меньше, чем в случае отсутствия препятствия.

Спираль Корню позволяет найти поле для любой точки в плоскости наблюдения. Пусть, например, точка наблюдения P_1 лежит в области геометрической тени и имеет координату $x_1 < 0$ (рис. 7). Линия P_0P_1 пересекает плоскость препятствия в некоторой точке Q. Выберем эту точку в качестве начала координат оси $O\xi$, т.е. $\xi_Q = 0$. Тогда координата

края экрана ξ_1 может быть легко найдена из геометрического построения, в нашем случае $\xi_1 = -x_1 \cdot \frac{a}{a+b} > 0$. Таким образом, открытой является часть пространства $\xi > \xi_1$. Тогда на спирали Корню “работающей” будет часть спирали $\omega > \omega(\xi_1) > 0$, где значение $\omega(\xi_1)$ найдено по формуле (3). Вектор, характеризующий поле в точке $x_1 < 0$, будет начинаться с точки на положительной ветви спирали, соответствующей $\omega(\xi_1) > 0$, и заканчиваться в положительном фокусе спирали \mathbf{O}^+ .

Если точку наблюдения x_1 смещать дальше в область геометрической тени, то соответствующее значение $\omega(\xi_1)$ будет расти, точка на спирали, соответствующая этому значению, будет перемещаться по спирали ближе к положительному фокусу, длина вектора будет монотонно уменьшаться, а интенсивность монотонно падать. Если же точку x_1 смещать в другую сторону - к границе геометрической тени, то начальная точка на спирали “побежит” к началу координат и при $x_1 = 0$ поле будет характеризоваться вектором \mathbf{OO}^+ . При дальнейшем росте $x_1 > 0$ координата ξ_1 станет отрицательной, начнут открываться участки на отрицательной ветви спирали Корню, точка на спирали, соответствующая началу вектора, “побежит” к отрицательному фокусу. При этом конец вектора все время будет находиться в точке \mathbf{O}^+ . Видно, что интенсивность в освещенной области будет осциллировать, при этом в максимумах интенсивность будет больше, чем интенсивность I_0 в случае отсутствия экрана (рис. 9). В первом, наибольшем максимуме $I = 1,37 I_0$, а в первом минимуме $I = 0,78 I_0$. Отметим, что данное построение хорошо работает в случае, когда модуль координаты точки наблюдения $|x_1|$ много меньше расстояний a и b .

На рис. 9 приведен график зависимости интенсивности в плоскости наблюдения от значения параметра ω .

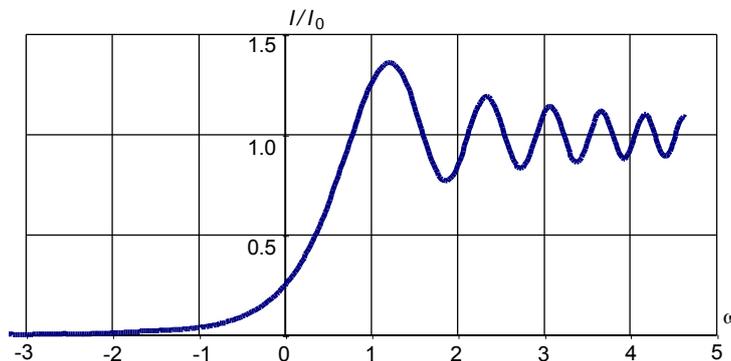


Рис. 9. График зависимости интенсивности в плоскости наблюдения от значения параметра ω при дифракции на крае экрана.

Дифракция Френеля на щели.

Спираль Корню позволяет находить распределение интенсивности при дифракции Френеля не только на крае, но и на щели и проволоке. Пусть, к примеру, на пути монохроматической волны, выходящей из точки P_0 , находится щель АВ (рис. 10). Нас интересует интенсивность в некоторой точке Р. Соединим точки P_0 и Р, найдем точку пересечения Q с плоскостью щели, координату которой примем за нуль, т.е. $\xi_Q = 0$. Найдем координаты краев щели ξ_1 и ξ_2 , рассчитаем по формуле (3) соответствующие значения $\omega_1 = \omega(\xi_1)$ и $\omega_2 = \omega(\xi_2)$ и найдем эти точки на спирали Корню (на рис.11 пусть это будут точки \mathbf{O}_1 и \mathbf{O}_2). Тогда вектор $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$ и будет характеризовать поле в точке наблюдения.

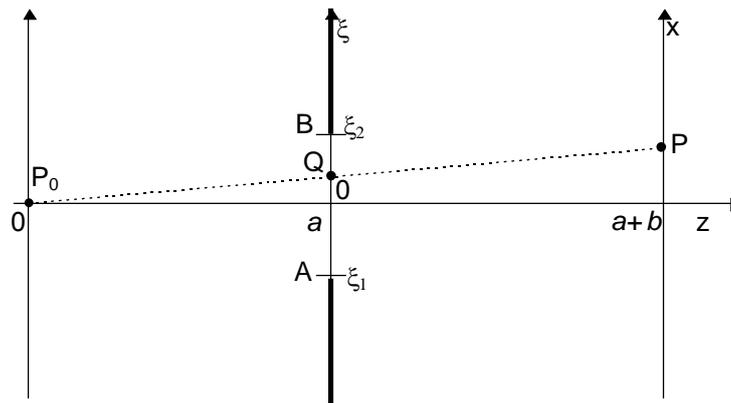


Рис 10. Схема дифракции на щели.

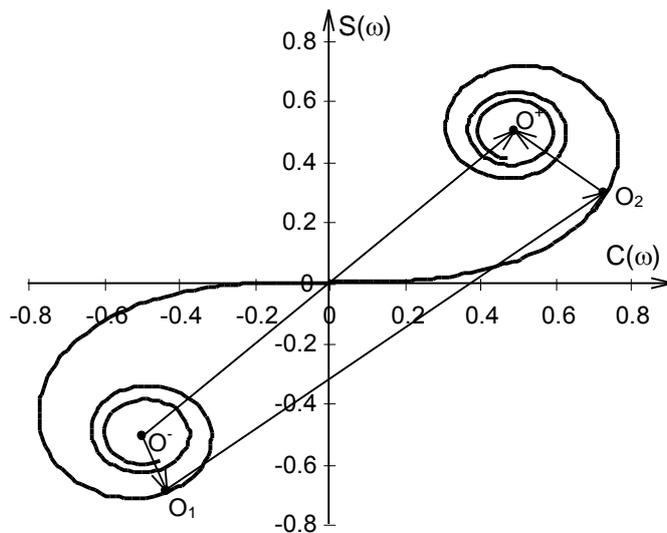


Рис. 11. Расчет зависимости поля в плоскости наблюдения при дифракции на щели с помощью спирали Корню.

Сместим точку наблюдения вдоль оси OX на небольшое расстояние $\Delta x > 0$. Тогда сместится вверх и точка пересечения Q , в результате чего координаты краев щели ξ_1 и ξ_2 изменятся на одну и ту же величину $\Delta \xi < 0$. Так как $\omega \sim \xi$, то и соответствующие значения ω_1 и ω_2 изменятся на одну и ту же величину $\Delta \omega < 0$. Это означает, что расположенные на спирали точки O_1 и O_2 сместятся на одинаковое расстояние в сторону к отрицательному фокусу, длина вектора O_1O_2 изменится, следовательно, изменятся значения поля и интенсивности. При дальнейшем смещении точки наблюдения вверх точки O_1 и O_2 “побегут” по спирали в одну и ту же сторону и с одинаковой “скоростью”, так как, как уже отмечалось, параметр ω равен длине участка спирали от начала координат. Таким образом можно найти распределение интенсивности в плоскости наблюдения для произвольного расположения источника света и любой ширины щели.

Отметим, что “ширина” щели $|\omega_1 - \omega_2|$, выраженная как разность значений параметров ω_1 и ω_2 , остается неизменной для любой точки в плоскости наблюдения. Поэтому при построении графиков удобно измерять ширину щели в терминах параметра ω .

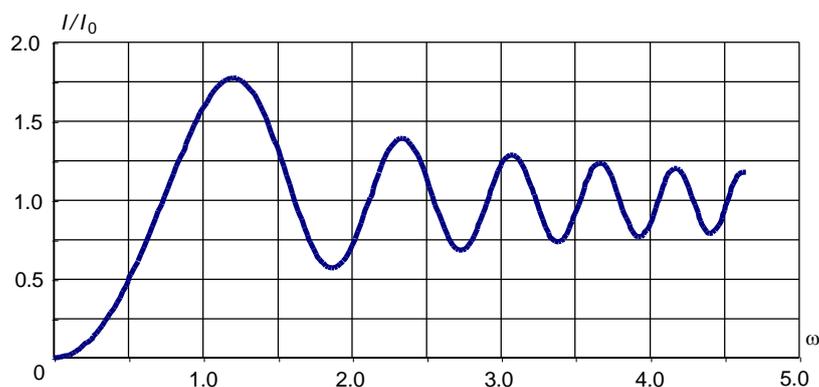


Рис. 12. График зависимости интенсивности в центре картины при дифракции на щели от полуширины щели ω .

На рис. 12 приведен график зависимости интенсивности в центре картины от полуширины щели для случая, когда линия P_0P проходит через середину щели и перпендикулярна плоскости щели (ширина щели равна 2ω). Видны осцилляции интенсивности, что означает, что при изменении ширины щели в центре будет наблюдаться то светлая, то темная полоса.

Иногда разбиение волнового фронта на полосы линиями, параллельными краю щели, осуществляют на так называемые **зоны Шустера**. Координаты границ зон Шустера соответствуют значениям параметра ω_i , равным $\sqrt{2 \cdot 1}, \sqrt{2 \cdot 2}, \sqrt{2 \cdot 3}, \dots, \sqrt{2 \cdot i}$, : в этих точках касательная к спирали Корню параллельна оси абсцисс. Иными словами, площади зон Шустера различны, а разности фаз при переходе от одной зоны к соседней одинаковы и равны π . Из рис. 12 видно, что координаты максимумов и минимумов не совпадают с этими значениями ω_i .

Обратим внимание на характер изменения интенсивности при небольших размерах щели $\omega \ll 1$. В этом случае открытым является участок спирали Корню, расположенный вблизи начала координат. Этот участок практически представляет собой горизонтальный отрезок, что означает, что излучение от всех вторичных источников приходит в точку наблюдения в одной фазе. С увеличением ширины щели напряженность поля растет пропорционально ширине, а интенсивность изменяется пропорционально квадрату ширины. Такой закон изменения сигнала характерен для дифракции Фраунгофера. В то же время параметр ω связан с числом зон Френеля, содержащихся в ширине щели, найденным выше соотношением. Следовательно, провести границу между приближениями Фраунгофера и Френеля для описания дифракции можно, пользуясь следующим критерием: **если характерный размер препятствия много меньше размера первой зоны Френеля, то справедливо приближение Фраунгофера; в противном случае следует использовать приближение Френеля** (подробнее - в следующей теме). Это означает, что в случае дифракции Фраунгофера для ширины щели d должны быть справедливы следующие ограничения:

$$d \ll \sqrt{\lambda \cdot a}, \quad d \ll \sqrt{\lambda \cdot b}.$$

Если на объект падает плоская волна ($a \rightarrow \infty$), то условие $d \ll \sqrt{\lambda \cdot b}$ позволяет определить дифракционную длину пучка $b_{\text{дифр}} = \frac{d^2}{\lambda}$, как границу между приближениями Фраунгофера и Френеля. Если $b \gg b_{\text{дифр}}$, то имеет место **дифракция в дальней зоне** (Фраунгофера), если $b \leq b_{\text{дифр}}$, то говорят о **дифракции в ближней зоне** (Френеля).

Если размер препятствия существенно (на 2-3 порядка) превышает размер первой зоны Френеля, то следует использовать приближение геометрической оптики.

§1.5. Дифракция Френеля на проволоке. Принцип Бабинне.

Для того, чтобы найти дифракционную картину от проволоки, проведем следующие рассуждения. При расчете дифракционной картины от щели (той же ширины, что и толщина проволоки) ищется суммарный вклад от вторичных источников, расположенных на открытой части исследуемого объекта. Для проволоки, наоборот, данная часть объекта будет закрытой, а остальное пространство - открытым. Такие объекты, как бы дополняющие друг друга, носят название **дополнительных**.

Введем понятие комплексной **функции пропускания** препятствия $\alpha(x,y)$ как отношения комплексной амплитуды поля $E_2(x,y)$ падающей волны в точках, расположенных непосредственно сразу за препятствием, к комплексной амплитуде поля $E_1(x,y)$ волны в точках, расположенных непосредственно перед препятствием (толщина препятствия считается бесконечно малой). Тогда два объекта называют дополнительными, если для функций пропускания этих объектов справедливо соотношение:

$$\alpha_1(x,y) + \alpha_2(x,y) = 1$$

для всех точек (x,y) в плоскости препятствия.

С учетом введенного понятия функции пропускания интегральную формулу Френеля-Кирхгофа (1) можно переписать в виде:

$$U(P) = - \frac{iA}{2\lambda} \iint_{(x,y)} \alpha(x,y) \cdot K(\alpha) \cdot \frac{\exp(ikr)}{r} \cdot \frac{\exp(iks)}{s} \cdot dx dy \quad (1')$$

где интегрирование ведется по всей плоскости (x,y) , на которой расположено препятствие.

Обозначим распределение поля на экране в случае дифракции на щели $U_{щ}(x)$, а на проволоке - $U_{п}(x)$, где x - координата в плоскости наблюдения. Тогда сумму полей $U_{щ}(x) + U_{п}(x)$ можно представить как сумму интегралов по открытым областям для каждого из этих объектов, или как интеграл от суммы открытых областей. Но отверстия для дополнительных объектов располагаются так, что полностью "открывают" весь волновой фронт падающего излучения, следовательно

$$U_{щ}(x) + U_{п}(x) = U_0(x),$$

где $U_0(x)$ - волновое возмущение на экране в случае отсутствия какого-либо препятствия. Таким образом, сумма распределений полей от дополнительных объектов равна полю, наблюдаемому на экране при отсутствии препятствия. Полученный результат носит название **принципа Бабине**.

Обратим внимание, что $U_0(x)$ есть волновое возмущение на экране в **отсутствии** какого-либо препятствия, а не для случая, когда на пути падающего излучения **одновременно установлены** и щель, и проволока (как нетрудно сообразить, свет через такую совокупность объектов не пройдет). Дело в том, что при рассмотрении принципа Бабине суммировались вклады именно от открытых областей каждого из объектов, а при рассмотрении случая, когда на пути падающей волны устанавливаются несколько объектов, суммируются, наоборот, закрытые области.

Выше (см. рис. 11) мы рассматривали случай, когда поле в точке наблюдения при дифракции на щели соответствовало на спирали Корню вектору $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2 \sim U_{щ}(x)$. Найдем теперь поле в этой же точке при дифракции на проволоке того же размера. Если препятствие отсутствует, то поле в точке наблюдения характеризуется вектором $\mathbf{O}^-\mathbf{O}^+ \sim U_0(x)$. Тогда, применяя принцип Бабине, получим, что для нахождения поля при дифракции на проволоке следует взять разность векторов $\mathbf{O}^-\mathbf{O}^+$ и $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$, т.е.

$$U_{п}(x) \sim \mathbf{O}^-\mathbf{O}^+ - \mathbf{O}_1\mathbf{O}_2 = \mathbf{O}^-\mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2\mathbf{O}^+$$

(обратим внимание, что вектор $\mathbf{O}^-\mathbf{O}_1$ идет от т. \mathbf{O}^- до т. \mathbf{O}_1 , вектор $\mathbf{O}_2\mathbf{O}^+$ идет от т. \mathbf{O}_2 до т. \mathbf{O}^+ и складывать их надо по правилу сложения векторов).

Отметим следующую особенность дифракции на проволоке. Если линия P_0P проходит строго через середину щели и перпендикулярна плоскости щели, т.е. точки \mathbf{O}_1 и

O_2 находятся на различных ветвях спирали симметрично относительно начала координат, то вектора O_1O_1 и O_2O_2 будут равны друг другу и сонаправлены. При смещении точки наблюдения на небольшую величину в любом направлении эти векторы, практически не изменяя своей длины, поворачиваются в разные стороны. Сумма векторов становится меньше, и, следовательно, поле уменьшается. Таким образом, в центре дифракционной картины при дифракции на проволоке всегда будет светлая полоса.

Если ширина щели значительно превышает размер первой зоны Френеля ($\omega > 1$), то точки O_1 и O_2 лежат ближе к фокусам спирали, чем к началу координат, следовательно, вблизи центра дифракционной картины будет довольно темный участок, на котором будут наблюдаться осцилляции, причем контрастность картины будет невелика. По мере приближения к границе геометрической тени, одна из точек, O_1 или O_2 , начнет приближаться к началу координат и на границе перейдет через нее, что приведет к увеличению освещенности в этой области и повышению контрастности картины. Такой переход позволяет примерно найти местоположение границ геометрической тени.

Понятие о теории дифракции Кирхгофа.

Подробнее см. Борн, Вольф §8.3

Принцип Гюйгенса-Френеля не позволяет получить выражение для коэффициента $K(\chi)$, входящего в интеграл Френеля. Кроме этого, фаза волны, приходящей в точку наблюдения в отсутствие препятствия, отличается на $\frac{\pi}{2}$ от фазы волны, идущей от вторичного источника, расположенного строго на оси (сравните на спирали Френеля комплексный вектор OO_∞ и начальный малый вектор спирали, выходящий из т. О).

Указанные вопросы решаются в теории дифракции Кирхгофа, основанной на преобразовании волнового уравнения с заданными условиями на границе в уравнение Гельмгольца для комплексной амплитуды (не зависящей от времени). Кроме этого, используется интегральная теорема Кирхгофа-Гельмгольца, позволяющая найти поле в некоторой точке Р, если известна комплексная амплитуда поля и ее производная по нормали на какой либо поверхности, охватывающей точку Р.

Другими словами, в теории Френеля в качестве вторичных источников берутся точки замкнутой поверхности, окружающей источник излучения. В теории Кирхгофа, напротив: поверхность вторичных источников окружает точку наблюдения.

В результате преобразований можно получить дифракционный интеграл Френеля-Кирхгофа:

$$U(P) = -\frac{iA}{2\lambda} \iint_{\Sigma} (\cos\theta_0 - \cos\theta) \cdot \frac{\exp(ikr)}{r} \cdot \frac{\exp(iks)}{s} \cdot dS \quad (1)$$

где θ_0 и θ - углы, образованные векторами \vec{r} и \vec{s} с нормалью к плоскости отверстия. Таким образом, выражение для коэффициента $K(\theta_0, \theta)$ имеет вид:

$$K(\theta_0, \theta) = -\frac{i}{2\lambda} (\cos\theta_0 - \cos\theta).$$

Напомним, что ранее из качественных соображений и спирали Френеля было получено выражение

$$K_0 = -\frac{i}{\lambda},$$

что соответствует значению $K(\theta_0, \theta)$ при условии $\theta_0 = 0$ и $\theta = \pi$.

Замечание 1.

Довольно часто в учебной литературе интеграл Френеля-Кирхгофа записывают в виде:

$$U(P) = \frac{iA}{2\lambda} \iint_{\Sigma} (\cos\theta_0 - \cos\theta) \cdot \frac{\exp(-ikr)}{r} \cdot \frac{\exp(-iks)}{s} \cdot dS, \quad (1a)$$

т.е. изменяется знак и в коэффициенте $K(\theta_0, \theta)$ (перед интегралом), и в показателе экспоненты (под интегралом). Обе формы записи эквивалентны. Однако вспомним, что при построении спирали Френеля с увеличением оптического пути (т.е. r и s) фаза комплексной амплитуды увеличивалась, векторы dA_i поворачивались против часовой стрелки. Это соответствует форме записи сферической волны в виде $\frac{\exp(ikr)}{r}$.

При отсутствии препятствия соответствующий комплексный вектор OO_{∞} повернут относительно самого первого вектора dA_I , идущего из т. О, на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки. Спираль Френеля строилась без учета коэффициента $K(\theta_0, \theta)$, поэтому появление в этом коэффициенте множителя вида

$$-i = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

как раз и совмещает оба вектора.

При форме записи интеграла в виде (1a) спираль Френеля следует строить, поворачивая векторы dA_i по часовой стрелке (спираль уходит вниз). Для таким образом построенной спирали комплексный вектор OO_{∞} повернут относительно первого вектора dA_I на угол $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке, и множитель

$$i = \exp\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

также совместит векторы.

Таким образом, обе формы записи эквивалентны. Но обычно спираль Френеля принято строить так, как это было сделано ранее. Поэтому предпочтительнее пользоваться записью интеграла Френеля-Кирхгофа в виде (1).

Отметим также, что в учебной литературе, говоря о рассматриваемой выше разности фаз $\left(\pm \frac{\pi}{2}\right)$ употребляют термины «отстает (опережает) по фазе на $\frac{\pi}{2}$ ». На наш взгляд, в данном случае такая терминология только сбивает с толку. Ведь термины «отстает (опережает)» говорят о временной зависимости, а при записи комплексных амплитуд временную зависимость вида $\exp(i\omega t)$ исключают из рассмотрения. Поэтому правильнее говорить о разности фаз между волнами, прошедшими разными оптическими путями. При разности хода Δr разность фаз $\Delta\phi$ находится как

$$\Delta\phi = k \cdot \Delta r \text{ при форме записи } \frac{\exp(ikr)}{r} \text{ и}$$

$$\Delta\phi = -k \cdot \Delta r \text{ при форме записи } \frac{\exp(-ikr)}{r}.$$

Замечание 2.

Как отмечалось выше, в теории Кирхгофа поверхность вторичных источников окружает точку наблюдения, а не источник. Поэтому формально мы можем ничего не говорить про местоположение источников. Но тогда возникает проблема в определении

угла θ_0 , входящего в коэффициент $K(\theta_0, \theta)$. Принято выходить из такой ситуации следующим образом.

Говорят, что рассмотрение дифракции идет в параксиальном приближении (для приосевых пучков), тем самым, подразумевая, что источник излучения один. В таком приближении считают, что

$$K(\theta_0, \theta) = -\frac{i}{2}.$$

И интеграл Френеля-Кирхгофа записывают в виде:

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma} U_{\Sigma} \cdot \frac{\exp(iks)}{s} \cdot dS,$$

где U_{Σ} - комплексная амплитуда поля на поверхности Σ , по которой ведется интегрирование.

Обоснование спирали Корню

Пусть расстояния от источника до плоскости объекта и от этой плоскости до экрана равны a и b соответственно (рис. 13). Если характерный размер объекта много меньше a и b , то в интеграле Френеля-Кирхгофа можно положить

$$\begin{aligned} \theta_0 &\approx 0; & \theta &\approx \pi; \\ \frac{1}{r} &\approx \frac{1}{a}; & \frac{1}{s} &\approx \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

В результате получим:

$$U(P) = \frac{iA}{\lambda} \cdot \frac{1}{ab} \iint_{\Sigma} \exp(ik(r+s)) \cdot dS.$$

Введем в плоскости объекта систему координат $\{x, y\}$, в плоскости экрана - $\{x', y'\}$. Для величин r и s получим:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} \approx a \cdot \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2a^2} \right); \\ s &= \sqrt{b^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2} \approx b \cdot \left(1 + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2b^2} \right). \end{aligned}$$

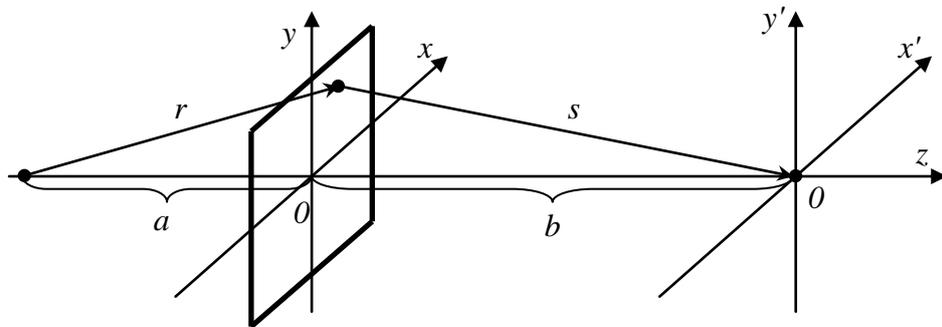


Рис. 13. К преобразованию интеграла Френеля-Кирхгофа. Будем искать поле $U(P)$ в точке с координатами $\{x' = 0, y' = 0\}$:

$$U(0,0) = \frac{iA}{\lambda} \cdot \frac{\exp(ik(a+b))}{ab} \iint_{\Sigma} \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right) \cdot dx \cdot dy.$$

Если область интегрирования, к примеру, прямоугольник:

$$x_1 \leq x \leq x_2; \quad y_1 \leq y \leq y_2;$$

то

$$U(P) = \frac{iA}{\lambda} \cdot \frac{\exp(ik(a+b))}{ab} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(ik \frac{x^2}{2f}\right) dx \cdot \int_{y_1}^{y_2} \exp\left(ik \frac{y^2}{2f}\right) dy.$$

(здесь введено обозначение $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$).

Так как

$$\exp\left(ik \frac{x^2}{2f}\right) = \cos\left(k \frac{x^2}{2f}\right) + i \cdot \sin\left(k \frac{x^2}{2f}\right),$$

то, делая замену переменных

$$\tau = \sqrt{\frac{2}{\lambda f}} \cdot x = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \cdot x,$$

получим интегралы Френеля:

$$C(\omega) = \int_0^{\omega} \cos\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau;$$

$$S(\omega) = \int_0^{\omega} \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau,$$

в которых параметр ω связан с координатами x_j зависимостью

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \cdot x_i.$$

В одномерном случае ($|y| < \infty$) интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ik \frac{y^2}{2f}\right) dy \sim (i+1),$$

остается только зависимость по x (объектом дифракции является узкая бесконечная щель). Выражение $(i+1)$ как раз и определяет положение фокусов на спирали Корню.

Комплексная амплитуда поля в точке наблюдения определяется прямой, проведенной из точки ω_1 в точку ω_2 на спирали Корню.

Приближения Френеля и Фраунгофера. Ближняя и дальняя зоны.

Как отмечалось выше, интеграл Френеля – Кирхгофа при условии, что характерный размер объекта много меньше a и b , преобразуется к виду

$$U(P) = \frac{iA}{\lambda} \cdot \frac{1}{ab} \iint_{\Sigma} \exp(ik(r+s)) \cdot dS,$$

где

$$r = \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} \approx a \cdot \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2a^2} \right);$$

$$s = \sqrt{b^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2} \approx b \cdot \left(1 + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2b^2} \right);$$

$$r + s \approx (a + b) + \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - \frac{xx' + yy'}{b} + \frac{x'^2 + y'^2}{2b} \right).$$

Интегрирование ведется по переменным x и y , поэтому под знаком интеграла останется

$$U(x', y') \sim \iint_{(x, y)} \exp \left(ik \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - \frac{xx' + yy'}{b} \right) \right) dx dy.$$

Данное приближение есть **приближение Френеля**.

Первым слагаемым под знаком экспоненты можно пренебречь, если

$$k \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right) \ll \pi;$$

$$\frac{x^2 + y^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \ll 1;$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \ll \frac{\lambda}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} = R_1,$$

где R_1 – радиус первой зоны Френеля.

Таким образом, если для плоскости наблюдения размеры объекта меньше размеров первой зоны Френеля, то

$$\exp \left(ik \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right) \right) \approx 1$$

и интеграл Френеля-Кирхгофа можно записать в виде:

$$U(x', y') \sim \iint_{(x, y)} \exp \left(-ik \left(\frac{xx' + yy'}{b} \right) \right) dx dy.$$

Данное приближение называют **приближением Фраунгофера**. А получившийся интеграл есть пространственное преобразование Фурье по пространственным частотам

$$k_x = k \frac{x}{b} \approx k \sin \varphi_x,$$

$$k_y = k \frac{y}{b} \approx k \sin \varphi_y$$

где φ_x, φ_y - углы дифракции.

В случае плоской волны ($1/a \rightarrow 0$) для расстояния b , при котором приближение Френеля переходит в приближение Фраунгофера, получим:

$$b \gg \frac{r^2}{\lambda} = b_{\text{дифр}},$$

где $b_{\text{дифр}} = \frac{r^2}{\lambda}$ называют **дифракционной длиной**. Именно по этой длине и принято

проводить границу между дифракцией **Френеля** (или в **ближней зоне**) и дифракцией **Фраунгофера** (или в **дальней зоне**). Однако подчеркнем условность данного перехода, обычно говорят, что приближение Фраунгофера «работает», когда число открытых зон много меньше единицы.

При выводе формул для дифракции Френеля использовалось приближение, что расстояния a от источника до объекта и b от объекта до экрана существенно превышают размеры объекта. Если же эти величины близки друг другу, то следует пользоваться законами **геометрической оптики**, в основном законом прямолинейного распространения света (рис. 14). Заметим, что в вышеприведенных формулах приближения Френеля переменные интегрирования x и y независимы, поэтому может оказаться, что при дифракции на двумерной структуре (например, на прямоугольном отверстии) по каждой их координат будет «свой» вид дифракции.

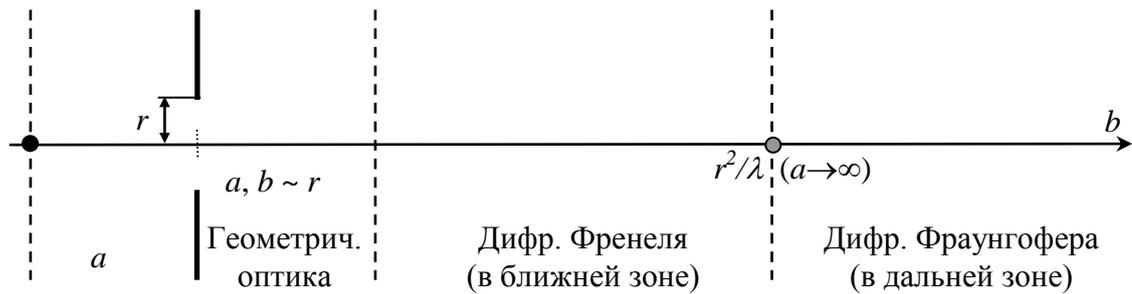


Рис. 14. Границы зон наблюдения.

Для бесконечной щели по одной из координат будет приближение Френеля или Фраунгофера (в зависимости от соотношения ширины щели и расстояний), а по другой – «работают» законы геометрической оптики. Напомним, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ik \frac{y^2}{2f}\right) dy \sim (i+1),$$

т.е. геометрическая оптика «дает» принципиальный множитель $(i+1)$.

Однако даже при условии примерного равенства размеров объекта и расстояний a и b , т.е. в области геометрической оптики, есть ситуации, когда необходимо пользоваться дифракционным приближением Френеля. Речь идет о точках экрана, соответствующих геометрической границе света и тени: там для точечного монохроматического источника всегда наблюдается картина, характерная для дифракции Френеля на крае экрана.

Дифракция Фраунгофера

(основную часть текста составляют описание задачи №409 практикума и Глава 5 из «Методики решения...»)

Дифракция Фраунгофера на одной щели. Рассмотрим схему наблюдения дифракции Фраунгофера, представленную на рис.3. Плоская монохроматическая волна падает нормально на плоскость Щ, где расположена бесконечно длинная щель шириной b (щель можно считать бесконечно длинной, если ее длина намного больше ее ширины. Так при ширине в 0,01 - 0,05 мм длина в несколько миллиметров может считаться бесконечной).

За щелью расположена линза L , в фокальной плоскости которой находится экран \mathcal{E} . Наличие линзы равносильно тому, что экран расположен как бы на "бесконечном" расстоянии от объекта. Если бы свет распространялся прямолинейно в соответствии с законами геометрической оптики, то в фокальной плоскости линзы получилась бы бесконечно узкая светлая полоса, проходящая через точку N_0 на экране \mathcal{E} . Но в соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля каждая точка волнового фронта, достигающего плоскости, где расположена щель, является источником сферических волн, называемых вторичными. Выделим для всех вторичных источников лучи, идущие под некоторым углом φ к первоначальному направлению. Они образуют плоский волновой фронт и соберутся в фокальной плоскости линзы в т. N_φ (рис.3).

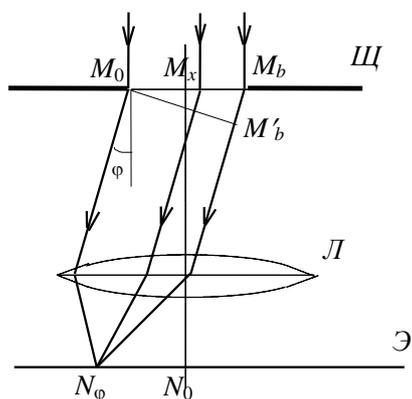


Рис.3 Дифракция Фраунгофера на одной щели.

Расчет поля в плоскости экрана проведем непосредственно на основе принципа Гюйгенса-Френеля. Для этого разобьем открытую часть поверхности щели на зоны в виде узких полосок одинаковой ширины dx , параллельных краям щели. Эти элементарные участки становятся источниками вторичных волн. Амплитуды dA_0 этих волн, приходящих в т. N_φ на экране от разных полосок, одинаковы, так как все зоны имеют одну и ту же площадь и один и тот же к направлению вторичных волн угол φ . Эти амплитуды будут пропорциональны произведению амплитуды падающей волны E_0 на размер полоски dx , т.е.

$$dA_0 = C \cdot E_0 dx \quad (2)$$

где C - коэффициент пропорциональности.

Однако фазы колебаний, приходящих от различных участков щели, будут различаться. Для определения разности фаз проведем прямую M_0M_b' , перпендикулярную к направлению дифрагированных лучей, и найдем разность хода, возникающую на пути от прямой M_0M_b до прямой M_0M_b' . Из рис.3 видно, что разность хода между волнами, идущими от точки M_0 и от точки M_x , расположенной на расстоянии x от т. M_0 , равна $x \sin \varphi$.

Следовательно, если считать, что фаза волны, приходящей в т. N_φ из т. M_0 , равна нулю, то колебание dU_φ , приходящее от элемента dx из окрестности точки M_x в т. N_φ , может быть записано в виде:

$$dU_\varphi = dA_0 \cos(\omega t - kx \sin \varphi)$$

где $k=2\pi/\lambda$ - волновое число, ω - частота колебания.

Для вычисления величины U_φ в т. N_φ необходимо просуммировать вклады от различных участков щели, т.е. проинтегрировать dU_φ в пределах от $x = 0$ до $x = b$:

$$\begin{aligned} U(\varphi) &= \int_0^b CE_0 \cos(\omega t - kx \sin \varphi) dx = \\ &= CE_0 b \frac{\sin\left(\frac{k b \sin \varphi}{2}\right)}{\frac{k b \sin \varphi}{2}} \cos\left(\omega t - \frac{k b \sin \varphi}{2}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

Сомножитель $\cos\left(\omega t - \frac{k b \sin \varphi}{2}\right)$ в формуле (3) описывает временное изменение поля в точке наблюдения с частотой ω , а модуль выражения, стоящего перед косинусом, есть амплитуда A_φ результирующей волны в точке N_φ :

$$A_\varphi = CE_0 b \frac{\sin\left(\frac{k b \sin \varphi}{2}\right)}{\frac{k b \sin \varphi}{2}} = CE_0 b \cdot \text{sinc}\left(\frac{k b \sin \varphi}{2}\right) \quad (4)$$

Отметим, что амплитуда волны, распространяющейся в направлении $\varphi=0$, пропорциональна ширине щели b и равна

$$A_0 = CE_0 b \quad (5)$$

и выражение (4) можно переписать в виде

$$A_\varphi = A_0 \cdot \text{sinc}\left(\frac{k b \sin \varphi}{2}\right) \quad (4')$$

Интенсивность света определяется квадратом амплитуды, т.е.

$$I_\varphi = I_0 \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{k b \sin \varphi}{2}\right) = I_0 \cdot \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \quad (6)$$

где I_0 - интенсивность в центре дифракционной картины ($I_0 \sim b^2$),

$$u = \frac{k b \sin \varphi}{2}.$$

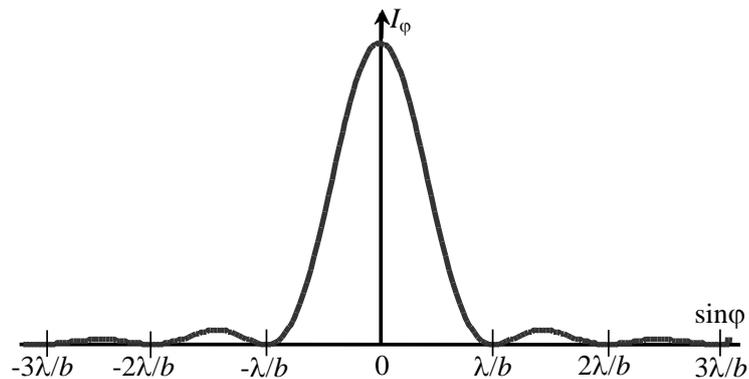


Рис.4. Дифракция Фраунгофера на одной щели: распределение интенсивности на экране в зависимости от синуса угла дифракции.

На рис.4 приведен график зависимости интенсивности I_φ от синуса угла дифракции φ . Интенсивность максимальна для направления $\varphi_{0\max} = 0$, совпадающего с направлением распространения падающей волны. Направления, соответствующие последующим максимумам, можно найти из решения задачи поиска экстремума функции (6). Эти направления примерно соответствуют значениям u , равным $u_{1\max} = 1.43\pi \approx 3\pi/2$, $u_{2\max} = 2.46\pi \approx 5\pi/2$, $u_{3\max} = 3.47\pi \approx 7\pi/2, \dots$ Соотношения интенсивностей главного и последующего максимумов равны $I_{0\max} = I_{1\max} = I_{2\max} = I_{3\max} = \dots = 1 : 0,045 : 0,016 : 0,008 : \dots$ и не зависят ни от ширины щели, ни от длины волны.

В то же время для направлений $\sin\varphi = \lambda/b, 2\lambda/b, 3\lambda/b, 4\lambda/b, \dots$, удовлетворяющих уравнению $\sin u = 0$, интенсивность равна нулю. Эти направления соответствуют случаю, когда разность хода между волнами, приходящими от крайних участков щели, равна целому числу длин волн. Это означает, что для любого произвольно выбранного участка щели всегда найдется другой, равный по величине, участок, излучение от которого придет строго в противофазе с излучением от выбранного участка. Тем самым, в результате интерференции интенсивность распространяющегося в этих направлениях излучения будет равна нулю.

Из рис.4 видно, что основная часть светового потока сосредоточена в центральной дифракционной полосе, определяемой значениями $\sin\varphi = \frac{\lambda}{b} \approx \varphi$ (так называемый центральный максимум), малая его часть будет распространяться в пределах первых ($\approx 5\%$) и вторых ($\approx 2\%$) максимумов и т.д. Угловой размер центрального дифракционного максимума $\varphi = \frac{\lambda}{b}$ часто называют дифракционной расходимостью пучка в дальней зоне.

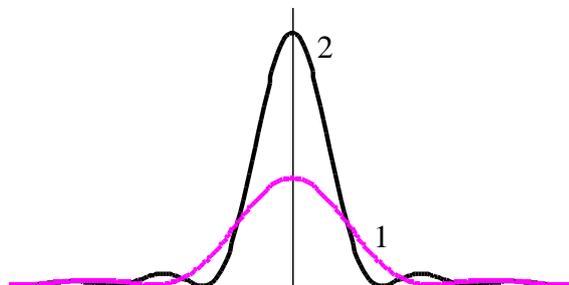


Рис.5. Дифракция Фраунгофера на одной щели: 1 - узкая щель, 2 - широкая щель.

Рассмотрим влияние ширины щели на распределение интенсивности дифракционной картины (рис.5). Увеличение ширины щели приводит к приближению первых минимумов к центру дифракционной картины, при этом резкость дифракционного максимума увеличивается (рис.5, кривая 2). Соотношение интенсивностей света в отдельных максимумах не изменяется, однако увеличивается абсолютное значение интенсивности, связанное с тем, что с увеличением ширины щели увеличивается энергия проходящего через нее излучения.

Отметим, что дифракция Фраунгофера может наблюдаться и при падении сферической волны на объект, и при отсутствии линзы. Из формулы (1) можно показать, что условия для наблюдения дифракции Фраунгофера имеют вид: $b^2/\lambda r \ll 1$, $b^2/\lambda s \ll 1$.

Формулу (6) для дифракции на щели можно получить и с помощью метода векторных диаграмм (см. «Методику решения задач по оптике», глава 5, Теоретическое введение).

Направления φ_m на минимумы m -го порядка находятся из соотношения

$$b \sin \varphi_m = m\lambda.$$

Зная эту формулу, легко записать и формулу (6). Так как нули СИНКа соответствуют значениям аргумента $u=m\pi$, а из условия минимума

$$m = \frac{b \sin \varphi}{\lambda},$$

то для аргумента СИНКа получим:

$$u = m\pi = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} = \frac{k b \sin \varphi}{2}.$$

Дифракция на нескольких щелях (дифракционная решетка). Рассмотрим дифракцию Фраунгофера на объекте, представляющем собой совокупность N бесконечно длинных щелей, имеющих одинаковую ширину b и расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга. Такой объект принято называть **дифракционной решеткой**. Обозначим через d расстояние между центрами соседних щелей (т.н. период решетки). Пусть на дифракционную решетку падает нормально монохроматическое излучение с длиной волны λ . Для определения интенсивности света, распространяющегося в направлении, составляющем угол φ с нормалью, воспользуемся принципом Гюйгенса-Френеля.

Амплитуды волн, приходящих в т. N_φ от каждой из щелей, равны и выражаются формулой (4'), однако между волнами, приходящими от соседних щелей, существует разность фаз, задаваемая формулой $kd \sin \varphi$.

$$\text{Введем обозначение } \delta = \frac{kd \sin \varphi}{2} = \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda}.$$

Чтобы получить возмущение, посылаемое всей решеткой, необходимо просуммировать по всем N щелям, т.е.

$$A_\varphi = A_0 \frac{\sin u}{u} \sum_{n=0}^{N-1} \exp(-i2\delta n) \quad (9)$$

Сумма в (9) представляет собой геометрическую прогрессию, первый член которой равен единице, а показатель прогрессии - $q = \exp(-i2\delta)$. Таким образом

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp(-i2\delta n) = \frac{1-q^N}{1-q} = \frac{1-\exp(-i2\delta N)}{1-\exp(-i2\delta)} \quad (10)$$

В итоге для возмущения в направлении φ получаем

$$A_\varphi = A_0 \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{1-\exp(-i2\delta N)}{1-\exp(-i2\delta)} \quad (11)$$

С учетом того, что

$$(1-e^{i\alpha})(1-e^{-i\alpha}) = 2 - (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) = 2 - 2\cos\alpha = 4\sin^2\alpha / 2$$

получаем выражение для интенсивности дифрагированных лучей под углом φ в виде

$$I_\varphi = A_\varphi A_\varphi^* = I_0 \cdot \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right)^2 \quad (12)$$

Формулу (12) можно представить в виде произведения двух членов. Первый член, называемый **дифракционным**, имеет вид

$$I_{\text{дифр}} = I_0 \cdot \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \quad (13)$$

и описывает дифракцию на одной щели размера b . Вид этой функции (рис.6б) совпадает с приведенным на рис.4.

Второй член, равный

$$I_{\text{инт}} = \left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right)^2 \quad (14)$$

описывает интерференцию излучения, приходящего от различных щелей, и носит название **интерференционного**.

Исследуем более подробно вид функции (14), изображенный на рис.6а. Числитель в формуле (14) обращается в нуль при $\delta=0, \pi/N, 2\pi/N, \dots, (N-1)\pi/N, \pi, (N+1)\pi/N, \dots$ однако для каждого N -ого значения $\delta=0, \pi, 2\pi, \dots$ в нуль обращается и знаменатель. Воспользовавшись предельным переходом, можно получить, что для этих значений угла функция (14) имеет одинаковое максимальное значение, равное N^2 . Таким образом, для этих значений угла δ интенсивность будет максимальной. Такие максимумы называют **главными**, направления φ_m на них находятся из условия, что разность хода Δs между лучами, приходящими от соседних щелей, равна целому числу длин волн:

$$\Delta s = d \sin \varphi_m = m\lambda. \quad (15)$$

Между **главными** максимумами располагаются $(N-1)$ **добавочных** минимумов, соответствующих нулевым значениям числителя в формуле (14). Так как между любыми двумя соседними добавочными минимумами имеется добавочный максимум, интенсивность которого существенно меньше интенсивности ближайших главных максимумов, то общее число добавочных максимумов между главными равно $(N-2)$.

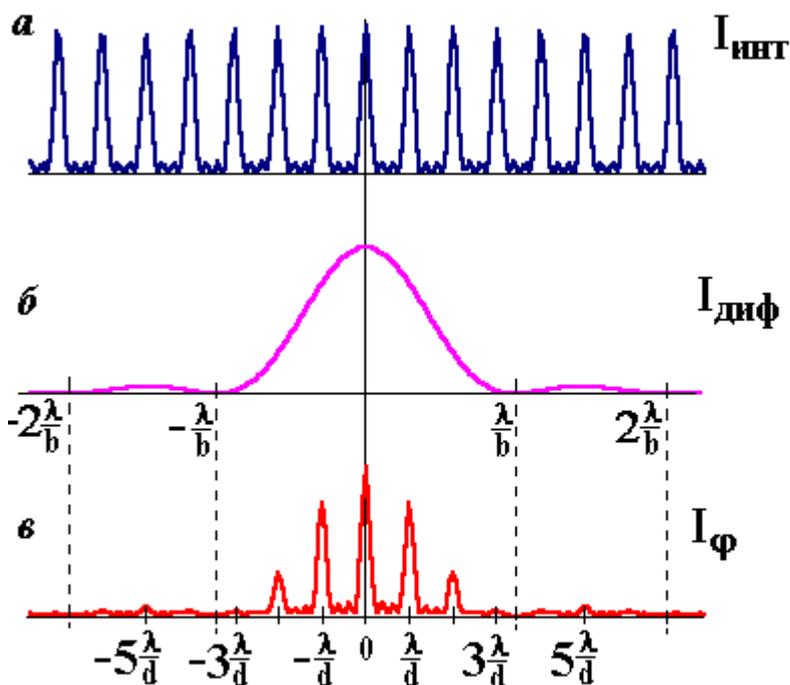


Рис.6. Дифракция Фраунгофера на четырех щелях: *a* - интерференционный член (14), *б* - дифракционный член (13), *в* - общий вид дифракционной картины (12).

Вид функции (12), описывающей распределение интенсивности при дифракции Фраунгофера на N щелях, изображен на рис.6в. Характерными точками этого графика являются:

главные

дифракционные минимумы	$\sin\varphi = \lambda/b,$	$2\lambda/b,$	$3\lambda/b, \dots$
добавочные интерференционные минимумы	$\sin\varphi = \lambda/Nd, 2\lambda/Nd, 3\lambda/Nd, \dots, (N-1)\lambda/Nd, (N+1)\lambda/Nd, \dots, (2N-1)\lambda/Nd, (2N+1)\lambda/Nd, \dots$		
главные интерференционные максимумы	$\sin\varphi = 0,$	$\lambda/d,$	$2\lambda/d, 3\lambda/d, \dots$

Таким образом, получив на экране дифракционную картину от решетки и подсчитав число добавочных минимумов или максимумов между главными максимумами, можно определить число щелей решетки.

Формулу (12) для интенсивности при дифракции на N щелях нетрудно запомнить. Аргумент u СИНКа, описывающего дифракцию на одной щели, как отмечалось ранее, записывается из условия дифракционных минимумов:

$$b \sin \varphi_m = m\lambda.$$

и нулей СИНКа $u=m\pi$, откуда получим:

$$u = m\pi = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} = \frac{k b \sin \varphi}{2}.$$

Аргумент δ в интерференционном члене находится из условия главных дифракционных максимумов:

$$d \sin \varphi_m = m\lambda,$$

$$\delta = m\pi = \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda} = \frac{k d \sin \varphi}{2}.$$

Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии.

Дифракционная картина от круглого отверстия имеет вид концентрических окружностей, комплексная амплитуда A в зависимости от угла дифракции θ задается функцией Бесселя J_1 первого порядка:

$$A(\theta) \sim \pi R^2 \cdot \frac{2J_1(\xi)}{\xi},$$

где R – радиус отверстия;

$$\xi = kR \sin \theta = k_r R;$$

θ - угол дифракции;

Максимальная амплитуда в центре картины пропорциональна площади отверстия

$$S = \pi R^2 \text{ (волны от всех вторичных источников приходят в фазе).}$$

Интенсивность дифракционной картины

$$I(\theta) \sim A^2(\theta) \sim (\pi R^2)^2 \cdot \left(\frac{2J_1(\xi)}{\xi} \right)^2.$$

График функции $f(\xi) = \left(\frac{2J_1(\xi)}{\xi} \right)^2$ напоминает квадрат СИНКа:

$$f(0) = 1 - \text{max}; f(1,22\pi) = 0 - \text{min}; f(1,635\pi) = 0,0175 - \text{max}; f(2,23\pi) = 0 - \text{min} \text{ и т.д.}$$

График распределения интенсивности для круглого отверстия очень напоминает приведенный на рис. 4 график для щели, только направления на первые минимумы задаются формулами:

$$\sin \theta_1 \approx 0,61 \cdot \frac{\lambda}{R} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D},$$

$$\sin \theta_2 \approx 2,23 \cdot \frac{\lambda}{D},$$

где D - диаметр отверстия.

Как и в случае щели, для круглого отверстия принято считать, что основная энергия сосредоточена в центральном пятне, угловой размер $\Delta\theta$ которого

$$\Delta\theta \approx \sin \theta_1 \approx 0,61 \cdot \frac{\lambda}{R} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}.$$

Данная формула часто используется при определении разрешающей способности объективов.

Дифракция Фраунгофера как преобразование Фурье.

Вернемся к рассмотрению дифракции на одной щели (рис. 3) и применим формулу Френеля-Кирхгофа (1). Так как на препятствие падает плоская волна, то комплексная амплитуда поля во всех точках поверхности Σ будет одной и той же и равной U_0 .

Лучи, идущие от вторичных источников под некоторым углом φ к первоначальному направлению, соберутся в фокальной плоскости линзы в т. N_φ . Вклад от произвольного элемента шириной dx , представим в виде

$$dU(N_\varphi) = U_0 \cdot \frac{e^{iks}}{s} dx \cdot K(\chi) \approx U_0 \cdot \frac{e^{iks_0}}{s_0} K_0 \cdot e^{ik(s-s_0)} dx$$

где $(s - s_0) = x \cdot \sin \varphi$ – разность хода между лучом, идущим из точки щели с координатой x , и лучом, идущим из центра щели.

Результирующее поле ищется интегрированием по поверхности Σ :

$$U(N_\varphi) = U_0 \cdot \frac{e^{iks_0}}{s_0} K_0 \cdot \int_{-b/2}^{b/2} e^{ikx \sin \varphi} dx.$$

Вспомним понятие **функции пропускания** препятствия $\alpha(x, y)$ как отношения комплексной амплитуды поля $E_2(x, y)$ падающей волны в точках, расположенных непосредственно сразу за препятствием, к комплексной амплитуде поля $E_1(x, y)$ волны в точках, расположенных непосредственно перед препятствием (толщина препятствия

считается бесконечно малой). Так как для щели $\alpha(x) = \begin{cases} 1, & |x| < b/2 \\ 0, & |x| > b/2 \end{cases}$, то для поля

$$U(N_\varphi) = U_0 \cdot \frac{e^{iks_0}}{s_0} K_0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) \cdot e^{ik'x} dx$$

где $k' = k \sin \varphi$.

Данная формула есть не что иное, как пространственное преобразование Фурье от функции пропускания препятствия $\alpha(x)$. По аналогии с преобразованием Фурье по времени величину $k' = k \sin \varphi$ называют **пространственной частотой**. Таким образом, дифракция Фраунгофера есть **пространственное разложение ограниченного светового пучка на плоские волны**.

Аналогичный вывод можно сделать и вспомнив полученную ранее формулу для нахождения поля в приближении Фраунгофера:

$$U(x', y') \sim \iint_{(x, y)} \exp\left(-ik\left(\frac{xx' + yy'}{b}\right)\right) dx dy,$$

которую, с использованием функции пропускания $\alpha(x)$, можно записать в виде:

$$\begin{aligned} U(x', y') &\sim \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x, y) \cdot \exp\left(-ik\left(\frac{xx' + yy'}{b}\right)\right) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x, y) \cdot \exp(-i(k_x x + k_y y)) dx dy. \end{aligned}$$

Данное приближение называют **приближением Фраунгофера**. А получившийся интеграл есть пространственное преобразование Фурье по пространственным частотам

$$k_x = k \frac{x'}{b} \approx k \sin \varphi_x, \quad k_y = k \frac{y'}{b} \approx k \sin \varphi_y,$$

где φ_x, φ_y - углы дифракции.

Представление о дифракции Фраунгофера как о пространственном фурье-преобразовании можно использовать и в случае квазиплоских волн. Например, если задана комплексная амплитуда поля $U(x, y)$ в плоскости объекта, то поле в дальней зоне $U(x', y')$ находится из соотношения

$$U(x', y') \sim \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y) \cdot \exp(-i(k_x x + k_y y)) dx dy,$$

Например, при распространении гауссового пучка он в дальней зоне остается гауссовым (из свойств фурье-преобразования).

Дифракция рентгеновских лучей на пространственной решетке (кристалле).

Идеальный кристалл представляет собой регулярную трехмерную периодическую структуру с характерным периодом порядка $d \sim 1$ Ангстрема. Свет видимого диапазона не проходит через подобную структуру, однако для рентгеновских лучей с $\lambda \leq d$ будет наблюдаться дифракция.

Рассмотрим кристалл с элементарной ячейкой в форме прямоугольного параллелепипеда с размерами d_x, d_y, d_z . Волна, падающая на кристалл, воздействует на атомы, которые становятся вторичными источниками когерентного излучения (см. рис.):. Условия дифракционных максимумов на двумерной структуре (x, y) при наклонном падении в приближении Фраунгофера записываются в том же виде, что и для дифракционной решетки

$$d_x \cdot (\sin \theta_x - \sin \theta_{0x}) = m_x \cdot \lambda,$$

(аналогично и для оси y).

Из рисунка видно, что и для третьей координаты z условие максимума будет иметь вид:

$$d_z \cdot (\sin \theta_z - \sin \theta_{0z}) = m_z \cdot \lambda.$$

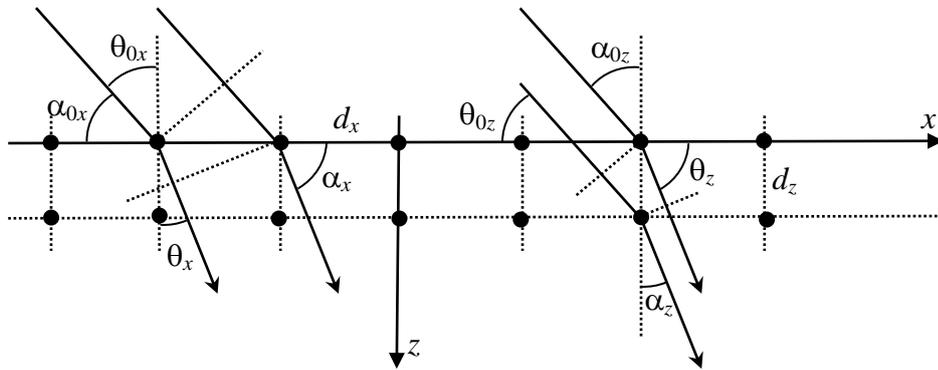


Рис. Дифракция рентгеновских лучей на пространственной структуре.

Однако в трехмерном случае направление луча задают обычно углом, образованным этим лучом с соответствующей осью координат:

$$\alpha_x = \frac{\pi}{2} - \theta_x,$$

поэтому синус «превратится» в косинус. В результате получим систему уравнений, называемых **уравнениями Лауэ**:

$$d_x \cdot (\cos \alpha_x - \cos \alpha_{0x}) = m_x \cdot \lambda;$$

$$d_y \cdot (\cos \alpha_y - \cos \alpha_{0y}) = m_y \cdot \lambda$$

$$d_z \cdot (\cos \alpha_z - \cos \alpha_{0z}) = m_z \cdot \lambda.$$

Кроме этого, необходимо учесть соотношения между направляющими косинусами:

$$\cos^2 \alpha_{0x} + \cos^2 \alpha_{0y} + \cos^2 \alpha_{0z} = 1;$$

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1.$$

Так как числа m_x, m_y, m_z - целые, то для произвольной длины волны λ невозможно удовлетворить всем уравнениям. Поэтому в случае освещения непрерывным спектром через кристалл пройдет излучение только на нескольких длинах волн. Т.е., трехмерная структура работает как узкополосный фильтр.

Полученную дифракционную картину называют **лауэграммой**, расшифровывая ее, получают информацию о структуре кристалла.

Дифракция рентгеновских лучей может наблюдаться и в отраженном свете. Атомы в кристаллической решетке создают целый набор параллельных плоскостей, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга. В результате отражения атомными плоскостями возникает интерференция. Формула для разности хода точно такая же, как при интерференции в плоскопараллельной пластине, условие наблюдения максимумов (**условие Брэгга-Вульфа**) запишется в виде:

$$\Delta s = 2d \cdot \sin \alpha = m\lambda$$

(как и в предыдущем случае, косинус «превращается» в синус, т.к. задается угол скольжения).

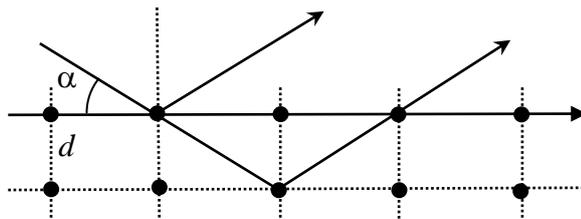


Рис. Дифракция рентгеновских лучей при отражении.

При измерении интенсивности оптического излучения теряется информация о фазе, поэтому нет возможности восстановить характеристики источника волн. Однако информацию о фазе можно сохранить при интерференции, когда происходит преобразование фазовых соотношений в амплитудную структуру интерференционной картины. На приемник излучения следует направить не только волну от объекта, но и опорную волну, желательно простой формы (плоскую, сферическую). Для появления интерференции необходимо, чтобы обе волны исходили из одного и того же источника.

Простейший пример: интерференция двух плоских волн: одна - от объекта, вторая – опорная. Интерференционная картина: система полос с синусоидальным распределением интенсивности. Если почернение фотопластинки (приемника излучения) пропорционально интенсивности, то формируется амплитудная дифракционная решетка с периодом, равным периоду интерференционной картины. При ее освещении плоской волной (такой же, как опорная) формируется дифракционная картина, в которой наблюдаются максимумы трех порядков: нулевого и плюс-минус первого. Один из этих максимумов полностью подобен исходной волне от объекта. **Голография** (с греческого «полная запись») – это метод регистрации фазы волны и ее восстановления. Голограмма – пластина, на которой зафиксирована интерференционная картина.

Классическая схема голографии: плоская волна от монохроматического (лазерного) источника падает как на объект исследования, так и на зеркало (обычно плоское). Волна, рассеянная от объекта, и волна, отраженная от зеркала, образуют интерференционную картину на фотопластинке. После ее проявления (степень почернения считаем пропорциональной интенсивности) получившуюся голограмму освещают плоским лазерным пучком. В результате формируются несколько пучков, один из которых:

- 1) дает действительное изображение, наблюдаемое на экране;
- 2) дает мнимое изображение, наблюдаемое глазом;
- 3) дает ослабленный пучок в исходном направлении, не несущий полезной информации.

Объяснение на «пальцах».

При освещении объекта плоской волной формируется дифракционная картина, которую можно представить как совокупность плоских волн, распространяющихся во всевозможных направлениях. Каждая из этих волн интерферирует с опорной волной и дает интерференционную картину в виде полос с характерными для нее ориентацией и периодом. Т.е. на пластинке формируется множество дифракционных решеток. При освещении пластинки волной, подобной опорной, после пластинки вновь возникнет волна, подобная идущей от объекта.

Количественные характеристики см. Ландсберг, §60.

Формируемая интерференционная картина не является локализованной на поверхности пластины. Слой фотоэмульсии обычно имеет толщину, превышающую длину волны излучения на порядок и более. Поэтому в эмульсии формируется трехмерная интерференционная картина (**объемная голограмма**). При освещении такой голограммы происходит дифракция на трехмерной структуре (подобно дифракции рентгеновских лучей). Подобный метод голографии был предложен Ю.Н.Денисюком в 1962 году.

Голограмму записывают обычно во встречных пучках (опорная и объектная волны идут в противоположных направлениях), это позволяет создавать только мнимое изображение, причем в белом свете.

Дифракционная решетка как спектральный прибор.

(основную часть текста составляют описания задач №136 и №152 практикума и Глава 6 из «Методики решения...»)

Дифракционная решетка представляет собой пространственную периодическую структуру, состоящую из большого числа одинаковых по ширине щелей, находящихся на одном и том же расстоянии друг от друга. Распределение поля задается полученной ранее формулой дифракции на N щелях:

$$I_{\varphi} = I_0 \cdot \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right)^2$$

где $u = \frac{kb \sin \varphi}{2} = \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda}$;

$$\delta = \frac{kd \sin \varphi}{2} = \frac{\pi d \sin \varphi}{\lambda}$$

b - ширина щели;

d - период решетки (расстояние между щелями).

В дифракционной картине имеются главные максимумы (находятся из условия $\delta = 0, \pi, 2\pi, \dots = \pi n$ или $d \sin \varphi_m = 0, \lambda, 2\lambda, \dots = m\lambda$), в которых интерференционный член $\left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right)^2$ стремится к N^2 . Эти максимумы называют **дифракционными максимумами m -го порядка**. Ближайшие к ним минимумы находятся из условия $\sin N\delta = 0$, или

$$d \sin \varphi_{m,\min} = \left(m \pm \frac{1}{N} \right) \lambda.$$

Считая углы φ малыми ($\sin \varphi \approx \varphi$), получим, что угловой размер $\Delta\varphi_m$ максимума m -го порядка можно найти, взяв дифференциал по переменным φ_m и m при постоянных d и λ :

$$d \cdot d(\sin \varphi_m) = dm \cdot \lambda,$$

откуда из условий $d(\sin \varphi_m) = \cos \varphi_m \cdot \Delta\varphi_m$, $dm = \frac{1}{N}$ получим

$$\Delta\varphi_m = \frac{\lambda}{Nd \cos \varphi_m} = \frac{\lambda}{D \cos \varphi_m},$$

где $D = Nd$ - ширина дифракционной решетки. Если угол дифракции мал ($\cos \varphi_m \approx 1$), то для угловой ширины максимума получим привычную для оптики формулу:

$$\Delta\varphi_m \approx \frac{\lambda}{D}.$$

Интенсивность дополнительных максимумов дифракционной картины существенно меньше интенсивности главного максимума, поэтому принято считать, что для дифракционной решетки с большим числом щелей (или **штрихов**) картина представляет собой совокупность только ярких главных максимумов m -го порядка с малым угловым размером $\Delta\varphi_m$.

Из условия нахождения максимумов $d \sin \varphi_m = m\lambda$ следует, что максимумам всех порядков (кроме нулевого) для различных длин волн будет соответствовать свой угол дифракции:

$$\sin \varphi_m(\lambda) = m \frac{\lambda}{d}.$$

Поэтому дифракционная решетка является **спектральным прибором**, осуществляющим пространственное разложение света на монохроматические составляющие. К характеристикам спектральных приборов относят:

1) **угловая дисперсия** $D_\varphi = \frac{d\varphi_m}{d\lambda}$ - отношение угла $d\varphi_m$, на который разнесены лучи с длинами волн, отличающимися на $d\lambda$, к величине $d\lambda$.

Для дифракционной решетки угловую дисперсию можно найти, взяв дифференциал от соотношения $d \sin \varphi_m = m\lambda$ по переменным φ_m и λ :

$$d \cos \varphi_m \cdot d\varphi_m = m d\lambda; \quad D_\varphi = \frac{d\varphi_m}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi_m}.$$

Если углы дифракции φ_m малы, то $\cos \varphi_m \approx 1$, и угловая дисперсия

$$D_\varphi \approx \frac{m}{d}$$

не зависит от длины волны.

2) **разрешающая способность**

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$$

- это отношение длины волны λ излучения к $\delta\lambda$ - наименьшей разности длин волн двух спектральных линий, при которой эти линии различимы, т.е. наблюдаются отдельно (рис. 5). В соответствии с *критерием Рэлея* две линии λ и $(\lambda + \Delta\lambda)$ разрешены, если угловое расстояние между главными максимумами одного и того же порядка для этих длин волн не меньше угловой ширины $\Delta\varphi_m$ главного максимума:

$$\varphi_{m,\max}(\lambda + \Delta\lambda) - \varphi_{m,\max}(\lambda) \geq \Delta\varphi_m.$$

Это означает, что в предельном случае максимум m -го порядка для длины волны $(\lambda + \Delta\lambda)$ совпадает с минимумом, ближайшим к максимуму того же порядка для длины волны λ , т.е.

$$\varphi_{m,\max}(\lambda + \Delta\lambda) = \varphi_{m,\min}(\lambda).$$

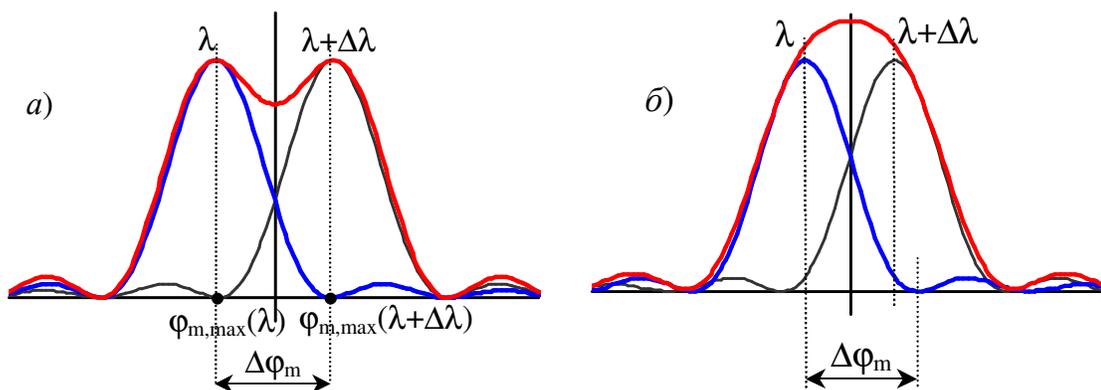


Рис. 5. К определению разрешающей способности:

а) спектральные линии разрешены; б) спектральные линии не разрешены.

:

Отсюда следует:

$$d \sin(\varphi_{m,\max}(\lambda + \Delta\lambda)) = m(\lambda + \Delta\lambda) = d \sin(\varphi_{m,\min}(\lambda)) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda.$$

В итоге получаем:

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda;$$

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN = \frac{d \sin \varphi}{\lambda} N = \frac{L \cdot \sin \varphi}{\lambda}. \quad (8)$$

3) **свободная область дисперсии** $\Delta\lambda$ – это максимальная ширина спектрального интервала, при которой спектры соседних порядков не перекрываются. Это означает, что m -ый порядок для длины волны $\lambda + \Delta\lambda$ совпадает с $(m+1)$ -ым порядком для длины волны λ :

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}.$$

Для дифракционной решетки свободная область дисперсии велика (при работе в 1-м порядке дифракции совпадает с длиной волны). Обычно в дифракционном спектральном приборе работают именно в 1-м порядке, т.к. в больших порядках, хотя и увеличивается разрешающая способность, но падает интенсивность максимумов за счет дифракционного члена в формуле для N щелей.

Таблица для нахождения спектральных характеристик прибора.

Условие для нахождения дифракционных максимумов $d \sin \varphi_m = m\lambda$			
Параметр	const	Переменные	Вычисления
Угловая дисперсия D_φ	d, m	λ, φ	$d \cos \varphi_m \cdot d\varphi_m = m d \lambda$ $D_\varphi = \frac{d\varphi_m}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi_m}$
Угловая ширина максимума $\Delta\varphi_m$	d, λ	m, φ	$d \cdot d(\sin \varphi_m) = dm \cdot \lambda; dm \cdot = \frac{1}{N};$ $\Delta\varphi_m = \frac{\lambda}{Nd \cos \varphi_m}$
Разрешающая способность R	d, φ	λ, m	$d(d \sin \varphi_m) = 0 = m d \lambda + dm \lambda; dm \cdot = \frac{1}{N}$ $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nm$
Свободная область дисперсии $\Delta\lambda$	d, φ	λ, m	$d(d \sin \varphi_m) = 0 = m d \lambda + dm \lambda; dm \cdot = 1$ $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$

Кроме дифракционных, спектральные приборы бывают **призменные** (используют зависимость показателя преломления материала призмы от длины волны) и **интерференционные** (интерферометр Фабри-Перо).

Напомним, что поведение **интерферометра Фабри-Перо** описывается формулами Эйри, в которых разность фаз между соседними лучами задается соотношением $\delta = k\Delta s = 2khn \cos \theta'$. В случае конструкции ИФП как воздушной ($n=1$) прослойки толщиной h между зеркалами с коэффициентом отражения R имеем:

$$\delta = 2kh \cos \theta.$$

Условие максимума для прошедшей интенсивности имеет вид:

$$\delta = 2\pi m \quad (m=0,1,2,\dots),$$

откуда

$$2h \cos \theta_m = m\lambda.$$

Для угловой дисперсии ИФП имеем:

$$2h \sin \theta_m d\theta_m = m d\lambda \quad D_\theta = \frac{d\theta_m}{d\lambda} = \frac{m}{2h \sin \theta_m},$$

т.е. угловая дисперсия стремится к бесконечности в центре интерференционной картины ($\sin \theta_m \rightarrow 0$).

У ИФП очень маленькая свободная область дисперсии $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$. Так как порядок интерференции максимален именно в центре интерференционной картины и равен $m_{\max} = \frac{2h}{\lambda}$, то для области дисперсии получим:

$$\Delta\lambda \approx \frac{\lambda^2}{2h} \ll \lambda.$$

Поэтому ИФП используют, когда необходимо разрешить две очень близко расположенные линии.

ИФП обладает очень высокой разрешающей способностью. Из формул Эйри можно показать (см. «Методику решения...»), что

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mF,$$

где

$$F = \frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}$$

называют **резкостью** интерференционных полос¹. Если коэффициент отражения зеркал близок к единице ($\rho \approx 1$), то

$$R \approx m_{\max} F \approx \frac{2h}{\lambda} \cdot \frac{\pi}{1-\rho}$$

и достигает значений $R \sim 10^5 - 10^6$. Разрешающую способность можно повысить, увеличивая базу интерферометра (расстояние h между пластинами) и коэффициент отражения зеркал.

¹ Во избежании путаницы с обозначениями коэффициент отражения зеркал по энергии обозначен ρ .

Таблица спектральных характеристик интерферометра Фабри–Перо

Условие для нахождения интерференционных максимумов в интерферометре Фабри–Перо: $2h \cdot \cos \theta_m = m\lambda$			
Параметр	Константы	Переменные	Формулы
Угловая дисперсия D_θ	h, m	λ, θ	$2h \cdot \sin \theta_m \cdot \delta\theta_m = m \cdot \delta\lambda$, $D_\theta = \frac{\delta\theta_m}{\delta\lambda} = \frac{m}{2h \sin \theta_m}$
Угловая ширина дифракционного максимума $\Delta\theta_m$	h, λ	θ, m	$2h \cdot \sin \theta_m \cdot \Delta\theta_m = \delta m \cdot \lambda$ $\delta m = \frac{1}{F} = \frac{(1-R)}{\pi\sqrt{R}}$ $\Delta\theta_m = \frac{\lambda \cdot (1-R)}{2\pi \cdot h \sin \theta_m \cdot \sqrt{R}}$
Разрешающая способность R	h, θ	m, λ	$0 = m\delta\lambda + \lambda\delta m$; $\delta m = \frac{(1-R)}{\pi\sqrt{R}}$; $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{m}{\delta m} = mF$
Свободная область дисперсии $\Delta\lambda$	h, θ	m, λ	$0 = m\Delta\lambda + \lambda\delta m$; $\delta m = -1$; $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda$, $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} \approx \frac{\lambda}{m_{\max}} = \frac{\lambda^2}{2h}$

Семинары 15-16. Дифракция Френеля на круглом отверстии.

Основной материал семинара изложен в конспекте лекций по оптике по теме «Дифракция Френеля» и в Методике решения задач по оптике.
Здесь только дополнительные моменты.

Перечислим порядок решения типичных задач по дифракции Френеля на круглом отверстии:

1) Рисуем спираль Френеля – лучше в виде окружности – и расставляем на ней характерные точки O и O_∞ ;

2) Для каждого характерного параметра (радиуса) объекта дифракции находим соответствующее ему число зон Френеля – m и расставляем точки O_m на спирали;

3) Для каждого открытого участка объекта записываем соответствующий вектор (комплексное число) в виде $O_{m1}O_{m2}$. Если участок открыт не полностью, то записывается соответствующий множитель. Если какой-либо из участков перекрыт прозрачной пластиной, вносящей дополнительную разность фаз, то соответствующий ему вектор поворачивается (в нужную сторону!) на угол, равный разности фаз;

4) Для нахождения результирующей амплитуды все векторы складываются по правилам сложения векторов. /Для нахождения интенсивности не забываем возвести в квадрат!!!

Основные формулы

Разность хода Δs между лучом, прошедшим через вторичный источник, расположенный на расстоянии r от оси симметрии, и лучом, прошедшим по оси:

$$\Delta s = \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (1)$$

Радиус n -ой зоны Френеля

$$R_n^2 = \frac{n\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}. \quad (2)$$

В случае падения плоской волны

$$R_n^2 = n\lambda b. \quad (2a)$$

Разность фаз ψ_n между лучом, прошедшим через границу n -ой зоны Френеля и лучом, прошедшим по оси (рис. 1):

$$\psi_n = n\pi. \quad (3)$$

Разность хода, вносимая линзой с фокусным расстоянием f в зависимости от расстояния r от оси симметрии:

$$\Delta s_{\text{лин}} = -\frac{r^2}{2f} + \text{const}. \quad (4)$$

Задача 1. Используя спираль Френеля, получить формулу зависимости интенсивности в центре картины при дифракции на круглом отверстии от числа n открытых зон Френеля.

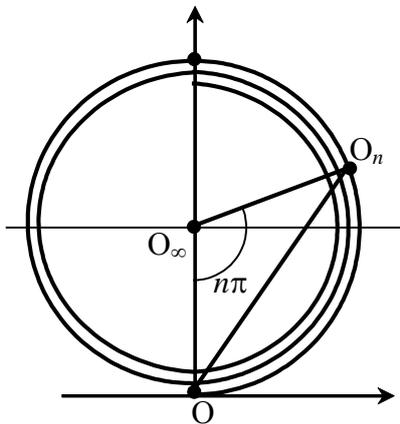


Рис. 1 Спираль Френеля)

Полученная формула справедлива для небольшого числа открытых зон, когда скручиванием спирали можно пренебречь.

Ответ: $I(n) = 2I_0(1 - \cos n\pi)$.

Решение

Изобразим спираль Френеля (рис. 1) и возьмем на ней произвольную точку O_n . В соответствии с (2) угол $OO_\infty O_n$ равен $n\pi$ (на рисунке $n < 1$). Треугольник $OO_\infty O_n$ равнобедренный, его стороны OO_∞ и $O_\infty O_n$ одинаковы и равны A_0 , где A_0 - амплитуда в отсутствие препятствия. Сторона OO_n и есть искомая комплексная амплитуда A поля.

Применяя теорему косинусов, получим:

$$A^2 = A_0^2 + A_0^2 - 2A_0^2 \cdot \cos n\pi;$$

$$I(n) = 2I_0(1 - \cos n\pi) = 4I_0 \cdot \sin^2 \frac{n\pi}{2}.$$

Задача 2. На пути монохроматической волны, распространяющейся от точечного источника, установили препятствие с прозрачными участками в виде круглого отверстия радиуса r_1 и кольца с внутренним радиусом $r_2 = 2r_1$ и внешним радиусом $r_3 = 3r_1$ (рис. 2). Найти интенсивность в точке наблюдения, для которой радиус r_1 равен радиусу первой зоны Френеля. В отсутствие препятствия интенсивность в точке наблюдения равна I_0 .

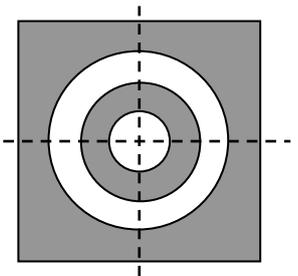


Рис. 2. Объект дифракции

Решение

Изобразим спираль Френеля и найдем на ней точки, соответствующие трем заданным значениям радиусов (рис. 3). По условию, радиус r_1 соответствует первой зоне Френеля (точка O_1 на спирали). Так как число n зон Френеля пропорционально квадрату радиуса R_n^2 , то радиусы $r_2 = 2r_1$ и $r_3 = 3r_1$ соответствуют границам четвертой и девятой зон Френеля (точки O_4 и O_9 на спирали). Пренебрегая скручиванием спирали, будем считать, что точка O_4 совпадает с точкой O , а точка O_9 - с точкой O_1 . Так как в рассматриваемых ниже задачах число зон Френеля обычно невелико, в дальнейшем *вместо спирали будем рисовать окружность, и именно на ней отмечать соответствующие точки*.

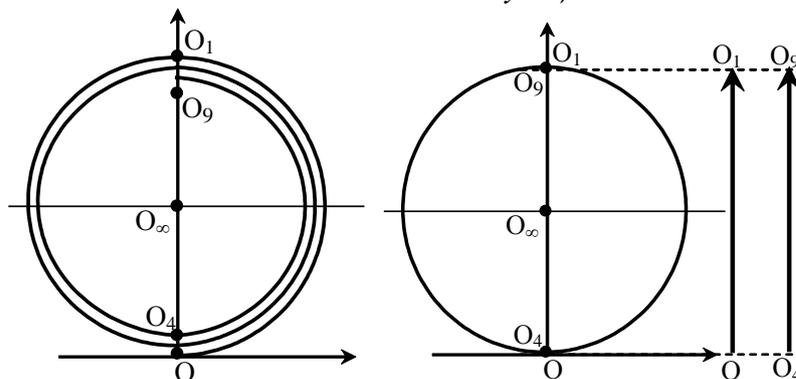


Рис. 3. Спираль Френеля (к задаче 2).

Таким образом, вкладом в комплексную амплитуду поля от открытых участков соответствуют векторы \mathbf{OO}_1 и $\mathbf{O}_4\mathbf{O}_9$, которые совпадают по направлению и имеют одинаковую длину $2A_0$, где A_0 – амплитуда в отсутствие препятствия. Складываем амплитуды

$$\mathbf{A} = \mathbf{OO}_1 + \mathbf{O}_4\mathbf{O}_9,$$

а затем, возводя в квадрат, для интенсивности получим:

$$I_a = 16I_0.$$

Задачи по дифракции на некруглых отверстиях и при использовании стеклянных пластин – см. Методику решения..., задачи 4.2.3 – 4.2.4.

Задачи по дифракции с использованием линзы – см. Методику решения..., задача 4.2.5.

Задачи по дифракции Френеля на щели с использованием спирали Корню – см. Методику решения..., задача 4.2.7.

Домашнее задание.

Иродов. 5.103-5.107; 5.108-5.111, 5.114; на спираль Корню 5.116-5.117.

Семинары 17-18. Дифракция Фраунгофера.

Основной материал семинара изложен в конспекте лекций по оптике по теме «Дифракция Фраунгофера и в Методике решения задач по оптике. Здесь только дополнительные моменты.

Основные формулы

Интенсивность при **дифракции Фраунгофера на одной щели** шириной b (рис.1):

$$I_{\varphi} = I_0 \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{k b \sin \varphi}{2}\right) = I_0 \cdot \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \quad (1)$$

где I_0 - интенсивность в центре дифракционной картины ($I_0 \sim b^2$),

$$u = \frac{k b \sin \varphi}{2}.$$

Вывод этой формулы через интеграл Гюйгенса-Френеля дается в *конспекте лекций*, через векторные диаграммы – в *Методике решения задач по оптике*.

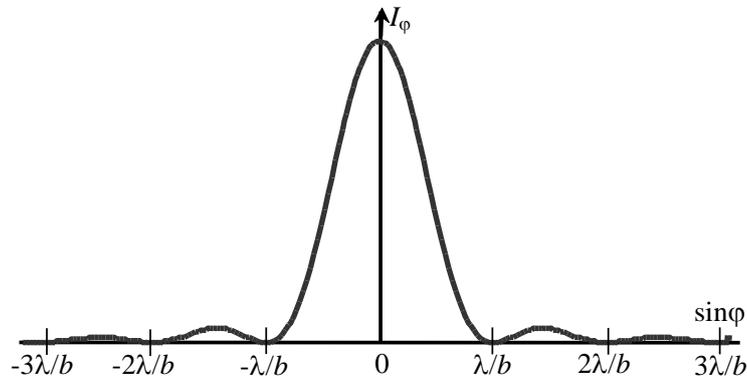


Рис.1. Дифракция Фраунгофера на одной щели: распределение интенсивности на экране в зависимости от синуса угла дифракции.

Направления φ_m на минимумы m -го порядка находятся из соотношения

$$b \sin \varphi_m = m \lambda.$$

Из рис.1 видно, что основная часть светового потока сосредоточена в центральной дифракционной полосе, определяемой значениями $\sin \varphi = \frac{\lambda}{b} \approx \varphi$ (так называемый центральный максимум нулевого порядка), малая его часть будет распространяться в пределах первых ($\approx 5\%$) и вторых ($\approx 2\%$) максимумов и т.д. Угловой размер центрального дифракционного максимума

$$\Delta \varphi = \frac{\lambda}{b}$$

называют **дифракционной расходимостью** пучка в дальней зоне.

Дифракционная картина от круглого отверстия имеет вид концентрических окружностей, комплексная амплитуда A в зависимости от угла дифракции θ задается функцией Бесселя J_1 первого порядка:

$$A(\theta) \sim \pi R^2 \cdot \frac{2J_1(\xi)}{\xi},$$

где R – радиус отверстия;

$$\xi = kR \sin \theta = k_r R;$$

θ - угол дифракции.

Максимальная амплитуда в центре картины пропорциональна площади отверстия $S = \pi R^2$ (волны от всех вторичных источников приходят в фазе).

Интенсивность дифракционной картины

$$I(\theta) \sim A^2(\theta) \sim (\pi R^2)^2 \cdot \left(\frac{2J_1(\xi)}{\xi} \right)^2. \quad (2)$$

График функции $f(\xi) = \left(\frac{2J_1(\xi)}{\xi} \right)^2$ напоминает квадрат СИНКа:

$$f(0) = 1 - \text{max}; f(1,22\pi) = 0 - \text{min}; f(1,635\pi) = 0,0175 - \text{max}; f(2,23\pi) = 0 - \text{min} \text{ и т.д.}$$

Направления на минимумы находятся из соотношений:

$$\sin \theta_1 \approx 0,61 \cdot \frac{\lambda}{R} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D},$$

$$\sin \theta_2 \approx 2,23 \cdot \frac{\lambda}{D},$$

где D - диаметр отверстия.

Как и в случае щели, для круглого отверстия принято считать, что основная энергия сосредоточена в центральном пятне, угловой размер $\Delta\theta$ которого

$$\Delta\theta \approx \sin \theta_1 \approx 0,61 \cdot \frac{\lambda}{R} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}.$$

Данная формула часто используется при определении разрешающей способности объективов.

Интенсивность при дифракции Фраунгофера на нескольких щелях (дифракционной решетке)

$$I_\varphi = I_0 \cdot \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right)^2 \quad (12)$$

где $I_0 \sim b^2$,

$$u = \frac{k b \sin \varphi}{2};$$

$$\delta = \frac{k d \sin \varphi}{2};$$

Характерные точки:

1) дифракционные минимумы находятся из условия:

$$b \sin \varphi_{m,\min} = m\lambda; \quad \sin \varphi_{m,\min} = \frac{m\lambda}{b}$$

- совпадают с минимумами дифракции на одной щели;

2) главные максимумы находятся из условия:

$$d \sin \varphi_{m,\max} = m\lambda; \quad \sin \varphi_{m,\max} = \frac{m\lambda}{d}.$$

При этом $\delta_{m,\max} = \frac{k d \sin \varphi_{m,\max}}{2} = m\pi$, в сомножителе $\left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta}\right)^2$ и числитель, и знаменатель равны нулю, в пределе $\left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta}\right)^2 \Rightarrow N^2$, интенсивность максимумов резко растет с увеличением N .

3) между соседними главными максимумами находятся $(N-1)$ дополнительных минимумов, или $(N-2)$ дополнительных максимумов.

Сопоставление дифракции Фраунгофера и спектров сигналов

Ранее, в теме **Фурье-преобразование** было получено, что для прямоугольного импульса длительностью τ ширина спектра равна $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}$. При вычислениях в интеграл

Фурье входит запись $e^{i\omega t}$.

Дифракция Фраунгофера, как было показано в лекциях, есть пространственное Фурье-преобразование от функции пропускания объекта. Пусть таким объектом является щель шириной b . Для волн от вторичных источников, идущих под углом дифракции φ (направление вектора \mathbf{k}) в интеграл Фурье войдет запись $e^{ik_x x}$, где $k_x = k \sin \varphi$. По аналогии с временным спектром для ширины углового пространственного спектра получим:

$$\Delta k_x = k_x = \frac{2\pi}{b}; \quad \frac{2\pi}{\lambda} \sin \varphi = \frac{2\pi}{b}; \quad \sin \varphi = \frac{\lambda}{b}.$$

Это и есть угловая ширина главного дифракционного максимума.

Как и для временного случая, формула будет по порядку величины справедлива для различных форм отверстия. В частности, для круглого отверстия диаметром D

$$\sin \varphi = \frac{1,22 \cdot \lambda}{D}.$$

Напомним, что приближение Фраунгофера справедливо в дальней зоне. Границу такой зоны (дифракционную длину $l_{\text{диф}}$) определим из условия, что на таком расстоянии от щели ширина дифрагированного пучка превысит ширину щели:

$$l_{\text{диф}} \cdot \text{tg} \varphi \approx l_{\text{диф}} \cdot \sin \varphi = b,$$

откуда получим:

$$l_{\text{диф}} \approx \frac{b^2}{\lambda},$$

что соответствует первой зоне Френеля.

Эту формулу опять же легко запомнить из простых соображений

$$l_{\text{диф}} \cdot \lambda \approx b \cdot b.$$

Задачи по разграничению приближений Френеля и Фраунгофера – см. Методику решения..., задача 5.2.2.

Задачи по влиянию дифракции Фраунгофера на параметры дифракционной картины – см. Методику решения..., задача 5.2.3- 5.2.5.

Задачи по дифракции Фраунгофера как пространственном преобразовании Фурье – см. Методику решения..., задача 5.2.6.

Задачи по дифракции Фраунгофера на дифракционной решетке – см. Методику решения..., задачи 5.2.7.

Домашнее задание.

Иродов. 5.125-5.126; 5.129-5.133, 5.136.

Распространение света в анизотропных средах

Оптическая анизотропия – зависимость оптических свойств среды от направления распространения волны и ее поляризации.

Будем рассматривать среды, для которых поляризованность \vec{P} (и, следовательно, индукция \vec{D}) зависит от направления. В общем случае связь между векторами \vec{D} и \vec{E} тензорная:

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix},$$

где матрица ϵ размера 3 на 3 – симметричная. Выбором системы координат матрицу можно сделать диагональной:

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Диагональные компоненты ϵ_i тензора диэлектрической проницаемости называют его **главными значениями** или **главными диэлектрическими проницаемостями** анизотропной среды, а направления осей соответствующей системы координат – **главными направлениями** среды (кристалла). Таким образом, в общем случае векторы \vec{D} и \vec{E} не коллинеарны: α - угол между векторами \vec{D} и \vec{E} .

Уравнения Максвелла в отсутствие токов и зарядов:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Решение – в виде плоских волн: $\vec{A} = \vec{A}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$;

(\vec{A} - любой из векторов $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$).

$$\operatorname{div} \vec{A} = -i(\vec{k} \cdot \vec{A}); \quad \operatorname{rot} \vec{A} = -i[\vec{k} \times \vec{A}]; \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i\omega \vec{A}.$$

Тогда

$$(\vec{k} \cdot \vec{D}) = 0; \quad (1) \quad -i[\vec{k} \times \vec{H}] = i\omega \vec{D}; \quad (3)$$

$$(\vec{k} \cdot \vec{B}) = 0; \quad (2) \quad -i[\vec{k} \times \vec{E}] = -i\omega \vec{B}; \quad (4)$$

Материальные уравнения:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}; \quad (\text{магнитной анизотропии нет})$$

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}; \quad (\text{вектора } \vec{D}, \vec{E} \text{ не сонаправлены}),$$

Из уравнений (1), (2), (3) – векторы $\vec{D}, \vec{B}, \vec{k}$ образуют правую тройку.

Из уравнения (4) – \vec{E} перпендикулярен \vec{B} , следовательно, \vec{E} лежит в плоскости, образованной векторами \vec{D} и \vec{k} .

Вектор Умова-Пойнтинга $\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]$ также перпендикулярен \vec{B} , следовательно, лежит в плоскости, образованной векторами \vec{D} и \vec{k} .

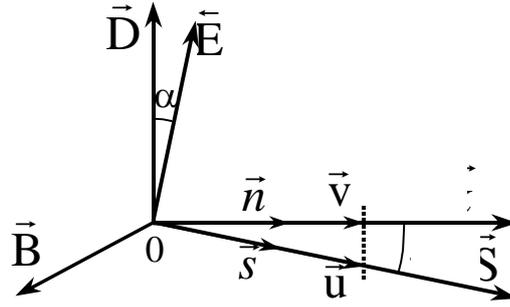


Рис. 1. Взаимная ориентация векторов при распространении световой волны в анизотропной среде
Вводим единичные векторы:

$$\vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} - \text{нормаль к фронту волны};$$

$$\vec{s} = \frac{\vec{S}}{|\vec{S}|} - \text{лучевой вектор (направление распространения энергии)}.$$

Между векторами \vec{n} и \vec{s} - угол α , как и между векторами \vec{D} и \vec{E} .

\vec{v} - фазовая скорость, сонаправлена с вектором \vec{n} , указывающим направление распространения поверхности постоянной фазы (фронта волны).

\vec{u} - лучевая скорость, сонаправлена с вектором \vec{s} , указывающим направление распространения энергии волны. В эксперименте наблюдаются именно лучи.

Связь между фазовой и лучевой скоростями:

$$|\vec{u}| = \frac{|\vec{v}|}{\cos \alpha} = \frac{|\vec{v}|}{(\vec{n} \cdot \vec{s})}$$

(лучевая скорость больше или равна фазовой).

Исключим из уравнений (3)-(4) векторы, характеризующие магнитное поле:

$$[\vec{n} \times \vec{H}] = -\frac{\omega}{k} \cdot \vec{D}; \quad (3')$$

$$[\vec{n} \times \vec{E}] = \frac{\omega}{k} \cdot \vec{B}; \quad (4')$$

$$\frac{\omega}{k} = v - \text{фазовая скорость};$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

Подставляем $\vec{B} = \frac{1}{v} [\vec{n} \times \vec{E}]$ из (4') в (3') и получаем:

$$\frac{1}{\mu_0 v} [\vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{E}]] = -v \cdot \vec{D}; \quad (5)$$

$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ скорость света в вакууме.

Преобразуя двойное векторное произведение, получим:

$$\vec{D} = \frac{c^2}{v^2} \cdot \epsilon_0 \cdot (\vec{E} - \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \vec{E})); \quad (6)$$

Из этого векторного уравнения (содержит три скалярных уравнения), используя материальное уравнение для \vec{D} и \vec{E} , можно получить выражение для фазовой скорости v в зависимости от направления вектора \vec{n} .

$$D_x = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_x \cdot E_x ;$$

$$D_y = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_y \cdot E_y ;$$

$$D_z = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_z \cdot E_z ;$$

$$\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$$

Пример. Пусть $\vec{n} = \{0, 0, 1\}$, т.е. вектор \vec{n} направлен вдоль оси Oz.

$$\text{Ox:} \quad D_x = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_x \cdot E_x = \frac{c^2}{v^2} \cdot \varepsilon_0 \cdot (E_x - n_x \cdot (\vec{n} \cdot \vec{E})) = \frac{c^2}{v^2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E_x ; (7)$$

$$v_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_x}} = v_x$$

$$\text{Oy:} \quad D_y = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_y \cdot E_y = \frac{c^2}{v^2} \cdot \varepsilon_0 \cdot (E_y - n_y \cdot (\vec{n} \cdot \vec{E})) = \frac{c^2}{v^2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E_y ; (8)$$

$$v_2 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y}} = v_y$$

$$\text{Oz:} \quad D_z = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_z \cdot E_z = \frac{c^2}{v^2} \cdot \varepsilon_0 \cdot (E_z - n_z \cdot (\vec{n} \cdot \vec{E})) = \frac{c^2}{v^2} \cdot \varepsilon_0 \cdot (E_z - E_z) = 0; (9)$$

$$E_z = 0$$

Вдоль оси Oz могут распространяться две волны с различными фазовыми скоростями $v_x = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_x}}$ и $v_y = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y}}$, причем первая поляризована вдоль оси x, а вторая – вдоль оси y.

Введем величины: $v_x = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_x}}$, $v_y = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y}}$, $v_z = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_z}}$ - **главные скорости**

распространения света в кристалле. Физический смысл: это скорости волн, **поляризованных** в заданных направлениях, но **не проекции скорости** на соответствующие оси!!! Не путать!!!

Получим выражение для скорости распространения волн для произвольного направления $\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$. Для этого запишем (6) для x-координаты (с учетом $E_x = \frac{D_x}{\varepsilon_x \varepsilon_0}$):

$$D_x = \frac{c^2}{v^2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \left(\frac{D_x}{\varepsilon_x \varepsilon_0} - n_x \cdot (\vec{n} \cdot \vec{E}) \right);$$

$$D_x \left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon_x v^2} \right) = \frac{c^2}{v^2} \cdot \varepsilon_0 \cdot (-n_x \cdot (\vec{n} \cdot \vec{E})).$$

Так как $\frac{c^2}{\varepsilon_x} = v_x^2$, то

$$D_x \left(1 - \frac{v_x^2}{v^2} \right) = \frac{c^2}{v^2} \cdot \varepsilon_0 \cdot (-n_x \cdot (\vec{n} \cdot \vec{E}));$$

$$D_x(v^2 - v_x^2) = c^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot (-n_x \cdot (\vec{n} \cdot \vec{E}));$$

$$D_x = \frac{-n_x}{(v^2 - v_x^2)} c^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot (\vec{n} \cdot \vec{E}).$$

Умножим полученное соотношение на n_x :

$$n_x \cdot D_x = \frac{-n_x^2}{(v^2 - v_x^2)} c^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot (\vec{n} \cdot \vec{E}).$$

Запишем аналогичные выражения для y- и z-компонент и найдем сумму, учитывая, что $n_x \cdot D_x + n_y \cdot D_y + n_z \cdot D_z = (\vec{n} \cdot \vec{D}) = 0$:

$$(\vec{n} \cdot \vec{D}) = 0 = \left(\frac{-n_x^2}{(v^2 - v_x^2)} + \frac{-n_y^2}{(v^2 - v_y^2)} + \frac{-n_z^2}{(v^2 - v_z^2)} \right) \cdot c^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot (\vec{n} \cdot \vec{E}).$$

Так как векторы \vec{n} и \vec{E} не ортогональны, то правая часть уравнения равна нулю только если:

$$\left(\frac{n_x^2}{(v^2 - v_x^2)} + \frac{n_y^2}{(v^2 - v_y^2)} + \frac{n_z^2}{(v^2 - v_z^2)} \right) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{n_i^2}{v_i^2 - v^2} = 0;$$

Полученное соотношение называют **уравнением Френеля для фазовых скоростей**. Оно позволяет для каждого направления $\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$ найти значения фазовой скорости. Данное уравнение является биквадратным, можно показать, что существуют два решения, обозначим их v' и v'' .

Это означает, что в каждом направлении, задаваемом вектором \vec{n} , могут распространяться две волны, каждая со своей фазовой скоростью v' и v'' . Найдем взаимное положение векторов \vec{D}' и \vec{D}'' этих волн. Для этого умножим (6), записанное для \vec{D}' и \vec{E}' , скалярно на \vec{D}'' , а записанное для \vec{D}'' и \vec{E}'' , скалярно на \vec{D}' :

$$\vec{D}' \cdot \vec{D}'' = \frac{c^2}{v'^2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}' \vec{D}''; \quad \vec{D}'' \cdot \vec{D}' = \frac{c^2}{v''^2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}'' \vec{D}';$$

(учтено, что $(\vec{n} \cdot \vec{D}) = 0$).

Можно показать, что $\vec{E}' \vec{D}'' = \vec{E}'' \vec{D}'$ (расписать аккуратно в главных осях):

$$\vec{E}' \vec{D}'' = \sum_i E'_i \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_i E''_i = \sum_i E''_i \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_i E'_i = \vec{E}'' \vec{D}'.$$

Тогда

$$v'^2 \cdot \vec{D}' \cdot \vec{D}'' = v''^2 \cdot \vec{D}'' \cdot \vec{D}'; \quad (v'^2 - v''^2) \cdot (\vec{D}' \cdot \vec{D}'') = 0;$$

$$(\vec{D}' \cdot \vec{D}'') = 0.$$

Следовательно, **волны имеют взаимно ортогональные состояния поляризации** (в данном случае речь идет о направлении векторов \vec{D}). Других волн, распространяющихся в заданном направлении, не существует.

Примечание. В процессе вывода уравнения Френеля выполнялась операция деления на $(v^2 - v_i^2)$, где v_i - одна из главных скоростей. Но если одна из проекций вектора \vec{n} равна нулю (например, n_x), то из уравнения

$$D_x(v^2 - v_x^2) = c^2 \cdot \epsilon_0 \cdot (-n_x \cdot (\vec{n} \cdot \vec{E}))$$

следует, что одно из решений $v' = v_x$. Тогда в уравнении Френеля слагаемое

$$\frac{n_x^2}{v_x^2 - v^2}$$

следует положить равным нулю.

Геометрическая интерпретация - **эллипсоид волновых нормалей** (диэлектрических проницаемостей):

$$\frac{x^2}{\epsilon_x} + \frac{y^2}{\epsilon_y} + \frac{z^2}{\epsilon_z} = 1;$$

(полуоси эллипсоида равны $\sqrt{\epsilon_x}$, $\sqrt{\epsilon_y}$, $\sqrt{\epsilon_z}$).

Так как $\sqrt{\epsilon_x} = n_x$ и т.д., то данный эллипсоид можно назвать эллипсоидом показателей преломления: его полуоси как раз и равны главным показателям преломления.

Эллипсоид позволяет просто найти характеристики волн, распространяющихся в заданном направлении \vec{n} . Для этого рассмотрим сечение эллипсоида плоскостью, перпендикулярной к вектору \vec{n} - это эллипс с полуосями $\sqrt{\epsilon'}$ и $\sqrt{\epsilon''}$. Можно показать, что величины полуосей эллипса дают значения фазовых скоростей $v' = \frac{c}{\sqrt{\epsilon'}}$ и $v'' = \frac{c}{\sqrt{\epsilon''}}$, а направление полуосей - направление поляризации для векторов \vec{D}' и \vec{D}'' .

Для нахождения лучевой скорости \vec{u} - в уравнениях Максвелла (1)-(4) делаем аналогичные преобразования, только вместо вектора \vec{n} используем вектор \vec{s} .

$$[\vec{n} \times \vec{H}] = -v \cdot \vec{D}; \quad (3')$$

$$[\vec{n} \times \vec{E}] = v \cdot \vec{B}; \quad (4')$$

Умножим (3')-(4') векторно на \vec{s} :

$$[\vec{s} \times [\vec{n} \times \vec{H}]] = -v \cdot [\vec{s} \times \vec{D}];$$

$$[\vec{s} \times [\vec{n} \times \vec{E}]] = -v \cdot [\vec{s} \times \vec{B}];$$

$$\vec{n}(\vec{s}\vec{H}) - \vec{H}(\vec{s}\vec{n}) = -v \cdot [\vec{s} \times \vec{D}];$$

$$\vec{n}(\vec{s}\vec{E}) - \vec{E}(\vec{s}\vec{n}) = v \cdot [\vec{s} \times \vec{B}];$$

$$-\vec{H}(\vec{s}\vec{n}) = -v \cdot [\vec{s} \times \vec{D}];$$

$$-\vec{E}(\vec{s}\vec{n}) = v \cdot [\vec{s} \times \vec{B}];$$

$$\text{Но } (\vec{s}\vec{n}) = \cos \alpha; \quad u = \frac{v}{\cos \alpha} = \frac{v}{(\vec{s}\vec{n})};$$

$$\vec{H} = u \cdot [\vec{s} \times \vec{D}];$$

$$\vec{E} = -u \cdot [\vec{s} \times \vec{B}];$$

Подставляя $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \mu_0 u \cdot [\vec{s} \times \vec{D}]$ во второе уравнение, получим:

$$\vec{E} = -\mu_0 u^2 \cdot [\vec{s} \times [\vec{s} \times \vec{D}]];$$

$$\vec{E} = \frac{u^2}{c^2 \cdot \epsilon_0} \cdot (\vec{D} - \vec{s} \cdot (\vec{s} \cdot \vec{D})).$$

Для \vec{n} $\vec{D} = \frac{c^2}{v^2} \cdot \epsilon_0 \cdot (\vec{E} - \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \vec{E}))$ $\sum_{i=1}^3 \frac{n_i^2}{v_i^2 - v^2} = 0$ $\frac{x^2}{\epsilon_x} + \frac{y^2}{\epsilon_y} + \frac{z^2}{\epsilon_z} = 1$	Для \vec{s} $\vec{E} = \frac{u^2}{c^2 \cdot \epsilon_0} \cdot (\vec{D} - \vec{s} \cdot (\vec{s} \cdot \vec{D}))$ $\sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2 \cdot v_i^2}{v_i^2 - u^2} = 0$ $\frac{x^2}{v_x^2} + \frac{y^2}{v_y^2} + \frac{z^2}{v_z^2} = 1$
---	--

Уравнение Френеля для лучевых скоростей:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2 \cdot v_i^2}{v_i^2 - u^2} = 0.$$

Как и в случае фазовых скоростей, можно показать, что в каждом направлении, задаваемом вектором \vec{s} , распространяются две волны, каждая со своей лучевой скоростью u' и u'' . Эти волны поляризованы во взаимно ортогональных направлениях \vec{E}' и \vec{E}'' .

Примечание. Аналогично выводу уравнения Френеля для фазовых скоростей, если одна из проекций вектора \vec{s} равна нулю (например, s_x), то и одно из решений $u' = v_x$. Тогда в уравнении Френеля для лучевых скоростей слагаемое $\frac{s_x^2 \cdot v_x^2}{v_x^2 - u^2}$ следует положить равным нулю.

Геометрическая интерпретация - **эллипсоид лучевых скоростей** (или **эллипсоид Френеля**):

$$\frac{x^2}{\frac{1}{\epsilon_x}} + \frac{y^2}{\frac{1}{\epsilon_y}} + \frac{z^2}{\frac{1}{\epsilon_z}} = 1$$

или

$$\frac{x^2}{v_x^2} + \frac{y^2}{v_y^2} + \frac{z^2}{v_z^2} = 1;$$

(полуоси эллипсоида равны главным скоростям v_x, v_y, v_z).

Эллипсоид позволяет просто найти характеристики волн, распространяющихся в заданном направлении \vec{s} . Для этого рассмотрим сечение эллипсоида лучевых скоростей плоскостью, перпендикулярной к вектору \vec{s} - это будет эллипс с полуосями u' и u'' . Можно показать, что величины полуосей эллипса дают значения лучевых скоростей, а направление полуосей - направление поляризации для соответствующих взаимно перпендикулярных векторов \vec{E}' и \vec{E}'' .

В дальнейшем будем говорить в основном о лучевых скоростях, т.к. именно лучи видны в эксперименте.

Можно показать, что для лучевого эллипсоида с тремя различными размерами полуосей v_x , v_y и v_z всегда существуют два круговых сечения. Для волн, распространяющихся в направлениях \vec{s}_1 и \vec{s}_2 , перпендикулярных к этим сечениям, скорость не зависит от состояния их поляризации. Другими словами, изменения состояния поляризации распространяющихся в данных направлениях волн не происходит, каким бы это состояние ни было изначально. Такие направления называются **оптическими осями** кристалла, а сам кристалл называется **двуосным**.

Для лучевого эллипсоида с двумя одинаковыми размерами полуосей существует всего одно круговое сечение, причем направление, перпендикулярное к этому сечению, совпадает с третьей полуосью (отличной от двух равных). Скорость распространения любой волны вдоль этого направления не зависит от ее поляризации, т.е. изменения состояния поляризации волны не происходит. Такой кристалл называется **одноосным**.

Пусть, к примеру, $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y = \varepsilon_z$. Тогда $v_x = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_x}} \neq v_y = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y}} = v_z = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_z}}$.

Оптическая ось кристалла совпадает с осью Ox , так как сечение лучевого эллипсоида плоскостью, перпендикулярной к оси Ox (плоскостью yOz) имеет форму круга. Вдоль этого направления волна с любым состоянием поляризации распространяется со скоростью $v_y = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y}} = v_0$, называемой скоростью

распространения **обыкновенной волны**. При этом исходное состояние поляризации волны в процессе распространения не изменяется.

Для любого другого направления распространения \vec{s} сечение лучевого эллипсоида, перпендикулярное к \vec{s} , имеет форму эллипса, одна из полуосей которого **всегда** равна v_0 . Эта полуось будет перпендикулярна к плоскости, образованной вектором \vec{s} и оптической осью кристалла, называемой **плоскостью главного сечения**. Таким образом, в одноосном кристалле в любом направлении с одной и той же скоростью v_0 может распространяться обыкновенная волна, поляризованная перпендикулярно плоскости главного сечения.

Для второй волны, распространяющейся в направлении \vec{s} , скорость распространения u будет зависеть от угла θ между направлением \vec{s} и оптической осью. Эту волну называют **необыкновенной**, она поляризована в плоскости главного сечения, и ее скорость лежит в пределах от $v_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y}}$ до

$v_e = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_x}}$. В зависимости от соотношения v_0 и v_e кристалл называют

положительным ($v_0 > v_e$) или **отрицательным** ($v_0 < v_e$).

Вывод формулы для нахождения скорости u необыкновенной волны в одноосном кристалле в зависимости от угла θ между направлением \vec{s} и оптической осью (из сечения эллипсоида лучевых скоростей).

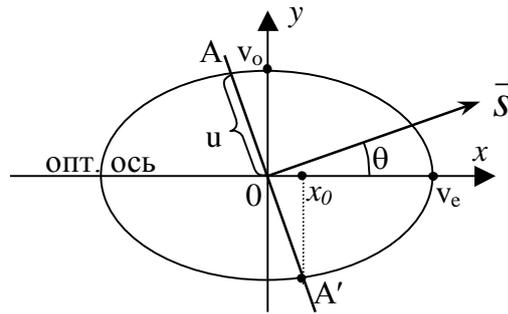


Рис. 2. Сечение эллипсоида лучевых скоростей

На рис. 2 показан эллипс, являющийся сечением эллипсоида лучевых скоростей плоскостью xOy , где ось Ox – оптическая ось (третья полуось эллипсоида, направленная вдоль оси Oz , равна v_0). Уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{v_e^2} + \frac{y^2}{v_o^2} = 1.$$

Зададим направление луча \vec{s} . Для нахождения $u(\theta)$ проведем через начало координат сечение, перпендикулярное к \vec{s} . Это сечение перпендикулярно плоскости рисунка и пересекает эту плоскость по прямой AA' . Длина участка прямой от начала координат до точки пересечения с эллипсом и даст искомое значение скорости $u(\theta)$.

Нетрудно заметить, что координаты x_A и y_A точки пересечения с эллипсом $x_A = -u \cdot \sin \theta$; $y_A = u \cdot \cos \theta$.

Подставляя в уравнение эллипса, получим:

$$\frac{u^2 \sin^2 \theta}{v_e^2} + \frac{u^2 \cos^2 \theta}{v_o^2} = 1,$$

откуда

$$u^2(\theta) = \frac{1}{\frac{\sin^2 \theta}{v_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{v_o^2}}$$

(Проверяем. При $\theta = 0$ (луч идет вдоль оптической оси) $u(0) = v_0$; при $\theta = \pi/2$ (луч идет перпендикулярно к оптической оси) $u(\pi/2) = v_e$. Все верно.)

Таким образом, скорость распространения необыкновенной волны задается приведенной выше формулой, а направление ее поляризации совпадает с осью AA' . Плоскость главного сечения, задаваемая оптической осью и направлением \vec{s} , совпадает с плоскостью рисунка, следовательно, **необыкновенная волна поляризована в плоскости главного сечения.**

Применяя аналогичный подход, можно вывести и **формулы** для нахождения фазовой скорости v необыкновенной волны в одноосном кристалле

в зависимости от угла θ между направлением \vec{n} и оптической осью (из сечения эллипсоида волновых нормалей). Для этого заметим, что в уравнении эллипса полуосями будут не главные скорости, а главные показатели преломления:

$$\frac{x^2}{n_e^2} + \frac{y^2}{n_o^2} = 1.$$

Тогда и формула для скорости превратится в формулу для показателя преломления:

$$n^2(\theta) = \frac{1}{\frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2}}.$$

Так как фазовая скорость $v(\theta) = \frac{c}{n(\theta)}$, в итоге получим:

$$v^2(\theta) = v_e^2 \sin^2 \theta + v_o^2 \cos^2 \theta.$$

(Проверяем. При $\theta = 0$ (нормаль направлена вдоль оптической оси) $v(0) = v_o$; при $\theta = \pi/2$ (нормаль перпендикулярна к оптической оси) $v(\pi/2) = v_e$. Все верно.)

Замечание. Отметим, что при решении выведенного ранее уравнения Френеля для лучевых скоростей в случае одноосного кристалла можно найти только значение скорости для необыкновенного луча. Это связано с тем, что при выводе уравнения использовалась операция деления на $(v - v_i), i = x, y, z$, поэтому решение вида $(v = v_i)$ не может быть получено.

Напоминаем, что обыкновенная волна независимо от направления \vec{s} всегда распространяется со скоростью v_o . Величина скорости v_o равна размеру второй полуоси эллипса, получающегося при сечении эллипсоида плоскостью, перпендикулярной к \vec{s} . На рис.2 эта полуось совпадает с полуосью эллипсоида вдоль оси Oz, перпендикулярной плоскости рисунка. Следовательно, **обыкновенная волна поляризована** именно вдоль направления Oz, т.е. **перпендикулярно плоскости главного сечения.**

Разместим мысленно точечный источник света внутри анизотропного одноосного кристалла и построим поверхность, до которой дойдут **лучи** от этого источника за некоторое время τ (рис. 3). Так как по каждому направлению могут распространяться две волны с различными скоростями, то полученная поверхность, называемая **лучевой**, будет представлять собой совокупность сферы (для обыкновенной волны) и эллипсоида (для необыкновенной). Пусть $\tau=1$ сек. Радиус сферы и одна из полуосей эллипсоида будут численно равны скорости v_o , две другие полуоси эллипсоида будут численно равны скорости v_e . Сфера и эллипсоид будут касаться друг друга всего в двух точках, лежащих на оптической оси. Если $v_o < v_e$ (кристалл отрицательный), то эллипсоид будет содержать в

себе сферу (форму эллипсоида условно назовем «летающей тарелкой», а лучевую поверхность - «сферой в летающей тарелке») Если $v_o > v_e$, (кристалл положительный), то эллипсоид будет находиться внутри сферы (форму эллипсоида условно назовем «яйцом», а лучевую поверхность – «яйцом в сфере»).

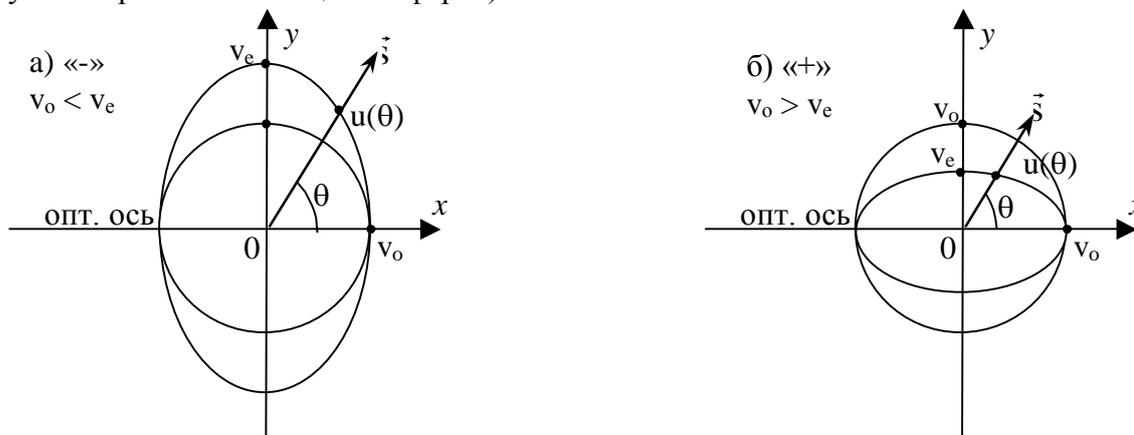


Рис. 3. Лучевые поверхности для отрицательного кристалла ($v_o < v_e$, «сфера в летающей тарелке») и положительного кристалла ($v_o > v_e$, «яйцо в сфере»)

(Вопрос «на засыпку». А может быть, на рис 3а изображена «сфера в яйце», а на рис 3б - изображена «летающая тарелка в сфере»? Докажите, что такого не может быть!)

На рис.2 был приведен эллипсоид лучевых скоростей, для которого $v_o < v_e$, т.е. кристалл отрицательный. У эллипсоида две полуоси меньше третьей, следовательно, он имеет форму «яйца». Для такого же кристалла лучевые поверхности, приведенные на рис. 3а, имеют форму «сферы в летающей тарелке».

Для положительного кристалла, напротив, эллипсоид лучевых скоростей имеет форму «летающей тарелки», а лучевые поверхности – форму «яйца в сфере».

Кристалл	Отрицательный	Положительный
Лучевой эллипсоид	«Яйцо»	«Летающая тарелка»
Лучевая поверхность	Сфера в летающей тарелке»	«Яйцо в сфере»
Способ запоминания	Л.п. похожа на «минус»	Л.п. похожа на «плюс»

Лучевая поверхность позволяет также находить и направление фазовых скоростей. Возьмем на рис. 3 точки пересечения вектора \vec{s} с поверхностями, отвечающими обыкновенной и необыкновенной волнам. Построим в этих точках плоскости, касательные к обеим поверхностям (на рис. не показаны). Векторы, проведенные из начала координат перпендикулярно к этим плоскостям, и покажут направление векторов нормалей \vec{n} , соответствующих обеим волнам. Так как для обыкновенной волны лучевая поверхность – сфера, а касательная к любой точке сферы всегда перпендикулярна к радиусу, проведенному в эту точку, то направления векторов \vec{s} и \vec{n} для обыкновенной волны совпадают. Для необыкновенной волны векторы \vec{s} и \vec{n} не сонаправлены, угол между ними равен углу между векторами \mathbf{D} и \mathbf{E} этой волны.

Пример решения задачи на распространение волн в анизотропном кристалле.

Заданы диагональные элементы тензора диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_x = 1; \varepsilon_y = 2; \varepsilon_z = 3.$$

Вектор \vec{s} лежит в плоскости xOz и образует с осью Ox угол $\varphi=60^\circ$ (рис. 4). Найти уравнения волн, распространяющихся в заданном направлении.

Решение.

Найдем координаты вектора $\vec{s} = \{\cos\varphi, 0, \sin\varphi\} = \left\{1/2, 0, \sqrt{3}/2\right\}$.

Для нахождения лучевых скоростей решаем соответствующее уравнение Френеля:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2 \cdot v_i^2}{v_i^2 - u^2} = 0.$$

Т.к. $s_y = 0$, то одно решение $u' = v_y = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y}}$, волна поляризована вдоль оси Oy ,

векторы \vec{E}' и \vec{D}' сонаправлены, также сонаправлены и вектора \vec{s} и \vec{n}' , фазовая скорость $v' = u' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y}}$. Уравнений волны запишется в виде:

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= E'_0 \cdot \vec{e}_y \cdot \exp(i(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r})) = E'_0 \cdot \vec{e}_y \cdot \exp\left(i\omega\left(t - \frac{\vec{n}' \cdot \vec{r}}{v'}\right)\right) = \\ &= E'_0 \cdot \vec{e}_y \cdot \exp\left(i\omega\left(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{r}}{u'}\right)\right). \\ \vec{D}' &= \varepsilon_0 \varepsilon_y \vec{E}'. \end{aligned}$$

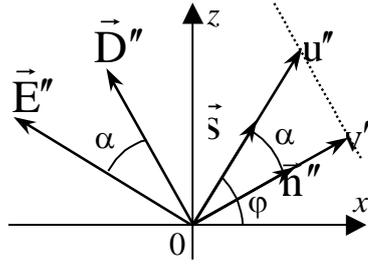


Рис. 4. Взаимное расположение векторов в анизотропном кристалле

Для нахождения u'' запишем:

$$\frac{s_x^2 \cdot v_x^2}{v_x^2 - u^2} + \frac{s_z^2 \cdot v_z^2}{v_z^2 - u^2} = 0; \quad s_x^2 \cdot v_x^2 (v_z^2 - u^2) + s_z^2 \cdot v_z^2 (v_x^2 - u^2) = 0;$$

$$v_x^2 v_z^2 (s_x^2 + s_z^2) = u^2 \cdot (s_x^2 \cdot v_x^2 + s_z^2 \cdot v_z^2);$$

$$u'' = \sqrt{\frac{v_x^2 v_z^2}{s_x^2 \cdot v_x^2 + s_z^2 \cdot v_z^2}}.$$

Вектор \vec{E}'' перпендикулярен вектору \vec{s} , лежит в плоскости xOz :

$$\vec{E}'' = E''_0 \cdot \{-s_z, 0, s_x\} = E''_0 \cdot \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}.$$

Находим компоненты вектора \vec{D}'' :

$$D''_x = \varepsilon_0 \varepsilon_x E''_x = \varepsilon_0 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot E''_0;$$

$$D''_z = \varepsilon_0 \varepsilon_{zx} E''_z = \varepsilon_0 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot E''_0 = -\sqrt{3} \cdot D''_x.$$

Следовательно, вектор \vec{D}'' составляет с осью Oz угол $\varphi_D=30^\circ$, такой же угол, но с осью Ox , составляет вектор $\vec{n}'' = \{\cos\varphi_D, 0, \sin\varphi_D\} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$. Угол α между векторами \vec{E}'' и \vec{D}'' равен 30° , такой же угол и между векторами \vec{s} и \vec{n}'' .

Для второй волны, распространяющейся вдоль направления \vec{s} , фазовая скорость \vec{v}'' будет направлена вдоль \vec{n}'' и равна $v'' = u'' \cdot \cos\alpha$.

$$\begin{aligned}\vec{E}'' &= E_0'' \cdot (-s_z \cdot \vec{e}_x + s_x \cdot \vec{e}_z) \cdot \exp(i(\omega t - \vec{k}'' \cdot \vec{r})) = \\ &= E_0'' \cdot (-s_z \cdot \vec{e}_x + s_x \cdot \vec{e}_z) \cdot \exp\left(i\omega\left(t - \frac{\vec{n}'' \cdot \vec{r}}{v''}\right)\right).\end{aligned}$$

(направление вектора \vec{E}'' определяется вектором, перпендикулярным к \vec{s} , а поверхность постоянной фазы перемещается вдоль вектора \vec{n}'' со скоростью v'').

Лучевые поверхности используют для построения хода лучей при преломлении на границе анизотропной среды с изотропной, данное построение называют **построением Гюйгенса**.

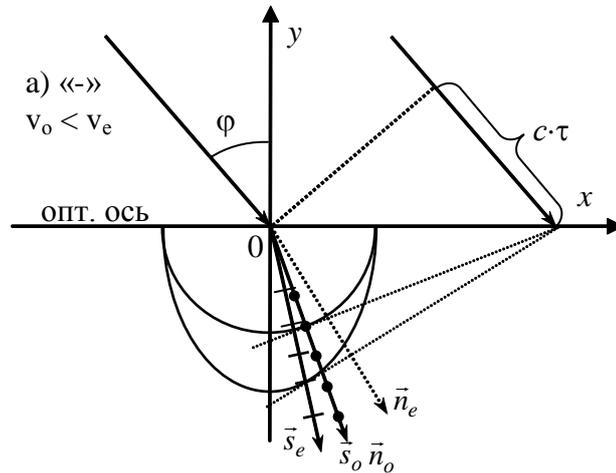


Рис. 5. Пример построения Гюйгенса для отрицательного кристалла, вырезанного параллельно оптической оси (точками и черточками показаны направления поляризации обыкновенного и необыкновенного лучей)

Пример построения приведен на рис. 5. На границу раздела сред падают два луча под углом φ , причем второй приходит на границу на время τ позже первого. Построим лучевые поверхности с центром в начале координат (точке падения первого луча), соответствующие времени задержки τ . Тогда плоскости, касательные к лучевым поверхностям, будут являться фронтами волн (векторы \vec{n}_o и \vec{n}_e). Лучи, проведенные из начала координат в точки касания, дадут направления распространения лучей (векторы \vec{s}_o и \vec{s}_e). Для обыкновенной волны направления \vec{n}_o и \vec{s}_o будут совпадать. Отметим, что закон преломления в привычной нам форме ($n_1 \cdot \sin\varphi_1 = n_2 \cdot \sin\varphi_2$, где $n_{1,2}$ - показатели преломления) справедлив для **волновых нормалей**, т.е. углы преломления задаются векторами \vec{n}_o и \vec{n}_e .

Другие примеры построения Гюйгенса можно посмотреть в литературе (например, Бутиков, «Оптика», §4.3)

Наибольшее распространение получили анизотропные пластинки одноосных кристаллов, у которых оптическая ось лежит в плоскости поверхности пластинки (говорят, что она вырезана параллельно оптической оси). Направим нормально к поверхности пластинки линейно поляризованную волну (на рис.6 свет распространяется вдоль оси Z , а оптическая ось совпадает с осью X). Пусть плоскость поляризации падающего света

составляет угол α с главным сечением кристалла — плоскостью XOZ (в данном случае угол α — это угол между направлением поляризации волны и оптической осью кристалла). В дальнейшем будем считать, что угол α меняется в пределах от $-\pi/2$ до $+\pi/2$. Разложим падающую волну на две составляющие - для одной соответствующая компонента вектора E будет параллельна оптической оси, для другой - перпендикулярна (рис.3). Амплитуда колебаний поля для первой волны будет задаваться выражением $a = |E_0| \cdot \cos\alpha$, а для второй - $b = |E_0| \cdot |\sin\alpha|$ (заметим, что так как знак $\sin\alpha$ зависит от знака α , то при $\alpha < 0$ следует учесть изменение фазы второй волны на π). Таким образом, через кристалл в одном направлении, но с различной скоростью будут распространяться две волны, поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях, которые принято называть *главными направлениями* кристаллической пластинки.

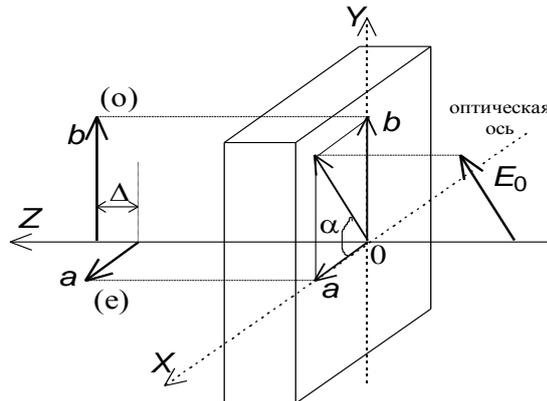


Рис.6. Прохождение линейно поляризованного света через кристалл.

В соответствии с вышесказанным, первая волна является необыкновенной (ее плоскость поляризации совпадает с главным сечением), а так как направление распространения волны перпендикулярно к оптической оси, то для нее показатель преломления будет равен n_e . Для второй волны - обыкновенной (ее плоскость поляризации перпендикулярна главному сечению) - показатель преломления равен n_o . Скорости распространения таких волн задаются формулами $v_e = c/n_e$ и $v_o = c/n_o$. Если толщина пластины равна d , то оптическая разность хода Δ на выходе из пластины будет равна $\Delta = (n_e - n_o) \cdot d$, и, следовательно, разность фаз δ между двумя волнами, поляризованными во взаимно перпендикулярных направлениях, после выхода из пластинки (в вакууме) будет равна $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n_e - n_o) \cdot d$. При этом в отсутствии поглощения амплитуды каждой из волн останутся неизменными и равными a и b .

Предположим для определенности, что $n_e - n_o > 0$ (примером такого вещества является кварц). В зависимости от угла α и разности фаз δ поляризация выходящей волны будет различной (при анализе учтем, что, так как разность фаз δ может принимать любые значения, большие нуля, то с учетом периодичности для каждого δ будем указывать соответствующее значение разности фаз $\Delta\varphi$, удовлетворяющего условию $|\Delta\varphi| \leq \pi$).

1) $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi/2$, δ — любое.

В этом случае состояние поляризации и амплитуда волны после прохождения кристалла не изменятся, так как амплитуда одной из составляющих на входе в кристалл (либо a , либо b) будет равна нулю.

2) $0 < |\alpha| < \pi/2$, $\delta = 2\pi m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), $\Delta\varphi = 0$.

Состояние поляризации и амплитуда волны также не изменятся, так как возникающая между двумя взаимно перпендикулярными составляющими волны разность фаз кратна 2π .

$$3) 0 < |\alpha| < \pi/2, \delta = \pi + 2\pi m \ (m=0,1,2,\dots), \Delta\varphi = \pi.$$

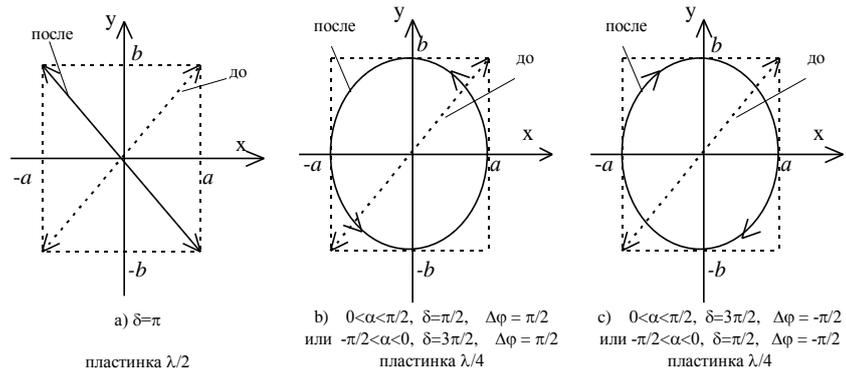


Рис. 7. Схема изменения состояния линейной поляризации волны при прохождении двулучепреломляющей пластинки

Выходящая волна останется линейно поляризованной, но плоскость поляризации повернется на угол $2|\alpha|$ и составит угол $(-\alpha)$ с оптической осью (рис.7а). Такую пластинку принято называть *пластинкой $\lambda/2$* , так как разность хода Δ , соответствующая заданной разности фаз δ , будет равна $\Delta = \lambda/2 \pm \lambda m$ ($m=0,1,2,\dots$). Так как амплитуда волны не изменяется, то пластинка $\lambda/2$ может использоваться для поворота плоскости поляризации исходной волны на любой наперед заданный угол.

$$4) 0 < \alpha < \pi/2, \delta = \pi/2 + 2\pi m \ (m=0,1,2,\dots), \Delta\varphi = \pi/2.$$

Необыкновенная волна «обгоняет» обыкновенную по фазе на $\pi/2$, поэтому на выходе будет наблюдаться эллиптическая лево поляризованная волна, причем оси эллипса будут ориентированы по направлениям поляризации исходных составляющих волны (рис.7б). Такую пластинку называют *пластинкой $\lambda/4$* (разность хода $\Delta = \lambda/4 \pm \lambda m$ ($m=0,1,2,\dots$)). Если $\alpha = \pi/4$, то $a = b = |E_0|/\sqrt{2}$, и, следовательно выходящая волна будет иметь круговую поляризацию и амплитуду $|E_0|/\sqrt{2}$.

$$5) 0 < \alpha < \pi/2, \delta = 3\pi/2 + 2\pi m \ (m=0,1,2,\dots), \Delta\varphi = -\pi/2.$$

Хотя разность фаз $\delta > 0$, но соответствующее значение $\Delta\varphi < 0$ (как отмечалось выше, $|\Delta\varphi| \leq \pi$), в итоге необыкновенная волна «отстанет» от обыкновенной по фазе на $\pi/2$, и на выходе будет наблюдаться эллиптическая право поляризованная волна, и оси эллипса будут ориентированы по направлениям поляризации исходных составляющих волны (рис.7с). Такую пластинку также называют *пластинкой $\lambda/4$* (разность хода $\Delta = -\lambda/4 \pm \lambda m$ ($m=1,2,\dots$)).

$$6) -\pi/2 < \alpha < 0, \delta = \pi/2 + 2\pi m \ (m=1,2,\dots), \Delta\varphi = -\pi/2.$$

В отличие от случая 4) значение α отрицательно, что, как отмечалось выше, эквивалентно изменению фазы второй волны на входе в пластину на угол π . Это приведет и к соответствующему изменению $\Delta\varphi$. В итоге результирующая волна будет иметь, как и в случае 5), эллиптическую правую поляризацию. Эта пластинка также является *пластинкой $\lambda/4$* .

$$7) -\pi/2 < \alpha < 0, \delta = 3\pi/2 + 2\pi m \ (m=0,1,2,\dots), \Delta\varphi = \pi/2.$$

Повторяя рассуждения, приведенные для случая 6), отметим, что результирующая волна будет иметь, как и в случае 4), эллиптическую левую поляризацию.

8) В общем случае, для произвольных значений α и δ на выходе из пластинки волна будет иметь, вообще говоря, эллиптическую поляризацию с различными значениями соотношения полуосей и их ориентации¹.

¹ Для наглядного изучения вопросов прохождения поляризованного излучения через анизотропную среду можно воспользоваться интернет-иллюстрациями на сайте genphys.phys.msu.ru в разделе «Демонстрации».

Пластинка $\lambda/4$ широко используется в оптических исследованиях как для получения круговой поляризации, так и для анализа поляризационных свойств светового пучка. Как уже отмечалось выше, если на нее направить линейно поляризованный пучок света, то:

а) если плоскость поляризации совпадает с главной плоскостью кристалла или перпендикулярна к ней, то характеристики выходного пучка будут полностью совпадать с характеристиками входного;

б) если условие а) не выполнено, то на выходе пластинки $\lambda/4$ всегда будет наблюдаться эллиптически поляризованная волна (которая при угле $|\alpha|=\pi/4$ превратится в круговую) с полуосями a и b , причем одна из осей эллипса всегда будет совпадать с оптической осью кристалла, а направление вращения будет зависеть от угла α и разности фаз δ . Отметим, что получение круговой поляризации из линейной может быть достигнуто только с помощью пластинки $\lambda/4$.

Пластинка $\lambda/4$ позволяет экспериментально определить направление вращения вектора поляризации в эллиптически поляризованной волне. Так как эллиптически поляризованный свет всегда можно представить как сумму двух волн, линейно поляризованных вдоль главных осей эллипса, то при таком представлении разность фаз между этими волнами равна $\pm \pi/2$, причем, как отмечалось ранее, знак «плюс» соответствует право поляризованной волне, а знак «минус» — лево поляризованной. Пропустим такой свет через пластинку $\lambda/4$, главные направления которой совпадают с осями эллипса. Пусть известно, что пластинка $\lambda/4$ установлена таким образом, что вносимая ею разность фаз равна $+\pi/2$. Тогда суммарная разность фаз будет равна нулю для лево поляризованной волны или $+\pi$ для право поляризованной. В результате после прохождения пластинки $\lambda/4$ свет станет линейно поляризованным. Зная ориентацию выходящего линейно поляризованного луча по отношению к главным осям эллипса, можно ответить на вопрос о направлении вращения вектора поляризации в эллиптически поляризованной волне.

Отметим, что независимо от толщины пластинки, ее ориентации, состояния поляризации падающего пучка *интенсивность* пучка на выходе из пластинки *не изменится* (если поглощение и рассеяние света в пластинке пренебрежимо малы). Поэтому для определения характеристик выходного пучка необходимо использовать анализатор.

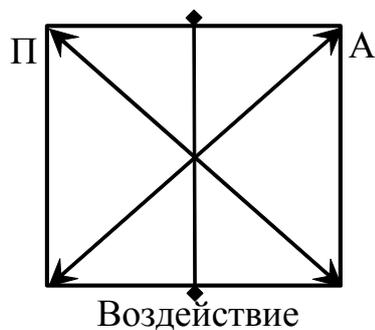
Поляризационные приборы (Бутиков, «Оптика», §4.4, Ландсберг, «Оптика», §108): призмы Николя, Волластона.

Основные анизотропные материалы:

- 1) Исландский шпат («отрицательный», $n_e=1,486$; $n_o=1,658$);
- 2) Кварц («положительный», $n_e=1,552$; $n_o=1,543$);

Искусственная анизотропия (Бутиков, «Оптика», §4.5):

Воздействие	Тип эффекта	Название эффекта
Механическое	Линейный	Фотоупругость
Электрическое	Линейный	Поккельса
	Квадратичный	Керра
Магнитное	Линейный	Фарадея
	Квадратичный	Коттон-Мутона



Обычно исследуемый объект помещают между скрещенными поляризатором Π и анализатором A , т.е. в отсутствии воздействия поле наблюдения затемнено. Анизотропия возникает именно по направлению воздействия. Для максимального эффекта воздействие осуществляется по биссектрисе угла между Π и A (на рис. пучок света распространяется перпендикулярно плоскости рисунка, т.е. «от нас» или «на нас»).

Основной материал семинара изложен в конспекте лекций по оптике по теме «Анизотропия».

Здесь только дополнительные моменты.

1. Прохождение излучения через систему поляризатор-анизотропная пластинка-анализатор.

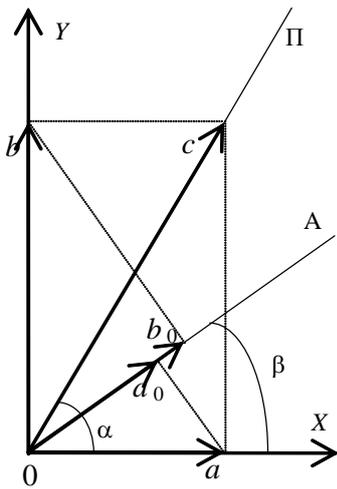


Рис.1.

Рассмотрим подробно случай, когда двулучепреломляющая пластинка, вырезанная параллельно оптической оси, расположена между поляризатором П и анализатором А. На рис.1 плоскость чертежа перпендикулярна к падающему пучку света. Пусть главные направления кристалла (оптическая ось и перпендикуляр к ней) ориентированы вдоль осей X и Y, плоскость поляризации падающего пучка (обозначена П0), задаваемая поляризатором, образует с осью X угол α , а плоскость пропускания анализатора (обозначена А0) — угол β . Пусть амплитуда линейно поляризованной волны, прошедшей через поляризатор П, равна c . Тогда соответствующие амплитуды необыкновенной (поляризована вдоль оптической оси) и обыкновенной (поляризована перпендикулярно оптической оси) волн будут соответственно

$$a = c \cdot \cos\alpha; \quad b = c \cdot \sin\alpha.$$

После прохождения пластины амплитуды волн не изменятся, но между ними появится лишь разность фаз, обусловленная разностью показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волн:

$$\delta = k \cdot \Delta s = k \cdot d \cdot (n_o - n_e).$$

Анализатор А пропустит лишь составляющие с поляризацией, ориентированной вдоль А0, в результате их амплитуды будут равны

$$a_0 = c \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta,$$

$$b_0 = c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

Эти две волны будут интерферировать, так как плоскости поляризации для них совпадают. В итоге для интенсивности результирующей волны можно записать:

$$I \sim a_0^2 + b_0^2 + 2a_0 \cdot b_0 \cdot \cos\delta = \\ = c^2 \cdot \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta + c^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta + 2c^2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\delta$$

Заменяя $\cos\delta = 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}$, получим для интенсивности прошедшего света:

$$I = I_0 \left[(\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta)^2 - 4 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2} \right] =$$

$$= I_0 \left[\cos^2(\alpha - \beta) - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2} \right].$$

(здесь I_0 - интенсивность линейно поляризованной волны после поляризатора П, $I_0 \sim c^2$).

Если $\alpha - \beta = \pi/2$ (поляризатор и анализатор скрещены), то

$$I_{\text{скрещ}} = I_0 \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}. \quad (1)$$

Если $\alpha = \beta$ (поляризатор и анализатор параллельны), то

$$I_{\text{парал}} = I_0 \cdot \left(1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2} \right). \quad (2)$$

Анализ формул (1)-(2) показывает, что при $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ (плоскость пропускания поляризатора совпадает с одним из главных направлений в пластинке) для всех длин волн $I_{\text{парал}} = I_0$ и $I_{\text{скрещ}} = 0$. Иными словами, пластинка, независимо от своей толщины, не вносит никаких изменений в состояние поляризации. Если, к примеру, источник излучает белый свет (в спектре присутствуют все длины волн видимого диапазона) источника, то наблюдаемое поле будет равномерно освещено (при параллельных П и А) или полностью затемнено (при скрещенных П и А).

Наибольший эффект от присутствия пластинки между П и А будет наблюдаться при $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ (плоскости пропускания поляризатора и анализатора делят прямой угол между главными направлениями пластинке пополам). В этом случае

$$I_{\text{парал}} \left(\alpha = \frac{\pi}{4} \right) = I_0 \cdot \left(1 - \sin^2 \frac{\delta}{2} \right),$$

$$I_{\text{скрещ}} \left(\alpha = \frac{\pi}{4} \right) = I_0 \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}.$$

На рис.2 приведены графики интенсивности прошедшего света при скрещенных (синяя кривая) и параллельных (красная кривая) П и А в зависимости от угла α . Такие графики можно получить экспериментально при вращении анизотропной пластины на 360 градусов. Из рисунка видно, что графики дополняют друг друга:

$$I_{\text{скрещ}}(\alpha) + I_{\text{парал}}(\alpha) = I_0$$

(независимо от δ).

При параллельных П и А из (2) можно найти минимальное $I_{\text{парал}, \min}$ (при $\alpha = \frac{\pi}{4}$) и максимальное $I_{\text{парал}, \max}$ (при $\alpha = 0$) значения интенсивностей:

$$I_{\text{парал, min}} = I_0 \cdot \left(1 - \sin^2 \frac{\delta}{2}\right) = I_0 \cdot \cos^2 \frac{\delta}{2};$$

$$I_{\text{парал, max}} = I_0.$$

Отношение интенсивностей позволяет экспериментально определить разность фаз δ , вносимую анизотропной пластинкой:

$$\frac{I_{\text{парал, min}}}{I_{\text{парал, max}}} = \cos^2 \frac{\delta}{2}.$$

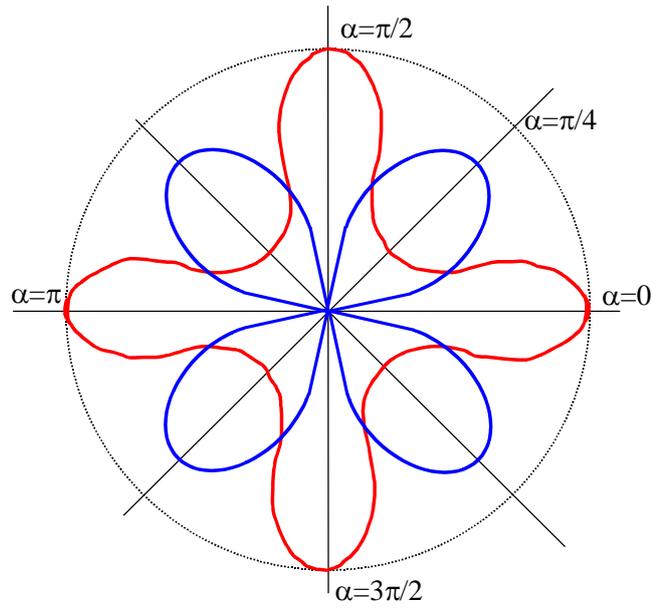


Рис. 2. Интенсивность прошедшего света при скрещенных (синяя кривая) и параллельных (красная кривая) П и А в зависимости от угла α .

Если используемая пластинка является пластинкой $\lambda/2$, то

$$\delta = \pi, \quad \cos^2 \frac{\delta}{2} = 0, \quad I_{\text{парал, min}} = 0,$$

т.е. форма обеих (красной и синей) кривых на рис. 2 будет одинаковой, но они будут повернуты на угол 45° относительно друг друга (рис. 3а).

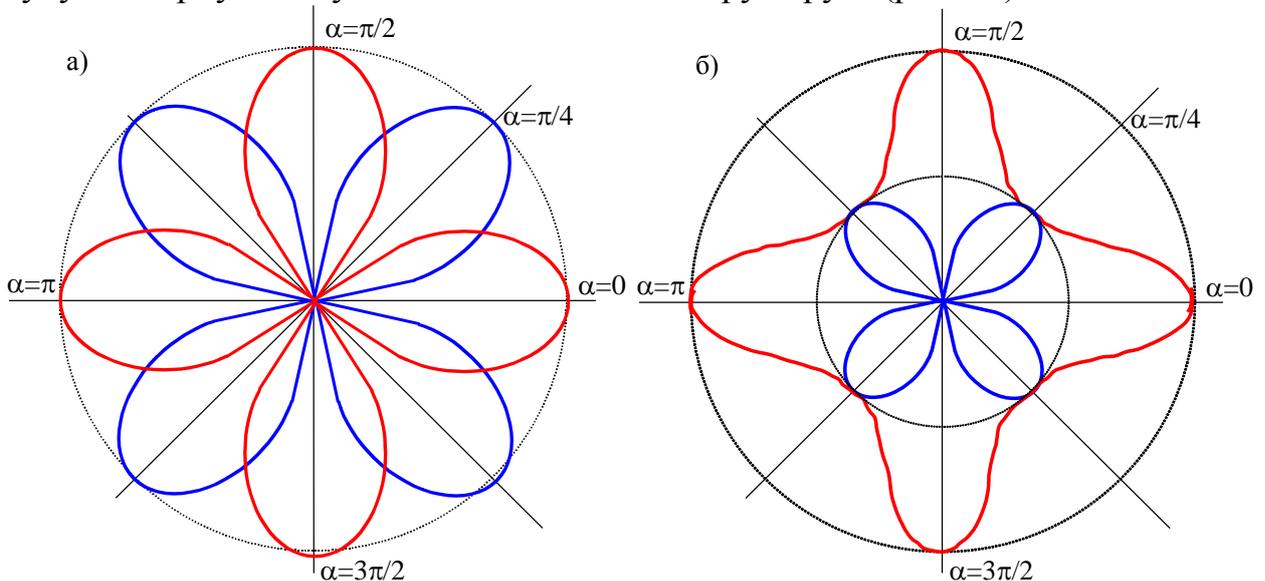


Рис. 3. Интенсивность прошедшего света при скрещенных (синяя кривая) и параллельных (красная кривая) П и А в зависимости от угла α для пластинок: а) $\lambda/2$; б) $\lambda/4$.

Если используемая пластинка является пластинкой $\lambda/4$, то

$$\delta = \pi/2, \quad \cos^2 \frac{\delta}{2} = 1/2, \quad I_{\text{парал.,min}} = 1/2 I_{\text{парал.,max}},$$

т.е. кривые (красная и синяя) будут касаться друг друга в направлениях $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ (рис. 3б).

Если пластинку $\lambda/4$ установить в одно из положений $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, то после прохождения через пластинку свет станет циркулярно поляризованным, в чем можно убедиться, если вращать анализатор на 360 градусов.

2. Напомним кратко свойства пластинок $\lambda/2$ и $\lambda/4$ для случая падения линейно поляризованной волны.

А. Пластинка $\lambda/2$.

Пластинка $\lambda/2$ обеспечивает разность хода $|\Delta| = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \dots, \frac{\lambda}{2} + m\lambda$ (или разность фаз $|\phi| = \pi + 2\pi m$).

Если угол между плоскостью поляризации ПП падающего излучения и одним из главных направлений ГН пластинки (любым!) равен α , то после прохождения пластинки волна останется линейно поляризованной (рис. 4А), той же амплитуды, а плоскость поляризации повернется на угол 2α .

В. Пластинка $\lambda/4$.

Пластинка $\lambda/4$ обеспечивает разность хода $|\Delta| = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4}, \dots, \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$ (или разность фаз $|\phi| = \frac{\pi}{2} + \pi m$).

Если угол между плоскостью поляризации ПП падающего излучения и одним из главных направлений ГН пластинки (любым!) равен α , то после прохождения пластинки волна станет эллиптически поляризованной (рис. 4А), той же интенсивности (амплитуды каждой из компонент останутся неизменными), оси эллипса будут ориентированы вдоль главных направлений, а отношение размеров осей будет равно

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Если $\alpha = 45^\circ$, то $b = a$, и прошедшая волна будет циркулярно поляризованной.

Кроме этого, пластинка $\lambda/4$ используется для преобразования эллиптически поляризованной волны в линейно поляризованную. Для этого пластину следует установить так, чтобы ее главные направления ГН (рис. 4Б) совпали по направлению с осями эллипса, тогда, в зависимости от знака вносимой пластинкой разности хода ($\pm \lambda/4$), прошедшая волна будет линейно поляризованной вдоль той или иной диагонали.

Если исходная волна циркулярно поляризована, то при любой ориентации пластинки $\lambda/4$ на выходе получится линейно поляризованная волна.

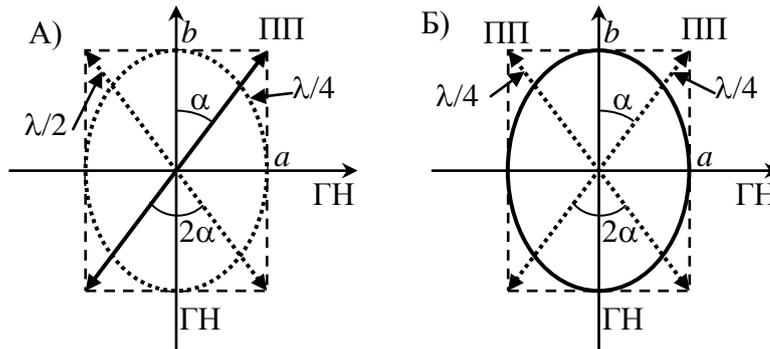


Рис. 4. Изменение состояния поляризации при прохождении:

А) линейно поляризованной волны через пластинки $\lambda/2$ и $\lambda/4$;

Б) эллиптически поляризованной волны через пластинку $\lambda/4$.

Случай падения эллиптически поляризованной волны на пластинку $\lambda/2$ разобрать самостоятельно.

Задача 2. Дана кварцевая пластинка толщиной $d=0,3$ мм, $\Delta n = 0,009$. Для каких длин волн из видимого диапазона эта пластинка будет пластинкой $\lambda/2$ или $\lambda/4$?

Решение

Разность хода, вносимая пластинкой, равна

$$|\Delta| = d \cdot \Delta n = 2,7 \text{ мкм.}$$

Для пластинки $\lambda/2$ разность хода равна

$$|\Delta| = |\Delta|_{\lambda/2} = \frac{\lambda}{2} + m\lambda = \lambda \left(m + \frac{1}{2} \right).$$

Для крайних длин волн видимого диапазона ($\lambda_{\text{фиол}}=0,4$ мкм; $\lambda_{\text{крас}}=0,7$ мкм) найдем отношения

$$\frac{|\Delta|_{\lambda/2}}{\lambda_{\text{фиол}}} = \frac{2,7}{0,4} = 6,75; \quad \frac{|\Delta|_{\lambda/2}}{\lambda_{\text{крас}}} = \frac{2,7}{0,7} = 3,9.$$

Таким образом, для $\lambda/2$ подходят следующие значения $\left(m + \frac{1}{2}\right)$:

$$1) 4,5 \quad \lambda_1 = \frac{|\Delta|_{\lambda/2}}{\left(m + \frac{1}{2}\right)} = \frac{2,7 \text{ мкм}}{4,5} \approx 0,6 \text{ мкм};$$

$$2) 5,5 \quad \lambda_2 = \frac{|\Delta|_{\lambda/2}}{\left(m + \frac{1}{2}\right)} = \frac{2,7 \text{ мкм}}{5,5} \approx 0,49 \text{ мкм};$$

$$3) 6,5 \quad \lambda_3 = \frac{|\Delta|_{\lambda/2}}{\left(m + \frac{1}{2}\right)} = \frac{2,7 \text{ мкм}}{6,5} \approx 0,415 \text{ мкм}.$$

Аналогично поступаем и для пластинки $\lambda/4$:

$$|\Delta| = |\Delta|_{\lambda/4} = \frac{\lambda}{4} + \frac{m}{2}\lambda = \lambda \left(\frac{m}{2} + \frac{1}{4}\right);$$

Таким образом, для $\lambda/4$ подходят следующие значения $\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{4}\right)$:

$$1) 4,25 \quad \lambda_1 = \frac{|\Delta|_{\lambda/4}}{\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{4}\right)} = \frac{2,7 \text{ мкм}}{4,25} \approx 0,635 \text{ мкм};$$

$$2) 4,75 \quad \lambda_2 \approx 0,57 \text{ мкм}; \quad 3) 5,25 \quad \lambda_3 \approx 0,514 \text{ мкм};$$

$$4) 5,75 \quad \lambda_4 \approx 0,474 \text{ мкм}; \quad 5) 6,25 \quad \lambda_5 \approx 0,432 \text{ мкм};$$

$$6) 6,75 \quad \lambda_6 \approx 0,4 \text{ мкм}.$$

Задача 3. Между скрещенными николями (поляризатором и анализатором) помещена пластинка кварца, вырезанная параллельно оптической оси, которая ориентирована под углом $\alpha = 45^\circ$ к главным направлениям николей. При какой минимальной толщине d_{\min} пластинки одна линия водорода $\lambda_1 = 656,3$ нм будет сильно ослаблена, а другая – $\lambda_2 = 410,2$ нм будет иметь максимальную интенсивность, если для кварца $\Delta n = 0,009$?

Решение

Так как поляризатор и анализатор скрещены, то свет по-прежнему не будет проходить через систему, если пластинка будет вносить разность хода, кратную длине волны, т.е.

$$|\Delta| = d \cdot \Delta n = m_1 \lambda_1,$$

где m_1 – целое число.

Аналогично, интенсивность будет максимальной для пластинки $\lambda/2$, которая повернет плоскость поляризации на угол $2\alpha = 90^\circ$:

$$|\Delta| = d \cdot \Delta n = \left(m_2 + \frac{1}{2}\right) \lambda_2,$$

где m_2 – целое число, в общем случае не равное m_1 .

Таким образом, для решения задачи надо подобрать целые числа m_1 и m_2 , удовлетворяющие уравнению:

$$m_1 \lambda_1 = \left(m_2 + \frac{1}{2}\right) \lambda_2.$$

Перебирая возможные значения, получим $m_1=4$ и $m_2=6$, откуда

$$d = \frac{m_1 \lambda_1}{\Delta n} = \frac{\left(m_2 + \frac{1}{2}\right) \lambda_2}{\Delta n} \approx 0,29 \text{ мм.}$$

Оптические явления на границе раздела диэлектриков

Так как свет представляет собой электромагнитную волну, то при переходе границы раздела должны выполняться граничные условия для электрической и магнитной компонент поля:

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \quad H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$$

Кроме этого, в бегущей волне существует связь между амплитудами E и B :

$$E = B \cdot v = B \cdot \frac{c}{n},$$

где v и n – соответственно скорость волны в среде и показатель преломления среды. Если магнитные свойства обеих сред одинаковы, то

$$H \sim nE.$$

Рассмотрим сначала случай **нормального падения** света из среды с показателем преломления n_1 в среду с показателем преломления n_2 . Пусть амплитуда падающей волны равна $E_{\text{пад}}$, отраженной волны $E_{\text{отр}}$, а преломленной $E_{\text{пр}}$ (аналогичные обозначения и для H). Тогда:

$$E_{\text{пад}} + E_{\text{отр}} = E_{\text{пр}}, \quad H_{\text{пад}} + H_{\text{отр}} = H_{\text{пр}}.$$

Второе уравнение запишется в виде:

$$n_1(E_{\text{пад}} - E_{\text{отр}}) = n_2 E_{\text{пр}},$$

(знак «минус» перед $E_{\text{отр}}$ учитывает, что одна из компонент поля E или H должна поменять фазу на 180 градусов). Отсюда легко получить соотношения для коэффициентов

отражения $r = \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}}$ и преломления $t = \frac{E_{\text{пр}}}{E_{\text{пад}}}$ по амплитуде:

$$r = \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad t = \frac{E_{\text{пр}}}{E_{\text{пад}}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}.$$

Теперь разберемся с энергетическими характеристиками. Кажется бы, мы привыкли, что энергия пропорциональна квадрату амплитуды поля, поэтому коэффициенты отражения R и преломления T по энергии должны находиться по простым формулам:

$$R = r^2; \quad T = t^2 \quad (\text{аккуратно, это неточные формулы!}).$$

Но прямой подстановкой в формулы для нормального падения нетрудно убедиться, что $R + T \neq 1$, т.е. нарушается закон сохранения энергии!!! Уточним, что есть две энергетические характеристики: объемная плотность энергии $w \sim ED \sim n^2 E^2$ и плотность потока энергии $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}] \sim nE^2$. Видим, что в формулы входит показатель преломления n , что существенно при переходе света из одной среды в другую. Но он входит в разной степени: во второй и в первой. Что же выбрать???

Поскольку в эксперименте измеряется интенсивность света I (равная среднему по времени значению вектора Умова-Пойнтинга $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$), то для определения коэффициентов отражения R и преломления T по энергии можно поступить следующим образом: выберем единичную площадку на границе раздела и сравним энергии падающей, преломленной и отраженной волн, переносимых через эту площадку в единицу времени. По закону сохранения энергии для нормальных компонент вектора Умова-Пойнтинга:

$$S_{n,\text{пад}} = S_{n,\text{отр}} + S_{n,\text{пр}}.$$

Так как амплитуды электрической $|\vec{E}|$ и магнитной $|\vec{H}|$ составляющих бегущей волны связаны соотношением $n \cdot |\vec{E}| \sim |\vec{H}|$, то для коэффициентов отражения и преломления по энергии получим:

$$R = \frac{S_{n,omp}}{S_{n,над}} = r^2; \quad T = \frac{S_{n,np}}{S_{n,над}} = \frac{n_2 \cdot \cos\theta_2}{n_1 \cdot \cos\theta_1} \cdot t^2, \quad (20)$$

где θ_1, θ_2 - углы падения и преломления соответственно.

В случае нормального падения $\cos\theta_1 = \cos\theta_2 = 1$ и

$$R = \frac{S_{n,omp}}{S_{n,над}} = \frac{n_1 E_{omp}^2}{n_1 E_{над}^2} = r^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2,$$

$$T = \frac{S_{n,np}}{S_{n,над}} = \frac{n_2 E_{np}^2}{n_1 E_{над}^2} = \frac{n_2}{n_1} t^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

(заметим, что $R + T = 1$, т.е. закон сохранения энергии справедлив).

Если $n_1 - n_2 < 0$ (свет падает из менее оптически плотной среды в более оптически плотную) $r < 0$, что означает, что фаза E -компоненты поля отраженной волны изменяет свою фазу на 180 градусов. Во всех остальных случаях скачка фазы нет.

Из закона сохранения энергии, записанного в виде:

$$S_{n,над} = S_{n,omp} + S_{n,np}$$

и из соотношения $I = \langle S \rangle$ следует:

$$I_{над} \cdot \cos\theta_1 = I_{omp} \cdot \cos\theta_1 + I_{np} \cdot \cos\theta_2,$$

или

$$I_{над} = I_{omp} + I_{np} \cdot \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$$

(несколько неожиданная формула, не правда ли?).

Общий случай¹. Пусть плоская линейно – поляризованная световая волна

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_1 e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r})} \quad (2)$$

падает на плоскую границу раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 под углом θ_1 (угол между волновым вектором \vec{k}_1 и нормалью к границе раздела). Плоскость поляризации падающей волны (в которой лежат векторы \vec{E}_0 и \vec{k}_0) ориентирована под углом α_1 (азимут поляризации, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha_1 \leq \frac{\pi}{2}$) к плоскости падения (в которой лежат вектор \vec{k}_1 и нормаль \vec{N}), так что:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_1^s + \vec{E}_1^p, \quad E_1^s = E_1 \sin\alpha_1, \quad E_1^p = E_1 \cos\alpha_1$$

(компонента \vec{E}_1^s перпендикулярна к плоскости падения, компонента \vec{E}_1^p – лежит в плоскости падения).

В общем случае падающая волна (2) порождает две другие волны (см. рис. 1 и 2): отраженную –

$$\vec{E}_0(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_0 \vec{r})} \quad (3)$$

и преломленную –

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_2 e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r})}, \quad (4)$$

¹ Внимание: обозначения поменялись!

причем векторы \vec{k}_1 , \vec{k}_0 и \vec{k}_2 лежат в одной плоскости с нормалью к поверхности раздела (ось z). В силу непрерывности тангенциальных составляющих векторов \vec{E} и \vec{H} в любой точке на границе двух сред (т.е., при любом x) следует, что:

$$k_{1x} = k_{0x} = k_{2x}. \quad (5)$$

С учетом (1) из (5) следует, что:

$$\theta_1 = \theta_0 \text{ (закон отражения)} \quad (6)$$

и

$$n_1 \cdot \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2 \text{ (закон преломления)}. \quad (7)$$

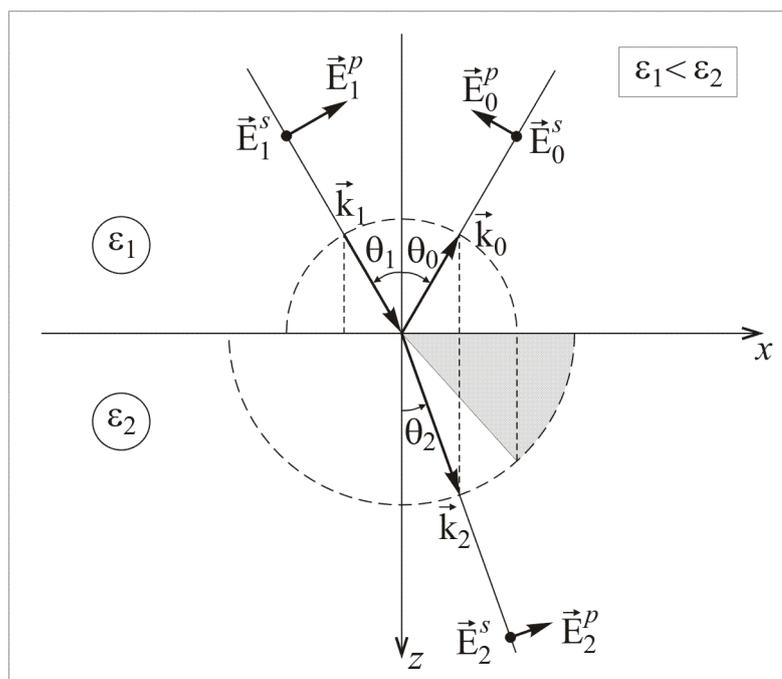


Рис. 1.

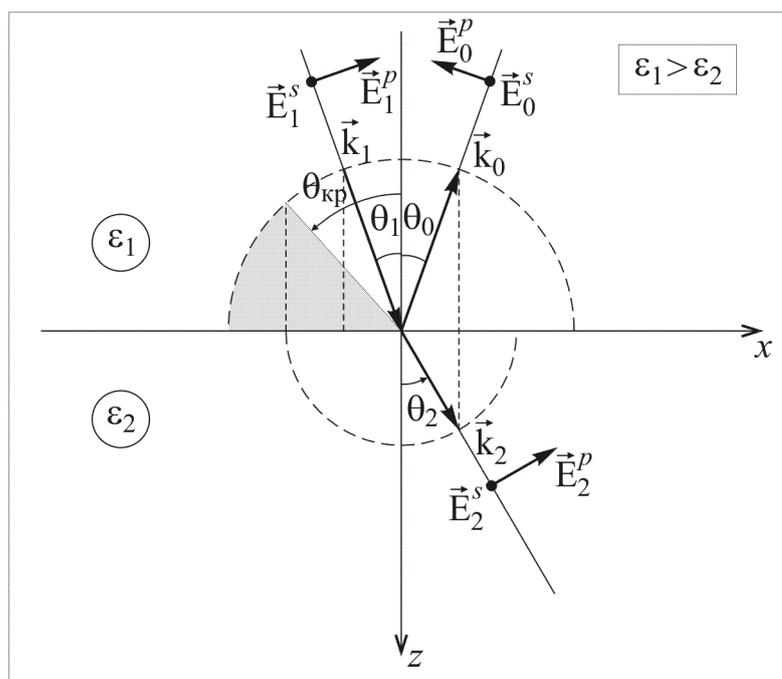


Рис. 2.

Если волна (2) падает из оптически менее плотной среды ($\varepsilon_1 < \varepsilon_2$), то при любом угле падения θ_1 ($0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$) во второй среде распространяется преломленная волна (4).

Если же свет падает из оптически более плотной среды ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2$), то при углах $\theta_1 \geq \theta_{\text{кр}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$ имеет место полное внутреннее отражение (нет преломления волн).

Так, для границы «стекло – воздух» ($n_1 = 1,5$; $n_2 = 1$) критический угол (угол полного внутреннего отражения) $\theta_{\text{кр}} \approx 41^\circ$.

Соотношения между амплитудами \vec{E}_1 , \vec{E}_0 и \vec{E}_2 при различных θ_1 , ε_1 и ε_2 называют формулами Френеля:

$$r_s \equiv \frac{E_0^s}{E_1^s} = \frac{n_1 \cdot \cos \theta_1 - n_2 \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cdot \cos \theta_1 + n_2 \cdot \cos \theta_2}, \quad (12)$$

$$t_s \equiv \frac{E_2^s}{E_1^s} = \frac{2n_1 \cdot \cos \theta_1}{n_1 \cdot \cos \theta_1 + n_2 \cdot \cos \theta_2}, \quad (13)$$

$$r_p \equiv \frac{E_0^p}{E_1^p} = \frac{n_2 \cdot \cos \theta_1 - n_1 \cdot \cos \theta_2}{n_2 \cdot \cos \theta_1 + n_1 \cdot \cos \theta_2}, \quad (14)$$

$$t_p \equiv \frac{E_2^p}{E_1^p} = \frac{2n_2 \cdot \cos \theta_1}{n_2 \cdot \cos \theta_1 + n_1 \cdot \cos \theta_2}. \quad (15)$$

Наконец, после тригонометрических преобразований (с учетом закона преломления):

$$r_s = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (16)$$

$$t_s = \frac{2 \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (17)$$

$$r_p = \frac{\text{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\text{tg}(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (18)$$

$$t_p = \frac{2 \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (19)$$

Примерные графики зависимостей (12) – (15) приведены на рис. 3 ($n_1 < n_2$) и рис. 4 ($n_1 > n_2$).

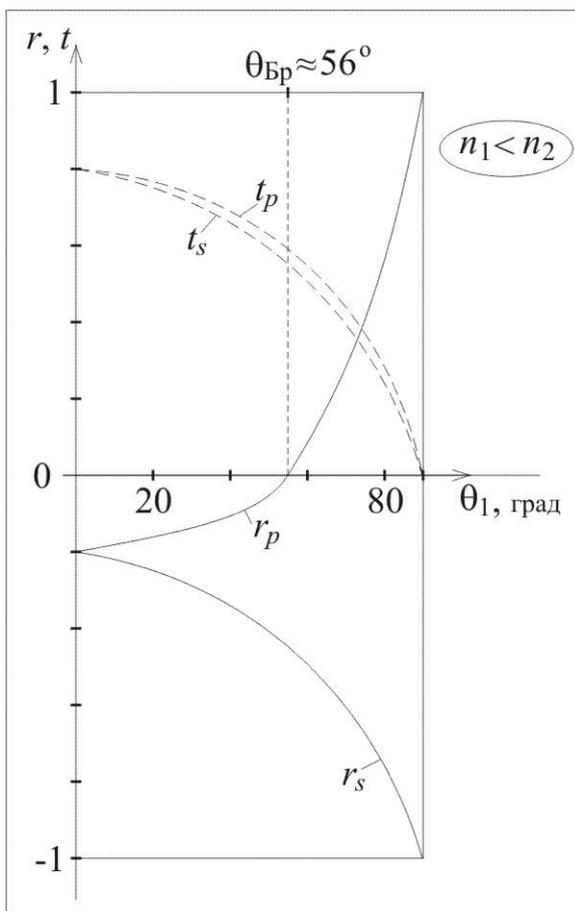


Рис. 3

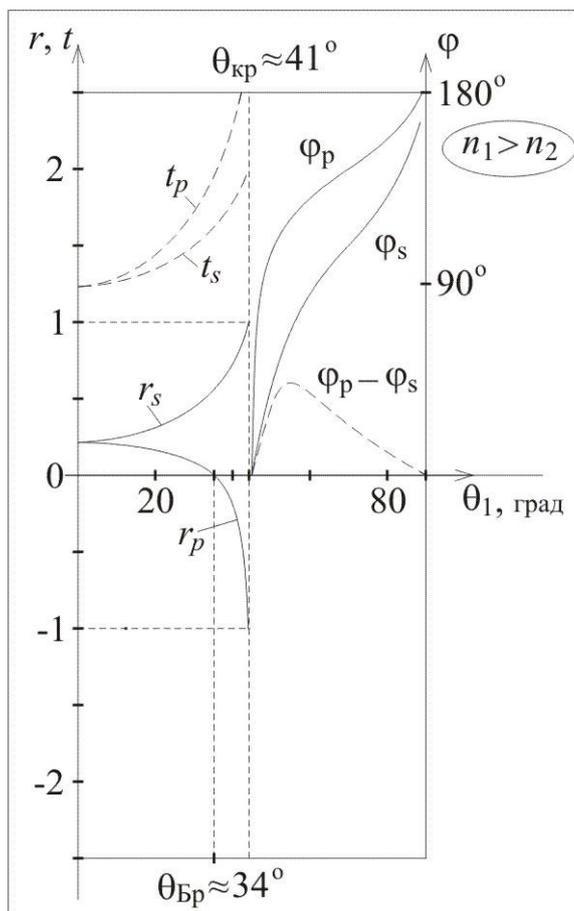


Рис. 4

При $\theta_1 = \arctg \frac{n_2}{n_1} \equiv \theta_{бр}$ ($\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$) p -компонента не испытывает отражения. Угол $\theta_{бр}$ называют углом Брюстера или углом полной поляризации отраженного света. Например, для границы «воздух – стекло» $\theta_{бр} \approx 56^\circ$.

По определению, **степень поляризации** преломленного света определяется как:

$$\Delta_2 = \frac{I_2^s - I_2^p}{I_2^s + I_2^p}$$

(аналогично и для отраженного). Так как коэффициенты отражения и преломления для разных поляризаций различны, то и степень поляризации будет изменяться. В частности, если естественный свет (степень поляризации равна нулю) падает на пластинку под углом Брюстера., то у отраженной волны $\Delta_0 = 1$ (нет p -компоненты), а у преломленной $\Delta_2 \neq 0$. Если установить несколько пластинок под углом Брюстера (**стопа Столетова**), то степень поляризации прошедшей волны будет возрастать.

Для нахождения коэффициентов отражения R и преломления T по энергии поступаем следующим образом: выбираем площадку единичной площади на границе раздела и сопоставляем энергии падающей, преломленной и отраженной волн, переносимых через эту площадку в единицу времени. Иными словами, закон сохранения энергии выражается через нормальные компоненты вектора Умова-Пойнтинга:

$$S_{n0} = S_{n1} + S_{n2},$$

откуда

$$R = \frac{S_{n1}}{S_{n0}} = r^2; \quad T = \frac{S_{n2}}{S_{n0}} = \frac{n_2 \cdot \cos \theta_2}{n_1 \cdot \cos \theta_1} \cdot t^2.$$

Подставляя в данные соотношения формулы Френеля для s - и p -компонент, получим для каждой из них

$$R + T = 1.$$

Пример. Волна интенсивностью I_0 , линейно поляризованная в плоскости падения (p -поляризация), падает на границу раздела воздух-диэлектрик с показателем преломления n под углом Брюстера. Найти интенсивность преломленной волны.

При падении под углом Брюстера коэффициент отражения r_p для p -поляризации равен нулю, т.е. $I_{omp} = 0$. Кроме того, $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$. «Неожиданная» формула

$$I_{nad} = I_{omp} + I_{np} \cdot \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$$

запишется в виде:

$$I_{np} = I_{nad} \cdot \frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1} = \frac{I_{nad}}{\operatorname{tg}\theta_1} = \frac{I_{nad}}{n},$$

т.е. энергия волны проходит через границу без потерь, а интенсивность уменьшается в n раз! Это связано с увеличением в n раз поперечного сечения прошедшего пучка по сравнению с падающим. Напомним, что интенсивность «говорит» об энергии, прошедшей в единицу времени через единичное поперечное сечение. Та же самая энергия теперь проходит через большее сечение, следовательно, интенсивность уменьшается.

Если же аналогичная волна будет падать под углом Брюстера из более оптически плотной среды, то интенсивность вырастет в n раз!

Полное внутреннее отражение.

Так как

$$k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2} = \sqrt{k_2^2 - k_{1x}^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_2^2 - (n_1 \cdot \sin\theta_1)^2}, \quad (20)$$

то при $\theta_1 > \theta_{кр}$:

$$n_1 \cdot \sin\theta_1 > n_2,$$

$$k_{2z} = \pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{(n_1 \cdot \sin\theta_1)^2 - n_2^2} = \pm ik_{2z}''', \quad (21)$$

и уравнение преломленной волны с волновым вектором $\vec{k}_2 = k_{1x}\vec{e}_x - ik_{2z}'''\vec{e}_z$ имеет вид:

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_2 e^{-k_{2z}'''z} e^{i(\omega t - k_{1x}x)}. \quad (22)$$

(Знак «+» в (21) отброшен по физическим соображениям.)

Таким образом, при полном внутреннем отражении преломленная волна $\vec{E}_2(\vec{r}, t)$ – это плоская неоднородная волна (22), бегущая вдоль оси x с фазовой скоростью $v_{2x} = \frac{\omega}{k_{1x}}$.

Амплитуда этой волны экспоненциально затухает вдоль оси z . Глубина Δz проникновения света в среду с $n_2 < n_1$, соответствующая уменьшению амплитуды в e раз:

$$\Delta z = \frac{1}{k_{2z}'''} = \frac{c}{\omega \sqrt{(n_1 \cdot \sin\theta_1)^2 - n_2^2}}. \quad (23)$$

При полном внутреннем отражении преломленная волна существует, но она проникает вглубь на очень маленькие расстояния, при этом энергия не теряется (см. ниже).

Так как $n_1 \cdot \sin\theta_1 = n_2 \cdot \sin\theta_2$, то

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2\theta_2} = \frac{1}{n_2} \sqrt{n_2^2 - (n_1 \cdot \sin\theta_1)^2} = \frac{i}{n_2} \sqrt{(n_1 \cdot \sin\theta_1)^2 - n_2^2}$$

Тогда структуры формул (12) и (14) примут вид:

$$r_s = \frac{a_1 - ia_2}{a_1 + ia_2} = e^{i\varphi_s}, \quad (24)$$

$$r_p = \frac{b_1 - ib_2}{b_1 + ib_2} = e^{i\varphi_p}, \quad (25)$$

т.е. амплитуда отраженной волны равна амплитуде падающей:

$$|r_s| = |r_p| = 1,$$

однако между отраженной и падающей волнами на границе возникает разность фаз:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2} = \frac{k_{2z}''}{k_{1z}} = \frac{\sqrt{(n_1 \cdot \sin \theta_1)^2 - n_2^2}}{n_1 \cdot \cos \theta_1}, \quad (26)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_p}{2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2} = \frac{n_1 \sqrt{(n_1 \cdot \sin \theta_1)^2 - n_2^2}}{n_2^2 \cdot \cos \theta_1}. \quad (27)$$

В частности, для границы «воздух – стекло» при угле падения $\theta_1 \approx 45^\circ$ разность фаз $\varphi_s - \varphi_p \approx 40^\circ$. При двукратном полном внутреннем отражении разность фаз будет близка к $\pi/2$, что позволяет преобразовать линейно поляризованный свет в свет с круговой поляризацией.

Основной материал семинара изложен в конспекте лекций по оптике для ФНМ по теме «Отражение и преломление света».

Здесь только дополнительные моменты.

Задача 1. Получить формулы Френеля для угла Брюстера исходя из граничных условий.

Решение.

Запоминать формулы Френеля – занятие неблагодарное. Выводить эти формулы – занятие не менее неблагодарное. Но для особых случаев их все-таки можно вывести.

Для случая нормального падения эти формулы были получены в конспекте лекций. Здесь мы рассмотрим случай падения плоской волны под углом Брюстера для различных состояний поляризации.

Напомним некоторые формулы.

Граничные условия:

$$E_{\tau,над} + E_{\tau,отр} = E_{\tau,прел} \quad (1)$$

$$H_{\tau,над} + H_{\tau,отр} = H_{\tau,прел} \quad (2)$$

Связь H и E в плоской волне:

$$H \sim nE \quad (3)$$

Угол Брюстера:

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{Бр,над}} = \frac{n_2}{n_1} \quad , \text{ или } \quad \varphi_{\text{Бр,над}} + \varphi_{\text{Бр,прел}} = \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

1) Р-поляризация.

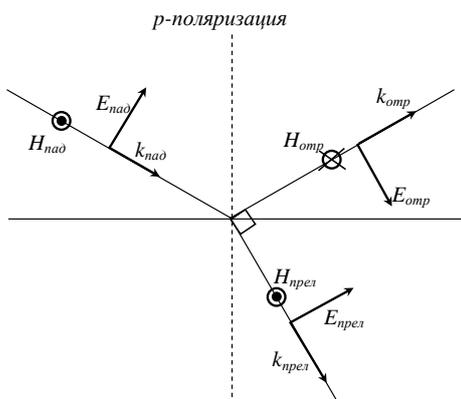


Рис. 1

Выберем направления векторов \vec{E} во всех волнах таким, чтобы проекция на горизонтальную ось была положительной (рис. 1). Тогда с учетом правой тройки векторов \vec{E} , \vec{H} и \vec{k} направления векторов \vec{H} указаны на рисунке.

Записываем граничные условия (индекс p -поляризации пока опускаем):

$$E_{над} \cdot \cos \varphi_{над} + E_{отр} \cdot \cos \varphi_{над} = E_{прел} \cdot \cos \varphi_{прел}$$

$$H_{над} - H_{отр} = H_{прел}$$

Используя (3)-(4), получим:

$$E_{над} \cdot \cos \varphi_{над} + E_{отр} \cdot \cos \varphi_{над} = E_{прел} \cdot \sin \varphi_{прел} \quad (5)$$

$$n_1 E_{над} - n_1 E_{отр} = n_2 E_{прел} \quad (6)$$

Делим (5) на $\cos \varphi_{над}$ и с учетом (4) получаем:

$$E_{над} + E_{отр} = E_{прел} \cdot \operatorname{tg} \varphi_{прел}$$

$$n_1 E_{над} + n_1 E_{отр} = n_2 E_{прел} \quad (5a)$$

Сравнивая (5а) и (6), видим, что

$$E_{omp} = 0,$$

что и является характерным свойством падения под углом Брюстера. Тогда (6) имеет вид:

$$n_1 E_{nad} = n_2 E_{nrel}$$

В итоге получаем:

$$r_{Br}^p = \frac{E_{omp}}{E_{nad}} = 0; \quad t_{Br}^p = \frac{E_{nrel}}{E_{nad}} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Обратим внимание, что при падении волны из более оптически плотной среды в менее оптически плотную ($n_1 > n_2$) коэффициент $t_{Br}^p = \frac{n_1}{n_2} > 1$, т.е. амплитуда преломленной волны больше амплитуды падающей! Но с точки зрения закона сохранения энергии (см. материал лекций) все нормально.

2) S-поляризация.

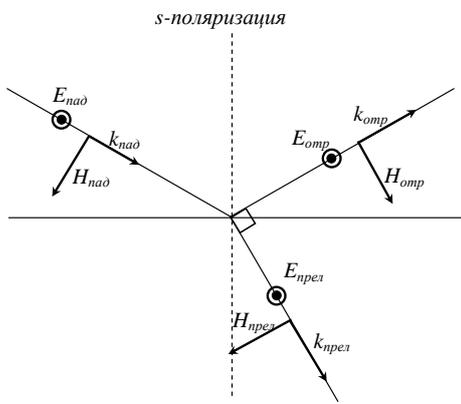


Рис. 2.

Выберем направления векторов \vec{E} во всех волнах на нас (рис. 2.). Тогда с учетом правой тройки векторов \vec{E} , \vec{H} и \vec{k} направления векторов \vec{H} указаны на рисунке.

Записываем граничные условия (индекс s-поляризации пока опускаем):

$$E_{nad} + E_{omp} = E_{nrel} \quad (7)$$

$$-H_{nad} \cdot \cos \varphi_{nad} + H_{omp} \cdot \cos \varphi_{nad} = -H_{nrel} \cdot \cos \varphi_{nrel}$$

Используя (3)-(4), получим:

$$-n_1 E_{nad} \cdot \cos \varphi_{nad} + n_1 E_{omp} \cdot \cos \varphi_{nad} = -n_2 E_{nrel} \cdot \sin \varphi_{nrel} \quad (8)$$

Делим (8) на $\cos \varphi_{nad}$ и с учетом (4) получаем:

$$-n_1^2 E_{nad} + n_1^2 E_{omp} = -n_2^2 E_{nrel} \quad (8a)$$

Из решения системы (7)-(8а), получим:

$$r_{Br}^s = \frac{E_{omp}}{E_{nad}} = \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2};$$

$$t_{Br}^s = \frac{E_{nrel}}{E_{nad}} = \frac{2n_1^2}{n_1^2 + n_2^2}.$$

Вновь обратим внимание, что при падении волны из более оптически плотной среды в менее оптически плотную ($n_1 > n_2$) коэффициент $t_{Br}^s > 1$, т.е. амплитуда преломленной волны больше амплитуды падающей! Но с точки зрения закона сохранения энергии (см. материал лекций) все нормально.

Задача 5.181 (Иродов, 1988 год) Плоский пучок естественного света с интенсивностью I_0 падает под углом Брюстера на поверхность воды. При этом $\rho=0,039$ светового потока отражается. Найти интенсивность преломленного пучка.

Решение.

Прежде всего, вспомним выражение для угла Брюстера. При падении света под таким углом p -компонента не отражается, а полностью проходит (напомним, что p -компонента поляризована в плоскости падения). Для угла Брюстера сумма углов падения и преломления равна 90 градусам, или $\pi/2$:

$$\varphi_{Br,na\delta} + \varphi_{Br,npe\lambda} = \pi/2.$$

Из закона преломления

$$\sin \varphi_{na\delta} = n \cdot \sin \varphi_{npe\lambda}$$

следует:

$$\operatorname{tg} \varphi_{Br,na\delta} = n.$$

Вспомним закон сохранения энергии при отражении-преломлении. Он записывается в виде:

$$S_{n,na\delta} = S_{n,omp} + S_{n,np},$$

где S_n - нормальная компонента вектора Умова-Пойнтинга для каждой из волн. Подобная запись означает, что энергия, упавшая в единицу времени на единичную площадку, полностью уходит от этой площадки с отраженным и преломленным пучками. Так как интенсивность есть среднее значение модуля вектора Умова-Пойнтинга $I = \langle S \rangle$, то отсюда следует:

$$I_{na\delta} \cdot \cos \varphi_{na\delta} = I_{omp} \cdot \cos \varphi_{omp} + I_{np} \cdot \cos \varphi_{npe\lambda},$$

или

$$I_{na\delta} = I_{omp} + I_{np} \cdot \frac{\cos \varphi_{npe\lambda}}{\cos \varphi_{na\delta}} \quad (1)$$

(несколько неожиданная формула, не правда ли?).

По условию

$$I_{omp} = \rho \cdot I_{na\delta}.$$

Так как для угла Брюстера

$$\cos \varphi_{Br,npe\lambda} = \sin \varphi_{Br,na\delta},$$

то (1) для такого угла имеет вид:

$$I_{na\delta} = I_{omp} + I_{np} \cdot n \quad (1a)$$

В результате

$$I_{np} = \frac{I_{na\delta} - I_{omp}}{n} = \frac{I_{na\delta}(1 - \rho)}{n}.$$

Дом. задание: 5.180, 181, 184, 187, 188.

Дисперсия света.

1. Известно, что для однородной линейной изотропной ($\epsilon = \text{const}$) немагнитной ($\mu = 1$) среды в отсутствие зарядов и токов ($\rho = 0$; $\mathbf{j} = 0$) из уравнений Максвелла можно получить волновое уравнение в виде:

$$\Delta \mathbf{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

(аналогичное уравнение можно получить и для магнитных векторов \mathbf{B} или \mathbf{H}).

Решение волнового уравнения ищем в виде плоской монохроматической волны

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}. \quad (1)$$

В результате подстановки (1) в волновое уравнение получаем, что частота ω и модуль волнового вектора $k = |\mathbf{k}|$ должны удовлетворять **дисперсионному уравнению**:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon, \quad (2)$$

где $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \approx 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

Среда называется **диспергирующей**, если диэлектрическая проницаемость среды зависит от частоты ω волны

$$\epsilon = \epsilon(\omega)$$

(напомним, что при переходе из одной среды в другую частота ω волны остается неизменной). В диспергирующих средах фазовая скорость распространения волн зависит от частоты ω . Дисперсия объясняется тем, что среда под действием электрического поля волны поляризуется по-разному для различных частот (см. ниже).

Диэлектрическая проницаемость среды ϵ – в общем случае комплексная величина (см. ниже):

$$\epsilon = \epsilon' + i\epsilon'' \quad (3)$$

Так как $D = \epsilon_0 \epsilon E$, то модуль

$$|\epsilon| = \sqrt{(\epsilon')^2 + (\epsilon'')^2} \quad (4)$$

определяет амплитуду электрической индукции D , а

$$\text{tg} \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \quad (5)$$

характеризует разность фаз между D и E (δ – так называемый угол диэлектрических потерь).

Для прозрачных (непоглощающих) сред ϵ - величина действительная ($\epsilon'' = 0$), тогда

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon} = \frac{\omega}{c} \cdot n(\omega),$$

где $n(\omega)$ - показатель преломления среды. Зависимость показателя преломления от частоты также называют **дисперсией**. Для таких сред из (1) следует формула для фазовой скорости

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)}.$$

2. В соответствии с (2) и (3) волновой вектор \mathbf{k} можно представить в виде:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}'' \quad (6)$$

Подставляя (6) в (1), для уравнения плоской волны получаем:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{k}''\mathbf{r}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k}'\mathbf{r})} \quad (7)$$

Таким образом, в направлении \mathbf{k}' происходит наибо́льшее изменение фазы волны ($\varphi = \omega t - \mathbf{k}'\mathbf{r} + \varphi_0$), а в направлении \mathbf{k}'' – уменьшение амплитуды. Таким образом, ненулевое значение \mathbf{k}'' свидетельствует о наличии поглощения в среде.

3. Свойства среды в поле световой волны принято характеризовать с помощью показателя преломления n :

$$k' = \frac{\omega}{c}n, \quad (8)$$

от которого зависит фазовая скорость волны:

$$\mathbf{v} = \frac{\omega}{k'}\mathbf{e}_{k'} = \frac{c}{n}\mathbf{e}_{k'}, \quad (9)$$

и показателя поглощения (коэффициента экстинкции) α :

$$k'' = \frac{\omega}{c}\alpha. \quad (10)$$

Поскольку интенсивность I волны в среде пропорциональна квадрату ее амплитуды, то при $\alpha > 0$:

$$I = I_0 e^{-\alpha r e_{k'}}, \quad (11)$$

где $\alpha = 2\frac{\omega}{c}\alpha$ – коэффициент поглощения, не зависящий от интенсивности световой волны (закон Бугера).

В соответствии с (2, 3, 6, 8 и 9) комплексный показатель преломления \tilde{n} и проницаемость ε связаны соотношением:

$$\tilde{n} = n + i\alpha = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon' + i\varepsilon''}. \quad (12)$$

Поэтому:

$$n^2 = \frac{1}{2}\varepsilon' \cdot (\sqrt{1 + \text{tg}^2\delta} + 1), \quad (13)$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\varepsilon' \cdot (\sqrt{1 + \text{tg}^2\delta} - 1). \quad (14)$$

Если $\text{tg}^2\delta \ll 1$ (среда – диэлектрик), то $n \approx \sqrt{\varepsilon'}$, $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon'}\text{tg}\delta$. Если $\text{tg}^2\delta \gg 1$ (среда – проводник), то $n \approx \alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{2}}\text{tg}\delta$.

4. Совокупность явлений, обусловленных зависимостью характеристик среды n и α от частоты ω световой волны, получила название «дисперсии света».

Основные закономерности распространения света в среде зачастую удается описать с помощью простой классической модели среды как ансамбля гармонических осцилляторов (модель Лоренца).

В рамках этой модели среда представляется как совокупность не взаимодействующих друг с другом атомов. Каждый из одиночных атомов есть положительно заряженное ядро, тесно связанные с ним внутренние электроны и один единственный внешний электрон, называемый **оптическим**. Запишем уравнение движения оптического электрона одиночного атома в электрическом поле волны (влиянием магнитного поля пренебрегаем):

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\Gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = -\left(\frac{e}{m}\right)\vec{\mathbf{E}}(t).$$

Данное соотношение является хорошо знакомым уравнением вынужденных колебаний.

Если $\vec{\mathbf{E}}(t) = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{-i\omega t}$, то ищем решение в виде $\vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{r}}_0 e^{-i\omega t}$, получаем:

$$\vec{r}_0(t) = \frac{-e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\Gamma\omega} \vec{E}_0$$

Так как дипольный момент $\vec{p} = -e\vec{r}_0$, поляризованность $\vec{P} = N\vec{p}$, где N – концентрация электронов, и $\vec{P} = \chi(\omega)\epsilon_0\vec{E} = (\epsilon(\omega) - 1)\epsilon_0\vec{E}$, то в итоге зависимость линейной оптической восприимчивости χ среды от частоты ω имеет вид:

$$\chi(\omega) = \epsilon(\omega) - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\Gamma\omega}, \quad (15)$$

где ω_0 и Γ – собственная частота и коэффициент затухания колебаний осцилляторов (как правило, $\Gamma \ll \omega_0$), ω_p – так называемая **плазменная частота**:

$$\omega_p^2 = \frac{N \cdot e^2}{\epsilon_0 m}, \quad (16)$$

e и m – заряд и масса осцилляторов, N – их концентрация. Выражение (15) носит название **закона дисперсии**. Причины названия «плазменная частота» приводятся ниже.

Оценки для плазменной частоты.

Для конденсированных сред: $N \approx 10^{28} \text{ м}^{-3}$; $\omega_p \approx 5,6 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$; $\lambda_p \approx 0,33 \text{ мкм}$ - ультрафиолет.

Для разреженных сред: $N \approx 10^{25} \text{ м}^{-3}$; $\omega_p \approx 1,7 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$; $\lambda_p \approx 10,5 \text{ мкм}$ - инфракрасный.

Анализ закона дисперсии (15) вследствие его громоздкости – непростая задача, поэтому рассмотрим некоторые частные случаи.

А. Для разреженных газов вблизи резонансной частоты ($|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$) можно считать, что:

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega) \text{ и } \omega \approx \omega_0,$$

откуда из (15) следует:

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega) &= 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0(\omega_0 - \omega) - 2i\Gamma\omega_0} = 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0} \cdot \frac{1}{(\omega_0 - \omega) - i\Gamma} = 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0} \cdot \frac{(\omega_0 - \omega) + i\Gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2} \\ n(\omega) &= \text{Re} \sqrt{\epsilon(\omega)} \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{4\omega_0} \cdot \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\kappa(\omega) = \text{Im} \sqrt{\epsilon(\omega)} = \frac{\omega_p^2}{4\omega_0} \cdot \frac{\Gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2}$$

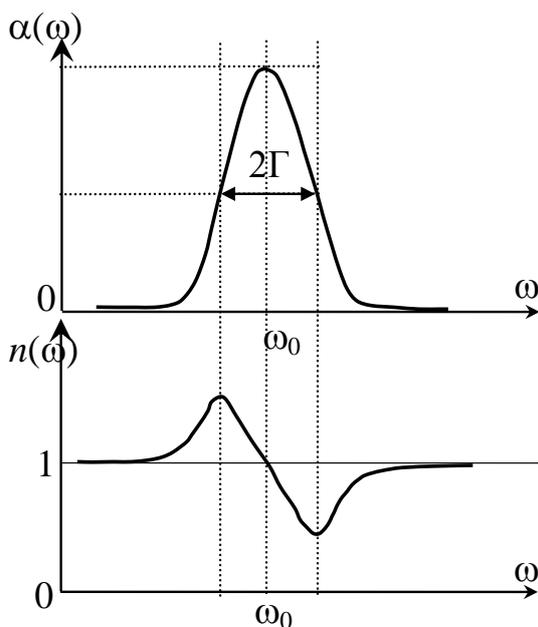
$$\alpha(\omega) = 2 \frac{\omega}{c} \kappa. \quad (18)$$

Графики зависимостей $\alpha(\omega)$ и $n(\omega)$ приведены на рис. 1.

Из рисунка видно, что поглощение $\alpha(\omega)$ велико только в узкой области вблизи собственной частоты ω_0 шириной $\Delta\omega \approx 2\Gamma \ll \omega_0$, называемой полосой поглощения. В

этой полосе для показателя преломления $\frac{\partial n}{\partial \omega} < 0$ – область **аномальной дисперсии**; вне

полосы поглощения $\frac{\partial n}{\partial \omega} > 0$ – область **нормальной дисперсии** (пояснения – см. ниже).

Рис. 1. Зависимости α и n от частоты ω

Б. Если $\omega \ll \omega_0$ (частота падающей волны существенно меньше частоты собственных колебаний) и затухание мало, то в соответствии с (15):

$$\varepsilon(\omega) - 1 \approx \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} \approx \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right);$$

$$n - 1 \approx \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right) \quad (19)$$

– дисперсионная формула Коши, которая хорошо описывает дисперсию газов в видимой и ИК областях спектра.

В. Если в среде присутствуют несколько видов гармонических осцилляторов (со своими N_j, m_j, q_j, Γ_j), то формула (15) принимает вид:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \omega_p^2 \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - 2i\Gamma_j\omega} \quad (15a)$$

где $f_j = \frac{N_j \cdot q_j^2}{\varepsilon_0 m_j} / \frac{N \cdot e^2}{\varepsilon_0 m}$ – сила j -го осциллятора, которая определяется экспериментально.

Формула (15a) называют **формулой Зелмеера**.

Г. При распространении электромагнитной волны в ионосфере в формуле (15) следует положить

$$\omega_0 = 0, \Gamma \approx 0$$

(нет возвращающей силы, затухание мало).

Тогда закон дисперсии запишется в виде:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Анализ особенностей распространения волн в такой среде будет рассмотрен ниже.

5. Так как фазовая скорость (9) зависит от n , то в среде с дисперсией $n = n(\omega)$:

$$v = v(\omega) = \frac{c}{n(\omega)} = \frac{\omega}{k'(\omega)}. \quad (24)$$

А это значит, что при распространении светового импульса конечной длительности в среде с дисперсией его форма может существенно искажаться.

Рассмотрим подробнее **распространение импульса в диспергирующей среде**.

Пусть две плоские монохроматические одинаково линейно поляризованные волны одинаковой амплитуды распространяются, к примеру, вдоль оси z :

$$E_1(z, t) = E_0 \sin(\omega_1 t - k_1 z); \quad E_2(z, t) = E_0 \sin(\omega_2 t - k_2 z),$$

причем частоты и волновые числа обеих волн примерно одинаковы:

$$\omega_1 \approx \omega_2; \quad k_1 \approx k_2$$

(как следствие, примерно одинаковы и фазовые скорости $v_1 = \frac{\omega_1}{k_1} \approx v_2 = \frac{\omega_2}{k_2}$).

Для результирующей волны получим:

$$E(z, t) = E_1(z, t) + E_2(z, t) = 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right) \cdot \sin(\omega_0 t - k_0 z),$$

где $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$; $\Delta k = k_1 - k_2$; $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$; $k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}$.

Первый множитель в формуле есть огибающая группы волн:

$$A(z, t) = 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right),$$

которая распространяется в пространстве со скоростью

$$u = \frac{\Delta\omega}{\Delta k},$$

называемой **групповой скоростью** распространения волнового пакета.

Более строгий вывод формулы для групповой скорости приведен в **Приложении**, где показано, что

$$u = \frac{\partial\omega}{\partial k}.$$

Пусть в диспергирующей среде распространяется импульс, характеризуемый узким спектральным диапазоном ($\Delta\omega \ll \omega_0$), причем в этом диапазоне производная

$k' = \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0}$ не зависит от частоты. Тогда импульс распространяется с единой групповой скоростью

$$u = \frac{1}{k'} = \left. \frac{\partial\omega}{\partial k} \right|_{\omega_0},$$

которая характеризует скорость движения огибающей волнового пакета (а следовательно, и скорость переноса волной энергии), которая, вообще говоря, отличается от фазовой скорости света. В этом случае импульс не расплывается, сохраняя свою первоначальную форму.

Получим связь между фазовой v и групповой u скоростями для случая, когда закон дисперсии задан в виде $v = v(\lambda)$:

$$\omega = v \cdot k(\omega);$$

$$u = \frac{d\omega}{dk} = v + \frac{dv}{dk} \cdot k(\omega).$$

Так как $\frac{k}{dk} = -\frac{\lambda}{d\lambda}$, получим:

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} -$$

– формула Рэлея.

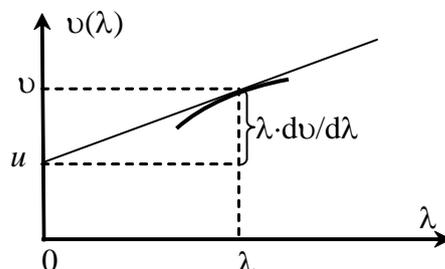


Рис. 2. Графическое определение групповой скорости из закона дисперсии
Рис.2 иллюстрирует полученную формулу:

Если задана зависимость $n(\omega)$ показателя преломления от частоты, то

$$\begin{aligned} ck &= \omega n(\omega), \\ cdk &= d\omega \cdot n(\omega) + \omega dn(\omega) \\ \frac{1}{u} &= \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right), \end{aligned}$$

или

$$u = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} = \frac{v}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}}.$$

Из полученной формулы следует, что в области аномальной дисперсии $\left(\frac{dn}{d\omega} < 0 \right)$ формально групповая скорость $u > c$, однако из-за сильного поглощения света в этой области оперирование понятием групповой скорости теряет смысл.

Пример. При распространении электромагнитной волны в ионосфере в формуле (15) следует положить

$$\omega_0 = 0, \Gamma \approx 0$$

(нет возвращающей силы, затухание мало).

Тогда закон дисперсии запишется в виде:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Из данной формулы следует, что плазменная частота является своеобразной границей.

Если $\omega > \omega_p$, то $0 < \varepsilon(\omega) < 1$, фазовая скорость превышает скорость света в вакууме.

Получим связь фазовой и групповой скоростей.

Если $\omega > \omega_p$, то $0 < \varepsilon(\omega) < 1$ и фазовая скорость

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} > c.$$

Воспользуемся дисперсионным уравнением:

$$k^2 = \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} = (\omega^2 - \omega_p^2) \cdot \frac{1}{c^2}.$$

$$2k \cdot dk = 2\omega \cdot d\omega \cdot \frac{1}{c^2};$$

$$2k \cdot dk = 2\omega \cdot d\omega \cdot \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{k}{\omega} \cdot \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c^2};$$

$$v \cdot u = c^2.$$

Так как $v > c$, то групповая скорость $u < c$ меньше скорости света.

Если $\omega < \omega_p$, то $\varepsilon(\omega) < 0$, т.е. показатель преломления среды является чисто мнимым. Ранее отмечалось, что мнимая часть показателя преломления приводит к уменьшению амплитуды. Но выше предполагалось, что затухание мало: $\Gamma \approx 0$. Получается противоречие: энергия в ионосфере не поглощается, а амплитуда падает! Данное «противоречие» будет подробно рассмотрено в теме «Полное внутреннее отражение». Но отметим, что ситуация соответствует случаю полного внутреннего отражения волн от ионосферы. Именно этот факт способствует распространению радиоволн вокруг земного шара.

Расплывание волнового пакета.

Пусть в диспергирующей среде распространяется световой импульс длительностью τ , ему соответствует спектральный интервал $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{2\pi}{\tau}$.

Представим импульс как совокупность двух волновых пакетов с групповыми скоростями распространения, заданными для граничных частот:

$$u_1 = \left. \frac{\partial\omega}{\partial k} \right|_{\omega_1}; \quad u_2 = \left. \frac{\partial\omega}{\partial k} \right|_{\omega_2}.$$

Пройдя расстояние z , они разойдутся по времени на

$$\Delta t = \frac{z}{u_1} - \frac{z}{u_2}.$$

Расстояние z будем называть **дисперсионной длиной импульса**, если справедливо соотношение

$$\Delta t = \tau.$$

В результате получим:

$$\tau = \frac{z}{u_1} - \frac{z}{u_2} = z \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) = z \left(\left. \frac{\partial k}{\partial\omega} \right|_{\omega_1} - \left. \frac{\partial k}{\partial\omega} \right|_{\omega_2} \right) = z \left(\left. \frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2} \right|_{\omega^*} \right) \cdot \Delta\omega = z \cdot k'' \cdot \frac{2\pi}{\tau}.$$

Для дисперсионной длины расплывания получим:

$$z_{\text{диси}} = \frac{\tau^2}{2\pi k''}.$$

(обратим внимание, что в данном случае $k'' = \left. \frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2} \right|_{\omega^*}$ - это обозначение второй производной).

Приложение.

Более строгий вывод формулы для групповой скорости.

Пусть на входе в диспергирующую среду ($z=0$) квазимонохроматический импульс представим в виде:

$$E_0(t, z=0) = A_0(t) \cdot e^{i\omega_0 t}.$$

Воспользуемся фурье-представлением:

$$E_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int F_0(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega,$$

где $F_0(\omega) = \int E_0(t') \cdot e^{-i\omega t'} dt'$ - фурье-разложение импульса на входе в среду по частотам.

Будем считать, что в процессе распространения волны вдоль оси z нет поглощения энергии, а меняется только фаза волны на величину $\varphi(\omega) = -k(\omega) \cdot z$, т.е.

$$F(\omega, z) = F_0(\omega) \cdot e^{-ikz}.$$

В случае узкополосного сигнала ($\Delta\omega \ll \omega_0$) для закона дисперсии $k(\omega)$ можно воспользоваться разложением:

$$\begin{aligned} k(\omega) &\approx k(\omega_0) + \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \cdot (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} \cdot (\omega - \omega_0)^2 = \\ &= k_0 + k' \cdot (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} k'' \cdot (\omega - \omega_0)^2. \end{aligned}$$

(здесь и далее через k' обозначена производная $\left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0}$).

Вернемся к временному представлению

$$\begin{aligned} E(t, z) &= \frac{1}{2\pi} \int F(\omega, z) \cdot e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \iint E_0(t') \cdot e^{-i\omega t'} \cdot e^{-ikz} \cdot e^{i\omega t} d\omega dt' = \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \iint E_0(t') \cdot e^{-i\omega t'} \cdot e^{-ik_0 z} \cdot e^{-ik'(\omega - \omega_0)z} \cdot e^{i\omega t} d\omega \cdot dt'. \end{aligned}$$

Заметим, что интеграл по переменной ω имеет вид:

$$\int e^{-i\omega t'} \cdot e^{-ik'\omega z} \cdot e^{i\omega t} d\omega = \int e^{-i\omega(t' + k'z - t)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \delta(t' + k'z - t),$$

где $\delta(\bullet)$ - дельта-функция.

В результате получаем:

$$\begin{aligned} E(t, z) &\approx \int E_0(t') \cdot e^{-ik_0 z} \cdot e^{ik'\omega_0 z} \cdot \delta(t' + k'z - t) \cdot dt' = \\ &= E_0(t - k'z) \cdot e^{-ik_0 z} \cdot e^{ik'\omega_0 z}. \end{aligned}$$

Вспоминая, что

$$E_0(t) = A_0(t) \cdot e^{i\omega_0 t},$$

получим:

$$E(t, z) = A_0(t - k'z) \cdot e^{i\omega_0(t - k'z)} \cdot e^{-ik_0 z} \cdot e^{ik'\omega_0 z} = A_0(t - k'z) \cdot e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}.$$

Если в заданном спектральном диапазоне ($\Delta\omega \ll \omega_0$) производная $k' = \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0}$ не

зависит от частоты, то поверхность постоянной амплитуды ($t - k'z = const$) распространяется со скоростью

$$u = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{k'} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{\omega_0},$$

Семинар. Дисперсия света.

Основной материал семинара изложен в конспекте лекций по оптике по теме «Дисперсия света».

Здесь только дополнительные моменты.

Основные формулы:

Дисперсионное уравнение:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)$$

Фазовая v и групповая u скорости:

$$v = \frac{\omega}{k}; \quad u = \frac{d\omega}{dk}.$$

Формула Рэлея

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

Задача 1. Задан закон дисперсии $k \sim \omega^2$. Найти связь фазовой и групповой скоростей.

Решение.

Запишем закон дисперсии в виде:

$$k = \alpha \omega^2,$$

где α - константа.

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\alpha \omega^2} = \frac{1}{\alpha \omega};$$
$$\frac{1}{u} = \frac{dk}{d\omega} = 2\alpha \omega.$$
$$v = 2u.$$

В общем случае, если

$$k = \alpha \omega^\gamma, \tag{1}$$

то

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\alpha \omega^\gamma} = \frac{1}{\alpha \omega^{\gamma-1}};$$
$$\frac{1}{u} = \frac{dk}{d\omega} = \gamma \alpha \omega^{\gamma-1};$$
$$v = \gamma u. \tag{1}$$

Задача 2. Задан закон дисперсии $v \sim \frac{\sqrt{\lambda}}{\omega^3}$. Найти связь фазовой и групповой скоростей.

Решение.

Запишем закон дисперсии в виде:

$$v = \frac{\omega}{k} = \beta \frac{\sqrt{\lambda}}{\omega^3} = \alpha \frac{1}{\sqrt{k} \omega^3},$$

где α - константа.

В результате получим:

$$\alpha k^{1/2} = \omega^4;$$

2

$$k = \frac{1}{\alpha^2} \omega^8,$$

т.е. задача свелась к предыдущей.

Из общей формулы (1) из (2) получим

$$v = \gamma u = 8u.$$

Примечание.

Попробуем решить данную задачу через формулу Рэлея:

$$v = \beta \frac{\sqrt{\lambda}}{\omega^3}; \quad \frac{dv}{d\lambda} = \frac{\beta}{2} \frac{1}{\omega^3 \lambda^{1/2}}$$
$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = \beta \frac{\sqrt{\lambda}}{\omega^3} - \lambda \frac{\beta}{2} \frac{1}{\omega^3 \lambda^{1/2}} = \frac{1}{2} \beta \frac{\sqrt{\lambda}}{\omega^3} = \frac{1}{2} v$$
$$v = 2u.$$

Ответ другой!!!!

Попробуйте решить задачу в общем случае, когда

$$v = \beta \omega^\eta \lambda^\kappa,$$

воспользовавшись первой и второй методиками. Вы получите разные ответы!!!

Подумайте и решите, какой из способов дает верный результат.

Задача 3. Задан закон дисперсии в виде $n \sim \omega^2$, где n - показатель преломления. Найти связь фазовой и групповой скоростей.

Решение.

Запишем закон дисперсии в виде:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} = \beta \frac{c}{\omega^2},$$
$$k = \gamma \omega^3,$$

т.е. задача свелась к предыдущей.

Задача 4. Задан связь фазовой и групповой скоростей $v = 3u$. Найти закон дисперсии.

Решение.

Запишем связь скоростей в виде:

$$v = \frac{\omega}{k} = 3u = 3 \frac{d\omega}{dk}.$$

Решаем полученное дифференциальное уравнение методом разделения переменных:

$$\frac{dk}{k} = 3 \frac{d\omega}{\omega}; \quad \ln k = 3 \ln \omega + A;$$
$$k = B \omega^3.$$



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА