КЛАССИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ШАФАРЕВИЧ
АНДРЕЙ ИГОРЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

Содержание

1 Лекция 1. Плоские кривые

§ 1. Способы задания кривых.

Всюду в этой лекции мы рассматриваем плоскость $\mathbb{R}^2$ со стандартными евклидовыми координатами (x, y).

Из курса анализа известен простейший способ задания гладкой кривой на плоскости — в виде графика. Именно, пусть $f(x)$ — гладкая функция, заданная на отрезке или интервале оси x.

Определение 1. Множество точек плоскости, координаты (x, y) которых связаны равенством $y = f(x)$ называется кривой–графиком. Совершенно аналогично определяются кривые $x = \varphi(y)$, являющиеся графиками функций переменной y.

Ясно, что не любая кривая на плоскости может быть задана в виде графика. Действительно, если кривая — график, то любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает ее не более, чем в одной точке (координаты точки пересечения с прямой $x = x_0$ имеют вид $(x_0, f(x_0))$, где x_0 принадлежит области определения функции f). С другой стороны, далеко не любая кривая на плоскости обладает этим свойством; простейший пример — окружность $x^2 + y^2 = 1$ (любая вертикальная прямая $x = x_0$, $|x_0| < 1$ пересекает эту окружность в двух точках: $(x_0, \sqrt{1 - x_0^2})$ и $(x_0, -\sqrt{1 - x_0^2})$). Поэтому естественно рассмотреть и другие способы задания кривых; один из них подсказывается предыдущим примером. Именно, пусть $F(x, y)$ — гладкая функция двух переменных, причем во всех точках плоскости, в которых $F(x, y) = 0$, хотя бы одна частная производная $\partial F/\partial x$ или $\partial F/\partial y$ отлична то нуля.

Определение 2. Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, называется неявно заданной кривой.

Рассмотрим, наконец, третий (и самый удобный) способ задания кривой — параметрический. Именно, будем представлять себе кривую на плоскости как траекторию движения точки в течение некоторого промежутка времени t. Закон движения точки определяется парой гладких функций $x(t), y(t)$, описывающих изменение координат. При фиксированном t имеем точку плоскости с координатами $(x(t), y(t))$; при изменении t эта точка описывает некоторую кривую.

Определение 3. Регулярная кривая, заданная параметрически — это множество точек плоскости вида $x = x(t), y = y(t)$, где $x(t), y(t)$ — гладкие функции, заданные на отрезке или интервале, причем при всех t из этого отрезка $(x')^2 + (y')^2 \neq 0$.

Мы будем кратко записывать параметрические уравнения кривой в виде $r = r(t)$, где $r = (x, y)$ — радиус–вектор точки плоскости, $r(t) = (x(t), y(t))$ — двумерный вектор, зависящий от t.

Предложение 1. *Три описанных способа задания кривых локально эквивалентны, т.е. множество точек плоскости, заданное одним из этих способов, в достаточно малой окрестности любой его точки можно задать и любым другим способом.*

Доказательство. 1. Если множество задано как график функции $y = f(x)$, то оно задается неявным уравнением $y - f(x) = 0$ и параметрическими уравнениями $x = t, y = f(t)$.

2. Если множество задано неявным уравнением $F(x, y) = 0$, то, по теореме о неявной функции, в окрестности каждой его точки одна из координат может быть выражена через другую, т.е. существует гладкая функция $f(x)$ (или $\varphi(y)$), такая, что наше множество задается как график этой функции. Согласно уже доказанному, в этой окрестности множество задается и параметрически.

3. Пусть кривая задана параметрически. В окрестности каждой ее точки хотя бы одна из производных $x'(t), y'(t)$ не обращается в нуль (пусть для определенности это производная x'). По теореме об обратной функции существует гладкая функция $t = t(x)$, обратная к $x(t)$. Подставляя эту функцию во второе параметрическое уравнение, получаем задание кривой в виде графика $y = f(x)$, где $f(x) = y(t(x))$ (и, одновременно, неявным уравнением $y - f(x) = 0$). ■

Всюду ниже мы будем использовать параметрический способ задания кривой.

Определение 4. Гладкой кривой на плоскости называется гладкое отображение отрезка $[a, b]$ в плоскость $\mathbb{R}^2$, т.е. вектор-функция $r = r(t)$, где координаты $(x(t), y(t))$ вектора $r(t)$ — бесконечно дифференцируемые функции, заданные на отрезке $[a, b]$. Вектор r' называется вектором скорости кривой. Гладкая кривая называется регулярной, если ее вектор скорости не обращается в нуль.

Замечание 1. *Одно и то же множество точек плоскости может быть задано разными параметрическими уравнениями (например, уравнения $x = t, y = 2t$ и $x = 3t, y = 6t$ задают одно и то же множество — прямую $y = 2x$). Согласно приведенному выше определению, разные параметрические задания определяют разные кривые (совпадают лишь образы соответствующих отображений, но не сами отображения); с точки зрения дальнейших обобщений такое определение удобнее. В то же время, более "классический" взгляд на геометрию кривых состоит в том, чтобы изучать именно геометрические объекты, т.е. образы соответствующих отображений. Ниже, там, где это не приведет к недоразумениям, мы будем употреблять термин "кривая" также и для образа гладкого отображения отрезка.* ■

Замечание 2. *Условие $r' \neq 0$ имеет следующий механический смысл: движение точки по нашей кривой не останавливается. Геометрический смысл этого условия состоит в отсутствии на кривой точек излома или возврата типа острия; в качестве примера рассмотрим кривую $x = t^2, y = t^3$, изображенную на Рис. 1. У этой кривой имеется точка возврата в начале координат; это как раз та точка, в которой $x' = y' = 0$.* ■

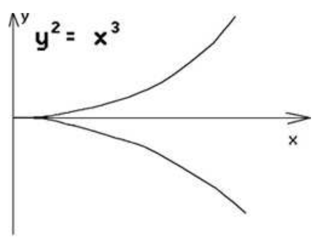

Рис. 1

§ 2. Длина дуги кривой. Натуральный параметр.

Как уже отмечалось, одно и то же множество точек можно задавать разными параметрическими уравнениями; разные параметрические задания одной кривой можно получать, делая гладкие монотонные замены параметра по формуле $t = \varphi(\tau)$, где φ — бесконечно дифференцируемая монотонная функция. Физический смысл такой замены — изменение скорости движения точки по кривой (отметим, что, если делать не монотонные замены, то на кривой, вообще говоря, появятся точки с нулевой скоростью движения). В частности, на регулярной кривой всегда можно выбрать параметр так, чтобы эта скорость была равна единице (т.е. за единицу времени точка проходила бы дугу единичной длины).

Такой параметр называется натуральным; чтобы ввести его формулой, определим сперва длину дуги кривой.

Определение 5. Длиной дуги l кривой $r = r(t)$ между точками, заданными значениями параметра t_1 и t_2, $t_1 < t_2$ называется число:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} | r'(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt.$$

Замечание 3. *Из формулы замены переменной в определенном интеграле следует, что это определение не зависит от выбора параметра t: если $t = \varphi(\tau)$, где φ - возрастающая гладкая функция, то:*

$$\int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{dr}{dt} \right| dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left| \frac{dr}{d\tau} \right| d\tau \, ,$$

где $t_1 = \varphi(\tau_1), t_2 = \varphi(\tau_2)$. ■

Замечание 4. *С физической точки зрения, приведенное определение совершенно естественно: $|r'|dt$ — путь, пройденный точкой за бесконечно малый промежуток времени dt.* ■

Замечание 5. *В анализе принято другое определение длины кривой. Именно, длина определяется как предел длин вписанных в кривую ломаных при стремлении к нулю длины максимального звена ломаной. При таком определении длины дуги приведенная выше формула превращается в теорему, доказываемую стандартной аналитической техникой (длины ломаных мало отличаются от интегральных сумм для выписанного интеграла; строгое доказательство состоит в аккуратной оценке остатка).* ■

Теперь мы можем определить натуральную параметризацию регулярной кривой $r = r(t)$. Зафиксируем точку t_0 и будем задавать точку, отвечающую значению параметра $t > t_0$ новым параметром s, равным длине дуги кривой между точками t_0 и t:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left| \frac{dr}{dt} \right| dt.$$

Точки, для которых $t < t_0$, будем задавать параметром s, определенным по той же формуле; очевидно, это будет длина дуги, взятая со знаком "минус".

Определение 6. Параметр s называется натуральным параметром на кривой; задание кривой уравнениями $r = r(s)$ называется ее натуральной параметризацией.

Замечание 6. *Очевидно, если кривая задана своей натуральной параметризацией, то длина вектора скорости dr/ds равна единице; это и означает, что движение по кривой происходит с единичной скоростью. Далее всюду мы будем обозначать точкой производную по натуральному параметру $s : \dot{f} = df/ds$.* ■

§ 3. Касательная и нормаль к кривой.

Займемся теперь изучением локальных свойств кривых. Пусть задана гладкая регулярная кривая $r = r(t)$; зафиксируем на ней точку, отвечающую значению параметра t_0. Самую грубую информацию о локальном устройстве кривой вблизи точки дает касательная — она указывает направление движения в этой точке.

Определение 7. Касательной к кривой $r = r(t)$ в точке t_0 называется предельное положение секущей, проходящей через точки t_0 и $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$. Точнее, касательная — это прямая, проходящая через точку t_0, причем ее единичный направляющий вектор равен пределу единичных направляющих векторов этих секущих.

Утверждение 1. *Направляющим вектором касательной к кривой $r = r(t)$ в точке t_0 является ее вектор скорости $r'(t_0)$; уравнение касательной имеет вид $r = r'(t_0)\tau + r(t_0)$, где $\tau \in \mathbb{R}$ - параметр на ней.*

Доказательство. Единичный направляющий вектор секущей равен:

$$\frac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{|r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)|} \operatorname{sgn}(\Delta t).$$

При $\Delta t \to 0$ этот вектор, очевидно, непрерывен (напомним, что $r' \neq 0$ на нашей кривой) и его предел равен $r'(t_0)/|r'(t_0)|$. Таким образом, вектор $r'(t_0)$ — направляющий вектор касательной; ее уравнение теперь пишется по известным правилам аналитической геометрии. ■

Замечание 7. *Очевидно, канонические уравнения касательной имеют вид:*

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}.$$

■

Определение 8. Нормалью к кривой в точке t_0 называется прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная касательной в ней.

Ясно, что направляющий вектор нормали получается поворотом направляющего вектора касательной на $\pi/2$, т.е. имеет вид: $(-y'(t_0), x'(t_0))$; уравнения нормали имеют вид:

$$\frac{x - x(t_0)}{y'(t_0)} + \frac{y - y(t_0)}{x'(t_0)} = 0.$$

§ 4. Соприкасающаяся окружность. Кривизна плоской кривой.

Касательная и нормаль описывают поведение кривой вблизи точки с точностью до бесконечно малых первого порядка; другими словами, векторы скорости движения по кривой и по касательной в данной точке совпадают, если параметры выбрать натуральными. Изучим теперь нашу кривую с точностью до бесконечно малых второго порядка, т.е. попробуем найти для каждой точки t_0 другую кривую возможно более простого вида, движение по которой имеет с нашей кривой общую скорость и общее ускорение в этой точке. Прежде чем это делать, приведем аккуратное определение того, что мы понимаем под “совпадением кривых с точностью до бесконечно малых k–го порядка”.

Определение 9. Две гладкие регулярные кривые называются касающимися в точке P, если обе они проходят через эту точку и имеют в ней одну и ту же касательную.

Ясно, что две кривые касаются в точке P тогда и только тогда, когда на этих кривых можно выбрать натуральные параметры таким образом, что векторы скорости кривых в точке P совпадут. Далее будем считать, что кривые параметризованы именно таким способом; пусть $r = r(s)$ и $r = \rho(s)$ — параметрические уравнения касающихся кривых, причем точка касания соответствует значению параметра $s = 0$.

Определение 10. Две касающиеся кривые имеют в точке $s = 0$ касание порядка k, если выполнены равенства:

$$r(0) = \rho(0), \quad \frac{dr}{ds}(0) = \frac{d\rho}{ds}(0), \ldots, \frac{d^k r}{ds^k}(0) = \frac{d^k \rho}{ds^k}(0).$$

В частности, две кривые имеют касание второго порядка, если совпадают их скорости и ускорения. Оказывается, регулярная кривая имеет в каждой точке касание второго порядка с некоторой окружностью. При доказательстве этого факта нам понадобится одно простое вспомогательное утверждение, которое будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть $a(t)$ — гладкая вектор–функция, принимающая значения в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, причем длина вектора $a(t)$ постоянна (не зависит от t). Тогда вектор $da(t)/dt$ при всех t ортогонален вектору $a(t)$.*

Доказательство. Дифференцируя равенство:

$$(a(t), a(t)) = |a|^2 = \mathrm{const},$$

получаем:

$$2\left(a(t), \frac{da(t)}{dt}\right) = 0,$$

что и требовалось. ∎

Теорема 1. *Пусть $\gamma : r = r(s)$ — регулярная кривая, причем в точке $s = s_0$ вектор ускорения $\ddot{r}(s_0) \neq 0$. Тогда существует единственная окружность, имеющая с кривой γ касание второго порядка в этой точке; центр этой окружности лежит на нормали к γ в направлении вектора ускорения, а ее радиус равен $|\ddot{r}(s_0)|^{-1}$.*

Определение 11. Эта окружность называется *соприкасающейся окружностью* к кривой γ в точке s_0. Ее радиус называется *радиусом кривизны* кривой.

Доказательство. Нам надо найти окружность, имеющую с кривой γ в точке s_0 общие векторы скорости и ускорения. Чтобы это сделать, найдем скорость и ускорение окружности радиуса R. Вектор скорости, конечно, направлен по касательной к окружности, и его длина равна единице, если параметр натуральный. Далее, по приведённой лемме вектор ускорения ортогонален вектору скорости (т.к. последний имеет постоянную длину), т.е. направлен вдоль диаметра окружности. Подсчитаем его длину и направление. Натуральная параметризация окружности радиуса R с центром в точке x_0, y_0 имеет вид $r = (x_0 + R\cos(s/R), y_0 + R\sin(s/R))$ (докажите!); дважды дифференцируя, получаем вектор ускорения:

$$\ddot{r} = -\frac{1}{R}(\cos(s/R), \sin(s/R)),$$

т.е. этот вектор направлен из точки окружности к ее центру, причем его длина $|\ddot{r}| = R^{-1}$. Отсюда сразу же следует утверждение теоремы; действительно, чтобы векторы скорости и ускорения кривой γ и некоторой окружности совпали, необходимо и достаточно, чтобы центр окружности лежал в направлении вектора ускорения кривой γ, отложенного от общей точки этих кривых, а ее радиус равнялся $|\ddot{r}|^{-1}$ (напомним, что, в силу леммы, вектор ускорения кривой γ направлен по нормали к ней, т.к. параметр натуральный). Этими данными окружность задается однозначно. ∎

Замечание 8. *Если в данной точке кривой $\ddot{r} = 0$, то соприкасающаяся окружность вырождается в прямую; ее радиус при этом считается равным бесконечности.* ∎

Определение 12. Величина $k(s_0) = R^{-1} = |\ddot{r}(s_0)|$ называется кривизной кривой в точке s_0.

§ 5. Вектор нормали к кривой. Плоские формулы Френе.

Пусть в некоторой точке кривой вектор ускорения $\ddot{r}$ отличен от нуля; тогда он ортогонален единичному вектору скорости $v = \dot{r}$. Из этих двух векторов можно построить ортонормированный репер, если нормировать вектор ускорения.

Определение 13. Вектором n нормали к кривой в точке s_0 называется вектор $|\ddot{r}(s_0)|^{-1}\,\ddot{r}(s_0) = k^{-1}(s_0)\,\ddot{r}(s_0)$, где $k(s)$ — кривизна кривой.

Из определения вектора нормали немедленно следует формула для производной вектора скорости $\dot{v}(s) = k(s)n(s)$. Нетрудно выразить через векторы v, n и производную от n. Для этого заметим, что, по доказанной выше лемме, вектор $\dot{n}$ ортогонален вектору n, т.е. $\dot{n} = cv$, $c \in \mathbb{R}$. Продифференцируем теперь равенство $(v, n) = 0$; получим $(\dot{v}, n) + (v, \dot{n}) = 0$, откуда $k + c = 0$, т.е. $c = -k$. Итак, окончательно для производных репера (v, n) получаем формулы:

$$\dot{v}(s) = k(s)n(s),\ \dot{n}(s) = -k(s)v(s).$$

Эти формулы называются плоскими формулами Френе. Они справедливы в любой точке, в которой кривизна не равна нулю.

Замечание 9. *Часто бывает удобно приписывать кривизне кривой знак, указывающий на направление вектора ускорения относительно вектора скорости. Именно, определим новую функцию $\widetilde{k}(s)$, равную $k(s)$, если вращение от вектора $\dot{r}$ к вектору $\ddot{r}$ происходит против часовой стрелки, и $-k(s)$, если вращение от $\dot{r}$ к $\ddot{r}$ происходит по часовой стрелке. Функция $\widetilde{k}(s)$ обладает лучшими аналитическими свойствами, чем $k(s)$ — она бесконечно дифференцируема для любой гладкой кривой, в то время как $k(s)$, вообще говоря, только непрерывна (это, конечно, происходит из-за того, что $k = |\widetilde{k}|$, а в точке, в которой $\ddot{r} = 0$, график функции $k(s)$ имеет излом, если направление $\ddot{r}$ при переходе через эту точку меняется на противоположное). Если обозначить через $\widetilde{n}(s)$ единичный вектор $(-\dot{y}(s), \dot{x}(s))$, то для векторов v, $\widetilde{n}$ будут по-прежнему выполнены плоские формулы Френе (с заменой k на $\widetilde{k}$), причем они будут иметь смысл всюду, в том числе и в нулях кривизны (докажите!). Отметим, что функция $\widetilde{k}(s)$ имеет естественный геометрический (и механический) смысл; именно, если $\alpha(s)$ — угол между вектором скорости кривой и фиксированным направлением (например, осью Ox), то:*

$$\widetilde{k}(s) = \frac{d\alpha}{ds}$$

(докажите!). Конечно, под углом здесь понимается функция, совпадающая с углом с точностью до прибавления слагаемого $2\pi m$ (m — целое число); это слагаемое выбирается так, чтобы функция $\alpha(s)$ была гладкой. ■

Задачи.

Уравнения кривых.

1. Произвольный луч OE пересекает в точках D и E окружность
$$x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$$
и касательную к ней, проходящую через точку C, диаметрально противоположную O. Через точки D и E проведены прямые, параллельные соответственно осям Ox и Oy, до пересечения в точке M. Составить уравнение кривой, образованной точками M (локон Аньези).

2. Точка M равномерно движется по прямой ON, равномерно вращающейся вокруг точки O. Составить уравнение траектории точки M (спираль Архимеда).

3. Прямая OL вращается вокруг точки O с постоянной угловой скоростью, а точка M движется по этой прямой со скоростью, пропорциональной расстоянию $|OM|$. Составить уравнение траектории точки M.

4. Круг катится по прямой без скольжения. Составить уравнение траектории точки, жестко связанной с кругом и находящейся на расстоянии d от его центра (циклоида, удлиненная или укороченная).

5. Окружность катится по другой окружности (с внешней или с внутренней стороны). Составить уравнение траектории точки на катящейся окружности (эпи- или гипоциклоида).

Нормаль, касательная, кривизна.

6. Составить уравнения касательной и нормали к кривой:
   (a) $r = (a\cos t, b\sin t)$;
   (b) $r = \left(\dfrac{a}{2(t+1/t)}, \dfrac{b}{2(t-1/t)}\right)$;
   (c) $r = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$;
   (d) $r = (a(1-\cos t), a(t-\sin t))$;
   (e) $r = (\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4, \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3)$;
   (f) $r = (at\cos t, at\sin t)$;

7. Найти кривизну кривой:
   (a) $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$;
   (b) $\rho = a\varphi$;
   (c) $\rho = a(1+\cos\varphi)$;
   (d) $r = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$;
   (e) $r = (a(2\cos t + t\sin t), a(\sin t - t\cos t))$,

здесь (ρ, φ) — полярные координаты на плоскости.

8. Найти кривизну кривой, заданной неявным уравнением $F(x, y) = 0$.

9. Найти все кривые с постоянной кривизной.

10. Шириной замкнутой выпуклой плоской кривой l в направлении вектора a называется точная нижняя грань расстояний между двумя параллельными прямыми, перпендикулярными a, и такими, что l целиком содержится в полосе, ограниченной этими прямыми. Говорят, что кривая имеет постоянную ширину d, если ее ширина в любом направлении равна d. Доказать, что в этом случае длина кривой l равна πd (предполагается, что кривая состоит из одного куска). Привести пример кривой постоянной ширины, отличной от окружности.

2 Лекция 2. Пространственные кривые

§ **1**. **Уравнения кривой. Касательная, нормальная плоскость, кривизна.**

Рассмотрим теперь кривые в трехмерном пространстве с евклидовыми координатами (x, y, z). Через r будем, как и ранее, обозначать радиус-вектор точки. Кривые в трехмерном пространстве можно, как и на плоскости, задавать параметрическими уравнениями $r = r(t)$.

Определение 1. Гладкой регулярной пространственной кривой называется гладкое отображение $r = r(t)$ отрезка в трехмерное пространство, причем вектор скорости $r'(t) \neq 0$.

Так же, как и в плоском случае, на кривой можно заменять параметр при помощи гладких монотонных функций $t = t(\tau)$. В частности, всегда можно выбрать параметр так, чтобы скорость движения по кривой была равна единице. Чтобы явно ввести этот параметр, определим сперва длину дуги кривой (она определяется точно так же, как и для плоских кривых).

Определение 2. Пусть t_1, t_2 — две точки на кривой $r = r(t)$, $t_1 < t_2$. Длиной дуги кривой, заключенной между точками t_1 и t_2, называется число:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} |\, r'(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Теперь натуральный параметр s определяется аналогично плоскому случаю. Именно, на кривой фиксируется точка t_0 и значение параметра s в точке t полагается равным длине дуги между точками t_0 и t с соответствующим знаком:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\, r'(t_1)| dt_1.$$

Ясно, что, если кривая задана в натуральной параметризации, то $|\, \dot{r}| = |\, dr/ds| = 1$.

Касательная к пространственной кривой в точке t_0 определяется точно так же, как к плоской; ее уравнения имеют такой же вид:

$$r = r'(t_0)\tau + r(t_0).$$

Первое различие между плоскими и пространственными кривыми возникает при рассмотрении нормали: в плоском случае через данную точку кривой перпендикулярно касательной проходит ровно одна прямая, а в пространственном случае — бесконечно много; все они лежат в одной плоскости, называемой *нормальной плоскостью к кривой.* Уравнение нормальной плоскости к кривой в точке t_0, очевидно, имеет вид:

$$(r - r(t_0), r'(t_0)) = (x - x(t_0))x'(t_0) + (y - y(t_0))y'(t_0) + (z - z(t_0))z'(t_0) = 0.$$

Кривизна пространственной кривой определяется аналогично плоскому случаю. Именно, пусть $r = r(s)$ — натуральная параметризация; поскольку $|\, \dot{r}| = 1$, ускорение при движении по кривой чисто центростремительно, т.е $\ddot{r} \perp \dot{r}$. Длина этого вектора и называется кривизной пространственной кривой:

$$k(s) = |\, \ddot{r}(s)|\,.$$

Задача 1. Соприкасающейся окружностью к пространственной кривой в точке s_0 называется окружность, имеющая с кривой в точке s_0 касание второго порядка. Доказать, что центр соприкасающейся окружности лежит на прямой, проходящей через данную точку кривой в направлении вектора $\ddot{r}(s_0)$, а ее радиус равен $1/|\, k(s_0)|\,$.

Замечание 1. *Плоскость векторов $\dot{r}, \ddot{r}$ называется соприкасающейся плоскостью к кривой.* ■

§ 2. Формулы Френе в трехмерном пространстве. Кручение кривой.

Пусть в точке s пространственной кривой $\ddot r \neq 0$. Тогда, поделив этот вектор на его длину (т.е. на кривизну кривой в данной точке) получим единичный вектор, перпендикулярный касательной.

Определение 3. Этот вектор называется вектором главной нормали к кривой в данной точке; по определению, он равен $\ddot r/k$.

Обозначение. Единичный вектор скорости $\dot r$ в точке s обозначается через $v(s)$, а вектор главной нормали — через $n(s)$.

Из определения вектора главной нормали немедленно следует формула $\dot v(s) = k(s)n(s)$, аналогичная формуле Френе в плоском случае. Однако вторая формула, определяющая производную от вектора n, будет уже другой; это обстоятельство связано с тем, что в случае пространственной кривой пара векторов v, n не образует базиса в $\mathbb{R}^3$ — векторов меньше, чем надо. Однако эту пару векторов легко дополнить до ортонормированного базиса, добавив к ним третий вектор — их векторное произведение.

Определение 4. Вектор $b(s) = v(s) \times n(s)$ называется вектором бинормали к кривой в точке s; ортонормированная тройка (v, n, b) называется репером Френе.

Замечание 2. *Репер Френе определен в тех точках кривой, в которых $\ddot r \neq 0$ или, другими словами, $k(s) \neq 0$.* ■

Определение 5. Кривая, кривизна которой не обращается в нуль, называется бирегулярной.

Замечание 3. *На каждую пару векторов из тройки (v, n, b) можно натянуть двумерную плоскость. Таким образом, в каждой точке кривой определены три плоскости, проходящие через эту точку. Две из них нам уже встречались: плоскость (n, b) — это нормальная плоскость к кривой, а плоскость (v, n) — соприкасающаяся. Третья плоскость (натянутая на векторы v, b) называется спрямляющей плоскостью к кривой в данной точке.* ■

Рассмотрим теперь производные $\dot v, \dot n, \dot b$ векторов репера Френе и выразим их через сами эти векторы. Для этого нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $A(t)$ — гладкая, невырожденная при всех t, $n \times n$–матричная функция и пусть $\Phi(t) = \dfrac{dA}{dt} A^{-1}$. Если матрица $A(t)$ при всех t ортогональна, то матрица $\Phi(t)$ кососимметрична (т.е. $\Phi^T = -\Phi$). Обратно, если матрица $\Phi(t)$ кососимметрична при всех t и матрица A ортогональна хотя бы при одном значении $t = t_0$, то эта матрица ортогональна и при всех t.*

Доказательство. Дифференцируя произведение $A^T A$, получаем:

$$\frac{d}{dt}(A^T A) = A^T \frac{dA}{dt} + \frac{dA^T}{dt} A = A^T \Phi A + A^T \Phi^T A = A^T(\Phi + \Phi^T)A.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы. Действительно, если матрица $A(t)$ ортогональна, левая часть равенства равна нулю (производная от единичной матрицы), откуда $\Phi^T + \Phi = 0$. Обратно, если матрица Φ кососимметрична, то правая часть равенства равна нулю, т.е. матрица $A^T A$ не зависит от t. Поэтому, если эта матрица единичная при $t = t_0$, то она единичная и при всех t. ■

Замечание 4. *В терминах теории линейных дифференциальных уравнений эту лемму можно переформулировать следующим образом. Оператор Коши системы линейных дифференциальных уравнений с кососимметричной матрицей является ортогональным, и наоборот, если оператор Коши при всех t ортогонален, то матрица системы кососимметрична.* ■

Перейдем теперь к доказательству формул Френе.

Теорема 1. *Имеют место формулы:*

$$\begin{aligned} v(s) &= k(s)n(s), \\ n(s) &= -k(s)v(s) - \varkappa(s)b(s), \\ b(s) &= \varkappa(s)n(s), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varkappa(s)$ — бесконечно дифференцируемая функция в любой точке кривой, в которой $k(s) \neq 0$.

Определение 6. Число $\varkappa(s)$ называется кручением пространственной кривой в точке s; формулы (1) называются пространственными формулами Френе.

Доказательство. Составим из векторов–строк (v, n, b) 3×3–матрицу $A(s)$:

$$A(s) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Эта матрица ортогональна, поскольку репер Френе ортонормирован. По только что доказанной лемме, отсюда следует, что $\dot{A} = \Phi A$, где Φ — кососимметричная матрица. С другой стороны, поскольку $\dot{v} = k(s)n(s)$, первая строка матрицы Φ имеет вид $(0, k(s), 0)$. Отсюда и из косой симметрии следует, что:

$$\Phi(s) = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & -\varkappa(s) \\ 0 & \varkappa(s) & 0 \end{pmatrix},$$

где $\varkappa(s)$ — гладкая функция, что и требовалось. ■

§ 3. Вычислительные формулы для кривизны и кручения.

Если кривая задана в натуральной параметризации, то ее кривизна легко вычисляется: $k(s) = |\ddot{r}(s)|$. Однако кривые бывают заданы в другой параметризации; возникает вопрос: как в этом случае вычислить кривизну? Конечно, можно сперва перейти к натуральному параметру, а затем применить написанную выше формулу; однако переход от произвольного параметра к натуральному требует вычисления неопределенных интегралов и обратных функций, что, как правило, весьма затруднительно. Поэтому желательно иметь явные формулы для кривизны (и кручения) кривой, заданной произвольной параметризацией; оказывается, такие формулы нетрудно получить и они содержат только операции дифференцирования и умножения.

Предложение 1. *Пусть $r = r(t)$ — параметрические уравнения кривой. Тогда ее кривизна и кручение вычисляются по формулам:*

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{|\, r'(t) \times r''(t)|}{|\, r'(t)|^3}, \\ \varkappa(t) &= -\frac{< r'(t), r''(t), r'''(t) >}{|\, r'(t) \times r''(t)|^2}. \end{aligned}$$

Выражение для кручения справедливо в тех точках кривой, в которых $\ddot{r} \neq 0$.

Доказательство. Получим сперва формулу для кривизны. Для этого выразим производные вектора r по параметру s через его производные по параметру t. Дважды дифференцируя, получаем:

$$\dot r = r'\frac{dt}{ds}\,, \quad \ddot r = r''(\frac{dt}{ds})^2 + r'\frac{d^2t}{ds^2}. \tag{2}$$

Вычисляя векторное произведение скорости и ускорения, получаем:

$$\dot r \times \ddot r = |\,\frac{dt}{ds}|^3 r' \times r''.$$

Из определения натурального параметра получаем $ds/dt = |\,r'|$, откуда следует, что $dt/ds = |r'|^{-1}$ (теорема о производной обратной функции; напомним, что $r' \neq 0$). Таким образом, кривизна кривой имеет вид:

$$k(s) = |\,\ddot r| = |\,\dot r \times \ddot r| = \frac{|\,r' \times r''|}{|\,r'|^3}\,.$$

Перейдем теперь к вычислению кручения. Вычислим его сперва как функцию натурального параметра. Из второй формулы Френе имеем $\varkappa = -(\dot n, b) = - < \dot n, v, n >$. С другой стороны, $\dot n = (\ddot r/k)'_s = \dddot r/k + \ddot r\, d(k^{-1})/ds$. Из этих формул, с учетом параллельности векторов n и $\ddot r$ получаем:

$$\varkappa = -\frac{< \dddot r, \dot r, n >}{k} = -\frac{< \dot r, \ddot r, \dddot r >}{k^2}\,. \tag{3}$$

Поскольку формула для кривизны как функции произвольного параметра t уже получена, для вычисления кручения достаточно выразить через t смешанное произведение $< \dot r, \ddot r, \dddot r >$. Для этого вычислим третью производную $\dddot r$. Дифференцируя второе равенство в (2), получаем:

$$\dddot r = r'''(\frac{dt}{ds})^3 + 3r''\frac{dt}{ds}^2\frac{d^2t}{ds^2} + r'\frac{d^3t}{ds^3}.$$

Вычисляя смешанное произведение этого вектора, вектора скорости и ускорения (см. (2)), получим:

$$< \dot r, \ddot r, \dddot r > = (\frac{dt}{ds})^6 < r', r'', r''' > = \frac{< r', r'', r''' >}{|\,r'|^6}.$$

Подставляя в (3) эту формулу вместе с уже доказанной формулой для кривизны, немедленно получаем нужную формулу для кручения. ■

§ 4. Восстановление кривой по кривизне и кручению. Натуральные уравнения кривой.

Оказывается, кривизна и кручение однозначно определяют кривую с точностью до ее расположения в пространстве.

Теорема 2. *Пусть $k(s)$ и $\varkappa(s)$ — гладкие функции и $k(s) > 0$. Тогда существует и притом единственная (с точностью до движения в $\mathbb{R}^3$) бирегулярная пространственная кривая $r(s) = (x(s), y(s), z(s))$, параметризованная гладким параметром s, такая, что функции $k(s)$ и $\varkappa(s)$ являются ее кривизной и кручением соответственно.*

Доказательство. Рассмотрим дифференциальные уравнения, совпадающие по своему виду с формулами Френе:

$$\begin{pmatrix} \dot v \\ \dot n \\ \dot b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \varkappa \\ 0 & -\varkappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix}.$$

Мы будем интерпретировать эти уравнения как матричное уравнение (т.е. линейное дифференциальное уравнение в 9–мерном пространстве 3×3–матриц), представляя каждый из векторов v, n, b как строку из их координат. Рассмотрим задачу Коши для этого уравнения, задав при $s = 0$ произвольную правую ортонормированную тройку векторов v_0, n_0, b_0. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений гарантирует существование единственного гладкого решения $v(s), n(s), b(s)$ нашей задачи при всех s, причем из доказанной в § **2**. леммы вытекает, что эти три вектора образую при всех s правую ортонормированную тройку (матрица, составленная из этих векторов, ортогональна при всех s). Рассмотрим кривую в $\mathbb{R}^3$, заданную параметрическими уравнениями:

$$r = r_0 + \int_0^s v(u)du;$$

докажем, что кривизна и кручение этой кривой равны $k(s)$ и $\varkappa(s)$ соответственно. Действительно, вектор скорости нашей кривой, очевидно, равен $v(s)$; далее, сравнивая уравнение на вектор $v(s)$ с первой формулой Френе, записанной для рассматриваемой кривой, получаем, что $k(s) = |\ddot{r}|$ и $n(s)$ — вектор главной нормали. Отсюда сразу следует, что $b(s)$ — бинормаль (т.к. $b = v \times n$), а из сравнения уравнения на этот вектор с третьей формулой Френе получаем, что $\varkappa(s)$ — кручение нашей кривой. Итак, искомая кривая построена. Докажем, что она определена однозначно с точностью до движения пространства. Пусть γ_1, γ_2 — две кривые, для которых $k(s)$ — кривизна, а $\varkappa(s)$ — кручение. Рассмотрим движение пространства f, совмещающее точки этих кривых с нулевым значением параметра s и переводящее репер Френе при $s = 0$ кривой γ_1 в репер Френе при $s = 0$ кривой γ_2 (такое движение, конечно, всегда существует — это композиция параллельного переноса, совмещающего начальные точки и поворота вокруг этой общей точки, совмещающего реперы Френе). Проверим, что такое движение *совмещает кривые* γ_2 *и* γ_1 *целиком.* Действительно, пусть $(v(s), n(s), b(s))$ — репер Френе любой из кривых γ_2, $f(\gamma_1)$. Поскольку матрица, составленная из этих векторов удовлетворяет рассмотренной выше задаче Коши для системы линейных дифференциальных уравнений, причем как уравнения, так и начальные условия одинаковы для рассматриваемых двух кривых (при $s = 0$ реперы Френе совпадают по определению движения f), векторы скорости, нормали и бинормали у кривых γ_2 и $f(\gamma_1)$ совпадают при всех s. Из совпадения векторов скорости следует, что радиус–векторы $r(s)$ для этих кривых отличаются на постоянный вектор ($\dot{r} = v(s)$), а поскольку при $s = 0$ точки наших двух кривых совпадают, этот вектор равен нулю, т.е. целиком совпадают рассматриваемые кривые. ■

Задача 2. Сформулируйте аналогичное утверждение для плоской кривой и укажите явную процедуру восстановления кривой, заданной ее функцией кривизны $k(s)$.

Замечание 5. *Теория кривых в евклидовом пространстве произвольной размерности N строится аналогично трехмерному случаю. В точности так же определяются вектор скорости, длина дуги, натуральный параметр, соприкасающаяся окружность и кривизна. Различие проявляется при рассмотрении кручения: каждой кривой в N-мерном можно сопоставить $N-2$ гладкие функции (кручения) и ортонормированный репер (репер Френе), заданный в каждой точке кривой. Формулы Френе в многомерном случае похожи на трехмерные: производная от k-го вектора репера Френе выражается через $(k-1)$-ый и $(k+1)$-ой векторы; коэффициенты и есть кручения (определения кручений и репера Френе и вывод формул Френе в многомерном случае можно найти, например, в книге А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко “Курс дифференциальной геометрии и топологии”).* ■

Задачи.

1. Найти репер Френе кривой $r = (t^2, 1-t, t^3)$.

2. Найти кривизну и кручение кривой:

   (a) $r = (t - \sin t, 1 - \cos t, 4\sin^2(t/2))$;

   (b) $r = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$;

   (c) $r = (2t, \ln t, t^2)$;

   (d) $r = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$;

3. Найти все кривые с постоянными кривизной и кручением.

4. Доказать, что кривая плоская, если кручение равно нулю.

5. Доказать существование вектора Дарбу ω, т.ч.

$$\dot{v} = \omega \times v, \quad \dot{n} = \omega \times n, \quad \dot{b} = \omega \times b.$$

   Какой механический смысл имеет этот вектор?

6. Доказать, что следующие условия эквивалентны:

   (a) касательные к кривой образуют постоянный угол с фиксированным направлением;

   (b) главные нормали перпендикулярны фиксированному направлению;

   (c) бинормали образуют постоянный угол с фиксированным направлением;

   (d) отношение кривизны к кручению постоянно

   (кривая, удовлетворяющая этим условиям, называется обобщенной винтовой линией)

7. Доказать, что кривая — обобщенная винтовая тогда и только тогда, когда $<\ddot{r}, \dddot{r}, r^{(4)}>= 0$.

8. Доказать, что, если все нормальные плоскости к кривой проходят через одну точку, то кривая лежит на сфере.

9. Доказать, что кривая лежит на сфере тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{k^2}(1 + \frac{\dot{k}^2}{k^2\varkappa^2}) = R^2.$$

10. Сфера $(r - r_0)^2 = R^2$ называется соприкасающейся к кривой $r = r(t)$ в точке t_0, если она имеет с кривой в этой точке касание третьего порядка, т.е.

$$(r(t) - r_0)^2 - R^2 = o((t - t_0)^3).$$

    Найти центр и радиус соприкасающейся сферы к заданной кривой в заданной точке. Доказать, что, если этот радиус постоянен, то кривая лежит на сфере или имеет постоянную кривизну.

11. Доказать формулу

$$<\dot{b}, \ddot{b}, \dddot{b}>= \varkappa^5 (k/\varkappa)'_s\,.$$

12. Ввести натуральный параметр на кривой:

    (a) $r = (a\sin t, a\cos t, bt)$;

    (b) $r = (e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$;

    (c) $r = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t, t)$;

13. Написать уравнения касательной и нормальной плоскости к кривой, заданной как пересечение поверхностей $F(x, y, z) = 0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$. item Доказать, что кривая плоская и найти ее плоскость:

    (a) $x = (1+t)/(1-t), \quad y = 1/(1-t^2), \quad z = 1/(1+t)$;

    (b) $x = a_1t^2 + b_1t + c_1, \quad y = a_2t^2 + b_2t + c_2, \quad z = a_3t^2 + b_3t + c_3$;

14. Составить уравнение кривой пересечения сферы с цилиндром вдвое меньшего радиуса, проходящего через центр сферы (кривая Вивиани). Написать уравнения касательной, нормальной плоскости, соприкасающейся плоскости, нормали и бинормали.

15. В каждой точке кривой

    $$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad z = 4\sin(t/2)$$

    в положительном направлении отложен отрезок, равный учетверенной кривизне в этой точке. Написать уравнение соприкасающейся плоскости кривой, описанной концом отрезка.

16. Кривая, лежащая на сфере и пересекающая меридианы под прямыми углами, называется локсодромой. Найти уравнение локсодромы, ее репер Френе, кривизну и кручение.

17. Когда точка движется по кривой, ее единичный вектор скорости (главной нормали, бинормали), описывает линию на единичной сфере. Эта линия называется касательным (нормальным, бинормальным) сферическим образом кривой. Доказать, что касательная к касательному сферическому образу кривой параллельна касательной в соответствующей точке к бинормальному сферическому образу.

18. Доказать, что, если касательный сферический образ лежит на большом круге, то кривая плоская.

19. Доказать, что кривая — обобщенная винтовая линия тогда и только тогда, когда касательный сферический образ — дуга параллели.

3 Лекция 3. Поверхности в евклидовом пространстве. Первая квадратичная форма поверхности

§ 1. Способы задания поверхностей. Координаты на поверхности.

Рассмотрим теперь n-мерные поверхности в N-мерном евклидовом пространстве, $N \geq n$ (типичный случай — двумерные поверхности в $\mathbb{R}^3$), в котором заданы стандартные евклидовы координаты $x^1, \ldots, x^N$. Способы их задания аналогичны способам задания кривых; мы сразу приведем наиболее употребительное определение поверхности, заданной параметрически. Ясно, что, поскольку поверхность n-мерна, она должна задаваться вектором, зависящим от n параметров.

Определение 1. Гладкой регулярной элементарной n-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^N$ называется множество точек N-мерного пространства, заданное уравнениями $r = r(u^1, \ldots, u^n)$, где координаты $x^i(u)$ N-мерной вектор-функции $r(u)$ бесконечно дифференцируемы функции в некоторой открытой области в n-мерном пространстве переменных $u = (u^1, \ldots, u^n)$ (можно считать, например, что эта область — открытый шар), причем во всех точках этой области векторы:

$$r_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1}, \ldots, r_n = \frac{\partial r}{\partial u^n}$$

линейно независимы; другими словами ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial u^1} & \ldots & \dfrac{\partial x^N}{\partial u^1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial u^n} & \ldots & \dfrac{\partial x^N}{\partial u^n} \end{pmatrix}$$

равен n. Параметры $(u^1, \ldots , u^n)$ называются *координатами на поверхности.*

Замечание 1. *Нетрудно привести два других способа задания n-мерных поверхностей, аналогичных способам задания кривых. Именно, пусть $f_1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, f_k(x^1, \ldots, x^n)$ — гладкие функции в области n-мерного пространства. Их совместный график, т.е. множество точек пространства $\mathbb{R}^{n+k}$, координаты которых связаны равенствами:*

$$x^{n+1} = f_1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, x^{n+k} = f_k(x^1, \ldots, x^n),$$

очевидно, является гладкой регулярной поверхностью (докажите!). Кроме того, поверхность можно задать системой неявных уравнений. Пусть $F_1(x^1, \ldots, x^N), \ldots, F_k(x^1, \ldots, x^N)$, $k < N$ — гладкие функции в области пространства $\mathbb{R}^N$, причем ранг матрицы Якоби:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x^1} & \ldots & \dfrac{\partial F_k}{\partial x^1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x^N} & \ldots & \dfrac{\partial F_k}{\partial x^N} \end{pmatrix}$$

равен k всюду, где:

$$F_1(x^1, \ldots, x^N) = 0, \ldots, F_k(x^1, \ldots, x^N) = 0.$$

Тогда множество точек, заданное этими уравнениями, определяет поверхность. ■

Задача 1. Доказать, что три приведенных способа задания поверхности локально эквивалентны.

Указание. Воспользоваться теоремой о неявной функции.

Замечание 2. *Геометрический смысл условия регулярности поверхности (т.е. линейной независимости векторов r_j) аналогичен смыслу условия $r' \neq 0$ в теории кривых; именно, если это условие нарушается, то на поверхности могут возникать "складки" или "изломы" — например, прямая, на которой $u^1 = 0$ (ось x^3) образует ребро возврата на двумерной поверхности $x^1 = (u^1)^2$, $x^2 = (u^1)^3$, $x^3 = u^2$.* ■

Замечание 3. *Слово "элементарная" в определении поверхности связано с тем, что, вообще говоря, не всякую поверхность можно целиком задать параметрическими уравнениями. Более общий объект — множество, представимое в виде объединения конечного числа элементарных поверхностей так, что любое пересечение этого множества с открытым шаром достаточно малого радиуса — элементарная поверхность. При этом "элементарные" куски, вообще говоря, пересекаются — накладываются друг на друга; в пересечениях (каждое из которых само является элементарной поверхностью) возникает два набора координат u и v, которые выражаются друг через друга при помощи дифференцируемых функций $u^i = u^i(v)$, $v^i = v^i(u)$. Существование этих функций доказывается в анализе (теорема о неявной функции). Получающаяся таким образом составная поверхность — пример важнейшего в геометрии понятия гладкого многообразия, которое подробно изучается в нашем курсе. Однако сперва мы обсудим локальные свойства поверхностей, и на это время ограничимся элементарными поверхностями, причем прилагательное "элементарная" будем для краткости опускать.* ■

Замечание 4. *Как и в случае кривых, одна и та же поверхность допускает разные параметризации; в частности, всегда можно сделать замену координат по формулам $u^i = u^i(v^1, \dots, v^n)$, где $u^i(v)$ - бесконечно дифференцируемые функции, причем определитель матрицы:*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial v^1} & \dots & \dfrac{\partial u^1}{\partial v^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial u^n}{\partial v^1} & \dots & \dfrac{\partial u^n}{\partial v^n} \end{pmatrix}$$

отличен от нуля. Последнее условие гарантирует, что множество, параметризованное координатами v является элементарной поверхностью (докажите!); написанная матрица называется матрицей Якоби замены координат $u \to v$. ■

§ 2. Кривые на поверхности. Касательное и нормальное пространства к поверхности.

Займемся изучением локального устройства поверхностей. Как и в случае кривых, самую грубую информацию доставляют касательные векторы. Однако, в отличие от кривых, в случае поверхностей эта информация гораздо более содержательна — дело в том, что касательные векторы к n-мерной поверхности образуют n-мерное пространство, в котором естественно возникает евклидова геометрия. Эта геометрия переносится на саму поверхность; однако при этом возникают "искажения", приводящие к существенным отличиям геометрии на поверхности от евклидовой.

Касательные векторы к поверхности естественно определять как векторы скоростей кривых, лежащих на поверхности, поэтому мы сперва определим такие кривые. Они определяются точно так же, как плоские или пространственные, только роль декартовых координат играют координаты u^i на поверхности.

Определение 2. Гладкой кривой, лежащей на поверхности M, называется гладкое отображение $\gamma : [a, b] \to M$ отрезка на поверхность, т.е. набор гладких функций $u^1 = u^1(t), \dots, u^n = u^n(t)$, где параметр t меняется на отрезке $[a, b]$.

Замечание 5. *Такое определение кривой естественно с точки зрения "существа, живущего на поверхности": такое существо имеет дело только с координатами u^i на поверхности, и кривая для него — это закон изменения этих координат со временем.* ■

Замечание 6. *Каждая кривая, лежащая на поверхности, является, конечно, гладкой кривой в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^N$: ее параметрические уравнения в $\mathbb{R}^N$ получаются подстановкой ее уравнений в координатах u^i в уравнения поверхности:* $r = r(u^1(t), \dots, u^n(t))$. ■

Зафиксируем теперь точку P на поверхности; пусть ее координаты $u_0^1, \dots, u_0^n$. Рассмотрим всевозможные кривые, лежащие на поверхности и проходящие через эту точку; будем откладывать от нее вектора скоростей этих кривых в точке P.

Утверждение 1. *Множество векторов скоростей кривых, лежащих на n-мерной поверхности и проходящих через точку P, образует n-мерное линейное пространство; базисом в нем является набор векторов $r_1 = \partial r/\partial u^1(P), \dots, r_n = \partial r/\partial u^n(P)$ (откладываемых от точки P).*

Доказательство. Пусть $u^i = u^i(t)$ — кривая, проходящая через точку P в момент времени t_0; ее вектор скорости имеет вид:

$$r'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial u^i}\, u^{i\prime}(t_0),$$

где векторы $\partial r/\partial u^i$ вычисляются в точке $u^i(t_0)$, т.е. в точке P. Таким образом, вектор скорости любой кривой, проходящей через эту точку, есть линейная комбинация векторов r_i с коэффициентами $u^{1\prime}(t_0), \dots, u^{n\prime}(t_0)$. Обратно, пусть $\sum c^i\, r_i$ — линейная комбинация этих векторов с произвольными коэффициентами $c^1, \dots, c^n$; эта линейная комбинация является вектором скорости кривой $u^i = u_0^i + c^i t$, проходящей при $t = 0$ через точку P. ■

Определение 3. Пространство векторов скоростей кривых на поверхности M, проходящих через точку P, называется касательным пространством к поверхности в этой точке и обозначается $T_P M$. Векторы из этого пространства называются касательными векторами к поверхности в точке P. Базис $r_1, \dots, r_n$ называется каноническим базисом в $T_P M$, порожденным координатами $u^1, \dots, u^n$.

Выясним, как меняется канонический базис при замене координат. Пусть u и v — два набора координат на поверхности, так что $u^i = u^i(v^1, \dots, v^n)$ — гладкие функции. Если $r_i = \partial r/\partial u^i$ и $\rho_j = \partial r/\partial v^j$ — векторы соответствующих канонических базисов, то, по теореме о дифференцировании сложной функции:

$$\rho_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u^i}{\partial v^j}\, r_i.$$

Таким образом, *значение матрицы Якоби замены координат в точке P является матрицей перехода между соответствующими каноническими базисами в пространстве $T_P M$.*

Замечание 7. *Каждый касательный вектор задается набором своих координат $c^1, \dots, c^n$ в базисе $r_1, \dots, r_n$; эти координаты можно представлять себе как координаты вектора с точки зрения жителя поверхности. При замене координат на поверхности координаты вектора меняются по закону:*

$$c^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u^i}{\partial v^j}\, \widetilde{c}^j,$$

где $\widetilde{c}^j$ — его координаты в базисе $\rho_1, \dots, \rho_n$ (докажите!). ■

Перпендикулярно касательному пространству через точку P можно провести $(N-n)$–мерную плоскость.

Определение 4. Ортогональное дополнение к пространству $T_P M$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$ с началом координат в точке P называется *нормальным пространством* к поверхности M в этой точке.

Пример 1. Нормальное пространство к двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$ — прямая; ее направляющий вектор, очевидно, можно выбрать в виде:

$$n = \frac{r_1(P) \times r_2(P)}{|r_1(P) \times r_2(P)|}$$

Ясно, что направление этого вектора зависит, вообще говоря, от параметризации поверхности; например, если поменять местами координаты u^i (т.е. перейти к новым координатам $v^1 = u^2, v^2 = u^1$), направление вектора нормали изменится на противоположное.

Задача 2. Выяснить, при каких заменах параметра направление вектора нормали меняется, а при каких — нет.

Ответ. Направление не изменится, если и только если:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial v^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial v^2} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial v^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial v^2} \end{vmatrix} > 0.$$

§ 3. Первая квадратичная форма поверхности. Геометрия на поверхности.

В каждой точке n-мерной поверхности имеется касательное пространство; поскольку оно лежит в объемлющем евклидовом пространстве, имеет смысл скалярное произведение касательных векторов. Таким образом, в каждой точке поверхности задана (зависящая от точки) положительно определенная квадратичная (=симметричная билинейная) форма.

Определение 5. Эта квадратичная форма называется первой квадратичной формой поверхности.

Координаты $u^1, \ldots, u^n$ на поверхности определяют базис $r_1, \ldots, r_n$ в касательном пространстве к поверхности в каждой точке. В этом базисе первая квадратичная форма задается своей матрицей $g_{ij}(u) = (r_i, r_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$. Элементы этой $n \times n$-матрицы — бесконечно дифференцируемые функции переменных u^i; ясно, что для каждого фиксированного значения координат матрица g_{ij} симметрична и положительно определена. Если два касательных вектора a и b из одной и той же касательной плоскости заданы своими координатами a^i и b^i в базисе r_i (т.е. $a = \sum a^i r_i$, $b = \sum b^i r_i$), то их скалярное произведение имеет вид:

$$(a, b) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, a^i\, b^j.$$

В частности, длина касательного вектора a вычисляется по формуле:

$$|\,a| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, a^i\, a^j}\ ,$$

а угол φ между векторами a и b — по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{(a,b)}{|\,a||\,b|} = \frac{\sum\limits_{i,\,j=1}^{n} g_{ij}\,a^i\,b^j}{\sqrt{\sum\limits_{i,\,j=1}^{n} g_{ij}\,a^i\,a^j}\sqrt{\sum\limits_{i,\,j=1}^{n} g_{ij}\,b^i\,b^j}}.$$

Таким образом, первая квадратичная форма — это скалярное произведение "с точки зрения жителя поверхности" : зная функции $g_{ij}(u)$, он может вычислять длины касательных векторов (в частности, скорости движения по кривым, лежащим на поверхности) и углы между ними.

Если в какой-то точке поверхности пересекаются две кривые, лежащие на ней, то угол между их векторами скорости называется *углом между кривыми, лежащими на поверхности*. Приведенные выше формулы позволяют вычислять этот угол, зная уравнения кривых и первую квадратичную форму. Действительно, если $u^i = v^i(t)$ — уравнения первой кривой, а $u^i = w^i(\tau)$ — уравнения второй, и точка пересечения отвечает значениям t_0, τ_0 параметров t и τ, то векторы скоростей кривых в точке пересечения имеют вид: $a = \sum a^i r_i$ и $b = \sum b^i r_i$, где $a^i = v^{i\prime}(t_0)$, $b^i = w^{i\prime}(\tau_0)$. Подставляя эти значения в приведенную выше формулу для угла между касательными векторами, получим выражение, определяющее угол между пересекающимися кривыми.

Далее, зная первую квадратичную форму, житель поверхности может вычислять длины дуг кривых, лежащих на поверхности. Действительно, пусть $u^i = u^i(t)$ — такая кривая. Длина l ее дуги между точками t_1 и t_2 — это, по определению, интеграл от t_1 до t_2 от длины вектора скорости $a = \sum u^{i\prime} r_i$. Учитывая формулу для длины касательного вектора, получаем для длины дуги:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(u(t))u^{i\prime}(t)u^{j\prime}(t)}dt.$$

Наконец, объем n-мерной области U на поверхности также выражается через первую квадратичную форму:

$$V(U) = \overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{\widetilde{U}} \sqrt{\det G}\, du^1 du^2 \ldots du^n$$

(здесь G – ее матрица в базисе r_i и интегрирование ведется по той области в $\mathbb{R}^n$, которую пробегают координаты u^i).

Итак, первая квадратичная форма позволяет жителю поверхности проводить геометрические вычисления и доказывать геометрические теоремы: например, он может изучать криволинейные многоугольники, их углы, периметры и т.д. Ниже мы увидим, что на каждой поверхности естественным образом определяется параллельный перенос и имеются кривые, аналогичные прямым на плоскости. Таким образом, каждая поверхность наделяется геометрией; эта геометрия, вообще говоря, разная для разных поверхностей — она определяется тем, как устроена в разных точках поверхности первая квадратичная форма. Отметим в связи с этим, что в теории кривых разных геометрий не возникает — на любой кривой можно ввести натуральный параметр s, и расстояние на кривой между двумя точками s_1 и s_2 (т.е. длина дуги) будет всегда вычисляться по универсальной формуле $|s_2 - s_1|$, одинаковой для всех кривых.

§ 4. Закон преобразования матрицы первой квадратичной формы при замене координат. Запись первой квадратичной формы через дифференциалы.

Выясним, как меняется матрица первой квадратичной формы поверхности при замене координат на ней. Поскольку матрица перехода между каноническими базисами — это матрица Якоби, закон преобразования матрицы первой квадратичной формы таков: ее матрица $\widetilde{g}_{ij} = (\rho_i, \rho_j)$, соответствующая координатам v выражается через матрицу $g_{km} = (r_k, r_m)$ по формуле:

$$\widetilde{g}_{ij} = \sum_{k,\, m=1}^{n} \frac{\partial u^k}{\partial v^i}\frac{\partial u^m}{\partial v^j} g_{ij}.$$

Пусть M — поверхность, параметризованная координатами u^i; обозначим через du^i линейный функционал на касательном пространстве в произвольной точке этой поверхности, ставящий в соответствие касательному вектору его i-ю координату в базисе $r_1, \ldots, r_n$ (т.е., если $a = \sum a^j r_j$, то $du^i(a) = a^i$). Набор функционалов $du^1, \ldots, du^n$ образует базис в пространстве, сопряженном к касательному (двойственный базис к базису $r_1, \ldots, r_n$). Значение первой квадратичной формы на произвольном векторе a (т.е. квадрат длины этого вектора) можно записать так:

$$|\, a|^2 = \sum_{i,\, j=1}^{n} g_{ij} a^i a^j = \sum_{i,\, j=1}^{n} g_{ij} du^i du^j(a),$$

где под произведением $du^i du^j$ понимается квадратичная форма:

$$du^i du^j(a) = \frac{1}{2}(du^i(a) du^j(a) + du^j(a) du^i(a)).$$

Саму первую квадратичную форму принято обозначать ds^2 (имея в виду, что это квадрат длины); в этих обозначениях:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, du^i du^j.$$

Такие обозначения чрезвычайно удобны, поскольку *при замене координат $u^i = u^i(v)$ на поверхности функционалы du^i преобразуются в точности как дифференциалы соответствующих функций* (докажите!):

$$du^i = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u^i}{\partial v^j}\, dv^j;$$

поэтому, зная матрицу первой квадратичной формы в одной системе координат, ее легко вычислить в любой другой, подставляя в формулу для ds^2 старые координаты, как функции от новых (при этом их надо подставлять как в аргументы функций g_{ij}, так и в “дифференциалы” du^j).

Задачи.

1. Найти первую квадратичную форму:

   (a) катеноида — поверхности вращения кривой $x = a\,\mathrm{ch}(u/a), z = u$ вокруг оси Oz;

   (b) геликоида общего вида — поверхности, получающейся равномерным вращением плоской кривой вокруг оси и одновременным равномерным движением вдоль этой оси;

   (c) поверхности, образованной касательными к некоторой кривой;

   (d) эллипсоида, гиперболоида, параболоида;

   (e) тора вращения — поверхности, полученной вращением окружности вокруг оси, не пересекающей ее;

   (f) поверхности, образованной нормалями (бинормалями) к заданной пространственной кривой;

2. Найти угол между кривыми:

   (a) $u + v = 0$, $u - v = 0$ на поверхности $r = (u\cos v, u\sin v, av)$;

   (b) $v = u + 1$, $v = 3 - u$ на поверхности $r = (u\cos v, u\sin v, u^2)$;

3. Найти длину дуги между произвольными точками кривой $v = \ln|\,u \pm \sqrt{u^2 + a^2}| + C$ на поверхности $r = (u\cos v, u\sin v, av)$.

4. Найти периметр и углы треугольника, образованного кривыми $u = \pm\, av^2/2$, $v = 1$ на поверхности $r = (u\cos v, u\sin v, av)$.

5. Найти кривые, делящие пополам углы между линиями $u = \mathrm{const}, v = \mathrm{const}$ на поверхности $r = (u\cos v, u\sin v, u^2/2)$.

6. Найти локсодромы (кривые, пересекающие меридианы под постоянным углом) на сфере. Написать уравнения локсодром на поверхности вращения.

4 Лекция 4. Ковариантное дифференцирование на поверхностях. Параллельный перенос касательных векторов. Геодезические линии

§ **1**. **Ковариантное дифференцирование на поверхностях. Ковариантная производная векторного поля.**

Теперь мы рассмотрим два тесно связанных между собой вопроса — как правильно определить производные от касательных векторов к поверхности и как параллельно переносить такие векторы. Первый из этих вопросов естественно возникает при вычислении ускорений кривых. Действительно, пусть γ — кривая на поверхности; ее ускорение — это производная от вектора скорости, т.е. от касательного вектора к поверхности. Эту производную можно вычислить, рассмотрев кривую γ как пространственную и затем продифференцировав ее вектор скорости. Однако при этом получится вектор, который, вообще говоря, не будет касаться поверхности — для того, чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть в качестве γ пересечение поверхности с двумерной плоскостью, проходящей через какую-либо точку $P \in M$ и не лежащей в касательном пространстве $T_P M$. Ясно, что вектор ускорения такого сечения, вычисленный в точке P, будет лежать в этой плоскости, т.е. не будет касаться поверхности. С другой стороны, с точки зрения жителя поверхности, такие векторы не имеют никакого смысла — он может "наблюдать" только касательные векторы к поверхности. Поэтому для такого жителя ускорение кривой должно вычисляться как-то иначе.

Аналогичное явление происходит при попытке параллельно перенести касательный вектор из точки P поверхности в другую точку Q. Действительно, согласно известным правилам параллельного переноса в евклидовом пространстве, для этого надо просто построить в точке Q точно такой же (по величине и направлению) вектор, какой был в исходной точке. Однако в результате такой операции (как и в результате дифференцирования) касательный вектор к поверхности перестает, вообще говоря, быть таковым — в качестве простейшего примера можно рассмотреть, например, параллельный перенос из полюса двумерной сферы в точку ее экватора. Действительно, если касательный вектор к сфере в полюсе касался какого-то меридиана, то после параллельного переноса в точку пересечения этого меридиана с экватором он станет перпендикулярным касательной плоскости к сфере. Поэтому "с внутренней точки зрения" (т.е. с точки зрения жителя поверхности) параллельный перенос должен выглядеть по-другому.

Оказывается, оба эти вопроса (о дифференцировании и параллельном переносе) могут быть решены при помощи одной и той же конструкции — ковариантной производной векторного поля.

Рассмотрим на поверхности кривую γ, параметризованную параметром t; пусть a — вектор скорости этой кривой. Самый простой способ изготовить из вектора ускорения da/dt касательный вектор к поверхности — это спроектировать его на касательную плоскость.

Определение 1. Ковариантным ускорением $\nabla_\gamma a$ кривой γ называется вектор $\Pi(da/dt)$, где Π — ортогональная проекция на касательную плоскость к поверхности. Длина ковариантного ускорения называется геодезической кривизной кривой γ и обозначается k_g: $k_g = |\nabla_\gamma a|$.

Ясно, что ковариантное ускорение зависит не только от кривой как геометрического места точек, но и от выбора параметра на ней — от этого выбора, как известно, зависит и обычный вектор ускорения. Для того, чтобы иметь возможность вычислять ковариантные производные от касательных векторов вдоль любых кривых, удобно развить для этих производных аппарат, аналогичный аппарату частных производных функций нескольких переменных (зная правила вычисления частных производных функций нескольких переменных, можно вычислять по универсальным формулам производные от функций, ограниченных на любые кривые — именно, производная df/dt функции $f(x^1, \ldots, x^n)$, рассматриваемая как функция переменной t на кривой $x^i = x^i(t)$, имеет вид $\sum \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}$). Для того, чтобы это сделать, надо определить семейства касательных векторов к поверхности, зависящие от произвольной точки на поверхности (т.е. меняющиеся от точки к точке касательные векторы). Такие семейства называются векторными полями.

Определение 2. Гладкое векторное поле $a(P)$ на поверхности M — это касательный вектор к M, заданный в каждой точке этой поверхности и гладко меняющийся от точки к точке. Последнее условие означает следующее. Каждый касательный вектор определяется своими координатами a^i в базисе $r_1, \ldots, r_n$; если вектор задан в каждой точке, то a^i — функции параметров $u^1, \ldots, u^n$. Гладкая зависимость вектора от точки поверхности означает, что эти функции бесконечно дифференцируемы.

Таким образом, в координатах каждое гладкое векторное поле определяется заданием n функций от n переменных — $a^i(u^1, \ldots, u^n)$. Определим теперь (частные) ковариантные производные векторного поля $a(P)$. Для этого рассмотрим произвольную точку Q поверхности и зафиксируем все ее координаты кроме одной, например, u^i, т.е. рассмотрим на поверхности координатную линию i-й координаты, проходящую через точку Q. В каждой точке этой кривой имеется вектор a; таким образом, мы получили семейство N-мерных векторов $a(u^i)$.

Определение 3. Ковариантной производной $\nabla_i a$ векторного поля $a(P)$ по координате u^i в точке Q называется вектор $\Pi(\partial a(u^i)/\partial u^i)$, вычисленный в точке Q. Здесь Π — ортогональный проектор на касательную плоскость к поверхности.

Замечание 1. *Очевидно, вычисляя ковариантную производную $\nabla_i a$ во всех точках поверхности, получим новое гладкое векторное поле.* ■

Аналогично производным по направлению от функций n переменных определяется ковариантная производная от векторного поля вдоль касательного вектора. Именно, пусть $a(P)$ — векторное поле и $b = \sum b^i r_i(Q)$ — касательный вектор к поверхности в точке Q.

Определение 4. Ковариантной производной $\nabla_b a$ векторного поля a вдоль вектора b называется касательный вектор $\sum b^i \nabla_i a$, где производные $\nabla_i a$ вычисляются в точке Q.

Очевидно, ковариантная производная вдоль вектора b может быть описана следующим образом. Рассмотрим гладкую кривую γ, лежащую на поверхности, проходящую через точку Q и имеющую в этой точке вектор скорости, равный b (такая кривая всегда существует). Рассмотрим векторное поле a в точках этой кривой — это дифференцируемое семейство N-мерных векторов $a(t)$, зависящее от параметра t на кривой. Ковариантная производная $\nabla_b a$ имеет вид:

$$\nabla_b a = \Pi\left(\left.\frac{da(t)}{dt}\right|_{t=t_0}\right),$$

где t_0 — значение параметра, определяющее точку Q.

Иногда приходится дифференцировать не векторные поля, а семейства касательных векторов, определенные только в точках некоторой кривой, лежащей на поверхности. Приведенная выше формула показывает, как определить такую производную. Пусть гладкая кривая γ задана параметрическими уравнениями $u^i = u^i(t)$; гладкое семейство $a(t)$ касательных векторов в точках γ задается набором из n дифференцируемых функций $a^i(t) : \ a(t) = \sum a^i(t) r_i(u(t))$.

Определение 5. Ковариантной производной $\nabla_\gamma a$ семейства векторов $a(t)$ вдоль кривой γ называется гладкое семейство векторов:

$$\nabla_\gamma a = \Pi\left(\frac{da(t)}{dt}\right).$$

В частности, определенное в начале этого пункта ковариантное ускорение кривой γ — это ковариантная производная вдоль кривой от семейства ее векторов скорости.

Замечание 2. *Пусть $a(t)$ — гладкое семейство касательных векторов в точках кривой γ. Рассмотрим произвольное векторное поле $\widetilde{a}$ на поверхности, совпадающее в точках γ с семейством $a(t)$. Выше было показано, что ковариантная производная $\nabla_b \widetilde{a}$ поля $\widetilde{a}$ вдоль вектора скорости b к кривой γ совпадает с ковариантной производной $\nabla_\gamma a$. В частности, эта производная одинакова для всех полей $\widetilde{a}$, совпадающих с $a(t)$ в точках γ.* ■

Замечание 3 (Простое, но важное замечание)**.** *Все ковариантные производные — касательные векторы к поверхности, т.е. естественные с точки зрения жителя поверхности объекты.* ■

§ 2. Свойства ковариантной производной.

Предложение 1. *Операция ∇ обладает следующими свойствами: если a, a' — векторные поля, f, f' — гладкие функции на поверхности (т.е. бесконечно дифференцируемые функции переменных u^i), b, b' — касательные векторы, то справедливы равенства:*

$$\nabla_{(fb+f'b')}a = f\nabla_b a + f'\nabla_{b'}a\,;$$

$$\nabla_b(a+a') = \nabla_b a + \nabla_b a';$$

$$\nabla_b(fa) = f\nabla_b a + a\,\partial_b(f);$$

$$\partial_b(a,a') = (\nabla_b a, a') + (a, \nabla_b a'),$$

где $\partial_b(f) = \sum b^i \partial f/\partial u^i$ — производная функции f вдоль касательного вектора b.

Доказательство. Первые два равенства очевидны. Третье следует из правила Лейбница: $\partial(af)/\partial u^i = f\partial a/\partial u^i + a\,\partial f/\partial u^i$. Докажем последнее равенство. Рассмотрим его правую часть:

$$(\nabla_b a, a') + (a, \nabla_b a') = \sum_{i=1}^n b^i[(\Pi(\frac{\partial a}{\partial u^i}), a') + (a, \Pi(\frac{\partial a'}{\partial u^i}))].$$

Поскольку оба вектора a, a' всюду касаются поверхности, а разность $\Pi(e) - e$ для любого вектора e направлена перпендикулярна касательной плоскости, оператор Π в правой части выписанного равенства можно опустить: $(\Pi(e), a) = (e, a)$, $(\Pi(e), a') = (e, a')\,\forall\, e$. После этого требуемая формула следует из правила Лейбница:

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\,(a, a') = (\frac{\partial a}{\partial u^i}\,, a') + (a\,, \frac{\partial a'}{\partial u^i}).$$

■

Замечание 4. *Очевидно, такими же свойствами обладает ковариантная производная семейства касательных векторов в точках произвольной кривой.* ■

§ 3. Вычисление ковариантных производных. Символы Кристоффеля.

Для того, чтобы аппаратом ковариантных производных можно было практически пользоваться, необходимо иметь формулы, выражающие их в координатах u^i на поверхности; в этом пункте мы получим такие формулы. Пусть $a(P)$ — гладкое векторное поле; в координатах это функции $a^i(u)$. В объемлющем пространстве поле $a(P)$ имеет вид $\sum a^i(u)r_i(u)$, где $r = r(u)$ — уравнения поверхности. Вычислим ковариантную производную $\nabla_j a$; имеем:

$$\nabla_j a = \sum_{i=1}^{n} \Pi(\frac{\partial}{\partial u^j} a^i(u)r_i(u)) = \sum_{i=1}^{n} \Pi(\frac{\partial a^i}{\partial u^j} r_i + a^i \frac{\partial r^i}{\partial u_j}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a^i}{\partial u^j} \Pi(r_i) + a^i \Pi(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u_j}).$$

Поскольку векторы r_i и так касаются поверхности, $\Pi(r_i) = r_i$ и формула приобретает вид:

$$\nabla_j a = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial a^i}{\partial u^j} r_i + a^i \Pi(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u_j}) \Big). \tag{1}$$

Таким образом, для нахождения ковариантной производной надо вычислить векторы $\Pi(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u_j})$. Эти векторы не зависят от поля $a(P)$ и определяются только поверхностью; каждый из них можно разложить по базису $r_1, \ldots, r_n$ в касательной плоскости. Найдем коэффициенты такого разложения.

Теорема 1. *Имеют место равенства:*

$$\Pi(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij} r_k, \tag{2}$$

где коэффициенты Γ^k_{ij} имеют вид:

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2} g^{km} (\frac{\partial g_{mi}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}). \tag{3}$$

Здесь g_{ij} — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, g^{ij} — элементы матрицы, обратной к g_{ij}.

Определение 6. Коэффициенты $\Gamma^i_{j\,k}$, определенные формулами (2), (3), называются символами Кристоффеля (иногда употребляют термин “символы Кристоффеля 2 рода”) или коэффициентами связности.

Доказательство. Для упрощения дальнейших формул введем обозначения $r_{ij} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}$. Разложим эти векторы на касательную и нормальную к поверхности составляющие; касательную составляющую, в свою очередь, разложим по базису $r_1, \ldots, r_n$. Получим:

$$r_{ij} = \sum_{s=1}^{n} \Gamma^s_{i\,j} r_s + m_{ij}, \; (r_k, m_{ij}) = 0, \tag{4}$$

где Γ^s_{ij} — некоторые (пока неопределенные) коэффициенты. Для их вычисления умножим равенства (4) скалярно на вектор r_m. Учитывая, что $(r_m, n_{ij}) = 0$, получим:

$$\Gamma_{ij,m} \overset{def}{=} (r_m, r_{ij}) = \Gamma^s_{ij}(r_s, r_m) = g_{sm}\Gamma^s_{ij}. \tag{5}$$

Вычислим сперва коэффициенты $\Gamma_{ij,m}$. Для этого продифференцируем по u^m равенство $g_{ij} = (r_i, r_j)$. Получим:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} = (r_i, r_{jm}) + (r_{im}, r_j) = \Gamma_{jm,i} + \Gamma_{im,j}. \tag{6}$$

Последние равенства выполнены для всех значений индексов i, j, m (каждый из них меняется от единицы до n). Поэтому в них можно циклически переставить эти индексы, т.е. заменить в (6) i на j, j на m и m на j. В результате получим:

$$\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} = \Gamma_{mi,j} + \Gamma_{ji,m}. \tag{7}$$

Повторяя эту операцию еще раз, получим:

$$\frac{\partial g_{mi}}{\partial u^j} = \Gamma_{ij,m} + \Gamma_{mj,i}\,. \tag{8}$$

Сложим теперь равенства (7) и (8) и вычтем из полученной суммы (6). Учитывая, что $r_{ij} = r_{ji}$ (теорема о равенстве смешанных частных производных) и потому для всех значений индексов $\Gamma_{ij,m} = \Gamma_{ji,m}$, получим в результате:

$$\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} = 2\Gamma_{ij,m}. \tag{8}$$

Поделим это равенство на 2 и подставим в формулу (5). Умножив полученное равенство на элемент g^{km} обратной к g_{km} матрицы и просуммировав по m от единицы до n, получим требуемые формулы (3). ■

Замечание 5. *Формулы (1) для ковариантных производных можно теперь переписать в виде:*

$$\nabla_i a = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\partial a^k}{\partial u^i} + \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k\, a^j\Big)\, r_k, \tag{9}$$

а производная вдоль касательного вектора $b = (b^1, \ldots, b^n)$ примет вид:

$$\nabla_b\, a = \sum_{i,\,k=1}^{n} \Big(\frac{\partial a^k}{\partial u^i} + \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k\, a^j\Big) b^i r_k. \tag{10}$$

■

Замечание 6. *Очевидно, символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам: $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Таким образом, набор этих символов — это $n^2(n+1)/2$ гладких функций от u^i.*

■

Замечание 7. *Функции $\Gamma_{ij,m}$, определенные формулами (5) и вычисляемые по формулам (9), называют иногда символами Кристоффеля первого рода.* ■

§ 4. Параллельный перенос касательных векторов.

Займемся теперь вопросом о правильном определении параллельного переноса касательных векторов на поверхности. Возникающая здесь трудность, как уже указывалось в начале предыдущего параграфа, аналогична трудности, возникающей при попытке продифференцировать касательный вектор — параллельный перенос в объемлющем пространстве “не уважает” поверхности (касательный вектор в результате переноса перестает быть таковым). Как мы сейчас увидим, эта трудность может быть преодолена при помощи уже введенного нами понятия ковариантной производной.

Пусть P и Q — точки на поверхности, a — касательный вектор в точке P. Рассмотрим сперва в качестве нашей поверхности евклидово пространство. Тогда параллельный перенос вектора a из точки P в Q — это построение в точке Q вектора, в точности такого же, как a. Эту процедуру можно себе представлять следующим образом. Соединим точки P и Q произвольной гладкой кривой γ и построим в каждой точке этой кривой вектор, равный a; другими словами, определим семейство векторов $a(t)$ (t — параметр на кривой), такое, что $da(t)/dt = 0$. Тогда вектор этого семейства, выходящий из точки Q, и будет результатом параллельного переноса вектора a из P в Q. Теперь определим аналогичную конструкцию на произвольной поверхности. Соединим точки P и Q гладкой кривой γ; пусть эти точки отвечают значениям t_1 и t_2 параметра t. Определим семейство $a(t)$ касательных к поверхности в точках кривой γ векторов так, чтобы их можно было считать одинаковыми; для этого потребуем, чтобы *ковариантная* производная векторов этого семейства вдоль кривой равнялась нулю.

Определение 7. Гладкое семейство $a(t)$ касательных к поверхности в точках кривой γ векторов называется параллельным вдоль γ, если:

$$\nabla_\gamma a = \nabla_v a = 0 \tag{11}$$

(здесь v — вектор скорости кривой γ).

Запишем условие параллельности в координатах. Пусть кривая γ задана уравнениями $u^i = u^i(t)$; тогда ее вектор скорости имеет вид $(du^1/dt, \dots, du^n/dt)$. Любое семейство касательных векторов имеет вид $(a^1(t), \dots, a^n(t))$; согласно формулам (10), (11) и определению ковариантной производной от семейства векторов, условие параллельности (11) запишется в виде:

$$\frac{da^i}{dt} + \sum_{j,\,k=1}^{n} \Gamma^i_{j\,k}(u^1(t), \dots, u^n(t)) a^j(t) \frac{du^k}{dt} = 0. \tag{12}$$

Равенства (11), (12) называются *уравнениями параллельного переноса вдоль кривой γ.*

Определим теперь процедуру параллельного переноса. Пусть в точке P задан касательный вектор $a = (a_0^1, \dots, a_0^n)$. Найдем семейство векторов, параллельное вдоль кривой γ и совпадающее в точке P с вектором a. Для этого надо решить систему (12) из n линейных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями $a^1(t_1) = a_0^1, \dots, a^n(t_1) = a_0^n$. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений гарантирует, что такое семейство существует и единственно. Рассмотрим вектор этого семейства в точке Q; это и есть *результат параллельного переноса вектора a из точки P в точку Q вдоль кривой γ.*

Замечание 8 (Очень важное!). *Результат параллельного переноса на поверхности зависит, вообще говоря, от того, вдоль какой кривой этот перенос осуществляется. Другими словами, для двух данных точек P, Q и данного касательного в точке P вектора a может существовать много векторов, получающихся из a в результате параллельного* *переноса в точку Q; каждый их них соответствует некоторой кривой γ, соединяющей эти две точки. В частности, если $P = Q$, то, перенося вектор a вдоль какой-либо замкнутой кривой, мы получим, вообще говоря, другой вектор, касающийся поверхности в той же точке. Таким образом, для каждой замкнутой кривой, начинающейся и заканчивающейся в точке P, возникает отображение $A : T_PM \to T_PM$ касательного пространства T_PM к поверхности в себя, определенное параллельным переносом вдоль этой кривой. Это отображение — линейный оператор (докажите!); он называется оператором голономии, соответствующим данной кривой.* ■

Задача 1. Найти оператор голономии, соответствующий параллели широты α на единичной сфере.

Ответ. Это оператор поворота на угол $2\pi \sin \alpha$.

Замечание 9. *Использование ковариантных производных при определении параллельного переноса неизбежно: если определить параллельное семейство векторов, как семейство с нулевой производной da/dt, то, как правило семейств касательных векторов, параллельных вдоль кривых, не будет существовать. Действительно, равенство $da/dt = 0$ — это n уравнений на N координат $(a^1(t), \dots, a^n(t))$ касательного вектора. Это обстоятельство фактически уже обсуждалось в начале предыдущего параграфа — геометрически оно означает, что параллельный перенос в трехмерном пространстве "выталкивает" вектор из касательного пространства к поверхности.* ■

§ 5. Свойства параллельного переноса.

Пусть P, Q — точки на поверхности M, T_PM, T_QM — соответствующие касательные плоскости, γ — гладкая кривая на M, соединяющая P с Q.

Теорема 2. *Параллельный перенос вдоль γ из P в Q — линейный ортогональный оператор, действующий из T_PM в T_QM.*

Доказательство. Линейность оператора параллельного перенесения очевидна: если $a(t)$, $a'(t)$ — семейства векторов, параллельные вдоль γ, то семейство $ca(t) + c'a'(t)$ (c, c' — числа) также параллельно (докажите!). Чтобы доказать его ортогональность, надо проверить, что параллельный перенос не меняет скалярного произведения векторов. Для этого рассмотрим параллельные семейства $a(t), a'(t)$; их скалярное произведение $f(t) = (a(t), a'(t))$ — дифференцируемая функция одной переменной t. Вычислим ее производную. Используя свойства ковариантной производной (см. Предложение 1 из § **1**.), получим:

$$\frac{df}{dt} = (\nabla_b\, a, a') + (a, \nabla_b\, a'),$$

где b — касательный вектор к кривой γ. Из параллельности рассматриваемых семейств следует, что оба слагаемых в правой части равны нулю. Поэтому функция f не зависит от t; в частности, она одинакова в точках, соответствующих P и Q. Это и означает, что скалярное произведение сохраняется при параллельном переносе. ■

Следствие 1. *При параллельном переносе сохраняются длины векторов и углы между векторами.* ■

§ 6. Геодезические.

Понятие ковариантной производной (или параллельного переноса) позволяет определить на поверхности линии, аналогичные прямым на плоскости (или в трехмерном пространстве). Действительно, прямые — это в точности те кривые на плоскости, ускорение которых равно нулю, если параметр натуральный. Другими словами, они обладают следующим свойством: их вектор скорости параллелен вдоль них (параллельно перенося касательный вектор к прямой вдоль нее, мы все время будем получать касательный к ней вектор).

Определение 8. Кривая γ на поверхности называется геодезической, если ее ковариантное ускорение равно нулю (другими словами, равна нулю геодезическая кривизна), т.е. единичный вектор скорости v параллелен вдоль нее: $\nabla_v v = 0$.

Выпишем уравнения, которым должны удовлетворять геодезические в координатах $u^1, \ldots, u^n$ на поверхности. Если уравнения этой кривой $u^i = u^i(s)$ (s — натуральный параметр), то, подставляя в уравнения параллельного переноса (12) в качестве a^i компоненты $\dot{u}^i$ вектора скорости, получим *уравнения геодезических*:

$$\ddot{u}^i + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}(u^1(s), u^2(s))\dot{u}^j \dot{u}^k = 0. \tag{13}$$

Замечание 10. *Уравнения геодезических (13) представляют собой систему из n нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка на n неизвестных функций $u^1(s), \ldots, u^n(s)$. Из теоремы существования и единственности решения задачи Коши для таких уравнений следует, что локально (т.е. при достаточно малых s) эта система имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям:*

$$u^i(0) = Q^i, \quad \dot{u}^i(0) = a^i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Задание таких условий эквивалентно заданию начальной точки $Q = (Q^1, \ldots, Q^n)$ и начального вектора скорости $a = (a^1, \ldots, a^n)$ нашей кривой. Таким образом, мы получаем следующий вывод: через каждую точку поверхности в каждом направлении проходит ровно одна геодезическая. ■

Замечание 11. *Рассматривая кривую на поверхности как пространственную и используя определение ковариантной производной, условие параллельности касательного вектора вдоль кривой можно переформулировать так: проекция вектора ускорения этой кривой в натуральном параметре на касательную плоскость к поверхности равно нулю. Другими словами, геодезические — это ровно те кривые вектор главной нормали к которым в каждой точке перпендикулярен поверхности.* ■

Замечание 12. *Пусть две n-мерные поверхности M и Q касаются друг друга вдоль общей кривой γ, т.е. в любой точке $\gamma(t)$ этой кривой касательные пространства к поверхностям совпадают: $T_{\gamma(t)}M = T_{\gamma(t)}Q$. Тогда, очевидно, ковариантная производная вдоль γ от любого семейства касательных векторов на поверхности M совпадает с ковариантной производной от того же семейства на поверхности Q. Поэтому параллельный перенос вдоль этой кривой на поверхностях M и Q — одно и то же: любое семейство векторов, параллельное вдоль γ на M, параллельно и на Q. По той же причине γ — геодезическая на M тогда и только тогда, когда она является геодезической на Q. Этими свойствами удобно пользоваться при практическом вычислении параллельного переноса: иногда бывает возможно подобрать достаточно простую поверхность, касающуюся данной в точках кривой, вдоль которой надо перенести касательный вектор. В этом случае его можно переносить на этой простой поверхности.* ■

Задачи.

1. Найти символы Кристоффеля:
   (a) на сфере;
   (b) на эллипсоиде;
   (c) на конусе;
   (d) на катеноиде; $x = a\,\mathrm{ch}(u/a)\cos v$, $y = a\,\mathrm{ch}(u/a)\sin v$, $z = u$;
   (e) на геликоиде $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$.

2. На какой угол повернется вектор при параллельном переносе вдоль:
   (a) замкнутой кривой на цилиндре;
   (b) замкнутой кривой на конусе;
   (c) параллели на сфере;
   (d) треугольника на сфере, состоящего из двух отрезков меридианов и части экватора;
   (e) треугольника на сфере, состоящего из двух отрезков меридианов и части параллели?

3. Параллельно перенести вектор вдоль параллели на поверхности вращения.

4. Параллельно перенести вектор вдоль пространственной кривой на поверхности, образованной главными нормалями (бинормалями) к этой кривой.

5. Найти геодезические:
   (a) на евклидовой плоскости;
   (b) на сфере;
   (c) на конусе;
   (d) на цилиндрической поверхности;
   (e) на плоскости Лобачевского;
   (f) на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ с метрикой $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/(x^2 + y^2)^2$.

6. Будет ли геодезической на поверхности вращения:
   (a) параллель;
   (b) меридиан?

7. Для геодезических на поверхности вращения доказать теорему Клеро: $\rho\cos\mu = \mathrm{const}$, где ρ — расстояние от точки геодезической до оси вращения, μ — угол между геодезической и параллелью.

8. Исследовать поведение геодезических:
   (a) на эллипсоиде вращения;
   (b) на однополостном гиперболоиде вращения;
   (c) на торе вращения.

9. Доказать, что геодезические на поверхности с лиувиллевой метрикой $ds^2 = (f(x) + \varphi(y))(dx^2 + dy^2)$ задаются уравнениями:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)+a}} = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)-a}} + b.$$

5 Лекция 5. Вторая квадратичная форма поверхности. Кривизны

§ 1. **Нормальные сечения и вторая квадратичная форма поверхности.**

Займемся теперь изучением локального строения поверхности с точностью до бесконечно малых второго порядка. Для этого мы используем тот же прием, который привел нас к изучению касательной плоскости — рассмотрим всевозможные кривые, лежащие на поверхности. Отклонение каждой такой кривой от ее касательной описывается кривизной (или ускорением). Посмотрим, через какие характеристики поверхности выражаются кривизны лежащих на ней кривых, и изучим эти характеристики. При этом мы ограничимся рассмотрением простейшего случая т.н. гиперповерхностей, т.е. поверхностей, размерность которых на единицу меньше размерности объемлющего пространства (типичный пример — двумерные поверхности в $\mathbb{R}^3$).

Определение 1. Поверхность размерности n в $\mathbb{R}^N$ называется гиперповерхностью, если $N = n + 1$.

В этой и следующей лекциях всюду рассматриваются гиперповерхности. Нормальные пространства к гиперповерхности одномерны; зафиксируем гладко зависящий от точки единичный вектор m из этого пространства. Если на поверхности заданы координаты $u^1, \ldots, u^n$, вектор m можно определить по формуле, аналогичной формуле векторного произведения:

$$m = \det \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_{n+1} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial u^1} & \ldots & \dfrac{\partial x^{n+1}}{\partial u^1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial u^n} & \ldots & \dfrac{\partial x^{n+1}}{\partial u^n} \end{pmatrix},$$

где $e_1, \ldots, e_{n+1}$ — базисные орты в $\mathbb{R}^{n+1}$ и определитель считается разложенным по первой строке.

Пусть P — точка на поверхности $M : r = r(u)$, координаты которой u_0^i. Устройство поверхности вблизи P можно исследовать следующим образом. Будем пересекать M двумерными плоскостями, проходящими через единичный вектор нормали m к гиперповерхности в этой точке; ясно, что таких плоскостей бесконечно много — можно произвольным образом выбрать единичный вектор a в касательном пространстве $T_P M$ и затем провести плоскость через векторы m и a. Каждая плоскость будет высекать на поверхности некоторую кривую; малые отрезки этих кривых, содержащие внутри себя точку P, заполнят некоторую окрестность этой точки на поверхности.

Определение 2. Кривая, получающаяся пересечением поверхности M и двумерной плоскости, проходящей через вектор нормали к M в точке P, называется нормальным сечением M в этой точке.

Поверхность вблизи точки P "склеена" из нормальных сечений; поэтому мы начнем с изучения кривизн этих кривых. Поскольку каждое из нормальных сечений — плоская кривая, и, кроме того, в точке P задан вектор m, перпендикулярный касательной к любой из этих кривых, кривизне нормального сечения в точке P можно приписать знак (см. Замечание в конце первой лекции). Именно, через $\widetilde{k}$ обозначим число, равное кривизне нормального сечения, если вектор главной нормали к нему в точке P направлен в ту же сторону, что и вектор m, и кривизне со знаком "минус", если направления этих двух векторов противоположны. Другими словами, если ускорение при движении по нормальному сечению направлено по вектору m (т.е. центр соприкасающейся окружности находится в этом направлении от точки P), то $\widetilde{k}$ положительно, а если ускорение направлено в противоположную сторону, то $\widetilde{k}$ отрицательно. В дальнейшем "кривизну со знаком" $\widetilde{k}$ будем называть просто кривизной. Заметим, что число $\widetilde{k}$ однозначно определяется заданием касательного вектора a к нормальному сечению в точке P; таким образом, на касательном пространстве T_PM к поверхности возникает функция, сопоставляющая каждому касательному вектору кривизну (нормального) сечения поверхности плоскостью, проведенной через этот вектор (и вектор нормали m). Эта функция, очевидно, не зависит от длины касательного вектора a; оказывается, после умножения на $|a|^2$ она становится квадратичной формой.

Определение 3. Второй квадратичной формой гиперповерхности M в точке P называется функция $b\,(a,a)$ на касательном пространстве T_PM, сопоставляющая вектору a умноженную на $|a|^2$ кривизну нормального сечения, проведенного в направлении этого вектора:

$$b(a,a) = |a|^2\,\widetilde{k}(a).$$

Предложение 1. *Функция b действительно является квадратичной формой, заданной в пространстве T_PM; матрица этой формы в каноническом базисе, порожденном системой координат $u^1,\dots,u^n$ имеет вид:*

$$b_{ij} = (m(P), r_{ij}(P)) \equiv (m(P), \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}(P)).$$

Доказательство. Пусть s — натуральный параметр на нормальном сечении, отсчитываемый от точки P (т.е. в этой точке $s=0$), и $u^i = u^i(s)$ — уравнения нормального сечения на поверхности. Уравнения этой кривой в объемлющем пространстве имеют вид $r = r(u(s))$; ясно, что кривизна $\widetilde{k}$ имеет вид $\widetilde{k} = (m, \ddot{r}(0))$ (докажите!). Дважды применяя теорему о производной сложной функции, получаем:

$$\ddot{r}(0) = \frac{d}{ds}\sum_{i=1}^{n} r_i\,\dot{u}^i|_{s=0} = \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(P)\dot{u}^i(0)\dot{u}^j(0) + r_i(P)\ddot{u}^i(0), \tag{1}$$

где:

$$r_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}, \quad r_{ij} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}.$$

Умножая вектор $\ddot{r}(0)$ скалярно на m и учитывая, что $(r_i(P), m) = 0$, получим:

$$\widetilde{k} = \sum_{i,j=1}^{n} (m, r_{ij}(P))\dot{u}^i(0)\dot{u}^j(0). \tag{2}$$

Таким образом, кривизна нормального сечения действительно является квадратичной функцией от координат единичного вектора скорости. Если в качестве касательного вектора взять вектор a, длина которого не равна единице, функция b, вычисленная на этом векторе, очевидно, будет равна:

$$b(a,a) = |a|^2\widetilde{k}(a) = |a|^2\widetilde{k}(v) = |a^2|\sum_{i,j=1}^{n}(m, r_{ij})v^iv^j = \sum_{i,j=1}^{n}(m, r_{ij})a^ia^j,$$

где $v = \dfrac{a}{|a|}$ — единичный вектор, касающийся нормального сечения. ∎

Задача 1. Найти закон преобразования коэффициентов второй квадратичной формы при замене координат $u \to v$ на поверхности.

Ответ.

$$\widetilde{b}_{ij} = \sum_{k,\,m=1}^{n} \frac{\partial u^k}{\partial v_i} \frac{\partial u^m}{\partial v_j}\, b_{km}.$$

§ 2. Формулы Менье.

Вторая квадратичная форма позволяет вычислять кривизны (ускорения) всевозможных нормальных сечений в данной точке; тем самым она описывает, как искривлена вблизи этой точки сама поверхность. Прежде чем переходить к более детальному изучению этого искривления, покажем, как при помощи второй квадратичной формы вычислять кривизны произвольных кривых на поверхности. Прежде всего напомним, что $|\,a|^2 = g(a,a)$, где g — первая квадратичная форма поверхности. Отсюда получаем окончательное выражение для кривизны нормального сечения:

$$\widetilde{k} = \frac{b(a,a)}{g(a,a)} = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}\, a^i a^j}{\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, a^i a^j}, \tag{3}$$

где $a^i = du^i/dt$. Таким образом, *кривизна нормального сечения γ равна отношению второй и первой квадратичных форм поверхности, вычисленных на касательном векторе к γ.*

Рассмотрим теперь произвольную кривую l, лежащую на поверхности и проходящую через точку P. Пусть ν — вектор главной нормали к l в точке P. Если $r = r(s)$ — натуральная параметризация пространственной кривой l, то $\ddot{r}(0) = k\nu(P)$, где k — кривизна l в точке P (натуральный параметр s отсчитывается от точки P). Умножая это равенство на вектор m нормали к поверхности, получаем:

$$(m, \ddot{r}(P)) = k(m, \nu).$$

Левая часть равенства вычислена выше (см. (1)–(3)): она равна кривизне $\widetilde{k}$ нормального сечения, проведенного через касательный вектор a к кривой l. Правая часть, очевидно, равна произведению кривизны кривой k на косинус угла φ между векторами m и ν. Отсюда получаем формулу:

$$k\cos\varphi = \widetilde{k} = \frac{b(a,a)}{g(a,a)}. \tag{4}$$

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть l — произвольная кривая на поверхности M, проходящая через точку P, a — касательный вектор к l в этой точке, и γ — нормальное сечение M плоскостью, проходящей через вектор a (таким образом, γ лежит в плоскости векторов a и m — вектора нормали к поверхности). Тогда кривизны k и $\widetilde{k}$ кривых l и γ соответственно определяются по формулам (4), (3), где g, b — первая и вторая квадратичные формы поверхности M в точке P, φ — угол между векторами ν — главной нормали к кривой l и m — нормали к поверхности M (оба вектора вычислены в точке P).* ■

Замечание 1. *Приведенная теорема называется теоремой Менье.* ■

Замечание 2. *Кривизна $\widetilde{k}$ нормального сечения γ, касающегося кривой l в точке P (т.е. имеющего общий с l вектор скорости), называется нормальной кривизной кривой l в этой точке. Другими словами, нормальная кривизна — это проекция вектора ускорения кривой на нормаль к поверхности (если параметр на кривой натуральный).* ■

§ 3. Главные кривизны и главные направления. Формула Эйлера.

Рассмотрим теперь геометрические характеристики поверхности, определяемые второй квадратичной формой. Зная эту форму, можно вычислять кривизны всех нормальных сечений поверхности в фиксированной точке P. Эти кривизны показывают, на сколько и в какую сторону (относительно вектора нормали к поверхности) искривляется поверхность вблизи данной точки.

Кривизна нормального сечения однозначно определяется его вектором скорости в точке P; меняя направление этого вектора и вычисляя для каждого значения угла кривизну $\widetilde{k}$, мы получим дифференцируемую функцию на $(n-1)$-мерной сфере (множестве единичных векторов в n-мерном касательном пространстве). Мы сейчас опишем эту функцию явной формулой; в частности, легко вычисляются точки экстремума этой функции — они определяют направления, в которых кривизна нормального сечения максимальна или минимальна. Для этого нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть P — точка на поверхности M. Тогда существует базис $e_1, \ldots, e_n$ в касательном пространстве к M в точке P, в котором матрица первой квадратичной формы — единичная, а матрица второй квадратичной формы — диагональная. Диагональные элементы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ этой матрицы суть корни уравнения:*

$$\det(B - \lambda G) = 0, \tag{5}$$

где G и B — матрицы первой и второй квадратичных форм соответственно в базисе $r_1, \ldots, r_n$ (т.е. B — матрица с элементами b_{ij}, а G — матрица с элементами g_{ij}). Столбцы $a_1, \ldots, a_n$ координат векторов $(e_1, \ldots, e_n)$ в базисе $r_1, \ldots, r_n$ — нуль–векторы матриц $(B - \lambda_j G)$:

$$(B - \lambda_j G)a_j = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Существование базиса $e_1, \ldots, e_n$ сразу следует из известной теоремы линейной алгебры о приведении квадратичной формы к главным осям ортогональным преобразованием. Действительно, пусть $f_1, \ldots, f_n$ — произвольный ортонормированный базис в касательном пространстве $T_P M$. В этом базисе матрица первой квадратичной формы единичная (т.к. это матрица скалярных произведений базисных векторов), а матрица второй квадратичной формы — какая-то. Совершим теперь в касательной плоскости ортогональное преобразование, приводящее вторую квадратичную форму к главным осям. Базис $f_1, \ldots, f_n$ перейдет при этом в новый базис $e_1, \ldots, e_n$ (базис главных осей); матрица второй квадратичной формы в нем диагональна. Кроме того, этот базис ортонормирован (т.к. он получен из ортонормированного ортогональным преобразованием), поэтому матрица первой квадратичной формы в нем единичная.

Запишем теперь эту процедуру в координатах. Пусть $\widetilde{B}$ — матрица второй квадратичной формы в базисе $f_1, \ldots, f_n$, а T — матрица перехода от базиса $r_1, \ldots, r_n$ к $f_1, \ldots, f_n$. Тогда $\widetilde{B} = T^t BT$, $E = T^t GT$ (E — единичная $n \times n$-матрица). Собственные числа λ_j квадратичной формы b находятся из характеристического уравнения $\det(\widetilde{B} - \lambda E) = 0$; подставляя сюда предыдущие формулы, перепишем это уравнение в виде:

$$\det(T^t BT - \lambda T^t GT) = \det(T^t(B - \lambda G)T) = (\det T)^2 \det(B - \lambda G) = 0,$$

откуда получаем (5). Таким образом, осталось только проверить формулу (6). Обозначим через $q_1, \ldots, q_n$ столбцы из координат векторов $e_1, \ldots, e_n$ в базисе $f_1, \ldots, f_n$. Эти столбцы — нуль-векторы матриц $(\widetilde{B} - \lambda_j E)$; с другой стороны, они связаны со столбцами $a_1, \ldots, a_n$ формулами $a_j = T q_j$. Отсюда получаем:

$$0 = (\widetilde{B} - \lambda_j E)\, q_j = T^t(B - \lambda_j G)T q_j = T^t(B - \lambda_j G)a_j,$$

откуда немедленно следует (6). ■

Определение 4. Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ называются *главными кривизнами*, а направления векторов $e_1, \dots, e_n$ (т.е. прямые, проходящие через эти векторы) — *главными направлениями* поверхности M в точке P.

Замечание 3. *Если все главные кривизны различны, то главные направления определены однозначно — в этом случае ранг матриц $(B - \lambda_j G)$ равен $n-1$. Если же k главных кривизн совпадают, то эти матрицы имеют ранг $n-k$, и в касательном пространстве имеется k-мерное подпространство, любое направление в котором — главное. Если поверхность двумерна, то в каждой точке имеется всего две главных кривизны; если они совпадают, то любое касательное направление — главное (в частности, в качестве базиса e_1, e_2 можно взять любой ортонормированный базис в касательной плоскости). В последнем случае точка P двумерной поверхности M называется омбилической (или точкой закругления). В омбилической точке поверхность имеет касание второго порядка с некоторой сферой.* ■

Среди чисел λ_j содержатся максимальное и минимальное значения кривизн нормальных сечений. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим произвольное нормальное сечение поверхности M в точке P. Оно задается направлением своего единичного касательного вектора v, которое, в свою очередь, определяется своими углами $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ с главными направлениями: $v = \sum e_i \cos \alpha^{\mathrm{i}}$. Подставляя это выражение в формулу Менье (3), получим с учетом диагональности матрицы второй квадратичной формы в базисе $e_1, \dots, e_n$:

$$\widetilde{k} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cos^2 \alpha^i. \tag{7}$$

Замечание 4. *Формула (7) называется формулой Эйлера.* ■

Пусть λ_1 — максимальная среди главных кривизн.

Представив $\cos^2 \alpha^1$ в виде:

$$1 - \sum_{i=1}^{n-1} \cos^2 \alpha^i,$$

получим из (7):

$$\widetilde{k} = \lambda_1 - \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_1 - \lambda_i) \cos^2 \alpha^i.$$

Из последней формулы, очевидно, следует, что $\widetilde{k} \leq \lambda_1$ и при $\alpha^i = 0$, $i = 1, \dots, n-1$, $\widetilde{k} = \lambda_1$, т.е. кривизна нормального сечения, проведенного через главное направление, соответствующее максимальной главной кривизне, максимальна и равна этой главной кривизне. Аналогично получаем, что кривизна нормального сечения, проведенного через главное направление, соответствующее минимальной главной кривизне, минимальна. Если несколько главных кривизн совпадают, то кривизны всех нормальных сечений, касательные векторы к которым лежат в соответствующем инвариантном подпространстве, совпадают и равны главной кривизне (докажите!).

§ 4. Гауссова и средняя кривизны поверхности.

Часто вместо главных кривизн удобнее пользоваться другими величинами, которые через них выражаются.

Определение 5. Гауссовой кривизной K поверхности M в точке P называется произведение главных кривизн, а средней кривизной H — их сумма:

$$K = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n; \quad H = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n.$$

Замечание 5. *Иногда средней кривизной называют среднее арифметическое главных кривизн.* ■

Вычислительные формулы для гауссовой и средней кривизны немедленно следуют из теоремы о корнях характеристического уравнения. Именно, перепишем уравнение для главных кривизн в виде $\det(BG^{-1} - \lambda E) = 0$. Применяя указанную теорему, получаем:

$$H = \operatorname{tr}(BG^{-1}),\ K = \det(BG^{-1}) = \frac{\det B}{\det G}.$$

§ **5. Геометрический смысл первой и второй квадратичных форм.**

Обсудим геометрический смысл первой и второй квадратичных форм. Как мы видели выше, первая квадратичная форма полностью определяет геометрию, возникающую на самой поверхности — длины, углы, операцию параллельного переноса и аналоги прямых (геодезические) можно вычислять, зная только матрицу $g_{ij}(u)$. Вторая квадратичная форма (и, в частности, главные кривизны) показывает, в какую сторону и насколько искривлена поверхность в объемлющем пространстве (в этом смысле информация, доставляемая главными кривизнами, похожа на информацию, доставляемую кривизной и кручением пространственной кривой). В частности, вторая квадратичная форма определяет локальное расположение поверхности M относительно касательного пространства к ней в точке P. Именно, зафиксируем на поверхности M точку P и вектор нормали m в этой точке и рассмотрим в окрестности P на M функцию δ, равную отклонению точки поверхности от касательного пространства T_PM в точке P. Это – гладкая функция n переменных u, обращающаяся в нуль в точке P.

Утверждение 1. *Точка P — критическая точка функции δ, причем ее матрица Гессе в точке P совпадает с матрицей второй квадратичной формы поверхности в этой точке.*

Доказательство. Очевидно, функция $\delta(u)$ имеет вид $\delta(u) = (m(P), r(u) - r(P))$. Ее первые производные:

$$\frac{\partial \delta}{\partial u^j} = (r_j(u), m(P))$$

обращаются в нуль в точке P, так что P — критическая точка δ. Далее, вторые производные этой функции в точке P имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial u^i \partial u^j} = (r_{ij}(P), m(P)) = b_{ij}(P).$$

■

Следствие 1. *Если все главные кривизны одного знака, то функция δ имеет в точке P экстремум (т.к. матица вторых производных знакоопределена), т.е. в некоторой проколотой окрестности этой точки она сохраняет знак. Это означает, что некоторая окрестность точки P на поверхности M целиком лежит по одну сторону от касательного пространства T_PM.*

Если среди главных кривизн поверхности в точке P есть как положительные, так и отрицательные, то P — седловая точка для функции δ. Это означает, что в любой окрестности точки P на M найдутся как точки, в которых $\delta > 0$, так и точки, в которых $\delta < 0$. Другими словами, любая такая окрестность пересекается касательным пространством T_PM, и часть ее лежит по одну, а часть — по другую сторону от этого пространства.

Если же среди главных кривизн есть нулевые, а все остальные одного знака, то матрица второй квадратичной формы не определяет полностью поведения функции δ

(т.е. расположения M относительно касательного пространства T_PM) в окрестности точки P. Для исследования этого поведения необходимо рассматривать третьи производные функции $r(u)$ в этой точке. ■

Задачи.

1. Найти вторую квадратичную форму:
   (a) поверхности вращения;
   (b) сферы;
   (c) эллипсоида, гиперболоида, параболоида вращения;
   (d) катеноида;
   (e) геликоида.

2. Найти главные кривизны и главные направления в вершинах двуполостного гиперболоида $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$.

3. Найти главные кривизны и главные направления прямого геликоида $r = (u \cos v, u \sin v, av)$, его гауссову и среднюю кривизны.

4. Найти главные кривизны поверхности $z = xy$ в точке $(1, 1, 1)$.

5. Найти гауссову кривизну параболоида $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 2z$.

6. Дана поверхность $r = (u^2 + v^2, u^2 - v^2, uv)$ и точка $P : u = v = 1$. Найти в этой точке главные кривизны поверхности и кривизну нормального сечения, касательного к кривой $v = u^2$.

7. Найти гауссову и среднюю кривизну поверхности $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

8. Найти гауссову кривизну поверхности, у которой $ds^2 = du^2 + \exp(2u)dv^2$.

9. Найти омбилические точки на эллипсоиде вращения.

10. Поверхность S задана уравнениями $r = r_0(u, v)$, а поверхность S^* — уравнениями $r = r_0(u, v) + am(u, v)$. Выразить среднюю и гауссову кривизны поверхности S^* через среднюю и гауссову кривизны поверхности S.

6 Лекция 6. Деривационные формулы. Восстановление поверхности по паре квадратичных форм. Уравнения Гаусса и Кодацци. Теорема Гаусса. Гауссова кривизна

§ **1. Деривационные формулы.**

С каждой точкой гиперповерхности связан базис $r_1, \dots, r_n, m$ объемлющего пространства; этот базис можно считать аналогом репера Френе, возникающего в теории кривых (хотя, в отличие от репера Френе, базис, порожденный гиперповерхностью, не ортонормирован). Естественно поэтому попытаться получить аналог формул Френе — равенства, выражающие производные от базисных векторов $r_1, \dots, r_n, m$ через сами эти векторы и, тем самым, описывающие движение базиса при изменении точки поверхности. Такие формулы в теории поверхностей называются деривационными формулами.

Теорема 1 (Деривационные формулы Гаусса–Вейнгартена). *Обозначим через r_{ij} и m_j производные векторов r_i, m по координате u^j:*

$$r_{ij} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}, \quad m_j = \frac{\partial m}{\partial u^j}.$$

Имеют место равенства:

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k r_k + b_{ij} m, \\ m_i &= \sum_{j=1}^n \beta_i^j r_j. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля (формулы для них получены в Лекции 4), b_{ij} — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности (см. предыдущую Лекцию), коэффициенты β_i^j выражаются через первую и вторую квадратичные формы следующим образом:

$$\beta_i^j = -\sum_{k=1}^n g^{jk} b_{ik}$$

(напомним, что матрица g^{ij} обратна к матрице g_{ij}).

Доказательство. Разложим вектор r_{ij} на касательную и нормальную к поверхности M компоненты:

$$r_{ij} = \Pi(r_{ij}) + m_{ij},$$

где Π — оператор ортогонального проектирования на касательную плоскость к поверхности, m_{ij} — проекция вектора r_{ij} на нормаль. Вектор $\Pi(r_{ij})$ вычислен в Лекции 4 (формулы (2) – (3)):

$$\Pi(r_{ij}) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k r_k;$$

вектор m_{ij}, очевидно, равен:

$$m_{ij} = (m, r_{ij}) m = b_{ij} m.$$

Таким образом, первая часть формул (1) доказана. Для вычисления векторов m_j заметим, что они ортогональны вектору m (т.к. последний имеет единичную длину — см. Лемму, доказанную в первой Лекции), и поэтому разлагаются по каноническому базису $r_1, \dots, r_n$:

$$m_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_i^k r_k, \tag{2}$$

где β_i^k — некоторые (пока неопределенные) коэффициенты. Для того, чтобы их найти, умножим (2) скалярно на r_m; получим:

$$(m_i, r_m) = \sum_{k=1}^{n} \beta_i^k g_{km},$$

откуда:

$$\beta_i^j = \sum_{s=1}^{n} g^{js}(m_i, r_s).$$

Наконец, дифференцируя по u^i равенство $(m, r_m) = 0$, получим $(m_i, r_m) + b_{im} = 0$, откуда немедленно следует нужное выражение для β_i^k. ■

Как уже отмечалось, деривационные формулы похожи на формулы Френе теории кривых — они описывают движение репера $r_1, \dots, r_n, m$ при движении точки по поверхности. Это движение, таким образом, определяется парой квадратичных форм — первой и второй формами поверхности, которые в этом смысле играют ту же роль, что кривизна и кручение кривой. Напомним, что задание кривизны и кручения полностью определяет кривую с точностью до ее расположения в пространстве (т.е. с точностью до его движения); кроме того, эту пару функций можно задавать произвольно: если $k(s), \varkappa(s)$ — гладкие функции и $k > 0$, всегда найдется кривая, для которой эти функции будут кривизной и кручением. Доказательство этих фактов основано на анализе дифференциальных уравнений, определенных формулами Френе.

Выясним, как обстоит дело в случае поверхностей; таким образом, нас сейчас интересуют два вопроса:

1. Определяется ли поверхность (с точностью до своего расположения в пространстве) заданием первой и второй квадратичных форм?

2. Можно ли эту пару форм задавать произвольно (позаботившись лишь о положительности первой квадратичной формы)?

Оказывается, ответы на эти два вопроса противоположны: первый решается положительно, а второй отрицательно. Мы начнем с обсуждения первого.

§ 2. Восстановление поверхности по паре квадратичных форм.

Теорема 2. *Пусть M, Q — две n–мерные гиперповерхности. Следующие два условия эквивалентны.*

1. *На поверхностях M и Q можно выбрать единые координаты $u = (u^1, \dots, u^n)$ (а также направления единичных векторов нормалей) так, что матрицы первой и второй квадратичных форм в этих координатах совпадут.*

2. *Существует движение (т.е. композиция сдвига и ортогонального преобразования) пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, переводящее поверхность M в поверхность Q.*

Доказательство. Пусть $x \mapsto Ax + a$ — движение объемлющего пространства, переводящее поверхность M в поверхность Q (здесь A — ортогональный оператор в $\mathbb{R}^{n+1}$, a — вектор из этого пространства). Зададим M (какими угодно) параметрическими уравнениями $r = r(u)$; тогда точки поверхности Q можно задать уравнениями $r = \rho(u)$, где $\rho(u) = Ar(u) + a$. В силу ортогональности оператора A:

$$(\frac{\partial r(u)}{\partial u^i}, \frac{\partial r(u)}{\partial u^j}) = (\frac{\partial \rho(u)}{\partial u^i}, \frac{\partial \rho(u)}{\partial u^j}),$$

т.е. матрицы первых квадратичных форм поверхностей M и Q в координатах u совпадают. Заметим теперь, что, если $m(u)$ — единичный вектор нормали к поверхности M, то $Am(u)$ — единичный вектор нормали к поверхности Q; поэтому из равенств:

$$(\frac{\partial^2 r(u)}{\partial u^i \partial u^j}, m) = (\frac{\partial^2 \rho(u)}{\partial u^i \partial u^j}, Am)$$

следует, что матрицы вторых квадратичных форм также совпадают. Итак, из второго условия следует первое.

Обратно, пусть на поверхностях M, Q выбраны координаты так, что матрицы первой и второй квадратичных форм в этих координатах одинаковы. Тогда между точками этих поверхностей можно установить взаимно–однозначное соответствие: именно, соответствующими друг другу назовем точки, имеющие одинаковые координаты. Выберем теперь на поверхностях M и Q пару соответствующих точек и сдвинем поверхность Q на вектор, соединяющий эти точки; в результате новая поверхность будет иметь общую точку с поверхностью M. Рассмотрим теперь канонические базисы, порожденные координатами u^i в касательных пространствах к двум поверхностям в этой общей точке. В силу совпадения матриц первых квадратичных форм, длины соответствующих векторов в этих базисах и углы между соответствующими векторами одинаковы. Поэтому оператор, переводящий канонический базис и единичный вектор нормали второй поверхности в канонический базис и единичный вектор нормали первой поверхности в их общей точке — ортогональный (сохраняет длины и углы). Итак, композицией сдвига и ортогонального оператора можно добиться того, что наши две поверхности будут иметь общую точку (обозначим ее через P_0) и в этой точки совпадут соответствующие вектора канонических базисов касательных пространств и единичных нормалей (обозначим эти векторы $r_1^0, \ldots, r_n^0, m^0$ соответственно). Докажем теперь, что такое движение объемлющего пространства совмещает поверхности, т.е. что соответствующие точки поверхности M и поверхности $\widetilde{M}$, полученной из Q указанным движением, совпадают. Действительно, пусть P — произвольная точка M; соединим ее с точкой P_0 гладкой кривой $\gamma \subset M$, заданной параметрическими уравнениями $u^i = u^i(t)$, $t \in [0, T]$. Кривая $\widetilde{\gamma}$, заданная теми же параметрическими уравнениями на $\widetilde{M}$, соединяет P_0 с точкой $\widetilde{P}$, соответствующей точке P. Рассмотрим теперь семейства векторов $r_i(t), m(t)$, состоящих из векторов канонического базиса и нормали к поверхности M в точках кривой γ. Производные этих векторов по параметру t имеют вид:

$$\frac{dr_i(t)}{dt} = \frac{\partial r_i}{\partial u^j}\frac{du^j}{dt} = \Gamma_{ij}^k(u(t))\frac{du^j}{dt} r_k(t) + b_{ij}(u(t))\frac{du^j}{dt} m(t),$$

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{\partial m}{\partial u^j}\frac{du^j}{dt} = \beta_j^k(u(t))\frac{du^j}{dt} r_k(t).$$

Таким образом, если обозначить через $R(t)$ матрицу размера $(n+1) \times (n+1)$, строками которой являются координаты векторов $r_1(t), \ldots, r_n(t), m(t)$, эта матрица будет удовлетворять уравнению:

$$\frac{dR(t)}{dt} = U(t)R(t),$$

где элементы матрицы $U(t)$ выражаются через элементы матриц первой и второй квадратичной форм поверхности M (а также их производные) при $u = u(t)$ и через производные функций $u^i(t)$. Рассмотрим теперь матрицу $\widetilde{R}(t)$, построенную аналогичным образом по векторам $\widetilde{r}_1, \ldots, \widetilde{r}_n, \widetilde{m}$ канонического базиса и нормали поверхности $\widetilde{M}$ в точках кривой $\widetilde{\gamma}$. Поскольку эти две кривые заданы в координатах u^i одинаковыми параметрическими уравнениями, а матрицы первой и второй квадратичных форм поверхностей $M, \widetilde{M}$ совпадают, для $\widetilde{R}$ будет выполнено то же уравнение (с той же матрицей $U(t)$), что и для R. Далее, при $t = 0$ (т.е. в точке P_0) матрицы $R(t)$ и $\widetilde{R}(t)$ совпадают, т.к. совпадают соответствующие векторы. Следовательно, по теореме единственности решения задачи Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, матрицы R и $\widetilde{R}$ совпадают при всех $t \in [0, T]$, т.е. при таких t: $r_i(t) = \widetilde{r}_i(t), m(t) = \widetilde{m}(t)$. Рассмотрим теперь радиус–векторы $r(t)$ точек кривой γ на поверхности M. По формуле Ньютона–Лейбница получаем:

$$r(P) = r(T) = r(0) + \int_0^T (\frac{dr}{dt}) = r(P_0) + \int_0^T r_i(t)\frac{du^i}{dt}\,dt.$$

Аналогично, рассматривая радиус–векторы $\widetilde{r}(t)$ точек кривой $\widetilde{\gamma}$, получим:

$$r(\widetilde{P}) = \widetilde{r}(T) = \widetilde{r}(0) + \int_0^T (\frac{d\widetilde{r}}{dt}) = r(P_0) + \int_0^T \widetilde{r}_i(t)\frac{du^i}{dt}\,dt.$$

Поскольку подинтегральные функции в двух выписанных интегралах совпадают, совпадают и радиус–векторы точек P и $\widetilde{P}$, т.е. совпадают поверхности M и $\widetilde{M}$. ∎

§ 3. Формулы Гаусса и Кодацци.

Исследуем теперь вопрос о том, насколько произвольно можно задавать матрицы первой и второй квадратичной форм поверхности. Другими словами, пусть заданы две гладкие симметричные матричные функции $g_{ij}(u)$ и $b_{ij}(u)$, причем матрица $g_{ij}(u)$ положительно определена. Можно ли найти поверхность, заданную параметрическими уравнениями $r = r(u)$ так, чтобы эти заданные функции совпали с ее первой и второй квадратичными формами? Ответ на этот вопрос отрицательный; мы исследуем препятствие к построению такой поверхности в простейшем случае $n = 2$ (т.е. двумерной поверхности в трехмерном пространстве).

Теорема 3. *Пусть M — двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$, заданная параметрическими уравнениями $r = r(u^1, u^2)$, и пусть $g_{ij}(u), b_{ij}(u)$ — матрицы ее первой и второй квадратичной форм соответственно. Имеют место три соотношения между элементами этих матриц:*

$$\det B = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial u^2)^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial u^1)^2} + \sum_{k,\,m=1}^{2} g_{km}(\Gamma^k_{12}\Gamma^m_{12} - \Gamma^k_{11}\Gamma^m_{22});$$

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2} + \sum_{k=1}^{2}\Gamma^k_{i1}b_{k2} = \frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1} + \sum_{k=1}^{2}\Gamma^k_{i2}b_{k1}, \quad i = 1, 2.$$

Здесь B — матрица второй квадратичной формы.

Замечание 1. *Первое из этих соотношений называется уравнением Гаусса, а два последних — уравнениями Кодацци.*

Доказательство. Докажем сперва равенство Гаусса–Вейнгартена. Для этого рассмотрим скалярную функцию:

$$(r_{11}, r_{22}) - (r_{12}^2)$$

и подставим выражения для r_{ij} из деривационных формул Гаусса. Учитывая ортогональность векторов m и r_i, получим:

$$(r_{11}, r_{22}) - (r_{12}^2) = \sum_{k,\,m=1}^{2} (r_k, r_m)(\Gamma_{11}^k \Gamma_{22}^m - \Gamma_{12}^k \Gamma_{12}^m) + (b_{11} b_{22} - b_{12}^2),$$

откуда:

$$\det B = (r_{11}, r_{22}) - (r_{12}^2) + \sum_{k,\,m=1}^{2} g_{km}(\Gamma_{12}^k \Gamma_{12}^m - \Gamma_{11}^k \Gamma_{22}^m).$$

Таким образом, для доказательства равенства Гаусса достаточно проверить, что:

$$(r_{11}, r_{22}) - (r_{12}^2) = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial u^2)^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial u^1)^2}.$$

Для этого вспомним, что символы Кристоффеля 1-го рода:

$$\Gamma_{ij,k} = (r_{ij}, r_k)$$

выражаются через коэффициенты первой квадратичной формы по формулам:

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right).$$

Продифференцируем это равенство по координате u^l; в результате получим:

$$\frac{\partial \Gamma_{ij,k}}{\partial u^l} = (r_{lij}, r_k) + (r_{ij}, r_{lk}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^l \partial u^j} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial u^l \partial u^i} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^l \partial u^k}\right),$$

где:

$$r_{lij} = \frac{\partial^3 r}{\partial u^l \partial u^i \partial u^j}.$$

Эти равенства справедливы при всех значениях индексов i, j, k, l, поэтому в них можно поменять местами l и j. Вычитая получающееся при этом равенство из выписанного, и учитывая, что $r_{ij\,l} = r_{i\,lj}$ (теорема о равенстве смешанных производных), получим:

$$(r_{ij}, r_{lk}) - (r_{il}, r_{jk}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial u^j \partial u^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial u^l \partial u^i} - \frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial u^i \partial u^j} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial u^l \partial u^i} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^l \partial u^k}\right).$$

Полагая в последней формуле $i = j = 1$, $l = k = 2$, получим требуемое равенство.

Докажем теперь формулы Кодацци. Для этого запишем коэффициенты второй квадратичной формы в виде:

$$b_{ij} = (r_{ij}, m) = -(r_i, m_j),$$

где $m_j = \partial m / \partial u^j$. Продифференцируем это равенство при $j = 2$ по переменной u^1, а при $j = 1$ по переменной u^2, и вычтем друг из друга два получившихся соотношения. С учетом равенства смешанных производных вектора m получим:

$$\frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1} - \frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2} + (r_{i1}, m_2) - (r_{i2}, m_1) = 0.$$

Подставим в полученное соотношение выражение для r_{ij} из деривационных формул Гаусса. Учитывая, что $(m_k, m) = 0$ и $(m_k, r_s) = -b_{ks}$, получим:

$$\frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1} - \frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2} - \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{i1}^k b_{k2} + \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{i2}^k b_{k1} = 0,$$

что и требовалось. ■

Следствие 1. *Отнюдь не любые симметричные матричные функции $g_{ij}(u)$ и $b_{ij}(u)$ (даже при условии положительности первой матрицы) могут быть реализованы как первая и вторая квадратичные формы некоторой поверхности — для этого они, по крайней мере, должны удовлетворять равенствам Гаусса и Кодацци.* ■

Замечание 2. *Можно показать, что равенства Гаусса и Кодацци не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы существовала поверхность, для которой g_{ij} и b_{ij} были бы первой и второй квадратичной формами. Именно, справедливо следующее утверждение.* ■

Теорема 4. *Пусть в некоторой открытой области на плоскости (u^1, u^2) задана пара гладких матричных функций $g_{ij}(u)$, $b_{ij}(u)$, удовлетворяющих следующим условиям:*

1. *При каждом u^i обе матрицы симметричны, а матрица $g_{ij}(u)$ положительно определена.*

2. *Функции g_{ij} и b_{ij} удовлетворяют уравнениям Гаусса и Кодацци.*

Тогда в достаточно малой окрестности произвольной точки этой области найдется трехмерная вектор–функция $r = r(u)$, задающая двумерную поверхность в $\mathbb{R}^3$, для которой заданные матрицы являются матрицами первой и второй квадратичных форм соответственно (по доказанному выше эта поверхность определена однозначно с точностью до движения пространства).

Доказательство этой теоремы выходит за рамки нашего курса. Отметим, что деривационные формулы Гаусса–Вейнгартена можно трактовать как систему уравнений в частных производных на координаты вектор–функции $r(u)$, коэффициенты которой заданы, если заданы матрицы g_{ij} и b_{ij}. Уравнения Гаусса и Кодацци суть условия совместности (разрешимости) этой системы. ■

§ 4. Гауссова кривизна двумерной поверхности. Теорема Гаусса. Эллиптические, гиперболические и параболические точки.

Отметим, что из доказанной в предыдущем пункте формулы Гаусса немедленно вытекает следующее

Утверждение 1 (Теорема Гаусса)**.** *Гауссова кривизна двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$ выражается только через коэффициенты первой квадратичной формы.* ■

Действительно, гауссова кривизна определяется через матрицы G и B первой и второй квадратичной форм по формуле:

$$K = \frac{\det B}{\mathrm{detG}}.$$

С другой стороны, уравнение Гаусса выражает определитель второй квадратичной формы через первую.

Это означает, что *гауссова кривизна зависит только от геометрии на самой поверхности (а не от того, как поверхность помещена в трехмерное пространство); в частности, она сохраняется при изометриях — отображениях поверхностей, не меняющих скалярного произведения касательных векторов (подробнее об изометриях см. следующую Лекцию).*

Обсудим геометрический смысл знака гауссовой кривизны двумерной поверхности. Поскольку он совпадает со знаком определителя второй квадратичной формы, этот знак определяет локальное расположение поверхности M относительно касательной плоскости к ней в точке P (см. предыдущую Лекцию). Именно, пусть в некоторой точке поверхности $K > 0$; тогда главные кривизны в этой точке одного знака, т.е. все нормальные сечения искривлены в одну и ту же сторону ($\widetilde{k} > 0$ или $\widetilde{k} < 0$ сразу для всех нормальных сечений). Другими словами, для всех таких сечений центры соприкасающихся окружностей лежат по одну и ту же сторону от касательной плоскости к поверхности. Поэтому достаточно малая окрестность точки P на поверхности лежит по одну сторону от касательной плоскости и не пересекает ее нигде, кроме точки P.

Определение 1. Точки, в которых $K > 0$, называются эллиптическими точками поверхности M.

Пусть теперь $K(P) < 0$. Тогда главные кривизны разного знака; нормальные сечения, проведенные в главных направлениях, загнуты в разные стороны. Поэтому сколь угодно малые кусочки этих нормальных сечений вблизи точки P лежат по разные стороны от касательной плоскости к M в этой точке. Таким образом, любая малая окрестность точки P на поверхности M разбивается на две части, лежащие по разные стороны от касательной плоскости; касательная плоскость пересекает любую такую окрестность, вообще говоря, по некоторой кривой.

Определение 2. Точки, в которых $K < 0$, называются гиперболическими точками поверхности M.

Наконец, в некоторых точках поверхности гауссова кривизна может обращаться в нуль. В этом случае первая и вторая квадратичная формы не дают полной информации о том, как расположена малая окрестность точки P на поверхности относительно касательной плоскости; для того, чтобы ответить на этот вопрос, необходимо рассматривать производные третьего порядка вектора $r(u^1, u^2)$ в точке P.

Определение 3. Точки, в которых $K = 0$, называются параболическими точками поверхности M.

Задачи.

1. Найти эллиптические, гиперболические и параболические точки:
   (a) на торе;
   (b) на эллипсоиде, гиперболоиде, параболоиде;
   (c) на гиперболическом цилиндре;
   (d) на поверхности $z = f(\sqrt{x^2 - y^2})$.

7 Лекция 7. Риманова метрика на поверхности и в области евклидова пространства. Изометрии римановой метрики

§ 1. **Риманова метрика на поверхности.**

Первая квадратичная форма поверхности определена евклидовой структурой (скалярным произведением) в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^N$. В дальнейшем мы будем изучать "поверхности, не помещенные ни в какое евклидово пространство" (многообразия); поэтому полезно аксиоматизировать понятие первой квадратичной формы, исключив из соответствующего определения упоминание об объемлющем пространстве. Чтобы это сделать, отметим, что первая квадратичная форма определяет зависящую от точки положительно определенную симметричную билинейную форму в касательных пространствах. Произвольный объект такого вида называется *римановой метрикой.*

Определение 1. Римановой метрикой на поверхности M называется соответствие, сопоставляющее каждой точке P поверхности положительно определенную симметричную билинейную форму в касательном пространстве T_PM, гладко зависящую от точки P.

Последнее условие означает следующее. Пусть $u^1, \ldots, u^n$ — координаты на поверхности. Они порождают канонический базис $r_1, \ldots, r_n$ в любом касательном пространстве. В этом базисе метрика задается своей матрицей $g_{ij}(u) = (r_i, r_j)$. Гладкая зависимость от точки означает бесконечную дифференцируемость функций $g_{ij}(u)$.

Задача 1. Доказать, что понятие гладкой зависимости от точки не зависит от выбора координат $u^1, \ldots, u^n$.

Как уже отмечалось, в произвольной системе координат u^i риманова метрика задается своей матрицей $g_{ij}(u)$. При переходе к другой системе координат v^i эта матрица меняется по закону:

$$\widetilde{g}_{ij}(v) = \sum_{k,m=1}^{n} \frac{\partial u^k}{\partial v^i} \frac{\partial u^m}{\partial v^j} g_{ij}(u(v)). \tag{1}$$

(докажите!). Это свойство можно считать определением римановой метрики.

Определение 2. Римановой метрикой на поверхности называется соответствие, сопоставляющее каждой системе координат $u^1, \ldots, u^n$ $n \times n$ матрицу $g_{ij}(u)$, элементы которой — гладкие функции. При этом должны быть выполнены следующие условия:

1. При каждом значении переменных u матрица $g_{ij}(u)$ симметрична и положительно определена.

2. Если координатам u^i соответствует матрица $g_{ij}(u)$, а координатам v^i — матрица $\widetilde{g}_{ij}(v)$, то эти матрицы связаны равенствами (1).

Утверждение 1. *Два приведенных определения римановой метрики эквивалентны.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно — если задана билинейная форма в касательных пространствах, то ее матрица $g_{ij}(u)$ в произвольном каноническом базисе удовлетворяет условиям 1, 2.

Обратно, пусть для каждой системы координат u^i задана матрица $g_{ij}(u)$. Определим билинейную форму в каждом касательном пространстве T_PM, полагая ее матрицу в каноническом базисе $r_1, \ldots, r_n$ равной $g_{ij}(u)$. Свойство 2 гарантирует, что при этом получится *одна билинейная форма, не зависящая от выбора координат.* Свойство 1 означает, что эта форма симметрична и положительна. ■

Замечание 1. *Приведенные два определения римановой метрики иллюстрируют типичную для дифференциальной геометрии ситуацию: геометрические объекты можно определять двумя способами — инвариантным (пользуясь языком линейной алгебры) и координатным (задавая закон преобразования объекта при замене координат).* ■

Пусть M — область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Очевидно, ее можно считать частным случаем поверхности. Произвольные координаты u^i в области принято называть (в отличие от евклидовых x) *криволинейными координатами*, а кривые $u^i = \mathrm{const}$ при $i \neq i_0$ — *координатными линиями, соответствующими криволинейной координате с номером* i_0. Касательные пространства $T_P M$ как множества совпадают со всем объемлющим пространством, однако векторы считаются отложенными от точки P. Риманова метрика задается билинейной формой в каждом таком пространстве, или матрицей $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$, гладко зависящей от точки области. В частности, евклидова структура в $\mathbb{R}^n$ задает риманову метрику, называемую *стандартной евклидовой метрикой*; в евклидовых координатах $x^1, \ldots, x^n$ ее матрица единичная, т.е.:

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{n} (dx^j)^2.$$

Определение 3. Риманова метрика на поверхности M называется евклидовой, если на M существуют координаты, в которых матрица метрики единичная. Такие координаты называются евклидовыми.

Задача 2. Доказать, что первая квадратичная форма двумерной сферы не евклидова даже локально (т.е. евклидовых координат не существует ни в какой открытой области).

§ 2. Индуцированная метрика.

Пусть M, Q — две поверхности в $\mathbb{R}^N$, причем поверхность Q лежит в поверхности M. Если $u = (u^1, \ldots, u^n)$ — координаты на M, а $v = (v^1, \ldots, v^k)$ — координаты на Q ($k \leq n$), то множество Q задается в M параметрическими уравнениями $u^i = u^i(v^1, \ldots, v^k)$, причем ранг матрицы $\partial u^i / \partial v^j$ равен k (проверьте!). Ясно, что для любой точки $P \in Q$ касательное пространство $T_P Q$ содержится в касательном пространстве $T_P M$: произвольный вектор $\rho_j = \partial r / \partial v^j$ канонического базиса в $T_P Q$ имеет вид:

$$\rho_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u^i}{\partial v^j} r_i, \quad j = 1, \ldots, n,$$

т.е. принадлежит $T_P M$.

Пусть теперь g — риманова метрика на M; ограничивая соответствующую билинейную форму с пространства $T_P M$ на пространство $T_P Q$, получим, очевидно, риманову метрику на Q.

Определение 4. Эта метрика называется индуцированной с поверхности M на поверхность Q. В частности, если M — область в евклидовом пространстве, получаем метрику, индуцированную из области на поверхность.

Замечание 2 (Важное замечание!). *Первая квадратичная форма поверхности — это риманова метрика, индуцированная на ней из объемлющего евклидова пространства (в котором рассматривается стандартная евклидова метрика).* ■

Выясним, как выглядит индуцированная метрика в координатах.

Предложение 1. *Пусть $g_{ij}(u)$ — риманова метрика на поверхности M, и $u^i = u^i(v)$ — параметрические уравнения Q в M. Тогда матрица индуцированной на поверхности Q метрики имеет вид:*

$$\widetilde{g}_{ij}(v) = \sum_{k,m=1}^{n} \frac{\partial u^k}{\partial v^i}\frac{\partial u^m}{\partial v^j} g_{km}(u(v)).$$

Доказательство. Нужная формула сразу же следует из приведенной выше формулы разложения векторов ρ_j канонического базиса на Q по каноническому базису $r_1, \ldots, r_n$ на M. ■

Замечание 3. *Таким образом, для того, чтобы получить координатную формулу для индуцированной метрики, надо просто подставить в выражение для метрики на M:*

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(u) du^i du^j$$

уравнения $u = u(v)$ поверхности Q (конечно, подставлять эти функции надо как в аргументы функций g_{ij}, так и в дифференциалы du^i). В частности, первая квадратичная форма поверхности $r = r(u^1, \ldots, u^n)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$ имеет вид:

$$ds^2 = \sum_{j,\,k} (\sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u^j}\frac{\partial x^i}{\partial u^k}) du^j du^k.$$

■

§ 3. Изометрии поверхностей.

Пусть M, Q — поверхности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$. Рассмотрим произвольное отображение $f : M \to Q$ одной поверхности в другую; если на поверхностях заданы координаты u^i и v^i соответственно, то это отображение задается набором из n функций от n переменных $v^i = f^i(u^1, \ldots, u^n)$.

Определение 5. Отображение $f : M \to Q$ называется гладким, если $f^i(u)$ — гладкие функции.

Задача 3. Проверить, что это определение не зависит от выбора координат на поверхностях.

Пусть теперь поверхности имеют одинаковую размерность и гладкое отображение f взаимно–однозначно; тогда существует обратное отображение $f^{-1} : Q \to M$, которое в координатах задается функциями $u^i = \varphi^i(v^1, \ldots, v^n)$.

Определение 6. Гладкое отображение $f : M \to Q$ называется диффеоморфизмом, если обратное отображение f^{-1} гладкое, т.е. функции $\varphi^i(v)$ бесконечно дифференцируемы.

Замечание 4. *Эквивалентное определение диффеоморфизма: функции $f^i(u)$ гладкие и якобиан $\det(\partial f^i/\partial u^j)$ не обращается в нуль.* ■

Любое гладкое отображение f поверхностей определяет отображение касательных пространств в соответствующих точках. Именно, если при отображении f кривая γ на поверхности M переходит в кривую $f(\gamma)$ на поверхности Q, то вектор скорости к $f(\gamma)$ в точке $f(P) \in f(\gamma)$ будет образом касательного вектора к γ в точке P (см. Рис. 2).

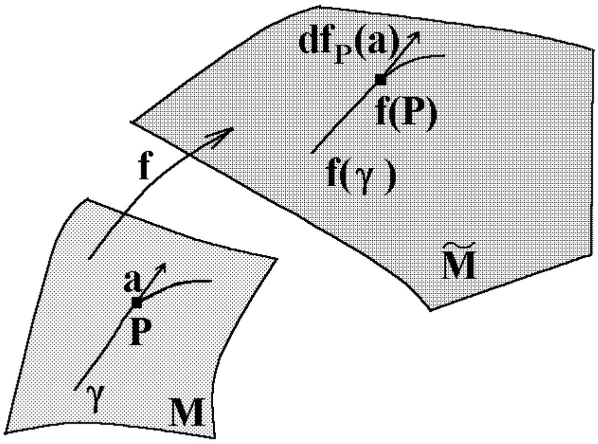

Рис. 2

Задача 4. Доказать, что построенный таким способом образ касательного вектора не зависит от выбора кривой γ, т.е. приведенное правило корректно определяет отображение $d_P f : T_P M \to T_{f(P)} Q$ касательных пространств. Проверить, что это отображение — линейный оператор.

Указание. Его матрица в базисах $r_1, \ldots, r_n$ и $\rho_1, \ldots, \rho_m$ — это матрица $\partial v^i / \partial u^j (P)$.

Определение 7. Определенное таким образом отображение касательного пространства в точке P к поверхности M в касательное пространство в точке $f(P)$ к поверхности Q называется дифференциалом (или производной) $d_P f$ отображения f в точке P.

Если f — диффеоморфизм, то дифференциал этого отображения в каждой точке определяет изоморфизм соответствующих касательных пространств (докажите!). Пусть на поверхностях M, Q заданы римановы метрики; тогда в каждом касательном пространстве к любой из этих поверхностей определено скалярное произведение.

Определение 8. Диффеоморфизм $f : M \to Q$ называется изометрией, если дифференциал этого отображения $d_P f$ в произвольной точке $P \in M$ сохраняет скалярное произведение касательных векторов, т.е. является ортогональным оператором из $T_P M$ в $T_{f(P)} Q$. Две поверхности M, Q называются изометричными, если между ними существует изометрия.

Пусть на поверхностях M, Q заданы координаты u^i, v^i соответственно, и $f : M \to Q$ — диффеоморфизм. Это отображение задается гладкими функциями $v^i(u)$, а обратное отображение — гладкими функциями $u^i(v)$. Пусть $g_{ij}(u)$ и $\widetilde{g}_{ij(v)}$ — матрицы римановых метрик на M и Q соответственно. Поскольку:

$$df(r_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \rho_j$$

(докажите!), отображение f будет изометрией, если:

$$g_{ij} = (r_i, r_j) = (df(r_i), df(r_j)) = \sum_{k,\, m=1}^{n} \frac{\partial v^k}{\partial u^i} \frac{\partial v^m}{\partial u^j} (\rho_k, \rho_m) = \sum_{k,\, m=1}^{n} \frac{\partial v^k}{\partial u^i} \frac{\partial v^m}{\partial u^j} \widetilde{g}_{km}.$$

Таким образом, *для того, чтобы проверить, что отображение является изометрией, надо подставить в выражение*:

$$d\,\widetilde{s}^{\,2} = \sum_{i,\, j=1}^{n} \widetilde{g}_{ij} dv^i dv^j$$

для римановой метрики на поверхности Q функции $v^i(u)$, задающие отображение (при этом, как обычно, функционалы dv^i преобразуются как дифференциалы этих функций).

Замечание 5. *Полученный закон преобразования метрики при отображении f можно считать определением изометрии (докажите!).* ■

§ 4. Геометрия, порожденная римановой метрикой, и свойства изометрий.

Пусть на поверхности M задана риманова метрика g. Тогда на ней возникает геометрия — можно вычислять длины кривых и углы между ними, используя билинейную форму g в качестве скалярного произведения касательных векторов. Далее, наличие метрики позволяет определить на M ковариантные производные. Именно, пусть $u^1, \ldots, u^n$ — координаты на поверхности; определим набор символов Кристоффеля стандартными формулами:

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_{k,\, m=1}^{n} \frac{1}{2}\, g^{km}\Big(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\Big).$$

Теперь, если $a = \sum a^i r_i$ — векторное поле, а $b = \sum b^j r_j$ — касательный вектор к поверхности, назовем ковариантной производной поля ξ вдоль вектора b касательный вектор:

$$\nabla_b\, a = \sum_{i,\, j=1}^{n} b^j\Big(\frac{\partial a^i}{\partial u^j} + \sum_{k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}\, a^k\Big) r_i.$$

Задача 5. Доказать, что вектор $\nabla_b\, a$ не зависит от выбора координат u.

После того, как определены ковариантные производные, точно так же, как и ранее, определяются параллельные семейства векторов, параллельный перенос векторов и геодезические линии. Все эти объекты и операции, определяющие геометрические свойства поверхности, строятся, таким образом, исходя только из римановой метрики.

Пусть теперь между двумя поверхностями с римановой метрикой существует изометрия. Отметим, что закон преобразования метрик при изометрии в точности совпадает с законом ее преобразовании при замене координат на поверхности. Это не удивительно — при изометриях сохраняются длины кривых и углы между кривыми, т.е. геометрия на поверхностях, между которыми задана изометрия, в точности одинакова. Поэтому при изучении этой геометрии такие поверхности можно не различать — точки этих поверхностей отождествляются друг с другом при помощи изометрии; при этом координаты u^i, v^i надо интерпретировать как разные координаты на одной и той же поверхности. Заметим, что, поскольку символы Кристоффеля выражаются только через первую квадратичную форму поверхности, а она при изометрии сохраняется, то параллельные семейства векторов при изометрии переходят в параллельные семейства. Поэтому параллельный перенос на изометричных поверхностях устроен одинаково: если кривая γ соединяет точки P и Q на поверхности M, а вектор a касается этой поверхности в точке P, то результат параллельного переноса вектора $df_P(a)$ из точки $f(P)$ в точку $f(Q)$ вдоль кривой $f(\gamma)$ равен $df_Q(b)$, где b — результат параллельного переноса вектора a из точки P в точку Q вдоль кривой γ. Наконец, по той же самой причине геодезические при изометриях переходят в геодезические.

§ 5. Группа изометрий римановой метрики.

Ясно, что каждая поверхность, снабженная римановой метрикой, изометрична сама себе — тождественное отображение, очевидно, является изометрией. Очень важным при изучении поверхностей является следующий вопрос: существуют ли другие изометрии поверхности на себя, и если да, то какие? Каждая такая изометрия определяет "симметрию" поверхности с точки зрения возникающей на ней геометрии: геометрия в областях, переводимых изометрией друг в друга, одинакова. Чем больше изометрий, тем "симметричнее" поверхность; на поверхностях с самым большим запасом изометрий геометрия в окрестности любой точки устроена одинаково. Отметим, что множество всех изометрий данной поверхности с римановой метрикой образует группу относительно композиции отображений (докажите!).

Определение 9. Эта группа называется группой изометрий римановой метрики.

Найдем группу изометрий двумерной плоскости со стандартной евклидовой метрикой.

Теорема 1. *Изометриями евклидовой плоскости являются аффинные преобразования вида:*

$$\xi \mapsto a + A\xi,$$

где ξ — точка плоскости (т.е. двумерный вектор с координатами x, y, a — произвольный двумерный вектор, A — ортогональная 2×2–матрица).

Доказательство. Ясно, что параллельные переносы и ортогональные преобразования сохраняют скалярное произведение касательных векторов, поэтому все отображения указанного в теореме вида являются изометриями. Докажем, что других изометрий нет. Прежде всего заметим, что каждая изометрия однозначно определяется тем, куда она переводит фиксированную точку P плоскости и фиксированный ортонормированный репер e_1, e_2 в касательном пространстве в этой точке (другими словами, если существует изометрия, совмещающая между собой два таких набора (точка, репер), то эта изометрия единственна). Действительно пусть Q — произвольная точка плоскости, r — расстояние от нее до P, и α_1, α_2 — углы между лучом PQ и векторами e_1, e_2 соответственно. Тогда, поскольку длины кривых и углы между ними при изометрии сохраняются, и, кроме того, прямые переходят в прямые, образ $f(Q)$ точки Q будет лежать на луче, выходящем из точки $f(P)$ под углами α_1, α_2 к векторам репера $d_P f(e_1), d_P f(e_2)$ и на расстоянии r от $f(P)$. Этими данными образ произвольной точки (а значит, и все отображение f) определяется однозначно. Пусть теперь f — произвольная изометрия; зафиксируем точку P и репер e_1, e_2, торчащий в этой точке. Заметим, что всегда существует композиция параллельного переноса и ортогонального преобразования, переводящая P в $f(P)$ и репер e_1, e_2 в репер $d_P f(e_1), d_P f(e_2)$ (надо сперва устроить параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{Pf(P)}$, а затем совместить два торчащих в одной точке ортонормированных репера ортогональным преобразованием). По только что доказанному свойству единственности, эта композиция и есть изометрия f. ∎

Замечание 6. *Изометрии плоскости делятся на два типа: собственные ($\det A = 1$) и несобственные ($\det A = -1$). Собственные изометрии — повороты вокруг некоторой точки и параллельные переносы. Несобственные — это скользящие симметрии (осевые симметрии с одновременным параллельным переносом на некоторый вектор, параллельный оси симметрии). Это утверждение называется теоремой Шаля.* ∎

Задачи.

1. Доказать, что развертка цилиндрической поверхности на плоскость — изометрия.
2. Доказать, что развертка конуса на плоскость — изометрия.
3. Доказать, что отображение $\varphi = v + \operatorname{arctg} \rho$, $r^2 = \rho^2 + 1$ — изометрия коноида $x = \rho \cos v$, $y = \rho \sin v$, $z = \rho + v$ и гиперболоида $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = \sqrt{r^2 - 1}$.
4. Найти группу изометрий сферы.
5. Доказать, что существует поверхность вращения, изометричная винтовой поверхности $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = F(u) + av$, причем при изометрии винтовые линии переходят в параллели.
6. Найти поверхность вращения, изометричную геликоиду $x = u \cos v$, $y = \sin v$, $z = av$.
7. Доказать, что поверхности $x = \rho \cos v$, $y = \rho \sin v$, $z = a(\ln(\rho/a) + v)$ и $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = a\sqrt{2}(\ln r + \sqrt{r^2 - a^2})$ изометричны.

8 Лекция 8. Геометрия на сфере

§ 1. Введение.

Ниже мы рассмотрим простейшие примеры неевклидовых геометрий. Такие геометрии возникают, например, на поверхностях в трехмерном пространстве: зная первую квадратичную форму поверхности, можно находить на ней аналоги прямых — геодезические, строить из них треугольники и многоугольники, доказывать различные геометрические теоремы. Если поверхность "общая" (т.е. не обладает никакими специальными свойствами), геометрия на ней может быть устроена достаточно сложно — например, "простейшая" задача о нахождении геодезических (т.е. об описании движения по инерции) на таких поверхностях бывает в некотором смысле безнадежно трудной. Поэтому мы подробно рассмотрим геометрию на простейших, наиболее симметричных поверхностях. Первая из них — сфера в евклидовом пространстве. Геометрия на сфере имеет самое непосредственное отношение к человеческой деятельности — ведь поверхность Земли (в некотором приближении) можно считать сферой. Поэтому сферическая геометрия активно используется в географии, геологии, геофизике, а также и в чисто практических областях — например, при составлении маршрутов кораблей или самолетов.

§ 2. Метрика сферы.

Сфера радиуса R с центром в начале координат задается в трехмерном пространстве уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Для работы с первой квадратичной формой удобно иметь параметрические уравнения сферы; они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x &= R\cos\theta\cos\varphi, \\ y &= R\cos\theta\sin\varphi, \\ z &= R\sin\theta, \end{aligned} \tag{1}$$

где параметры (θ, φ) — широта и долгота соответственно. Параметр θ меняется на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, параметр φ — на интервале $(0, 2\pi)$. При таком изменении параметров выписанные параметрические уравнения задают всю сферу, кроме меридиана $\varphi = 0$. Ясно, что те же уравнения, в которых параметр φ меняется на другом интервале (например, $(-\pi, \pi)$) зададут область на сфере, включающую почти всю эту дугу — точнее, всю, кроме полюсов сферы, т.е. точек $x = y = 0, z = \pm R$. Полюса, конечно, тоже можно включить в область, задаваемую параметрическими уравнениями — для этого достаточно, например, поменять в (1) местами z и y. Найдем первую квадратичную форму сферы. Элементарные вычисления дают для нее следующее выражение:

$$G = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

(здесь роль первой координаты u^1 играет широта θ, а роль второй u^2 — долгота φ).

§ 3. Геодезические и изометрии.

Аналог прямых на сфере — геодезические — находятся очень просто.

Определение 1. Большим кругом на сфере называется окружность, получающаяся при пересечении сферы плоскостью, проходящей через начало координат (т.е. через центр сферы).

Утверждение 1. *Геодезическими на сфере являются дуги больших кругов и только они.*

Доказательство. Докажем сперва, что любой большой круг — геодезическая. Для этого достаточно заметить, что его вектор ускорения направлен к центру сферы, т.е. ортогонален касательной плоскости. То, что других геодезических, кроме дуг больших кругов, нет — очевидно: через каждую точку в каждом направлении проходит большой круг. ■

§ 4. Свойства геодезических.

Прямые на плоскости обладают следующими свойствами: через любые две различные точки проходит ровно одна прямая; через каждую точку, не лежащую на данной прямой, проходит ровно одна прямая, параллельная данной (т.е. не пересекающаяся с ней); длина любой прямой бесконечна. На сфере все эти свойства нарушаются: через диаметрально противоположные точки сферы проходит бесконечно много геодезических (меридианы); параллельных геодезических вообще не бывает; все геодезические замкнуты; длина каждой геодезической конечна и равна $2\pi R$.

Найдем теперь изометрии сферы.

Заметим сперва, что поворот трехмерного пространства вокруг любой оси, проходящей через начало координат, оставляет сферу на месте, т.е. определяет ее отображение в себя. Это отображение, конечно, изометрия — при вращениях сохраняются скалярные произведения любых трехмерных векторов, в частности, и векторов, касающихся сферы. Тем же свойством обладает симметрия (отражение) относительно любой плоскости, проходящей через начало координат. Таким образом, мы получили широкий запас изометрий сферы в себя — это повороты и отражения, а также все их композиции.

Задача 1. Рассмотрим отображение сферы в себя, называемое *антиподальным*: точка с радиус-вектором ξ переходит в диаметрально противоположную ей точку $-\xi$. Доказать, что это отображение — изометрия, и представить его в виде композиции поворотов и отражений.

Задача 2. Доказать, что все изометрии сферы исчерпываются приведенными; другими словами, установить, что группа изометрий сферы изоморфна $O(3)$ — группе ортогональных 3×3–матриц.

Замечание 1. *Наличие большого запаса изометрий связано с тем, что сфера очень "симметрична". Именно этот факт позволяет эффективно исследовать ее геометрию.* ■

§ 5. Расстояние.

Расстояние между двумя точками на плоскости — это длина отрезка прямой, соединяющей эти две точки. Естественно поэтому определить расстояние между точками на поверхности как длину соответствующей геодезической. При этом надо иметь в виду, что через две точки поверхности может проходить несколько разных геодезических (на сфере это именно так). Расстояние — это длина кратчайшей, т.е. минимальное время, за которое можно, двигаясь с единичной скоростью, добраться от одной точки поверхности до другой.

Определение 2. Расстоянием между двумя точками на сфере называется длина кратчайшей дуги геодезической, соединяющей эти две точки.

Замечание 2. *Возможны два разных случая:*

1. *Рассматриваемые точки не лежат на одном диаметре сферы; тогда их соединяют две дуги геодезической (пересечение сферы плоскостью, проходящей через эти точки и центр сферы), причем длины этих двух дуг различны и расстояние — это длина более короткой дуги.*

2. *Рассматриваемые точки диаметрально противоположны; тогда их соединяет бесконечно много дуг геодезических, но все эти дуги имеют одинаковую длину πR (половина длины экватора).* ■

Замечание 3. *Расстояние между точками поверхности можно определить как точную нижнюю грань длин дуг всевозможных гладких кривых, соединяющих эти точки. Тогда предыдущее определение превращается в теорему: минимум длины реализуется на геодезических.* ■

Задача 3. Доказать эту теорему для сферы.

Выпишем явную формулу для расстояния между двумя точками на сфере. Пусть ξ, η — радиус-векторы этих точек; расстояние — это длина дуги окружности радиуса R, заключенной между этими векторами. Таким образом, расстояние ρ находится по формуле $\rho = R\alpha$, где α — угол между векторами ξ и η. Вспоминая, что $(\xi, \eta) = |\xi||\eta|\cos\alpha$ и $|\xi| = |\eta| = R$, получим для расстояния формулу:

$$R^2\cos(\rho/R) = (\xi, \eta).$$

§ **6. Окружности.**

Окружности в любой геометрии определяются точно так же, как на плоскости.

Определение 3. Окружностью с центром в точке P радиуса a на сфере называется множество точек сферы, находящихся от P на расстоянии a.

Очевидно, окружностями на сфере являются обычные евклидовы окружности, т.е. пересечения сферы с плоскостями (параллели). Центр такой окружности лежит на пересечении сферы с прямой, проходящей через центр сферы перпендикулярно плоскости окружности (см. Рис. 3). Отметим, что у каждой окружности два центра — диаметрально противоположные точки сферы — и два радиуса; кроме того, большой круг на сфере — это одновременно и окружность и геодезическая, т.е. аналог прямой (очевидно, оба радиуса такой окружности равны $\pi R/2$). Получим общую формулу, выражающую длину окружно-

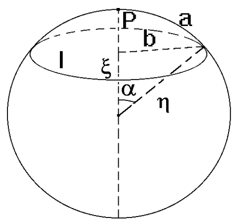

Рис. 3

сти через ее радиус (напомним, что на плоскости отношение длины окружности к радиусу равно 2π). Пусть ξ — радиус-вектор центра окружности, η — радиус-вектор произвольной точки, лежащей на ней, а b — ее евклидов радиус (см. Рис. 1). Тогда длина окружности $l = 2\pi b$; с другой стороны, $b = R\sin\alpha$ (α — угол между векторами ξ и η) и радиус окружности $a = R\alpha$. Исключая из этих равенств α и b, получим формулу, связывающую длину сферической окружности с ее радиусом:

$$l = 2\pi R\sin(\frac{a}{R}).$$

Заметим, что, если a/R очень мало, то $\sin(a/R)$ близко к a/R и в пределе получаем евклидову формулу:

$$\lim_{(a/R)\to 0}\frac{l(a)}{a} = 2\pi.$$

§ 7. Треугольники.

Рассмотрим на сфере три точки A, B, C, не лежащие на одной геодезической. Соединим их попарно кратчайшими дугами больших кругов; в результате получится фигура, называемая *сферическим треугольником.* Длины его сторон обозначим через a, b, c, а величины углов — через α, β, γ (Рис. 4). В сферической геометрии действуют другие формулы "решения треугольников", чем в евклидовой; сейчас мы выведем эти формулы.

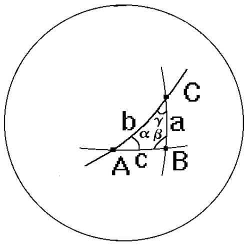

Рис. 4

§ 8. Теорема косинусов.

Выразим длину стороны a через длины сторон b, c и угол между этими сторонами.

Предложение 1. *Имеет место формула:*

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\alpha.$$

Доказательство. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — радиус-векторы вершин A, B, C треугольника соответственно. Через η, ζ обозначим касательные векторы к сторонам b, c треугольника в точке A. Очевидно:

$$\cos\alpha = \frac{(\eta, \zeta)}{|\eta||\zeta|}.$$

Вектор η касается большого круга, проходящего через центр сферы и точки A, B, поэтому он лежит в плоскости векторов ξ_1, ξ_2: $\eta = \xi_2 + \lambda\xi_1$, где λ — некоторое число. Чтобы найти его, умножим предыдущее равенство скалярно на ξ_1; получим:

$$(\xi_1, \eta) = (\xi_1, \xi_2) + \lambda(\xi_1, \xi_1).$$

Левая часть равенства равна нулю: вектор ξ_1 — радиус сферы, проведенный в точку A, а η касается сферы в этой точке. Скалярное произведение (ξ_1, ξ_2) выражается через расстояние между точками A и B, т.е. через сторону c треугольника (см. § **3**.): $(\xi_1, \xi_2) = R^2\cos(c/R)$; наконец, $(\xi_1, \xi_1) = R^2$. Отсюда находим λ и η:

$$\lambda = -\cos\frac{c}{R}, \quad \eta = \xi_2 - \xi_1\cos\frac{c}{R}.$$

Аналогично получаем:

$$\zeta = \xi_3 - \xi_1\cos\frac{b}{R}.$$

Вычисляя скалярные произведения этих векторов и подставляя в формулу для косинуса α, получим:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma},$$

откуда немедленно следует требуемое равенство. ■

Следствие 1 (Теорема Пифагора)**.** *Пусть треугольник ABC прямоугольный, т.е. $\alpha = \pi/2$. Тогда:*

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R}.$$

■

Задача 4. Доказать, что при малых длинах сторон сферическая теорема косинусов переходит в евклидову; другими словами, если $a = a_1\varepsilon$, $b = b_1\varepsilon$, $c = c_1\varepsilon$, $\varepsilon \to 0$, то:

$$a_1^2 = b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1\cos\alpha_0 + O(\varepsilon),$$

где $\alpha_0 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\alpha$.

§ 9. Теорема синусов.

Предложение 2. *Имеет место равенство:*

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(a/R)} = \frac{\sin\beta}{\sin(b/R)} = \frac{\sin\gamma}{\sin(c/R)}.$$

Доказательство. Рассмотрим выражение $\sin\alpha/\sin(a/R)$ и выразим $\sin\alpha$ из теоремы косинусов. Получим:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(a/R)} = \tag{2}$$
$$\frac{\sqrt{\sin^2(b/R)\sin^2(c/R) - \cos^2(a/R) - \cos^2(b/R)\cos^2(c/R) + 2\cos(a/R)\cos(b/R)\cos(c/R)}}{\sin(a/R)\sin(b/R)\sin(c/R)}.$$

Выражая в числителе синусы через косинусы, получим:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(a/R)} =$$
$$= \frac{\sqrt{1 - \cos^2(a/R) - \cos^2(b/R) - \cos^2(c/R) + 2\cos(a/R)\cos(b/R)\cos(c/R)}}{\sin(a/R)\sin(b/R)\sin(c/R)}.$$

Последнее выражение симметрично по a, b, c. ■

Замечание 4. *При малых a, b, c приведенное равенство переходит в евклидову теорему синусов.* ■

§ 10. Двойственная теорема косинусов.

Приведенные выше формулы были естественными аналогами соответствующих формул евклидовой геометрии (хотя и отличались от них “количественно”). Однако в сферической геометрии существуют утверждения, не имеющие аналогов в евклидовом случае. Одно из важнейших — выражение для стороны треугольника через его углы.

Предложение 3 (Двойственная теорема косинусов)**.** *Имеет место равенство:*

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{R}.$$

Доказательство. Приведенное утверждение можно получить из теоремы косинусов чисто алгебраическими выкладками. Однако мы приведем другое доказательство, использующее еще одно специфическое для сферы понятие — полярных треугольников. Рассмотрим треугольник ABC и построим другой треугольник $A'B'C'$ следующим образом. Проведем через вершины B, C и центр сферы плоскость μ, и через A' обозначим ту точку пересечения сферы с прямой, проходящей через центр сферы перпендикулярно μ, которая лежит в той же полусфере, отсекаемой этой плоскостью, что и A. Аналогично построим вершины B', C'. Если через ξ_1, ξ_2, ξ_3 обозначить радиус-векторы вершин A, B, C, а через ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 — радиус-векторы вершин A', B', C', то полярный треугольник определяется равенствами:

$$(\xi_i, \xi'_i) > 0, \quad (\xi_i, \xi'_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Отсюда немедленно следует, что соотношение полярности взаимно (т.е. треугольник ABC полярен к $A'B'C'$). Покажем, что углы и стороны полярных треугольников связаны равенствами:

$$\alpha + \frac{a'}{R} = \beta + \frac{b'}{R} = \gamma + \frac{c'}{R} = \pi.$$

Действительно, a'/R — это угол между векторами ξ'_2 и ξ'_3, который равен разности между π и углом между ортогональными этим векторам плоскостями (O, ξ_1, ξ_3) и (O, ξ_1, ξ_2). С другой стороны, угол между этими плоскостями, очевидно, равен α. Из приведенного равенства и теоремы косинусов, записанной для полярного треугольника A', B', C', немедленно следует двойственная теорема косинусов. ■

§ **11. Признаки равенства треугольников.**

Назовем два сферических треугольника равными, если их можно перевести один в другой изометрией сферы. Подобно евклидовой теории, из теоремы косинусов следуют признаки равенства треугольников "по трем сторонам", по "двум сторонам и углу между ними" и "по стороне и двум прилежащим к ней углам"(докажите!). Однако, в отличие от евклидовой, в сферической геометрии есть еще один признак — "признак равенства треугольников по трем углам" (он сразу же вытекает из двойственной теоремы косинусов или из соотношения между сторонами и углами полярных треугольников). Таким образом, углы сферического треугольника полностью его определяют!

§ **12. Сумма углов треугольника.**

На сфере не верна теорема о сумме углов треугольника: например, треугольник, с вершинами в точках $(0, 0, R), (0, R, O), (R, 0, 0)$ имеет три прямых угла! Оказывается, сумма углов треугольника на сфере всегда больше π; более того, разность этих двух чисел пропорциональна площади треугольника.

Предложение 4. *Пусть α, β, γ — углы треугольника, S — его площадь. Тогда:*

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{S}{R^2}.$$

Доказательство. Продолжим стороны AB и AC нашего треугольника до больших кругов и обозначим через Σ_A площадь области, заключенной между этими большими кругами и содержащей треугольник ABC (Рис. 5). Ясно, что Σ_A пропорциональна углу α; кроме того, если $\alpha = \pi$, то Σ_A — это площадь сферы, т.е. $4\pi R^2$. Отсюда получаем, что $\Sigma_A = \alpha 4R^2$. Аналогично находим $\Sigma_B = \beta 4R^2$ и $\Sigma_C = \gamma 4R^2$. Заметим теперь, что в сумме эти три области покрывают всю сферу, но при этом трижды (вместо одного раза) считается площадь треугольника ABC и симметричного равного ему треугольника $A'B'C'$. Таким образом:

$$4R^2(\alpha + \beta + \gamma) + 4S = 4\pi R^2,$$

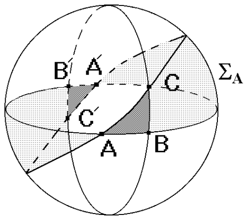

Рис. 5

откуда после деления на $4R^2$ следует требуемое равенство. ■

9 Лекция 9. Индефинитные (псевдоримановы) метрики и пространство Минковского

§ **1**. **Индефинитные метрики на поверхностях.**

Во многих областях математики и теоретической физики (особенно в теории относительности) встречаются поверхности, на которых задан объект, аналогичный римановой метрике, но вместо условия положительности удовлетворяющий более слабому условию невырожденности. Такие объекты называют псевдоримановыми или индефинитными метриками.

Определение 1. Псевдоримановой (индефинитной) метрикой на поверхности M называется соответствие, сопоставляющее каждой точке $P \in M$ невырожденную симметричную билинейную форму в касательном пространстве $T_P M$, гладко зависящую от точки P.

Замечание 1. *Гладкая зависимость от точки определяется точно так же, как и для римановой метрики.* ■

Замечание 2. *В каждой системе координат u^i псевдориманова метрика g задается симметричной невырожденной матрицей $g_{ij}(u) = g(r_i(u), r_j(u))$. Закон преобразования этой матрицы при переходе к другой системе координат точно такой же, как и для римановой метрики.* ■

Замечание 3. *В каждом касательном пространстве существует базис, в котором матрица билинейной формы g диагональна, причем диагональные элементы равны ± 1 (докажите!). Пусть положительных диагональных элементов p штук, а отрицательных — q штук. Тогда псевдориманова метрика называется метрикой сигнатуры (p, q). Ясно, что метрика сигнатуры $(n, 0)$ — риманова.* ■

§ **2**. **Псевдоевклидово скалярное произведение и пространство Минковского.**

Простейший пример поверхности с псевдоримановой метрикой строится следующим образом. Рассмотрим линейное пространство L в котором задана симметричная невырожденная билинейная форма сигнатуры (p, q). Такое пространство будем обозначать $\mathbb{R}^p_q$; саму форму будем называть *псевдоевклидовым скалярным произведением* и обозначать (так же, как и обычное скалярное произведение) круглыми скобками. Любая область в пространстве с псевдоевклидовым скалярным произведением является поверхностью с псевдоримановой метрикой сигнатуры (p, q); более того, если M — поверхность в $\mathbb{R}^p_q$, то псевдоевклидово скалярное произведение можно ограничить на касательные пространства к M. Отметим, что в результате этой операции, вообще говоря, может получиться вырожденная билинейная форма (см. примеры ниже); если же во всех касательных пространствах билинейная форма оказывается невырожденной, мы получаем псевдориманову метрику на поверхности M. Эта метрика называется *индуцированной из псевдоевклидова пространства* $\mathbb{R}^p_q$.

Задача 1. Пусть $N \subset \mathbb{R}^p_q$ — линейное подпространство. Его *ортогональным дополнением* $N^\perp$ называется множество векторов $\xi \in \mathbb{R}^p_q$, ортогональных N, т.е. таких, что $(\xi, \eta) = 0$ $\forall \eta \in N$. Выяснить, верны ли для всех N следующие равенства:

1. $\dim N + \dim N^\perp = \dim \mathbb{R}^p_q = p + q$.

2. $N \oplus N^\perp = \mathbb{R}^p_q$.

В специальной теории относительности центральную роль играет частный случай пространства $\mathbb{R}^p_q$ — т.н. пространство Минковского. Такое же пространство является объемлющим для геометрии Лобачевского — эта геометрия возникает на двумерной поверхности (псевдосфере) в трехмерном пространстве Минковского.

Определение 2. Пространством Минковского называется псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^n_1$.

По определению, в пространстве $\mathbb{R}^n_1$ существует базис $e_0, e_1, \ldots, e_n$, в котором скалярное произведение векторов ξ, η имеет вид $(\xi, \eta) = -\xi^0\eta^0 + \xi^1\eta^1 + \cdots + \xi^n\eta^n$. Такой базис (как и в евклидовом случае) будем называть ортонормированным; координаты в нем будем обозначать $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Замечание 4. *В специальной теории относительности координаты* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *— пространственные, а координата* x_0 *— временна́я (точнее,* $x_0 = ct$*, где* c *— скорость света). Точки пространства Минковского называются событиями.* ■

Замечание 5. *Иногда (в основном в физической литературе) скалярному произведению в пространстве Минковского приписывают противоположный знак, т.е. полагают* $(\xi, \eta) = \xi^0\eta^0 - \xi^1\eta^1 - \cdots - \xi^n\eta^n$*. Ясно, что все формулы векторной алгебры и дифференциальной геометрии при этих двух разных определениях пространства Минковского просто пересчитываются друг через друга (в нужных местах надо поменять знаки).* ■

Отличия между евклидовой и псевдоевклидовой геометрией немедленно проявляются при рассмотрении длин векторов. Действительно, в евклидовой геометрии квадрат длины любого ненулевого вектора — положительное число. В геометрии Минковского это не так: у некоторых векторов скалярный квадрат положителен, у некоторых отрицателен, у некоторых — нулевой.

Определение 3. Векторы $\xi \in \mathbb{R}^n_1$, для которых $(\xi, \xi) > 0$ называются пространственноподобными; векторы, для которых $(\xi, \xi) < 0$ — времениподобными, и векторы, для которых $(\xi, \xi) = 0$ — изотропными или светоподобными.

Пример 1. Векторы $e_1, \ldots, e_n$ из определенного выше базиса (и любые их линейные комбинации) пространственноподобны, вектор e_0 времениподобен, а векторы e_0+e_i, $i = 1, \ldots, n$ — изотропные.

Пример 2. Рассмотрим движение в евклидовом пространстве релятивистской частицы (т.е. частицы, подчиняющейся законам теории относительности). Закон движения определяется зависимостью координат $x_1, \ldots, x_n$ от времени, т.е. функциями $x_i = x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Вспоминая, что $x_0 = ct$, получим параметрические уравнения кривой в пространстве Минковского, определяемой законом движения частицы; эта кривая называется ее *мировой линией*. Рассмотрим касательный вектор ξ к мировой линии; он имеет вид: $c, v_1, \ldots, v_n$, где $v_i = dx_i/dt$ — координаты вектора скорости частицы. Скалярный квадрат вектора ξ равен $(\xi, \xi) = c^2 - v^2$, где $v^2 = (dx_1/dt)^2 + \cdots + (dx_n/dt)^2$ — квадрат скорости частицы. Один из центральных постулатов теории относительности утверждает, что частицы с положительной массой движутся медленнее света; поэтому $v^2 < c^2$ и, следовательно $(\xi, \xi) < 0$. Таким образом, *касательный вектор к мировой линии любой массивной частицы всегда времениподобен.* Если же частица движется со скоростью света (т.е. $|v| = c$, так могут двигаться только частицы нулевой массы — фотоны или нейтрино), касательный вектор к ее мировой линии, очевидно, изотропен.

Замечание 6. *Ясно, что, если вектор пространства Минковского времениподобен (пространственноподобен, изотропен), тем же свойством обладает и любой пропорциональный ему вектор. Поэтому прямые (одномерные подпространства) в* $\mathbb{R}^n_1$ *также делятся на три типа: пространственноподобные, времениподобные и изотропные.* ■

Множество изотропных векторов задается в координатах уравнением $x_0^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$; эта поверхность — n-мерный конус в $(n+1)$-мерном пространстве, называемый *световым конусом.* Световой конус делит множество всех времениподобных векторов на две области: скалярное произведение любых двух векторов, лежащих в одной и той же области отрицательно, а скалярное произведение векторов, лежащих в разных областях, положительно.

Определение 4. Два времениподобных вектора ξ, η называются одинаково ориентированными во времени, если $(\xi, \eta) < 0$ и по-разному ориентированными во времени, если $(\xi, \eta) > 0$.

Пример 3. Пусть $e_0, \dots, e_n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n_1$. Времениподобный вектор ξ ориентирован во времени одинаково с вектором e_0, если и только если $\xi^0 > 0$.

§ 3. Подпространства и преобразования Лоренца.

И в теории относительности, и в геометрии Лобачевского важную роль играют линейные преобразования пространства Минковского, являющиеся аналогами ортогональных преобразований. Они называются преобразованиями Лоренца.

Определение 5. Линейный оператор A в пространстве Минковского $\mathbb{R}^n_1$ называется преобразованием Лоренца, если он сохраняет (псевдоевклидово) скалярное произведение, т.е. для любых двух векторов $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n_1$ справедливо равенство $(A\xi, A\eta) = (\xi, \eta)$.

Замечание 7. *Ясно, что, аналогично евклидовому случаю, преобразования Лоренца переводят ортонормированный базис пространства Минковского в ортонормированный базис и любые два ортонормированных базиса можно совместить единственным преобразованием Лоренца.* ■

Ортогональные операторы в евклидовом пространстве бывают двух типов: собственные (с определителем 1) и несобственные (с определителем -1). В пространстве Минковского преобразования Лоренца можно различать еще по тому, меняют ли они направление времени.

Определение 6. Преобразование Лоренца A называется ортохронным, если оно не меняет направления времени, т.е. если $(A\xi, \xi) < 0$ для любого времениподобного вектора ξ.

Замечание 8. *Времениподобные векторы в пространстве Минковского заполняют внутренность светового конуса. Ортохронные преобразования оставляют на месте каждую половину этого конуса, а неортохронные меняют их местами.* ■

Таким образом, множество всех преобразований Лоренца (группа Лоренца) делится на 4 части: собственные ортохронные преобразования, несобственные ортохронные, собственные неортохронные и несобственные неортохронные.

Матрицы A ортогональных операторов в ортонормированном базисе евклидова пространства удовлетворяют соотношению $A^T A = E$ (единичная матрица). Выясним, как устроены матрицы преобразований Лоренца.

Утверждение 1. *Пусть A — матрица преобразований Лоренца в ортонормированном базисе пространства Минковского. Тогда:*

$$A^T I A = I, \tag{1}$$

где I — матрица скалярного произведения в этом базисе (очевидно, это диагональная $(n+1)\times(n+1)$-матрица, причем первый диагональный элемент равен -1, а остальные — $+1$).

Доказательство. Под действием линейного оператора матрица скалярного произведения преобразуется по формуле:

$$I' = A^T I A;$$

A будет преобразованием Лоренца, если $I' = I$. ■

Рассмотрим теперь подпространства пространства Минковского. В евклидовом пространстве подпространства обладают единственным инвариантом — размерностью: любые два подпространства одинаковой размерности можно перевести друг в друга ортогональным преобразованием. В пространстве Минковского это не так: помимо размерности играет роль сигнатура ограничения (псевдо)скалярного произведения на подпространство. Именно, пусть $N \subset \mathbb{R}^n_1$ — подпространство размерности k. Ограничивая форму $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ на N, получим на этом подпространстве симметричную билинейную форму. Отметим, что эта форма, вообще говоря, может быть вырожденной (пример — изотропная прямая); оказывается, вырождение формы тесно связано со взаимным расположением подпространства и его ортогонального дополнения. Именно, обозначим через N_0 ядро ограничения псевдоскалярного произведение на подпространство N, т.е. множество векторов $\xi \in N$, для которых $(\xi, \eta) = 0 \quad \forall \eta \in N$.

Утверждение 2. *Подпространство N_0 совпадает с пересечением подпространства N и его ортогонального дополнения $N^\perp$.*

Доказательство. Пусть $\xi \in N_0$, тогда этот вектор ортогонален всему подпространству N, а значит, принадлежит $N^\perp$. Обратно, пусть $\xi \in N \cap N^\perp$; тогда этот вектор (как элемент ортогонального дополнения к N) ортогонален N и, кроме того, лежит в этом подпространстве, т.е. принадлежит N_0. ■

Из этого утверждения немедленно вытекает классификация подпространств в пространстве Минковского.

Теорема 1. *Любое подпространство N пространство Минковского принадлежит к одному из следующих трех типов:*

1. *Подпространства, ограничение на которые скалярного произведения положительно определено (эллиптические или евклидовы подпространства).*

2. *Подпространства, ограничение на которые скалярного произведения имеет сигнатуру $(k-1, 1)$ (гиперболические подпространства или подпространства Минковского).*

3. *Подпространства, ограничение на которые скалярного произведения вырождено (параболические подпространства).*

Если подпространство эллиптическое, то ортогональное дополнение к нему гиперболическое, и наоборот — ортогональное дополнение к гиперболическому подпространству эллиптично; в этих случаях подпространство и его ортогональное дополнение трансверсальны (т.е. пересекаются лишь по нулевому вектору). Если подпространство параболическое, то таково и его ортогональное дополнение; в этом случае N и $N^\perp$ пересекаются по (ненулевому) ядру ограничения (псевдо)скалярного произведения на любое из этих подпространств.

Доказательство. Пусть ограничение скалярного произведение на подпространство N невырождено. Тогда, согласно только что доказанному утверждению, N и $N^\perp$ пересекаются только по нулевому вектору. Далее, из невырожденности скалярного произведения во всем пространстве Минковского следует, что $\dim N + \dim N^{\perp} = n+1$ (докажите!), поэтому $\mathbb{R}^n_1 = N \oplus N^{\perp}$. Приведем теперь скалярное произведение на подпространствах N и $N^{\perp}$ к главным осям; тогда эта квадратичная форма приведется к главным осям на всем $\mathbb{R}^n_1$; среди векторов соответствующего базиса ровно один времениподобен, а остальные — пространственноподобны (т.к. сигнатура скалярного произведения в $\mathbb{R}^n_1$ равна $(n,1)$). Таким образом, из пары подпространств $N, N^{\perp}$ одно гиперболическое (именно, то, в которое попадает единственный времениподобный вектор базиса главных осей), а второе эллиптическое.

Если же подпространство N — параболическое, то таковым является и его ортогональное дополнение (поскольку $(N^{\perp})^{\perp} = N$ и подпространства $N^{\perp}$ и N пересекаются по ненулевому подпространству); в соответствии с доказанным выше утверждением, пересечение этих двух подпространств совпадает с ядром ограничения скалярного произведения на любое из них. ■

Задача 2. Доказать, что размерность ядра ограничения скалярного произведения на параболическое подпространство равно единице и любой вектор из подпространства, не принадлежащий ядру, пространственноподобен.

Задача 3. Доказать, что любые два эллиптических (гиперболических, параболических) подпространства одинаковой размерности можно совместить преобразованием Лоренца.

Замечание 9. *Разные типы подпространств в пространстве Минковского по-разному расположены относительно светового конуса. Именно, эллиптические подпространства пересекаются с ним только по нулевому вектору, гиперболические пересекают конус трансверсально (по $(k-1)$–мерному конусу), а параболические его касаются по прямой (являющейся ядром ограничения скалярного произведения на подпространство).* ■

§ 4. **Неравенство Коши-Буняковского и неравенство треугольника.**

Еще одно свойство пространства Минковского, отличающее его от евклидова, состоит в том, что неравенство Коши-Буняковского для времениподобных векторов направлено в противоположную сторону.

Предложение 1. *Пусть векторы $\xi, \eta \in M^{n+1}$ времениподобны. Тогда $(\xi,\eta)^2 \geq (\xi,\xi)(\eta,\eta)$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда ξ и η параллельны.*

Доказательство. Выберем ортонормированный базис так, чтобы вектор временной координаты был направлен вдоль ξ: $\xi = \lambda e_0$. Тогда:

$$(\xi,\eta)^2 = \lambda^2(\eta^0)^2, \quad (\eta,\eta)^2 = (\eta_0^2 - (\eta^1)^2 - \dots - (\eta^n)^2)^2 \leq (\eta^0)^2,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $\eta^k = 0 \quad \forall k = 1,\dots,n$, т.е. когда η и ξ параллельны. ■

Следствие 1 (Неравенство треугольника в обратную сторону)**.** *Пусть векторы ξ,η времениподобны и $(\xi,\eta) \leq 0$ (т.е. эти векторы одинаково ориентированы по времени). Тогда вектор $(\xi+\eta)$ времениподобен и:*

$$|\xi+\eta| \geq |\xi| + |\eta|$$

Здесь длина любого времениподобного вектора ζ по определению равна $|\zeta| = \sqrt{-(\zeta,\zeta)}$; равенство достигается только если ξ и η линейно зависимы.

Доказательство.

$$\begin{aligned}|\xi+\eta|^2 &= -(\xi+\eta,\xi+\eta) = -(\xi,\xi) - (\eta,\eta) - 2(\xi,\eta) = \\ &= |\xi|^2 + |\eta|^2 + 2|(\xi,\eta)| \geq |\xi|^2 + 2|\xi||\eta| + |\eta|^2 = |\xi+\eta|^2,\end{aligned}$$

причем равенство достигается только в случае параллельных векторов. ■

§ **5**. **Собственное время. Инерциальные наблюдатели.**

Обсудим простейшие факты геометрии пространства Минковского с точки зрения специальной теории относительности. Согласно основному принципу этой теории, все ортонормированные базисы с фиксированной пространственной и временной ориентацией (т.е. базисы, времениподобные векторы в которых одинаково ориентированы во времени) абсолютно равноправны, так что выделенных координат не существует (в частности, не существует и "абсолютного времени"). Каждый наблюдатель определяет в пространстве Минковского мировую линию, касательный вектор к которой во всех точках времениподобен (см. § **1**.). Последнее обстоятельство позволяет определить длину дуги такой мировой линии; именно, если на ней задан параметр y и $y_1 < y_2$ — значения параметра, определяющие две точки кривой, положим длину дуги l между этими точками равной:

$$l = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{-(\xi(y), \xi(y))}dy.$$

В соответствии с этим определением на каждой мировой линии вводится натуральный параметр, равный длине дуги; в специальной теории относительности этот параметр, поделенный на скорость света c, называется *собственным временем наблюдателя* и интерпретируется как время, измеряемое по его часам. Если мировая линия — прямая, наблюдатель называется *инерциальным*. Любые две времениподобные прямые можно совместить преобразованием Лоренца; таким образом, такие преобразования описывают пересчет пространственных и временных координат у разных инерциальных наблюдателей. Пусть имеется два инерциальных наблюдателя; обозначим через e_0 и e_0' единичные направляющие векторы их мировых линий (мы считаем, что эти времениподобные векторы одинаково ориентированы во времени). Точки, лежащие на прямых, проходящих через эти векторы, (а также на сонаправленных прямых) изображают события, происходящие для данного наблюдателя в одном и том же месте, но в разные моменты времени. Плоскость размерности n, ортогональная мировой линии наблюдателя, состоит из событий, произошедших, с его точки зрения, одновременно, но в разных местах.

Простейшие свойства пространства Минковского приводят к важным с физической точки зрения выводам. Перечислим наиболее известные из этих выводов.

Вывод 1. Относительность одновременности.

Рассмотрим два события, которые с точки зрения первого — "нештрихованного" — наблюдателя произошли одновременно. Это означает, что вектор ξ, соединяющий соответствующие точки пространства Минковского, ортогонален e_0. Ясно, что такой вектор, вообще говоря, не будет ортогонален e_0', т.е. с точки зрения второго наблюдателя данные два события одновременными не являются.

Вывод 2. Замедление времени.

Рассмотрим часы первого наблюдателя; пусть он дважды посмотрел на эти часы и обнаружил, что прошел промежуток времени Δt. Формально это означает, что мы рассматриваем два события, которые лежат на прямой, проходящей через вектор e_0, причем длина времениподобного вектора ξ, соединяющего эти точки, равна $c\Delta t$:

$$\sqrt{-(\xi, \xi)} = c\Delta t.$$

С точки зрения второго ("штрихованного") наблюдателя, рассматриваемые события произошли, вообще говоря, в разных местах (вектор ξ не параллелен e_0'); чтобы найти промежуток времени между ними, надо разложить вектор ξ на параллельную и ортогональную e_0' составляющие и найти длину параллельной составляющей:

$$\Delta t' = \sqrt{-(\xi', \xi')}, \quad \text{где} \quad \xi = \xi' + \eta', \quad (\eta', \xi') = 0.$$

Вектор η' пространственноподобен $(\eta', \eta') > 0$, поэтому:

$$-(\xi, \xi) = -(\xi', \xi') - (\eta', \eta') < -(\xi', \xi'),$$

откуда сразу следует, что:

$$\Delta t' > \Delta t.$$

Таким образом, с точки зрения второго наблюдателя часы первого идут медленнее, чем с его собственной точки зрения; отметим, что для первого наблюдателя его часы неподвижны, поэтому наш вывод можно сформулировать так: *движущиеся часы по сравнению с неподвижными замедляют ход.*

Вывод 3. Сокращение длин.

Рассмотрим твердый предмет (например, стержень), который с точки зрения первого наблюдателя неподвижен; пусть с его же точки зрения длина стержня равна l. С точки зрения второго наблюдателя этот стержень движется; для того, чтобы найти его длину l', рассмотрим два события, которые произошли с точки зрения второго наблюдателя одновременно в тех точках, в которых находятся концы нашего стержня. Евклидова длина пространственноподобного вектора η', соединяющего эти два события (т.е. число $\sqrt{(\eta', \eta')}$) и будет длиной l' нашего стержня с точки зрения второго наблюдателя. Сравним числа l и l'; для этого заметим, что, с точки зрения первого наблюдателя, события, соединенные вектором η', также произошли в точках, соответствующих концам стержня, хотя и в разные моменты времени. Но, поскольку для первого наблюдателя стержень покоится, эта разница во времени не играет роли — длина стержня все равно равна евклидовой длине пространственной (с точки зрения первого наблюдателя) компоненты вектора η'; другими словами:

$$l = \sqrt{(\eta, \eta)}, \quad \text{где} \quad \eta' = \eta + \xi, \quad (\eta, \xi) = 0,$$

и времениподобный вектор ξ параллелен e_0. Поскольку:

$$(\eta', \eta') = (\eta, \eta) + (\xi, \xi) < (\eta, \eta),$$

длина l' нашего стержня с точки зрения второго наблюдателя меньше, чем длина l этого же стержня с точки зрения первого наблюдателя. Другими словами, стержень имеет максимальную длину для тех наблюдателей, для которых он покоится; при переходе в “движущуюся систему отсчета” длина сокращается.

Вывод 4. Парадокс близнецов.

Пусть два близнеца расстались (время и место расставания примем за начало координат); после этого один из них двигался инерциально от точки 0 до точки $\xi + \eta$ (можно, например, считать, что он покоился), а другой двигался сначала от нуля до ξ, а затем от ξ до $\xi + \eta$; в этой точке их мировые линии пересеклись, т.е. они встретились. Здесь ξ, η и $\xi + \eta$ — времениподобные векторы. Собственное время неподвижного брата (т.е. время, прошедшее по его часам) будет при встрече равно $\dfrac{|\xi + \eta|}{c}$, а собственное время летавшего брата — $\dfrac{|\xi| + |\eta|}{c}$. Согласно неравенству треугольника для времениподобных векторов, первое время больше, так что близнец, сидевший дома, может сильно состариться, в то время как близнец-путешественник будет еще молодым. Отметим, что братья, конечно, находятся не в симметричной ситуации: мировая линия путешественника не прямая, а ломаная, так что он не инерциален. Другими словами, чтобы вернуться в исходную точку, ему придется двигаться с ускорением (например, он может включить двигатели своего космического корабля около 0 и около ξ с тем, чтобы сначала улететь от брата, а затем вернуться к нему).

10 Лекция 10. Векторная модель геометрии Лобачевского

§ **1**. **Введение.**

Геометрия Лобачевского возникла из желания доказать (исходя из остальных аксиом планиметрии) пятый постулат Евклида, который утверждает, что через каждую точку плоскости, не лежащую на данной прямой, проходит ровно одна прямая, параллельная данной. Попытки доказать это утверждение "от противного" не приводили к противоречию; напротив, возникла своеобразная и красивая теория, отличающаяся от геометрии Евклида. Важный вопрос о непротиворечивости этой теории был разрешен после появления моделей геометрии Лобачевского, позволивших полностью описать ее в терминах алгебры, анализа и обычной геометрии. В этом параграфе мы рассмотрим одну из основных моделей плоскости Лобачевского — векторную модель.

§ **2**. **Псевдосфера в пространстве Минковского.**

Рассмотрим трехмерное пространство Минковского $\mathbb{R}^2_1$ и зафиксируем в нем ортонормированный базис e_0, e_1, e_2; координаты в этом базисе будем обозначать x_0, x_1, x_2. Геометрия Лобачевского реализуется на поверхности в этом пространстве, называемой псевдосферой.

Определение 1. Псевдосферой в пространстве Минковского называется поверхность, заданная уравнением $(\xi, \xi) = -1$.

В координатах x_0, x_1, x_2 уравнение псевдосферы имеет вид $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1$; если представлять себе эти координаты как координаты в обычном трехмерном пространстве, то псевдосфера — это двуполостный гиперболоид. Ясно, что все точки псевдосферы (точнее, их радиус-векторы) времениподобны, так что этот гиперболоид лежит целиком внутри светового конуса. В дальнейшем мы будем рассматривать только одну половину псевдосферы, а именно ту, для которой $x_0 > 0$ (соответствующие радиус-векторы ориентированы во времени так же, как вектор e_0).

§ **3**. **Касательная плоскость к псевдосфере и метрика Лобачевского.**

Геометрия на всякой поверхности начинается с рассмотрения касательной плоскости, т.е. пространства векторов скоростей кривых, лежащих на поверхности. Рассмотрим произвольную кривую $\xi = \xi(t)$, лежащую на псевдосфере. Дифференцируя равенство $(\xi(t), \xi(t)) = -1$, получим, что $(\xi', \xi) = 0$, т.е. *вектор скорости любой кривой, лежащей на псевдосфере, ортогонален радиус-вектору*. Отсюда, в частности, следует, что *скалярный квадрат любого касательного вектора к псевдосфере положителен, т.е. все касательные плоскости пространственноподобны* (докажите!). Это обстоятельство играет важнейшую роль в построении геометрии Лобачевского — пользуясь им, мы можем определить на псевдосфере длины кривых, углы между ними, ковариантные производные, параллельный перенос и геодезические совершенно аналогично тому, как это делалось для поверхностей в евклидовом пространстве.

Определение 2. Список основных понятий:

1. Длиной касательного вектора η к псевдосфере называется квадратный корень из его скалярного квадрата: $|\eta| = \sqrt{(\eta, \eta)}$.

2. Углом между двумя касательными векторами η, ζ (в одной и той же точке) к псевдосфере называется число α, вычисляемое по формуле:
$$\cos\alpha = \frac{(\eta, \zeta)}{|\eta||\zeta|}.$$

3. Длиной дуги между точками t_1, t_2, $t_1 < t_2$ кривой $\xi = \xi(t)$, лежащей на псевдосфере, называется интеграл от длины ее вектора скорости:
$$l = \int_{t_1}^{t_2} |\xi'(t)| dt.$$

4. Углом между пересекающимися кривыми на псевдосфере называется угол между векторами скорости к этим кривым в точке их пересечения.

5. Векторные поля на псевдосфере определяются совершенно аналогично векторным полям на поверхностях в евклидовом пространстве. Если u, v — координаты на псевдосфере (например, приведенные ниже псевдосферические координаты), то произвольное гладкое векторное поле η задается парой гладких функций $\eta^1(u,v), \eta^2(u,v)$. Ковариантные производные векторных полей и семейств касательных векторов определяются точно так же, как это было сделано в Лекции 4 для поверхностей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$ (т.е. с помощью ортогональной проекции на касательную плоскость); формулы (3) этой лекции для символов Кристоффеля остаются справедливыми (докажите!).

6. Параллельный перенос касательных векторов и геодезические на псевдосфере определяются точно так же, как на поверхностях в $\mathbb{R}^N$; уравнения геодезических (3) сохраняют свой вид.

Таким образом, на псевдосфере пространства Минковского возникает геометрия, аналогичная геометрии на поверхности в трехмерном евклидовом пространстве.

Определение 3. Эта геометрия называется геометрией Лобачевского, а сама псевдосфера — плоскостью Лобачевского (точнее, ее векторной моделью).

Все перечисленные геометрические структуры вычисляются через коэффициенты первой квадратичной формы; найдем их для плоскости Лобачевского. Запишем параметрические уравнения псевдосферы (как поверхности вращения гиперболы $x_0^2 - x_1^2 = 1$ вокруг оси x_0) в виде $\xi = (\operatorname{ch} u, \operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v)$. Стандартное вычисление приводит к следующему выражению для матрицы первой квадратичной форму плоскости Лобачевского в этих координатах:
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sh}^2 u \end{pmatrix}.$$

§ 4. Геодезические и изометрии плоскости Лобачевского.

Найдем геодезические на плоскости Лобачевского. Оказывается, они похожи на большие круги сферы.

Теорема 1. *Геодезическими на плоскости Лобачевского являются кривые, получающиеся пересечением псевдосферы плоскостями, проходящими через начало координат, и только они.*

Доказательство. Из определения ковариантной производной на плоскости Лобачевского следует, что геодезические — это кривые, ускорение которых ортогонально псевдосфере, если параметр натуральный; пересечения псевдосферы с плоскостями, проходящими через начало координат, как раз и обладают этим свойством (действительно, ускорение ортогонально скорости, а скорость такой кривой ортогональна радиус–вектору, поэтому ускорение этому вектору параллельно). То, что других геодезических нет, проверятся так же, как для сферы — через каждую точку гиперболоида и любой касательный вектор в этой точке можно провести плоскость, проходящую через начало координат (эта плоскость натянута на касательный вектор и радиус-вектор точки); линия пересечения этой плоскости с псевдосферой будет той единственной геодезической, которая проходит через данную точку в данном направлении. ■

Замечание 1. *Таким образом, геодезические на псевдосфере находятся во взаимно-однозначном соответствии с гиперболическими плоскостями; поэтому многие факты геометрии Лобачевского, касающиеся геодезических, вытекают из линейной алгебры пространства Минковского (точнее, из свойств двумерных гиперболических подпространств в* $\mathbb{R}^2_1$*).* ■

Изучение геометрии на сфере показывает, что наличие большого числа изометрий играет важную роль — с их помощью можно устанавливать многие геометрические факты, не прибегая к явным вычислениям в координатах. Оказывается, плоскость Лобачевского, так же как сфера и евклидова плоскость, допускает много изометрий.

Теорема 2. *Группа изометрий плоскости Лобачевского изоморфна группе ортохронных преобразования Лоренца пространства* $\mathbb{R}^2_1$.

Доказательство. Действительно, ясно, что любое преобразование Лоренца в $\mathbb{R}^2_1$, оставляющее псевдосферу на месте (т.е. ортохронное), будет изометрией плоскости Лобачевского. Далее, если ξ, η радиус–векторы двух точек псевдосферы, а e_1, e_2 и f_1, f_2 — ортонормированные реперы в касательных плоскостях к псевдосфере в этих точках, всегда найдется ортохронное преобразование Лоренца, переводящее тройку ξ, e_1, e_2 в тройку η, f_1, f_2 (это следует из того, что каждая такая тройка определяет ортонормированный базис в пространстве Минковского $\mathbb{R}^2_1$). Отсюда, как и при доказательстве соответствующей теоремы для евклидовой плоскости, следует, что других изометрий плоскости Лобачевского, кроме ортохронных преобразований Лоренца, нет. ■

§ **5**. **Нарушение аксиомы параллельных.**

Убедимся в том, что на плоскости Лобачевского нарушается пятый постулат Евклида. Для этого рассмотрим на ней геодезическую (гиперболу) $l : x_2 = 0$ и точку P с радиус-вектором ξ, лежащую в плоскости $x_1 = 0$ (см. Рис. 6). Ясно, что геодезическая l_0,

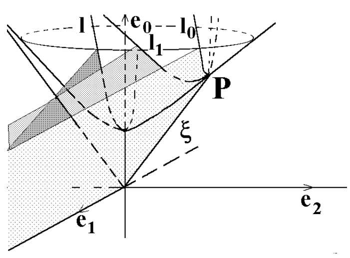

Рис. 6

получающаяся пересечением псевдосферы с плоскостью, проходящей через векторы ξ и e_1, проходит через P и параллельна l: плоскости, в которой лежат эти две кривые пересекаются по оси e_1, которая не имеет общих точек с псевдосферой, а значит, и с кривыми l, l_0. Будем теперь поворачивать плоскость вокруг вектора ξ. Линия пересечения повернутой плоскости с плоскостью $x_2 = 0$ — прямая, лежащая в плоскости $x_2 = 0$ (рис. 6). При повороте эта прямая (которая изначально совпадала с осью e_1), будет поворачиваться; ясно однако, что до тех пор, пока она не попадет на световой конус, т.е. ее направляющий вектор не станет равным $e_1 + e_0$, указанная прямая не будет пересекаться с псевдосферой. Поэтому все линии пересечения поворачиваемых плоскостей с псевдосферой будут оставаться параллельными l; таких геодезических, очевидно, бесконечно много: все они расположены между двумя предельными геодезическими l_1, l_2 (геодезическая l_1 лежит в плоскости векторов ξ и $e_1 + e_0$, а геодезическая l_2 — в плоскости векторов ξ и $e_0 - e_1$).

Замечание 2. *Очевидно, две произвольные геодезические на плоскости Лобачевского будут параллельными (т.е. не будут пересекаться) тогда и только тогда, когда прямая пересечения определяющих их двумерных плоскостей пространственноподобна или изотропна. Нарушение аксиомы параллельных поэтому следует из следующего простого факта линейной алгебры* $\mathbb{R}^2_1$*: для данной гиперболической плоскости* L *и данного не лежащего в ней времениподобного вектора* ξ *существует бесконечно много двумерных гиперболических плоскостей, проходящих через* ξ *и пересекающихся с* L *по пространственноподобной прямой — они натянуты на вектор* ξ *и произвольный пространственноподобный вектор из* L*.* ■

§ 6. Расстояние.

Через любые две точки плоскости Лобачевского проходит ровно одна геодезическая — она лежит в плоскости, проходящей через эти точки и начало координат.

Определение 4. Расстоянием между двумя точками плоскости Лобачевского называется длина дуги геодезической, заключенной между этими точками.

Оказывается, расстояние можно определить по формуле, очень похожей на соответствующую формулу сферической геометрии.

Утверждение 1. *Расстояние* ρ *между двумя точками с радиус-векторами* ξ_1, ξ_2 *удовлетворяет равенству* $\operatorname{ch}\rho = -(\xi_1, \xi_2)$.

Доказательство. Утверждение инвариантно относительно изометрий плоскости Лобачевского. Поэтому достаточно проверить его для двух точек, лежащих на геодезической $x_2 = 0$ (любую другую можно перевести в эту изометрией). В координатах (u, v) эта геодезическая задается уравнениями $u = u, v = 0$; пусть координаты точек $u = u_1, v = 0$ и $u = u_2, v = 0$ соответственно. Вычисляя длину дуги геодезической между этими точками, получим:

$$\rho = \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1$$

(касательный вектор к геодезической имеет вид $(1, 0)$; матрица первой квадратичной формы приведена выше). С другой стороны, векторы ξ_1, ξ_2, очевидно, имеют вид:

$$\xi_j = (\operatorname{ch} u_j,\ \operatorname{sh} u_j,\ 0),$$

поэтому:

$$(\xi_1, \xi_2) = -\operatorname{ch} u_1 \operatorname{ch} u_2 + \operatorname{sh} u_1 \operatorname{sh} u_2 = -\operatorname{ch}(u_2 - u_1),$$

откуда немедленно следует требуемая формула. ■

§ 7. Окружности.

Определение 5. Окружностью с центром в точке P радиуса a на плоскости Лобачевского называется множество точек, находящихся на расстоянии a от точки P.

Оказывается, формула для длины окружности также напоминает соответствующую формулу сферической геометрии.

Утверждение 2. *Длина l окружности радиуса a на плоскости Лобачевского равна:*

$$l = 2\pi \operatorname{sh} a.$$

Доказательство. Утверждение инвариантно относительно изометрий, поэтому его достаточно проверить для окружности с центром в точке $(1,0,0)$. Такая окружность, очевидно, является евклидовой окружностью (параллелью псевдосферы); в координатах (u,v) она задается уравнениями $u = a$, $v = v$, $v \in [0, 2\pi]$ (см. предыдущий пункт). Касательный вектор к ней имеет координаты $(0,1)$ и его длина равна $\operatorname{sh} a$ (см. выражение для первой квадратичной формы). Таким образом, длина окружности l равна:

$$l = \int_0^{2\pi} \operatorname{sh} a \, dv = 2\pi \operatorname{sh} a.$$

■

Задача 1. Как выглядит произвольная окружность на плоскости Лобачевского?

§ 8. Треугольники.

Треугольники на плоскости Лобачевского определяются обычным способом — рассматриваем произвольные три точки A, B, C и соединяем их попарно дугами геодезических. Формулы решения треугольников и признаки их равенства в геометрии Лобачевского похожи на соответствующие утверждения сферической геометрии.

Утверждение 3 (Теорема косинусов)**.** *Пусть a, b, c — длины сторон треугольника на плоскости Лобачевского, а α, β, γ — противолежащие им углы. Тогда имеет место равенство:*

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos \alpha.$$

■

Задача 2. Доказать это утверждение.

Указание. Доказательство аналогично доказательству сферической теоремы косинусов (см. Лекцию 8).

Задача 3. Доказать на плоскости Лобачевского теорему синусов:

$$\frac{\sin\alpha}{\operatorname{sh} a} = \frac{\sin\beta}{\operatorname{sh} b} = \frac{\sin\gamma}{\operatorname{sh} c}.$$

Указание. Она получается из теоремы косинусов алгебраической выкладкой (срав. с аналогичным утверждением из Лекции 8).

Как и в сферической геометрии, в геометрии Лобачевского углы треугольника определяют его стороны. Соответствующая формула также называется двойственной теоремой косинусов.

Утверждение 4 (Двойственная теорема косинусов)**.**

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma \operatorname{ch} a.$$

Доказательство. На плоскости Лобачевского нет полярных треугольников, поэтому для доказательства двойственной теоремы косинусов приходится применять алгебраические вычисления (это можно сделать и на сфере, но там проще воспользоваться полярной конструкцией). Выразим косинусы углов через стороны треугольника из теоремы косинусов. Получим:

$$\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma = \frac{\operatorname{sh}^2 a(\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a) + (\operatorname{ch} a \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} b)(\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} c)}{\operatorname{sh}^2 a \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c}.$$

Раскрывая в числителе скобки и выражая гиперболический синус через косинус, получим:

$$\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma = \operatorname{ch} a \frac{1 + 2\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{ch}^2 b - \operatorname{ch}^2 c}{\operatorname{sh}^2 a \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c}.$$

С другой стороны, из той же теоремы косинусов получаем:

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \Big(\frac{\operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{ch} c}{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} c}\Big)^2}.$$

Раскрывая скобки под квадратным корнем и выражая в числителе гиперболический синус через косинус, получим:

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{1 + 2\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{ch}^2 b - \operatorname{ch}^2 c}}{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} c}.$$

Аналогично:

$$\sin\gamma = \frac{\sqrt{1 + 2\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{ch}^2 b - \operatorname{ch}^2 c}}{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}.$$

Перемножая два последних равенства и сравнивая с выражением для $\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma$, получим требуемую формулу. ■

Замечание 3. *Из выписанных формул следуют признаки равенства треугольников, аналогичные полученным выше в сферической геометрии. Именно, назовем два треугольника на плоскости Лобачевского равными, если их можно перевести один в другой изометрией. Очевидно, имеют место следующие признаки равенства треугольников:*

a) по трем сторонам;

b) по двум сторонам и углу между ними;

c) по стороне и двум прилежащим к ней углам;

d) по трем углам.

(последний признак не имеет аналога в евклидовом случае, но справедлив в сферическом)

■

Замечание 4. *Если линейные размеры (радиус окружности, стороны треугольника и т.д.) стремятся к нулю, все формулы геометрии Лобачевского переходят в соответствующие формулы евклидовой геометрии (докажите!).* ■

Замечание 5. *Если в формулах сферической геометрии формально заменить радиус сферы R на мнимую единицу i, то эти формулы перейдут в соответствующие формулы геометрии Лобачевского (убедитесь в этом на примере формул из Лекции 8). Таким образом, геометрия Лобачевского — это геометрия на сфере мнимого радиуса! Конечно, такое утверждение не имеет строгого математического смысла; его реальное содержание состоит в том, что геометрия Лобачевского реализуется на псевдосфере $(\xi, \xi) = -1$.*

■

11 Лекция 11. Модели Пуанкаре геометрии Лобачевского

§ **1**. **Введение.**

В предыдущей лекции мы ввели на плоскости Лобачевского координаты (u, v), аналогичные широте и долготе на сфере. Эти координаты обладают те же самым недостатком, что и сферические — они вырождаются в полюсе псевдосферы — точке $(1, 0, 0)$ (эта единственная точка в координатах (u, v) задается целым полуинтервалом $u = 0$, v — любое). В сферической геометрии такой недостаток неустраним: не существует глобальных координат на всей сфере, пробегающих открытую область плоскости. В случае псевдосферы это не так: ее можно параметризовать глобально. Это обстоятельство удобно тем, что в таких глобальных координатах все точки плоскости Лобачевского изображаются точками одной области на обычной плоскости, поэтому и все утверждения геометрии Лобачевского можно переформулировать в терминах планиметрии (т.е. вовсе не обращаясь к трехмерному пространству Минковского). Отметим, что это, конечно, не означает, что геометрия Лобачевского и геометрия на обычной плоскости устроены одинаково (мы уже видели, что это совсем не так); дело в том, что при изображении точек плоскости Лобачевского точками обычной плоскости все длины "искажаются", т.е. расстояния задаются совсем другими формулами, чем в евклидовой геометрии, а потому и геометрические теоремы оказываются иными.

Существуют разные способы изображения геометрии Лобачевского точками плоскости; в следующем параграфе мы обсудим две такие модели (которые имеют так много общего, что часто рассматриваются как два варианта одной модели) — так называемые модели Пуанкаре.

§ **2**. **Стереографическая проекция псевдосферы. Метрика Лобачевского в модели Пуанкаре на единичном круге.**

Первый способ глобальной параметризации плоскости Лобачевского состоит в следующем. Рассмотрим произвольную точку P псевдосферы и проведем через нее прямую, проходящую через точку $(-1, 0, 0)$ (полюс нижней полости гиперболоида). Эта прямая пересечет плоскость (e_1, e_2) в единственной точке P', причем эта точка будет лежать внутри единичного круга на этой плоскости (т.е. ее координаты (x_1, x_2) удовлетворяют неравенству $x_1^2 + x_2^2 < 1$) — евклидов угол прямой PP' с осью e_0 меньше $\pi/4$ (см. Рис. 7). Обратно, для всякой точки P', лежащей внутри единичного круга на плоскости e_1, e_2, прямая, проходящая через P' и точку $(-1, 0, 0)$, пересечет псевдосферу в единственной точке P. Таким образом, мы получили взаимно однозначное соответствие между точками плоскости Лобачевского и точками единичного круга на плоскости (e_1, e_2); такое отображение псевдосферы в плоскость называется *стереографической проекцией*. Будем задавать каждую

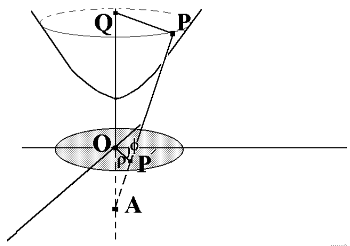

Рис. 7

точку P псевдосферы координатами (x_1, x_2) ее стереографической проекции P'; тем самым мы получили глобальную параметризацию псевдосферы, причем параметризующие координаты меняются в единичном круге. Вычислим метрический тензор (первую квадратичную форму) плоскости Лобачевского в эти координатах. Для этого сначала рассмотрим на плоскости (x_1, x_2) полярные координаты (ρ, ϕ), для которых $x_1 = \rho\cos\phi$, $x_2 = \rho\sin\phi$. Из Рис. 7 видно, что координаты (ρ, ϕ) связаны с исходными (u, v) по формулам:

$$\phi = v, \quad \rho = \operatorname{sh} u/(1 + \operatorname{ch} u)$$

(треугольник APQ подобен треугольнику $AP'O$). Применяя формулу преобразования первой квадратичной формы при замене координат получим после прямого вычисления матрицу метрического тензора в координатах (ρ, ϕ) (докажите!):

$$\widetilde{G} = \frac{4}{(1-\rho^2)^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix},$$

или:

$$ds^2 = \frac{4}{(1-\rho^2)^2}(d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2).$$

Наконец, переходя от полярных координат (ρ, ϕ) к декартовым (x_1, x_2), получим матрицу первой квадратичной формы в этих координатах:

$$G_1 = \frac{4}{(1-(x_1^2+x_2^2))^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{(1-(x_1^2+x_2^2))^2}E,$$

или:

$$ds^2 = \frac{4}{(1-(x_1^2+x_2^2))^2}(dx_1^2 + dx_2^2).$$

Определение 1. Внутренность единичного круга $x_1^2 + x_2^2 < 1$ на плоскости (x_1, x_2) с первой квадратичной формой G_1 называется моделью Пуанкаре (точнее, моделью Пуанкаре в единичном круге) плоскости Лобачевского.

Замечание 1. *После того, как первая квадратичная форма вычислена, мы можем забыть про псевдосферу и изучать только геометрические объекты, живущие в единичном круге. Таким образом, мы свели все задачи геометрии Лобачевского к задачам планиметрии со специальным образом определенным (неевклидовым) скалярным произведением.* ■

§ 3. Комплексные координаты и комплексная запись первой квадратичной формы.

При изучении моделей Пуанкаре удобно пользоваться комплексным языком. Именно, будем представлять себе плоскость (x_1, x_2) как комплексную плоскость, т.е. для каждой точки рассмотрим комплексное число $w = x_1 + ix_2$ и комплексно-сопряженное ему $\bar{w} = x_1 - ix_2$. Эти числа называются *комплексными (точнее, комплексно-сопряженными)* координатами точки (x_1, x_2). Далее, в каждой касательной плоскости к плоскости Лобачевского рассмотрим принимающие комплексные значения линейные функционалы dw и $d\bar{w}$, определенные формулами $dw = dx_1 + idx_2$, $d\bar{w} = dx_2 + idx_1$ (напомним, что функционалы dx_1 и dx_2 образуют базис, двойственный к базису на касательной плоскости, порожденному координатами x_1, x_2, см. Лекцию 3). Ясно, что:

$$dx_1 = \frac{1}{2}(dw + d\bar{w}), \quad dx_2 = \frac{1}{2i}(dw - d\bar{w}), \quad (x_1^2 + x_2^2) = w\bar{w} = |w|^2.$$

Подставляя эти формулы в полученное выше выражение для метрики плоскости Лобачевского, получим:

$$ds^2 = \frac{4}{(1-(x_1^2+x_2^2))^2}(dx_1^2 + dx_2^2) = \frac{4}{(1-|w|^2)^2}dwd\bar{w}.$$

§ **4. Модель Пуанкаре в верхней полуплоскости.**

Наряду с моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского в единичном круге используется и другая модель Пуанкаре — модель на верхней полуплоскости. Она строится следующим образом. Рассмотрим дробно-линейное преобразование комплексной плоскости:

$$w \mapsto z = i\,\frac{1-w}{1+w}.$$

При этом преобразовании единичный круг $|w| < 1$ взаимно однозначно отображается на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ (докажите!). Таким образом, комплексные координаты $z, \bar{z}$ (или вещественные x, y, $z = x + iy$, $y > 0$) определяют новые параметры на единичном круге, а значит, и на плоскости Лобачевского. Запишем в этих новых координатах метрический тензор геометрии Лобачевского. Прямое вычисление дает:

$$ds^2 = -\frac{4dzd\bar{z}}{(z-\bar{z})^2} = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$$

(докажите!). Верхняя полуплоскость $y > 0$ с заданной этой формулой первой квадратичной формой называется *моделью Пуанкаре (на верхней полуплоскости) плоскости Лобачевского.*

§ **5. Углы в модели Пуанкаре.**

Заметим, что матрица первой квадратичной формы в любой модели Пуанкаре скалярна, т.е. пропорциональна единичной матрице (в вещественных координатах x, y или x_1, x_2). Поэтому *угол в геометрии Лобачевского между любыми двумя кривыми равен евклидовому углу между этими кривыми на плоскости с декартовыми координатами x_1, x_2 или x, y*. Действительно, скалярное произведение любых двух векторов, приложенных в одной точке плоскости Лобачевского, равно их евклидовому скалярному произведению, умноженному на коэффициент, зависящий только от точки приложения векторов, но не от них самих (этот коэффициент равен $4/(1-(x_1^2+x_2^2))^2$ в единичном круге и $1/y^2$ в верхней полуплоскости). Поэтому в формуле для косинуса угла указанный коэффициент сокращается — на него умножается и числитель и знаменатель дроби.

§ **6. Геодезические в модели Пуанкаре.**

Найдем геодезические в модели Пуанкаре в единичном круге.

Теорема 1. *Геодезическими в модели Пуанкаре в единичном круге являются диаметры круга и дуги окружности, пересекающие его границу (т.е. единичную окружность) под прямым углом (см. Рис. 8а).*

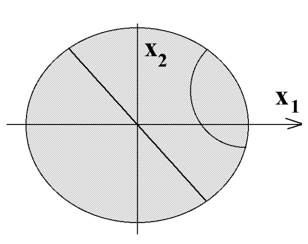

Рис. 8а

Доказательство. Ясно, что геодезические в рассматриваемой модели — это ровно те кривые, в которые переходят при стереографической проекции геодезические модели на псевдосфере, т.е. сечения гиперболоида плоскостями, проходящими через начало координат.

Если (a, b, c) — вектор нормали к такой плоскости, то соответствующая геодезическая в псевдосферических координатах (u, v) задается уравнением:

$$a \operatorname{ch} u + b \operatorname{sh} u \cos v + c \operatorname{sh} u \sin v = 0.$$

Подставим в это уравнение явные формулы стереографической проекции (см. § **1**.), предварительно поделив его на $1 + \operatorname{ch} u$ замечая, что:

$$\operatorname{ch} u = \frac{\rho^2 + 1}{1 - \rho^2}, \quad 1 + \operatorname{ch} u = \frac{2}{1 - \rho^2},$$

получаем:

$$a \, \frac{\rho^2 + 1}{2} + b \, \rho \cos \phi + c\rho \sin \phi = 0,$$

или:

$$a(x_1^2 + x_2^2 + 1) + 2bx_1 + 2cx_2 = 0.$$

Если $a = 0$, последнее уравнение определяет диаметр круга; если $a \neq 0$, это — окружность с центром в точке $x_1 = -b/a$, $x_2 = -c/a$ и радиусом $R = \sqrt{(b/a)^2 + (c/a)^2 - 1}$. Из последних формул немедленно следует, что треугольник с вершинами в центре рассматриваемой окружности, центре единичной окружности (т.е. начале координат) и точке пересечения этих двух окружностей, удовлетворяет теореме Пифагора: квадрат расстояния между центрами равен сумме квадратов радиусов окружностей. Поэтому геодезическая пересекает границу единичного круга под прямым углом. ■

Геодезические на верхней полуплоскости получаются из только что указанных кривых в результате применения дробно-линейного преобразования $w \mapsto z = i(1-w)/(1+w)$, которое переводит единичную окружность $|w| = 1$ в вещественную ось $\operatorname{Im} z = 0$.

Задача 1. Докажите, что любое дробно-линейное преобразование переводит окружности в окружности (прямые считаются частным случаем окружностей — “окружности бесконечного радиуса”) и сохраняет углы между кривыми.

Из результатов этой задачи следует, что геодезические на верхней полуплоскости — это прямые и дуги окружностей, пересекающие вещественную ось под прямым углом, т.е. вертикальные прямые и полуокружности с центром на вещественной оси (см. Рис. 8b).

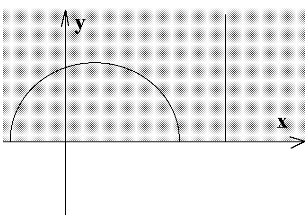

Рис. 8b

§ **7**. **Изометрии в модели Пуанкаре.**

Реализация плоскости Лобачевского как поверхности псевдосферы была удобна тем, что позволяла без труда найти много ее изометрий — это были ортохронные преобразования Лоренца. В моделях Пуанкаре изометрии, конечно, выглядят по-другому — оказывается, это дробно-линейные преобразования комплексной плоскости.

Теорема 2. *Преобразования вида:*

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad-bc>0$$

и вида:

$$z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad-bc<0$$

являются изометриями плоскости Лобачевского, реализованной как модель Пуанкаре на верхней полуплоскости.

Доказательство. Заметим, что любое преобразование указанного вида является композицией преобразований сдвига вдоль вещественной оси $T(a) : z \mapsto z+a$, $a \in \mathbb{R}$, гомотетии $H(\lambda) : z \mapsto \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{R}\,, \lambda > 0$, осевой симметрии $S : z \mapsto -\bar{z}$ и инверсии $I : z \mapsto 1/\bar{z}$. Действительно, если $c \neq 0$ то преобразование $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ имеет вид $T(a/c)H((ad-bc)/c^2)SIT(d/c)$, а преобразование $z \mapsto (a\bar{z}+b)/(c\bar{z}+d)$ имеет вид $T(a/c)H((bc-ad)/c^2)IT(d/c)$. Если же $c=0$, то преобразования имеют вид $T(b/d)H(a/d)$ и $T(b/d)H(-a/d)S$ соответственно (докажите!). Таким образом, достаточно проверить, что сдвиги, гомотетии, осевые симметрии и инверсии являются изометриями. Для сдвигов, гомотетий и осевых симметрий это очевидно; для преобразования I проверяется элементарным вычислением. ■

Задача 2. Доказать, что указанными преобразованиями исчерпывается вся группа изометрий плоскости Лобачевского.

Ясно, что из доказанного утверждения легко получить запас изометрий плоскости Лобачевского, реализованной как единичный круг (модель Пуанкаре): для этого надо посмотреть, какие преобразования единичного круга порождают изометрии верхней полуплоскости при отображении $z \mapsto w = (i-z)(i+z)$.

Задачи.

1. Найти явный вид матриц преобразований Лоренца в двумерном пространстве Минковского.

2. Доказать, что ортогональные дополнения к плоскостям, определяющим две перпендикулярные прямые на плоскости Лобачевского (векторная модель), ортогональны.

3. Доказать, что через данную точку плоскости Лобачевского проходит ровно одна прямая, перпендикулярная данной прямой.

4. Найти формулу для расстояния от точки до прямой в векторной модели (точка задана своим радиус-вектором ξ, а прямая — вектором нормали e к соответствующей плоскости).

5. Доказать, что сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского меньше π.

6. Доказать, что "симметрия относительно прямой" (т.е. изометрия, оставляющая на месте все точки прямой, и переставляющая области, на которые эта прямая делит плоскость Лобачевского) — это или осевая симметрия или инверсия (модель в верхней полуплоскости).

7. Доказать, что расстояние между точками в модели на верхней полуплоскости определяется формулой:
$$\rho(z_1, z_2) = \ln \frac{1 + \left|\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - \bar{z}_2}\right|}{1 - \left|\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - \bar{z}_2}\right|}.$$

8. Определить вид окружностей в трех моделях плоскости Лобачевского.

9. Доказать формулы решения прямоугольных треугольников:
$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b; \quad \operatorname{sh} b = \operatorname{sh} c \sin\beta; \quad \operatorname{th} a = \operatorname{th} c \cos\beta;$$
$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta; \quad \cos\alpha = \operatorname{ch} a \sin\beta; \quad \operatorname{th} a = \operatorname{sh} b \operatorname{tg}\alpha.$$

10. Найти формулу для площади круга на плоскости Лобачевского.

11. Найти формулу для радиуса описанной окружности. Вокруг всякого ли треугольника на плоскости Лобачевского можно описать окружность?

12. Найти вид кривых, находящихся на фиксированном расстоянии от данной прямой (эквидистанты) в трех моделях плоскости Лобачевского.

13. В модели на верхней полуплоскости найти изометрии, являющиеся аналогами поворотов (одна точка неподвижна, а все касательные векторы в этой точке поворачиваются на фиксированный угол).

14. В модели на верхней полуплоскости найти изометрии, являющиеся аналогами параллельных переносов вдоль фиксированной прямой (прямая остается на месте, но ее точки движутся по ней, причем каждая из областей, на которые прямая делит плоскость Лобачевского, переходит в себя).

15. В модели на верхней полуплоскости найти изометрии, являющиеся аналогами скользящих симметрий вдоль фиксированной прямой (прямая остается на месте, но ее точки движутся по ней, причем области, на которые прямая делит плоскость Лобачевского, меняются местами).

12 Лекция 12. Элементы общей топологии

§ **1. Введение.**

Наша ближайшая цель — обобщить и аксиоматизировать понятие поверхности, исключив всякое упоминание об объемлющем пространстве. Центральное свойство поверхностей, которое использовалось ранее — существование на поверхности координат; это свойство позволяет развивать на поверхностях дифференциальное исчисление функций, векторных полей и т.д. В следующей лекции мы определим абстрактные объекты, на которых существует такое дифференциальное исчисление; но сперва нам понадобится изучить “абстрактный анализ непрерывных функций” (непрерывность должна предшествовать дифференцируемости). Такой анализ возникает на топологических пространствах, основным свойствам которых и посвящена эта лекция.

§ **2. Топологические пространства.**

Для того, чтобы определить непрерывную в точке функцию, достаточно знать, что такое окрестность точки (функция f непрерывна в точке P, если для всякой окрестности V точки $f(P)$ найдется окрестность U точки P, которая вся отображается в V: $f(U) \subset V$)). В свою очередь, окрестность точки — это произвольное открытое множество, содержащее P, так что фундаментальное понятие анализа непрерывных функций — это открытое множество. Топологическое пространство — этот множество, в котором указано, какие его подмножества являются открытыми.

Определение 1. Множество X называется топологическим пространством, если в нем выделена система подмножеств τ (подмножества, принадлежащие τ, называются открытыми), причем выполнены следующие условия:

1. Все X и пустое множество открыты (т.е. принадлежат τ).

2. Объединение любой системы открытых подмножеств U_α и пересечение конечного числа открытых подмножеств $U_1, \dots, U_n$ открыты:

$$\bigcup_\alpha U_\alpha \in \tau, \quad \bigcap_{j=1}^n U_j \in \tau$$

Система подмножеств τ, удовлетворяющая условиям 1, 2, называется *топологией* в X.

Примеры. Рассмотрим следующие примеры:

1. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Открытые подмножества — это подмножества, содержащие вместе с каждой своей точкой некоторый открытый шар с центром в этой точке (открытый шар с центром в точке ξ радиуса a — это множество векторов η, для которых $(\xi - \eta, \xi - \eta) < a^2$).

2. Более общий пример — метрическое пространство. Это множество X в котором задана функция от пары точек $\rho(x, y)$ называемая расстоянием между точками, и удовлетворяющая следующим условиям:

   (a) $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$.

   (b) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

   Открытым шаром с центром в точке x_0 радиуса a в метрическом пространстве называется множество точек x, для которых $\rho(x_0, x) < a$. Открытые множества определяются так же, как в евклидовом пространстве.

3. Пусть множество X состоит из одной точки. На этом множестве существует только одна топология: открытые множества — это X и пустое множество.

4. Пусть множество X состоит из двух точек x, y. На таком множестве имеется несколько топологий:

   (a) Открытыми множествами считаются пустое множество и все X.

   (b) Открытыми множествами считаются x, y, X и пустое множество.

   (c) Открытыми множествами считается точка x, все множество X и пустое множество.

5. На любом множестве можно ввести топологию, объявив все его точки (а значит, и все подмножества) открытыми множествами. Такая топология называется *дискретной*.

6. Объявим открытыми множествами в пространстве $\mathbb{C}^n$ множества вида $\mathbb{C}^n \backslash X$, где X задано системой уравнений:

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

   Здесь $f_1, \ldots, f_m$ — многочлены от n переменных. Такая топология называется *топологией Зарисского*.

7. Пусть X — топологическое пространство и $Y \subset X$ — его подмножество. На множестве Y возникает естественная топология: открытыми считаются пересечения Y с открытыми множествами в X. Такая топология называется *индуцированной* из X в Y.

8. Пусть X, Y — топологические пространства. *Декартовым произведением* $X \times Y$ называется множество пар (x, y), $x \in X$, $y \in Y$. Открытыми множествами в $X \times Y$ считаются объединения множеств вида (x, y), $x \in U$, $y \in V$, где $U \subset X$, $V \subset Y$ — открытые множества.

Определение 2. Замкнутым множеством в топологическом пространстве X называется множества вида $X \backslash U$, где U открыто.

Ясно, что замкнутые множества обладают следующими свойствами:

1. Все X и пустое множество замкнуты.

2. Пересечение любой системы замкнутых множеств и объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуты.

Указание замкнутых множеств эквивалентно указанию открытых; таким образом, топологическое пространство можно определить как множество, в котором указано, какие из его подмножеств замкнуты (конечно, при этом должны выполняться условия 1, 2).

§ 3. Непрерывные отображения.

На топологических пространствах живут непрерывные функции; мы определим более общее понятие непрерывного отображения одного топологического пространства в другое. Это понятие определяется совершенно аналогично тому, как это делается в математическом анализе. Прежде всего определим понятие окрестности точки.

Определение 3. Окрестностью точки P в топологическом пространстве называется любое открытое множество, содержащее P.

Определение 4. Отображение $f : X \to Y$ топологического пространства X в топологическое пространства Y называется непрерывным в точке $P \in X$, если для любой окрестности V точки $f(P)$ найдется такая окрестность U точки P, что $f(U) \subset V$. Отображение непрерывно, если оно непрерывно в каждой точке. Непрерывной функцией на топологическом пространстве X называется непрерывное отображение X в $\mathbb{R}$.

Теорема 1. *Отображение непрерывно тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:*

1. *Прообраз любого открытого множества открыт.*
2. *Прообраз любого замкнутого множества замкнут.*

Доказательство. Докажем, что непрерывность отображения эквивалентна условию 1. Пусть отображение $f : X \to Y$ непрерывно и $V \subset Y$ — открытое множество. Рассмотрим произвольную точку прообраза $P \in U = f^{-1}(V)$; поскольку $f(P) \in V$, найдется такая окрестность U_P точки P, что $f(U_P) \in V$. Ясно, что $U_P \subset U$; рассмотрим объединение таких окрестностей по всем точкам $P \in U$. Это множество открыто (как объединение открытых множеств); с другой стороны оно, очевидно, совпадает с U.

Обратно, пусть выполнено условие 1. Рассмотрим произвольную точку $P \in X$ и произвольную окрестность V точки $f(P)$. Прообраз $U = f^{-1}(V)$ открыт и содержит точку P, т.е. является ее окрестностью. Эта окрестность, очевидно, отображается в V $(f(U) = V)$, т.е. отображение f непрерывно в т. P.

Условие 2, очевидно, эквивалентно условию 1 (т.к. для любого $V \in Y$ $f^{-1}(Y \backslash V) = X \backslash f^{-1}(V)$). ■

Задача 1. Найти все непрерывные отображения между топологическими пространствами из п. (b) и (c) Примера 4.

Пусть теперь отображение f непрерывно и взаимно-однозначно; тогда существует обратное отображение f^{-1}.

Определение 5. Непрерывное взаимно-однозначное отображение называется *гомеоморфизмом*, если обратное отображение непрерывно. Топологические пространства X и Y называются *гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм $f : X \to Y$.

Задача 2. Доказать, что $X \times Y$ гомеоморфно $Y \times X$.

Замечание 1. *Требование непрерывности отображения f^{-1} в определении гомеоморфизма существенно: не всякое непрерывное взаимно-однозначное отображение — гомеоморфизм. Действительно, изображенное на Рис. 9 отображение интервала в восьмерку непрерывно и взаимно-однозначно, однако обратное отображение разрывно в точке самопересечения восьмерки.*

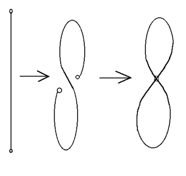

Рис. 9

■

Замечание 2. *С точки зрения анализа непрерывных функций, гомеоморфные топологические пространства эквивалентны (точно так же, как с точки зрения линейной алгебры эквивалентны изоморфные линейные пространства) — их можно не различать и считать одним и тем же пространством.* ■

Ниже обсуждаются основные свойство топологических пространств и непрерывных отображений между ними.

§ 4. **Связность и линейная связность.**

Связные топологические пространства — это пространства, состоящие "из одного куска". Для того, чтобы формально определить это понятие, заметим, что любое топологическое пространство X является (как и пустое множество) одновременно открытым и замкнутым относительно своей топологии. Если пространство состоит из нескольких кусков, в нем должны быть другие подмножества (эти самые куски), обладающие тем же свойством.

Определение 6. Топологическое пространство X несвязно, если в нем существует непустое открытое и замкнутое подмножество U, не совпадающее со всем пространством X. Если такого подмножества не существует, топологическое пространство называется связным.

Ясно, что пространство X несвязно тогда и только тогда, когда оно представляется в виде объединения $X = U \cup V$, где U и $V = X \backslash U$ — открытые непересекающиеся непустые подмножества.

Утверждение 1. *Отрезок связен.*

Доказательство. Пусть отрезок $[a, b]$ представлен в виде объединения $U \cup V$ непересекающихся непустых открытых множеств. Будем считать, что точка a принадлежит множеству U; поскольку это множество открыто, в нем содержится некоторый полуинтервал $[a, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Обозначим через t_0 точную верхнюю грань точек $t \in [a, b]$, для которых полуинтервал $[a, t) \subset U$. Точка t_0 не может принадлежать ни множеству U, ни множеству V. Действительно, если $t_0 \in V$, то, поскольку это множество открыто, найдется точка $t_1 < t_0$, также принадлежащая V; но тогда полуинтервал $[a, t_2)$, где $t_1 < t_2 < t_0$ не может содержаться в U, что противоречит определению точки t_0. Если же $t_0 \in U$, то возможны две ситуации:

1. $t_0 \neq b$; в этом случае, в силу открытости U, найдется точка $t_3 > t_0$, для которой интервал $(t_0, t_3) \subset U$, а значит и полуинтервал $[a, t_3) \subset U$, что противоречит определению точки t_0.

2. $t_0 = b$; в этом случае, очевидно, $[a, b] = U$, т.е. V пусто, что противоречит условию.

Итак, предположение о несвязности отрезка приводит к противоречию. ■

Конечно, гомеоморфные топологические пространства связны или несвязны одновременно; имеет место даже более сильное утверждение.

Теорема 2. *Образ связного топологического пространства под действием непрерывного отображения связен.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение и образ $f(X)$ несвязен, т.е. представляется в виде объединения непустых открытых непересекающихся подмножеств U и V: $f(X) = U \cup V$. Тогда прообразы $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$, очевидно, открыты, непусты и не пересекаются; кроме того, их объединение совпадает со всем X, т.е. это пространство также несвязно. ■

При изучении топологических пространств, помимо связности, важную роль играет близкое понятие линейной связности.

Определение 7. Топологическое пространство X линейно связно, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, лежащей в X. Другими словами, для любых двух точек $x, y \in X$ найдется непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to X$ отрезка в X, для которого $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.

Соотношение между понятиями связности и линейной связности устанавливает следующее утверждение.

Теорема 3. *Линейно связное топологическое пространство связно.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что существует линейно связное топологическое пространство X, представимое в виде объединения $X = U \cup V$, где U, V — непересекающиеся непустые открытые множества. Выберем две точки $x \in U$, $y \in V$ и соединим их непрерывной кривой $\gamma : [a, b] \to X$. Из связности отрезка и доказанной выше теоремы следует, что образ $\gamma([a, b])$ связен. С другой стороны, он представляется в виде объединения $\gamma([a, b]) = (\gamma([a, b]) \cap U) \cup (\gamma([a, b]) \cap V)$ непересекающихся непустых открытых множеств. ■

Следующий пример показывает, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример 1. Рассмотрим на плоскости x, y топологическое пространство X, являющееся объединением графика функции $y = \sin 1/x$, $x \neq 0$ и вертикального отрезка $x = 0$, $y \in [-1, 1]$. Это множество состоит из трех непересекающихся кусков: $A : x < 0, \quad y = \sin 1/x$, $B : x > 0, \quad y = \sin 1/x$ и $C : x = 0, \quad y \in [-1, 1]$, причем каждый из этих кусков является связным топологическим пространством. Докажем, что X связно. Действительно, если $X = U \cup V$, где U, V — непересекающиеся открытые множества, то каждый из кусков A, B, C целиком содержится либо в U, либо в V; пусть, например, $C \subset U$. Поскольку любая окрестность произвольной точки $P \in C$ пересекается как с A, так и с B, эти множества также содержатся в U, т.е. V пусто.

Докажем теперь, что X не является линейно связным. Действительно, рассмотрим две его точки $P = (-1/\pi, 0)$ и $Q = (1/\pi, 0)$. Предположим, что их можно соединить непрерывной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$, лежащей в X. Обозначим через t_0 точную нижнюю грань тех $t \in [a, b]$, для которых $x(t) = 0$. Поскольку $x(a) = -1/\pi$ и функция $x(t)$ непрерывна, $t_0 > a$ и, кроме того, $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} x(t) = 0$, т.е. найдется последовательность точек $t_k < t_0$, для которой $x(t_k) \to 0$. Но тогда последовательность $y(t_k) = \sin 1/x(t_k)$ расходится, что противоречит непрерывности функции $y(t)$. ■

§ 5. Хаусдорфовость.

Определение 8. Топологическое пространство X называется хаусдорфовым, если для любых двух различных точек $x, y \in X$ существуют непересекающиеся окрестности этих точек.

Любое метрическое пространство хаусдорфово (докажите!), однако существуют и не хаусдорфовы пространства.

Пример 2. Рассмотрим пространство X из п. (c) Примера 4. Это пространство не хаусдорфово: единственная окрестность точки y — это все пространство X и оно, очевидно, пересекается с любой окрестностью токи x.

Задача 3. Доказать, что декартово произведение хаусдорфовых пространств хаусдорфово.

§ **6. Компактность.**

Компактность топологического пространства — это понятие, аксиоматизирующее ограниченность и замкнутость подмножества в $\mathbb{R}^n$.

Определение 9. Топологическое пространство X компактно, если оно хаусдорфово и, кроме того, из каждого покрытия X открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Пример 3. Отрезок компактен. Действительно, предположим, что это не так, т.е. существует покрытие отрезка $[a, b]$ открытыми множествами, из которого нельзя извлечь конечного подпокрытия. Разделим отрезок пополам; одна из половинок не покрывается конечным числом элементов нашего покрытия. Поделим эту половинку еще пополам и т.д. В результате получим последовательность вложенных стягивающихся отрезков, ни один из которых не покрывается конечным числом элементов покрытия. В курсе математического анализа доказывается, что пересечение этих отрезков состоит из одной точки. Пусть эта точка принадлежит какому-то элементу U нашего покрытия; поскольку U открыто, оно вместе с этой точкой содержит некоторый отрезок из построенной выше последовательности. Полученное противоречие доказывает компактность отрезка. ■

Связь между замкнутостью и компактностью устанавливается следующей теоремой.

Теорема 4. *Замкнутое подмножество компактного пространства компактно; компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.*

Доказательство. Пусть X — компакт и $Y \subset X$ — замкнутое подмножество. Рассмотрим произвольное открытое покрытие U_α множества Y все элементы этого покрытия имеют вид $U_\alpha = Y \cap V_\alpha$, где V_α — открытые подмножества в X. Присоединим к этим множествам открытое множество $X \backslash Y$; в результате, очевидно, получим открытое покрытие X. В силу компактности из него можно извлечь конечное подпокрытие $V_1, \ldots, V_n, X \backslash Y$. Множества $U_j = V_j \cap Y$ образуют конечное подпокрытие исходного покрытия U_α пространства Y.

Пусть теперь X хаусдорфово и $Y \subset X$ — компакт. Рассмотрим произвольную точку $x \in X \backslash Y$; для любой точки $y \in Y$ найдутся непересекающиеся окрестности U_x, V_y точек x, y. Рассмотрим объединение по всем $y \in Y$ множеств V_y; очевидно, это — открытое покрытие Y. Выберем из него конечное подпокрытие $V_1, \ldots, V_n$; по построению, для каждого открытого множества V_j найдется окрестность U_j точки x, не пересекающаяся с V_j. Пересечение $\widetilde{U}_x = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ этих окрестностей — открытое множество, и содержащее x и не пересекающееся с Y. Рассмотрим теперь объединение множеств $\widetilde{U}_x$ по всем точкам $x \in X \backslash Y$. Это множество открыто и, очевидно, совпадает с $X \backslash Y$; таким образом, Y замкнуто. ■

Конечно, гомеоморфные топологические пространства компактны или некомпактны одновременно. Верно даже более сильное утверждение.

Теорема 5. *Образ компакта под действием непрерывного отображения — компакт.*

Доказательство. Пусть X — компакт и $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Рассмотрим открытое покрытие U_α образа $f(X)$; множества $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ открыты и покрывают X. Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие $V_1, \ldots, V_n$; открытые множества $U_j = f(V_j)$ образуют конечное подпокрытие исходного покрытия $f(X)$. ■

Задача 4. Доказать, что декартово произведение компактов — компакт.

Задача 5. Доказать, что, если X компактно, то любое взаимно-однозначное непрерывное отображение $f : X \to Y$ — гомеоморфизм.

13 Лекция 13. Понятие многообразия

§ **1. Топологические и гладкие многообразия.**

Многообразие — это объект, локально устроенный как область евклидова пространства; на каждом достаточно малом куске многообразия можно ввести координаты и тем самым свести анализ на таком объекте к обычному анализу функций нескольких переменных.

Определение 1. Хаусдорфово топологическое пространство M называется n–мерным (топологическим) многообразием, если каждая точка M имеет окрестность, гомеоморфную области n–мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Ясно, что все многообразие M покрывается (вообще говоря, многими способами) открытыми множествами U_α, гомеоморфными областям $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$; обозначим через φ_α соответствующие гомеоморфизмы $\varphi_\alpha : U_a \to V_\alpha$. В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим стандартные декартовы координаты $x^1, \ldots, x^n$; отображение φ_α позволяют сопоставить каждой точке из соответствующего множества U_α набор чисел $x^1, \ldots, x^n$ — координаты соответствующей точки из V_α; таким образом, в каждом таком множестве возникают координаты.

Определение 2. Пары U_α, φ_α называются картами многообразия M; гомеоморфизмы φ_a — координатными гомеоморфизмами, а множество карт, покрывающее все M — атласом на M.

Рассмотрим пересечение двух карт $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$; это пересечение отображается гомеоморфизмом φ_α на область $V_{\alpha\beta} \subset V_\alpha$, а гомеоморфизмом φ_β — на область $V_{\beta\alpha} \subset V_\beta$.

Определение 3. Гомеоморфизм $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1} : V_{\alpha\beta} \to V_{\beta\alpha}$ называется *функцией перехода из карты U_α в карту U_β.*

Функция перехода — это отображение областей евклидова пространства $\mathbb{R}^n$; оно задается набором из n функций от n переменных $y^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, y^n(x^1, \ldots, x^n)$. Эти функции непрерывны в области $V_{\alpha\beta}$ (поскольку отображение перехода — гомеоморфизм).

Замечание 1. *В пересечении множеств U_α и U_β имеется два набора координат: один берется из области V_α, другой — из области V_β. Поскольку эти координаты изображают одни и те же точки, они выражаются друг через друга; соответствующие функции и есть функции перехода.* ■

Замечание 2. *Благодаря наличию координат, функции на многообразии (и его отображения) сводятся (в каждой карте) к обычным функциям нескольких переменных, т.е. к стандартному объекту математического анализа.* ■

Обсуждавшаяся ранее теория поверхностей основана на применении аппарата дифференциального исчисления; отметим, что на топологическом многообразии такой аппарат, вообще говоря, развить невозможно. Действительно, пусть функция f дифференцируема в некоторых локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$; в других координатах $y^1, \ldots, y^n$ она, вообще говоря, дифференцируемой не будет, поскольку функции перехода $x^i(y)$ непрерывны, но не обязаны быть гладкими. Поэтому для того, чтобы использовать аппарат производных, необходимо снабдить топологическое многообразие дополнительной структурой, призванной обеспечить гладкость функций перехода.

Определение 4. Гладким n-мерным многообразием называется топологическое n–мерное многообразие, на котором фиксирован атлас, все функции перехода в котором гладкие.

Замечание 3. *Под гладкостью всюду в этом курсе мы понимаем бесконечную дифференцируемость; однако можно рассматривать многообразия конечной гладкости; именно, многообразие класса C^r — это топологическое многообразие, снабженное атласом, все функции перехода в котором имеют непрерывные производные r–го порядка.* ■

На гладком многообразии имеет смысл понятие гладкой функции; действительно, пусть f — скалярная функция, определенная в окрестности некоторой точки P на M; точка P принадлежит некоторой карте U_α заданного на M атласа, поэтому можно рассмотреть функцию $f_\alpha = f \circ \varphi_a^{-1} : V_\alpha \to \mathbb{R}$. Это — обычная функция n переменных; конечно, это и есть исходная функция f, записанная в координатах $x^1, \ldots, x^n$, определенных картой U_α.

Определение 5. Функция f называется гладкой в точке P, если функция $f_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}$ гладкая в точке $\varphi(P)$. Функция, определенная на всем многообразии M, называется гладкой, если она гладкая в каждой точке этого многообразия.

Замечание 4. *Приведенное определение корректно, поскольку все функции перехода в заданном на многообразии атласе гладкие; таким образом, если функция f гладкая в одних координатах, она гладкая и в других.* ■

Аналогичным образом определяется гладкое отображение гладких многообразий. Именно, если M и Q — гладкие многообразия размерности n и m соответственно, и $f : M \to Q$ — отображение, то в окрестности каждой точки $P \in M$ оно задается набором из m функций $y^i(x^1, \ldots, x^n)$, $i = 1, \ldots, m$ от n переменных; здесь x^j — координаты на M в окрестности точки P, а y^i — координаты на Q в окрестности точки $f(P)$.

Определение 6. Отображение f называется гладким в точке P, если все функции $y^i(x)$ гладкие (в соответствующей точке).

Замечание 5. *Конечно, на гладком многообразии можно использовать не только карты и локальные координаты, соответствующие фиксированному атласу. Однако при использовании других координат необходимо следить за тем, чтобы все функции перехода между соответствующими картами и картами фиксированного атласа были гладкими. Само определение гладкого многообразия можно переформулировать так, чтобы избавиться от привязки к фиксированному атласу. Именно, будем рассматривать всевозможные атласы на топологическом многообразии M, такие, что все функции перехода между картами (одного и того же атласа) гладкие. Два атласа назовем эквивалентными, если все функции перехода из карт первого атласа в карты второго и наоборот — гладкие. Множество рассматриваемых атласов при этом распадается на непересекающиеся классы эквивалентных друг другу атласов. Гладким многообразием (или гладкой структурой на топологическом многообразии) называется класс эквивалентности атласов. Практически задать структуру гладкого многообразия можно, зафиксировав один атлас, все функции перехода в котором гладкие (тем самым задается его класс эквивалентности). Именно так мы и поступили, определяя выше гладкое многообразие.* ■

§ 2. Касательное пространство к гладкому многообразию.

Теория поверхностей начинается с рассмотрения касательных пространств к поверхности в каждой точке. Касательное пространство в точке P — это множество векторов скоростей всевозможных кривых, лежащих на поверхности и проходящих через точку P. Попробуем определить аналогичным образом касательное пространство к гладкому многообразию. Для этого сперва определим на нем гладкие кривые.

Определение 7. Гладкой кривой на многообразии M называется гладкое отображение γ отрезка $[a,b]$ в многообразие M; другими словами, это отображение, которое в окрестности каждой точки $t_0 \in [a,b]$ задается набором гладких функций $x^1(t),\ldots,x^n(t)$ одной переменной (здесь $x^1,\ldots,x^n$ — локальные координаты на M в окрестности точки $\gamma(t_0)$).

Перейдем теперь к определению касательного вектора к многообразию. Здесь мы сталкиваемся с трудностью, связанной с отсутствием объемлющего пространства: вектор скорости кривой, лежащей на многообразии, не представляется в виде вектора какого–то наперед заданного линейного пространства. Для того, чтобы обойти эту трудность, воспользуемся тем, что вектор скорости однозначно определяется самой кривой; поэтому его можно определить, используя эту кривую. Однако соответствие между кривыми и их векторами скорости не взаимно однозначно: разные кривые могут иметь один и тот же вектор скорости в данной точке. Поэтому касательный вектор к многообразию определяется как множество кривых, у которых скорость в данной точке одна и та же, т.е. кривых, касающихся друг друга в данной точке. Определим сперва понятие касания кривых. Пусть γ_1, γ_2 — две кривые, проходящие через точку $P \in M$; в некоторой системе локальных координат $x^1,\ldots,x^n$ они задаются функциями $x_1^i(t)$ и $x_2^i(t)$ соответственно; пусть первая кривая проходит через точку P при $t = t_1$ а вторая — при $t = t_2$.

Определение 8. Кривые γ_1 и γ_2 называются касающимися (или соприкасающимися) в точке P, если $\dot{x}_1^i(t_1) = \dot{x}_2^i(t_2)$, $i = 1,\ldots,n$.

Утверждение 1. *Это определение корректно, т.е. не зависит от выбора локальных координат $x^1,\ldots,x^n$.*

Доказательство. Пусть $y^1,\ldots,y^n$ — другие локальные координаты в окрестности точки P. Они выражаются через старые посредством гладких функций $y^i(x^1,\ldots,x^n)$, и рассматриваемые кривые в этих координатах задаются уравнениями $y_j^i = y_j^i(t)$, где $y_j^i(t) = y^i(x_j^1(t),\ldots,x_j^n(t))$, $j = 1,2$. По теореме о производной сложной функции имеем:

$$\dot{y}_j^i(t_j) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^k}(P)\dot{x}_j^k(t_j).$$

Из этой формулы сразу же следует, что, если $\dot{x}_1^i(t_1) = \dot{x}_2^i(t_2)$, то и $\dot{y}_1^i(t_1) = \dot{y}_2^i(t_2)$. ■

Определение 9. Касательным вектором к многообразию M в точке P называется класс касающихся друг друга в точке P гладких кривых на M. Вектором скорости кривой γ в точке P называется класс кривых, касающихся γ в этой точке. Множество всех касательных векторов в точке P называется касательным пространством к многообразию M в этой точке и обозначается $T_P M$.

Как практически задать касательный вектор? Ответ на этот вопрос, фактически, уже обсуждался: если $x^1,\ldots,x^n$ — система координат в окрестности точки P, каждой кривой $x^i = x^i(t)$, проходящей через эту точку, можно сопоставить набор из n чисел $\xi^1,\ldots,\xi^n$, где $\xi^i = \dot{x}^i(t_0)$ (кривая проходит через точку P при $t = t_0$). Ясно, что эти наборы чисел взаимно–однозначно соответствуют классам касающихся кривых (при фиксированной системе координат); тем самым каждый набор определяет касательный вектор. Отметим, что при замене координат $y = y(x)$ набор чисел, задающий данный касательный вектор, меняется: если вектор в координатах x задавался числами $\xi^1,\ldots,\xi^n$, то в координатах y он будет задаваться числами $\eta^1,\ldots,\eta^n$, где:

$$\eta^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\xi^j. \tag{1}$$

Этот закон преобразования можно положить в основу альтернативного определения касательного вектора.

Определение 10. Касательным вектором к многообразию M в точке P называется соответствие, сопоставляющее каждой системе координат, заданной в окрестности точки P, набор чисел $\xi^1, \ldots, \xi^n$, причем числа, соответствующие разным системам координат, связаны соотношением (1).

Закон преобразования чисел, задающих касательный вектор, напоминает закон преобразования координат вектора линейного пространства при замене базиса. Это, конечно, не случайно; в касательном пространстве $T_P M$ имеется естественная структура линейного пространства: сумма и произведение на число касательных векторов определяются "покомпонентно", т.е. если в данной системе координат векторы ξ и η задаются наборами чисел $\xi^1, \ldots, \xi^n$ и $\eta^1, \ldots, \eta^n$ соответственно, их линейной комбинацией $a\xi + b\eta$ считается вектор, задаваемый числами $a\xi^i + b\eta^i$, $i = 1, \ldots, n$.

Задача 1. Доказать, что сумма векторов и произведение вектора на число не зависят от использованной системы координат.

Задача 2. Определить сумму и произведение на число касательных векторов, понимаемых как классы касающихся кривых.

Пусть в окрестности точки P задана система координат $x^1, \ldots, x^n$; в касательном пространстве $T_P M$ рассмотрим базис $e_1, \ldots, e_n$, состоящий из векторов, которые задаются в данной систем координат наборами чисел $e^i_j = \delta^i_j$.

Определение 11. Этот базис называется *каноническим базисом*, соответствующим системе координат $x^1, \ldots, x^n$.

Ясно, что базисный вектор e_j — это вектор скорости к j–й координатной линии, т.е. кривой вида $x^i = x^i_0$, $i \neq j$, $x^j = x^j_0 + t$, проходящей через точку P (здесь x^i_0 — координаты этой точки). Числа, сопоставленные касательному вектору в данной системе координат — это его координаты в соответствующем каноническом базисе. При замене координат канонический базис меняется; матрица перехода от одного канонического базиса к другому — это в точности матрица Якоби замены координат (докажите!); формула (1) — это закон преобразования координат вектора при замене базиса.

Помимо двух описанных способов определения касательного вектора существует еще третий способ — определить этот вектор при помощи операции дифференцирования вдоль него. Именно, рассмотрим всевозможные гладкие функции на M, определенные в некоторой окрестности точки P и пусть $\xi \in T_P M$ — касательный вектор. Рассмотрим произвольную проходящую через P кривую γ, для которой ξ является вектором скорости, и ограничим гладкую функцию f на эту кривую, т.е. рассмотрим гладкую функцию $f \circ \gamma$ одной переменной t: $f \circ \gamma(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [a, b]$. Будем считать, что кривая γ проходит через точку P при $t = t_0$.

Определение 12. Производной функции f вдоль касательного вектора ξ в точке P называется число:

$$\partial_\xi(f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} f(\gamma(t)).$$

Утверждение 2. *Приведенное определение корректно, т.е. не зависит от выбора кривой γ, представляющей касательный вектор ξ.*

Доказательство. В локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ функция f — это обычная гладкая функция n переменных $f(x^1, \ldots, x^n)$. Кривая γ задается уравнениями $x^i = x^i(t)$, а касательный вектор ξ — координатным набором чисел $\xi^1, \ldots, \xi^n$:

$$\xi^i = \frac{dx^i}{dt}\Big|_{t=t_0}.$$

Отсюда находим:

$$\partial_\xi(f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} f(x^1(t), \ldots, x^n(t)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(P)\frac{dx^j}{dt}\Big|_{t=t_0} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(P)\xi^j.$$

Последнее выражение зависит только от функции f и вектора ξ. ■

Таким образом каждый касательный вектор определяет отображение множества гладких функций, заданных в окрестности P, в числа (каждой функции сопоставляется ее производная вдоль этого вектора), причем это отображение удовлетворяет очевидным свойствам:

1. $\partial_\xi(af + bg) = a\partial_\xi(f) + b\partial_\xi(f), \quad a, b \in \mathbb{R}$ (линейность),
2. $\partial_\xi(fg) = f(P)\partial_\xi(f) + g(P)\partial_\xi(f)$ (правило Лейбница).

Определение 13. Отображение множества гладких функций на M в числа, удовлетворяющее условием 1), 2) называется *дифференцированием множества функций на M в точке P*.

Ясно, что каждый касательный вектор из T_PM определяет единственное дифференцирование. Оказывается, это соответствие взаимно–однозначно.

Теорема 1. *Для каждого дифференцирования A множества гладких функций на M в точке P найдется единственный вектор $\xi \in T_PM$, для которого:*

$$A(f) = \partial_\xi(f).$$

Доказательство. Зафиксируем систему координат $x^1, \ldots, x^n$ в окрестности точки P и рассмотрим произвольную гладкую функцию f. Из формулы Тейлора следует, что в окрестности точки P эта функция представляется в виде:

$$f = f(P) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(P)(x^j - x_0^j) + \sum_{i,j=1}^n h_j(x)(x^j - x_0^j),$$

где x_0^i — координаты точки P, а $h_j(x)$ — гладкие функции, причем $h_j(P) = 0$ (докажите!). Применим к этой функции отображение дифференцирования A; пользуясь линейностью, получим:

$$A(f) = f(P)A(1) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(P)A(x^j - x_0^j) + A(\sum_{i,j=1}^n h_j(x)(x^j - x_0^j)).$$

Из правила Лейбница следует, что $A(1) = A(1 \bullet 1) = A(1) + A(1)$, откуда $A(1) = 0$; кроме того, из того же правила следует, что:

$$A(\sum_{i,j=1}^n h_j(x)(x^j - x_0^j)) = 0$$

(каждое слагаемое в этой сумме представлено в виде произведения двух функций, каждая из которых обращается в нуль в точке P). Обозначая $\xi^i = A(x^i - x^i_0)$, получим:

$$A(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}(P)\xi^j = \partial_\xi(f),$$

где ξ — касательный вектор, заданный в системе координат $x^1, \dots, x^n$ числами $\xi^1, \dots, \xi^n$. Докажем, что вектор ξ единственный. Действительно, из равенства $\partial_\xi(f) = \partial_\eta(f)$ следует, что:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}(\xi^j - \eta^j) = 0,$$

которое должно быть выполнено для любой гладкой функции f. Выбирая $f = x^k$, $k = 1, \dots, n$ получим $\xi^k = \eta^k$, т.е. $\xi = \eta$. ■

Таким образом, мы приходим к третьему определению касательного вектора.

Определение 14. Касательным вектором в точке P к многообразию M называется дифференцирование множества гладких функций на M в точке P.

Ясно, что при фиксированной системе координат $x^1, \dots, x^n$ дифференцирование, соответствующее вектору e_j канонического базиса — это дифференцирование по локальной координате x^j:

$$\partial_{e_j}(f) = \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Поэтому для этого вектора часто используется обозначение $\partial/\partial x^j$; таким образом, канонический базис, порожденный в касательном пространстве координатами $x^1, \dots, x^n$, состоит из векторов:

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n},$$

а каждый касательный вектор ξ имеет вид:

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Задачи.

1. Построить атлас:
   (a) на окружности;
   (b) на сфере;
   (c) на цилиндре
   (d) на торе.

2. Доказать, что множество M, заданное в трехмерном пространстве уравнением $F(x, y, z) = 0$, причем $\nabla F|_M \neq 0$, является многобразием. Найти его размерность.

3. Доказать, что множество M, заданное в n–мерном пространстве системой уравнений:

$$F_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, F_k(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

   причем ранг матрицы Якоби $\partial F_i / \partial x_j$ во всех точках M равен k, является многообразием. Найти его размерность.

4. Доказать, что проективная прямая (множество прямых на плоскости, проходящих через начало координат) — многообразие. Найти его размерность.

5. Доказать, что проективная плоскость (множество прямых в трехмерном пространстве, проходящих через начало координат) — многообразие. Найти его размерность.

6. Доказать, что следующие матричные группы являются многообразиями и найти их размерности:
   (a) SL(2,$\mathbb{R}$) — 2×2-матрицы с определителем 1,
   (b) SO(2) — 2×2 ортогональные матрицы с определителем 1,
   (c) SU(2) — 2×2 унитарные матрицы с определителем 1,
   (d) SL(n,$\mathbb{R}$) — $n \times n$-матрицы с определителем 1,
   (e) T(n,$\mathbb{R}$) — верхнетреугольные $n \times n$-матрицы,
   (f) SO(3) — 3×3 ортогональные матрицы с определителем 1,
   (g) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^a \end{pmatrix}$ $\quad \lambda > 0$, $a > 0$ – фиксировано.

7. Доказать, что прямое произведение конечного числа многообразий — многообразие. Найти его размерность.

8. Найти касательные пространства к многообразиям из задач 2,3,6.

9. Доказать, что следующие матричные группы являются многообразиями, найти их размерности и касательные пространства в единице:
   (a) SL(n,$\mathbb{R}$),
   (b) SO(n),
   (c) SU(n).

10. Найти касательное пространство к группе $SO(3)$ в точке:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Найти координату единичного вектора, касающегося окружности радиуса R точке $\varphi = \pi/3$ в системе координат "полярный угол" и в координате стереографической проекции.

12. Найти координаты касательного вектора к образующей и параллели на конусе в координатах: $(r, \varphi), (z, \varphi), (x, y)$.

13. На цилиндре найти координаты вектора, касающегося винтовой линии с шагом d, в цилиндрических координатах (φ, z).

14. На цилиндре найти координаты касательного вектора $(-R\sqrt{3}, R, 1)$ в точке $\varphi = \pi/3$, $z = 1$ в цилиндрических координатах (φ, z) и в координатах стереографической проекции.

15. На сфере найти координаты касательного вектора $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ в точке $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ в сферических координатах и в координатах стереографической проекции.

16. То же для вектора, касающегося:

    (a) меридиана;

    (b) параллели;

    (c) большого круга, лежащего в плоскости $x + 3y - 2z = 0$.

17. На проективной плоскости (множестве прямых в $\mathbb{R}^3$) найти координаты в аффинных картах касательного вектора в точке $t = \pi/4$ к кривой $r = (\cos t, \sin t, t)$.

18. Доказать, что для всякого многообразия M его касательное и кокасательное расслоения являются многообразиями. Найти их размерность. Поясним, что касательное расслоение к многообразию M — это множество пар вида (P, ξ), где P — точка многообразия M, а ξ — касательный вектор к M в этой точке; кокасательное расслоение образовано парами (P, α), где α — линейный функционал на касательном пространстве $T_P M$.

14 Лекция 14. Вложения и погружения многообразий

§ **1. Дифференциал гладкого отображения.**

Выше мы видели, что гладкое отображение поверхностей индуцирует отображение касательных векторов к ним: вектор скорости некоторой кривой на первой поверхности переходит в вектор скорости образа этой кривой (в соответствующей точке) на второй поверхности. Точно так же обстоит дело и в случае произвольных многообразий. Именно, пусть M, Q — гладкие многообразия размерностей n, m соответственно, и пусть $f : M \to Q$ — гладкое отображение. Рассмотрим произвольный касательный вектор ξ к многообразию M в точке P. Это — класс касающихся в точке P гладких кривых на M; пусть γ — одна из кривых (представитель) этого класса. Отображение f переводит эту кривую в гладкую кривую $f(\gamma)$, лежащую на многообразии Q и проходящую через точку $f(P)$; обозначим через $d_P f(\xi)$ вектор скорости кривой $f(\gamma)$ в этой точке.

Теорема 1. *Вектор $d_P f(\xi)$ не зависит от выбора кривой γ из класса, определяющего вектор ξ; таким образом, описанная конструкция корректно определяет отображение $d_P f : T_P M \to T_{f(P)} Q$. Это отображение — линейный оператор; пусть на многообразиях M, Q заданы локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$ и $y^1, \ldots, y^m$ в окрестностях точек P и $f(P)$ соответственно, причем отображение f в этих координатах задается гладкими функциями $y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n)$, $i = 1, \ldots, m$, тогда матрица оператора $d_P f$ в соответствующих канонических базисах — это матрица Якоби $\partial f^i / \partial x^j$.*

Доказательство. Пусть уравнения кривой γ в координатах $x^1, \ldots, x^n$ имеют вид $x^i = x^i(t)$; тогда ее образ $f(\gamma)$ задается уравнениями $y^i = f^i(x(t))$. Вектор ξ в каноническом базисе $\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n$ имеет координаты $\xi^i = \dot{x}^i$, а вектор $d_P f(\xi)$ в каноническом базисе $\partial/\partial y^1, \ldots, \partial/\partial y^m$ задается координатами $\eta^j = \dot{f}^j(x(t))$. По теореме о дифференцировании сложной функции, получаем:

$$\eta^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \dot{x}^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \xi^i.$$

Матрица Якоби $\partial f^j / \partial x^i$ не зависит от выбора кривой, представляющей вектор ξ, и определяется только отображением f; поэтому и вектор $d_P f(\xi)$ также не зависит от γ. Утверждения теоремы о линейности оператора $d_P f$ и матрице этого оператора в канонических базисах — очевидные следствия приведенной формулы. ■

Определение 1. Линейный оператор $d_P f : T_P M \to T_{f(P)} Q$ называется дифференциалом гладкого отображения f в точке P.

Замечание 1. *Вид матрицы оператора df можно считать его определением; именно, назовем дифференциалом гладкого отображения в точке P линейный оператор из $T_P M$ в $T_{f(P)} Q$, заданный в канонических базисах $\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n$, $\partial/\partial y^1, \ldots, \partial/\partial y^m$ матрицей Якоби $\partial f^j / \partial x^i$ ($f^j(x)$ — функции, задающие отображение f). Доказанная выше теорема гарантирует корректность такого определения, т.е. независимость его от выбора локальных координат x и y (действительно, согласно этой теореме отображение df переводит касательный вектор, определяемый кривой γ, в вектор скорости кривой $f(\gamma)$).* ■

Замечание 2. *Касательный вектор $\xi \in T_P M$ можно представлять себе как оператор дифференцирования гладких функций на M в точке P. Его образ — это дифференцирование гладких функций на Q в точке $f(P)$, заданное формулой $d_P f(\xi)(g) = \xi(g \circ f)$, где $g \circ f$ — гладкая функция на M, являющаяся композицией отображения f и функции g: $g \circ f(u) = g(f(u))$, $u \in M$ (докажите!). Приведенную формулу также можно считать (уже третьим) определением вектора $d_P f(\xi)$.* ■

§ 2. Вложения и погружения.

Рассматривавшиеся выше поверхности были помещены в евклидово пространство; другими словами, каждой точке поверхности соответствовала некоторая точка $\mathbb{R}^N$, причем касательное пространство к поверхности вкладывалось в касательное пространство к $\mathbb{R}^N$ как подпространство. Интересно выяснить, нельзя ли аналогичным образом "поместить" в евклидово пространство произвольное гладкое многообразие. Прежде, чем исследовать этот вопрос, дадим (используя аналогию с теорией поверхностей) формальное определение "помещения" одного многообразия в другое.

Определение 2. Гладкое отображение $f : M \to Q$ гладкого многообразия M в гладкое многообразие Q называется погружением, если для любой точки $P \in M$ дифференциал $d_P f$ отображения f в этой точке является вложением касательного пространства $T_P M$ в касательное пространство $T_{f(P)}Q$ (напомним, что линейный оператор называется вложением, если он имеет нулевое ядро).

Определение 3. Гладкое погружение $f : M \to Q$ называется вложением, если оно определяет гомеоморфизм многообразия M и его образа $f(M)$.

Пример 1. Отображение $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t$ — вложение окружности, параметризованной полярным углом t, в евклидову плоскость с координатами x, y.

Пример 2. Отображение $x(t) = \cos t, y(t) = \sin 2t$ — погружение окружности в плоскость, не являющееся вложением: точки $t = \pi/2$ и $t = 3\pi/2$ переходят в одну точку на плоскости. Образ этого погружения — "восьмерка" — не гомеоморфен окружности.

§ 3. Вложение компактного многообразия в евклидово пространство достаточно большой размерности.

Перейдем теперь к построению вложений многообразий в евклидовы пространства. Мы будем рассматривать только компактные многообразия; отметим, что в этом частном случае погружение, взаимно–однозначно отображающее M на $f(M)$, является вложением. Действительно, если M — компактное многообразие и $f : M \to Q$ — погружение, взаимно–однозначно отображающее M на $f(M)$, то для всякого замкнутого подмножества $Y \subset M$ его образ $f(Y)$ будет замкнут в $f(M)$ (из замкнутости Y следует его компактность, откуда вытекает компактность, а значит, и замкнутость, $f(Y)$). Это означает, что обратное отображение $f^{-1} : f(M) \to M$ непрерывно, т.е. f задает гомеоморфизм M и $f(M)$.

Теорема 2. *Пусть M — компактное гладкое многообразие. Для достаточно большого N существует вложение этого многообразия в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$.*

Доказательство. Поскольку M компактно, на нем существует конечный атлас U_α, φ_α. Можно считать, что координатные гомеоморфизмы отображают все множества U_α в единичный шар B евклидова пространство $\mathbb{R}^n$ (докажите!). Далее, атлас можно выбрать так, что множества $\varphi_\alpha^{-1}(B_1)$, где $B_1 \subset B$ — шар меньшего радиуса, все еще покрывают M (докажите!). Рассмотрим теперь гладкую функцию g в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, тождественно равную нулю вне B и тождественно равную единице внутри B_1. Для каждого α рассмотрим отображение $f_\alpha : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, определенное так:

$$\begin{aligned} &f_\alpha(P) = 0, && \text{если} \quad P \notin U_\alpha, \\ &f_\alpha(P) = (x_\alpha^1(P)g(\varphi_\alpha(P)), \dots, x_\alpha^n(P)g(\varphi_\alpha(P)), g(\varphi_\alpha(P))), && \text{если} \quad P \in U_\alpha. \end{aligned}$$

Здесь $x_\alpha^j(P)$ — локальные координаты точки P в карте U_α. Легко видеть, что f_α — гладкое отображение, причем на множестве $\varphi_\alpha^{-1}(B_1)$ это отображение является вложением, т.к. задается функциями $x^1, \dots, x^n, 1$. Построим теперь по этим отображениям одно большое отображение $f : M \to \mathbb{R}^{s(n+1)}$, где s — число карт в рассматриваемом атласе. Это отображение зададим формулой:

$$f(P) = (f_1(P), \dots, f_s(P)),$$

где в правой части записана строка из s элементов, каждый из которых сам является $(n+1)$–мерным вектором (другими словами, пространство $\mathbb{R}^{s(n+1)}$ здесь представлено в виде прямой суммы s экземпляров $\mathbb{R}^{n+1}$). Проверим, что f — вложение. Действительно, матрица Якоби отображения f в произвольной точке P многообразия M представляется в виде "строки" из s матриц размера $n \times (n+1)$ (матриц Якоби отображений f_α), причем по крайней мере одна из этих матриц имеет ранг, равный n (поскольку f_α является вложением на карте, содержащей P). Поэтому ранг всей матрицы также равен n, т.е. f — погружение. Проверим, что f взаимно–однозначно отображает M на его образ. Действительно, пусть P, Q — две различные точки M. Точка P лежит в одной из областей вида $\varphi_\alpha^{-1}(B_1)$, поэтому в этой точке соответствующая функция $g(\varphi_\alpha)$ равна единице. Если эта же функция в точке Q не равна единице, то образы точек P и Q при отображении f различны. Если же $g(\varphi_\alpha(Q)) = 1$, то Q лежит в той же карте U_α, что и P, а значит, существует координата x^j, которая принимает в этих точках разные значения. Но тогда и функция $x^j g(\varphi_\alpha)$ принимает разные значения в точках P и Q, т.е. образы этих точек при отображении f_α, а значит и при отображении f, различны. ■

§ 4. Теорема Уитни.

Предыдущая теорема гарантирует возможность вложения многообразия в евклидово пространство, размерность которого зависит не только от размерности многообразия, но и от числа карт на нем. Возникает естественный вопрос, нельзя ли избавиться от такой зависимости, т.е. построить вложение многообразия в пространство, размерность которого определялась бы только размерностью самого многообразия. Этот вопрос тесно связан с другим: нельзя ли понизить приведенную выше оценку размерности пространства, в которое вкладывается многообразие, и если да, то какова минимальная размерность такого пространства? Мы приведем один из результатов в этом направлении — теорему Уитни.

Теорема 3 (Теорема Уитни)**.** *Любое компактное гладкое n-мерное многообразие M можно вложить в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Доказательство. Воспользуемся доказанной ранее теоремой и будем считать, что наше многообразие уже вложено в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$. Будем теперь конструировать из этого вложения новое вложение в пространство меньшей размерности.

Для этого мы будем просто рассматривать ортогональную проекцию этого уже вложенного многообразия на некоторое подпространство $\mathbb{R}^{N-1}$ вдоль некоторого вектора v. Для определенности $|v| = 1$. Образ многообразия M в $\mathbb{R}^N$ мы отождествляем с самим M. Мы покажем сейчас, что если $N > 2n+1$, то вектор v всегда можно выбрать так, что проекция вдоль этого вектора на ортогональное ему подпространство $\mathbb{R}^{N-1}$:

$$\pi : M \to \mathbb{R}^{N-1}$$

будет вложением. Из этого будет следовать утверждение теоремы, т.к. повторяя этот процесс, мы построим в конце концов требуемое вложение.

Выясним сперва, при каких условиях проекция π будет погружением. Поскольку π с точки зрения объемлющего отображения является линейным, то дифференциал $d\pi$ совпадает с π. Ядро отображения π это прямая, натянутая на вектор v, поэтому дифференциал $d_P\pi$ в фиксированной точке $P \in M$ будет вложением касательных пространств тогда и только тогда, когда касательное пространство T_PM не содержит вектора v.

Рассмотрим множество X, элементами которого являются пары (P, ξ), где $P \in M$, ξ — единичный касательный вектор к многообразию M в точке P.

Задача 1. Доказать, что множество X является гладким $(2n-1)$-мерным многообразием.

Рассмотрим отображение $f : X \to S^{N-1}$, которое каждому элементу $(P, \xi) \in X$ сопоставляет вектор ξ, рассматриваемый как единичный вектор пространства $\mathbb{R}^N$ (т.е. точка $(N-1)$–мерной сферы).

Проекция π является погружением тогда и только тогда, когда вектор проектирования v не содержится в образе отображения f.

Далее, найдем условия, при которых π является взаимно-однозначным (с образом). Пусть P и Q — две различные точки многообразия M. Ясно, что они проектируются в одну и ту же точку тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{PQ}$ коллинеарен вектору проектирования v. Другими словами, если мы хотим взаимной однозначности, мы должны потребовать, чтобы $v \neq \dfrac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}$ ни для каких различных точек $P, Q \in M$.

Чтобы переформулировать это требование на более удобном нам языке, рассмотрим множество Y пар (P, Q), где $P, Q \in M$, $P \neq Q$. Другими словами, $Y = (M \times M) \backslash \Delta$, где Δ — диагональ в декартовом произведении $M \times M$, т.е. множество пар (P, P).

Задача 2. Доказать, что Y — гладкое $2n$–мерное многообразие.

Рассмотрим гладкое отображение:

$$g : Y \to S^{N-1},$$

где $g(P, Q) = \dfrac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}$.

Условие взаимной однозначности проекции π можно переформулировать так: v не содержится в образе отображения $g : Y \to S^{N-1}$.

Итак, проекция $\pi : M \to \mathbb{R}^{N-1}$ является взаимно-однозначным погружением (т.е. вложением) тогда и только тогда, когда v не принадлежит множеству $f(X) \cup g(Y) \subset S^{N-1}$.

Теперь нам нужно разобраться с тем, как устроены множества $f(X)$ и $g(Y)$. Это гладкие образы $(2n-1)$–мерного и $2n$–мерного многообразия в $(N-1)$–мерной сфере. Интуитивно ясно, что если $2n < N-1$, то эти множества представляют собой нечто, "имеющее размерность, меньшую размерности сферы", и потому заведомо ее не покрывающее.

Для того, чтобы аккуратно сформулировать и доказать соответствующее утверждение, нам понадобится понятие множества меры нуль в гладком многообразии.

Определение 4. Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, допускающее счетный атлас. Множество $X \subset M$ имеет меру нуль в M, если для любой карты U, φ счетного атласа множество $\varphi(X \cap U)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^n$.

Задача 3. Доказать, что это определение не зависит от выбора счетного атласа.

Замечание 3. *Приведенное определение совершенно естественно: в каждой карте множество X можно понимать как подмножество в $\mathbb{R}^n$; если все эти множества имеют меру нуль, то и все X (в силу счетности числа карт) тоже должно иметь меру нуль.* ■

Докажем теперь нужное нам утверждение.

Лемма 1. *Пусть $f : M \to N$ — гладкое отображение гладких многообразий и $\dim M < \dim N$, и многообразие M допускает счетный атлас. Тогда множество $f(M)$ имеет меру нуль в N.*

Доказательство. Лемму достаточно доказать в одной карте, поэтому можно считать, что $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$ и $m < n$. Представим пространство $\mathbb{R}^m$ в виде объединения счетного числа единичных кубов. Достаточно доказать утверждение для каждого куба, т.е. показать, что множество $f(C)$ имеет меру нуль, где C — единичный куб.

Поскольку куб компактен, и f — гладкое, то существует константа такая, что:

$$|f(x) - f(y)| < c|x - y|.$$

Отсюда следует, что для любого m-мерного куба со стороной a, содержащегося в C, его образ можно покрыть n-мерным кубом со стороной $c_1 a$. Разобьем каждую сторону куба C на k равных частей; при этом весь куб разобьется на k^m маленьких кубиков со стороной $1/k$. Образ куба C покрывается образами этих кубиков, причем каждый образ содержится в n–мерном кубике со стороной c_1/k. Итак, множество $f(C)$ покрывается k^m n-мерными кубами со стороной c_1/k. Подсчитаем суммарную меру этих кубов. Очевидно, она равна:

$$k^m(\frac{c_1}{k})^n = c_1^n k^{m-n}.$$

Устремим теперь k к бесконечности; поскольку $m < n$, множество $f(C)$ можно покрыть кубами сколь угодно малой суммарной меры. Следовательно, это множество имеет меру нуль. Лемма доказана. ■

Из доказанной леммы немедленно следует утверждение теоремы Уитни. Действительно, при условии $2n < N - 1$ множества $f(X)$ и $g(Y)$ имеют меру нуль в сфере S^{N-1}. Поэтому найдется $v \in S^{N-1}$, не попадающий в $f(X) \cup g(Y)$; построенная по такому вектору тогда проекция π является вложением. ■

Замечание 4. *Если от отображения f требовать, чтобы оно было лишь погружением, множество Y, рассматриваемое при доказательстве теоремы Уитни, можно исключить из рассмотрения. Пользуясь тем, что множество X имеет размерность, на единицу меньшую $(2n - 1)$, немедленно приходим к следующему утверждению. Любое гладкое компактное n-мерное многообразие можно погрузить в евклидово пространство размерности $2n$.* ■

Задача 4. Построить вложение проективной плоскости в $\mathbb{R}^5$ и погружение в $\mathbb{R}^3$.

15 Лекция 15. Примеры гладких многообразий

Здесь мы рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся примеры гладких многообразий.

§ 1. Многообразия, заданные уравнениями.

Пусть M — множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, заданное системой уравнений:

$$f_1(x^1, \dots, x^m) = 0, \dots, f_k(x^1, \dots, x^m) = 0, \quad k < m,$$

где $f_1, \dots, f_k$ — гладкие функции.

Теорема 1. *Пусть матрица Якоби $\partial f_i / \partial x^j$ во всех точках множества M имеет ранг, равный k (другими словами, градиенты функций $f_1(x), \dots, f_k(x)$ линейно независимы для всех $x \in M$). Тогда M является гладким многообразием размерности $n = m - k$, причем в качестве локальных координат на M в окрестности произвольной точки этого множества можно выбрать некоторые из координат $x^1, \dots, x^n$ объемлющего пространства.*

Доказательство. Утверждение теоремы — это, фактически, теорема о неявной функции. Действительно, по теореме о неявной функции множество M в окрестности произвольной его точки можно задать равенствами $x'_i = \varphi_i(x'')$, $i = 1, \dots, k$ где x' — некоторый набор из k координат пространства $\mathbb{R}^m$, x'' — остальные $m - k$ координат, а φ_i — гладкие функции в некоторой области $(m - k)$–мерного пространства. Рассматривая все такие окрестности на M, получаем на нем атлас карт, координатами в которых являются наборы x'' координат объемлющего пространства. Проверим гладкость функций перехода. Если x''_α и x''_β — два набора координат в пересечении двух карт на M, то это пересечение задается двояким образом: $x'_\alpha = f_\alpha(x''_\alpha)$ и $x'_\beta = f_\beta(x''_\beta)$. Добавив к первым равенствам тождества $x''_\alpha = x''_\alpha$, получим соотношения $x = F(x''_\alpha)$, выражающие в рассматриваемой области множества M *все* координаты евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ через координаты x''_α посредством гладких функций; в частности, через этот набор координат выражаются и координаты x''_β. ■

Пример 1. Поверхность, заданная одним уравнением $f(x, y, z) = 0$ в трехмерном пространстве, является гладким двумерным многообразием, если в точках этой поверхности градиент функции f не обращается в нуль. В частности, отсюда сразу следует, что сфера $x^1 + y^2 + z^2 = R^2$ — гладкое многообразие.

Приведенную конструкцию многообразий можно обобщить, рассмотрев уравнения не в евклидовом пространстве, а в произвольном гладком многообразии (многообразием может быть как область определения, так и область значений соответствующих функций). Нужное условие на матрицу Якоби в этом случае называется условием регулярности гладкого отображения.

Определение 1. Пусть $f : M \to Q$ — гладкое отображение m–мерного многообразия M в k–мерное многообразие Q, причем $m \geq k$. Точка $P \in M$ называется регулярной точкой отображения f, если дифференциал f в точке P — эпиморфизм (т.е. отображение “на все” пространство $T_{f(P)}Q$). Точка $R \in Q$ называется регулярным значением отображения, если любая точка прообраза $f^{-1}(R)$ регулярна.

Замечание 1. *Пусть $x^1, \dots, x^m$, $y^1, \dots, y^k$ — локальные координаты в окрестностях точек P и $f(P)$ соответственно, а отображение задается функциями $y^i = f^i(x^1, \dots, x^m)$, $i = 1, \dots, k$. Условие регулярности точки P означает в точности, что ранг матрицы Якоби $\partial f^i / \partial x^j$ в точке P равен k.* ■

Следующее утверждение доказывается точно так же, как предыдущая теорема.

Теорема 2. *Пусть R — регулярное значение гладкого отображения $f : M \to Q$. Тогда прообраз $f^{-1}(R)$ является гладким многообразием размерности $n = m - k$, причем в качестве локальных координат в окрестности произвольной точки этого множества можно выбрать некоторые из локальных координат многообразия M.* ■

§ 2. Группы Ли.

Среди поверхностей, задаваемых уравнениями, встречаются матричные группы преобразований. Действительно, обозначим через $M(n, \mathbb{R})$ (соответственно $M(n, \mathbb{C})$) множество всех вещественных (комплексных) $n \times n$–матриц. Это — линейное пространство размерности n^2 (соответственно $2n^2$), координатами в котором являются матричные элементы. Рассмотрим группу $O(n)$ ортогональных $n \times n$–матриц; это — подмножество в $M(n, \mathbb{R})$, заданное уравнениями $A^T A = E$; функции, задающие эти уравнения, являются квадратичными многочленами от матричных элементов A. Отметим, что не все уравнения независимы; поскольку матрицы в левой и правой частях равенства симметричны, достаточно сравнивать только их элементы, лежащие над диагональю. Таким образом, получаем $n(n+1)/2$ уравнений на n^2 переменных в $M(n, \mathbb{R})$.

Задача 1. Доказать, используя теорему из предыдущего пункта, что $O(n)$ — гладкое многообразие размерности $n(n-1)/2$.

Ниже мы получим это же утверждение из других соображений. Именно, представим себе, что нам уже известно, что $O(n)$ — многообразие; найдем касательное пространство к нему в точке E (единичная матрица). Для этого рассмотрим гладкую кривую $A(t)$, лежащую в $O(n)$ и проходящую при $t = 0$ через E; обозначим через X вектор скорости этой кривой в точке E: $X = \dot{A}(0)$. Дифференцируя по t при $t = 0$ равенство $A(t)^T A(t) = E$ и учитывая, что $A(0) = E$, получим для X соотношение $X^T + X = 0$. Таким образом, естественно заключить, что множество кососимметричных матриц является касательным пространством к многообразию $O(n)$ в точке E.

Рассмотрим теперь группу $GL(n, \mathbb{R})$ — множество всех невырожденных $n \times n$–матриц. Ясно, что эта группа — гладкое многообразие размерности n^2, поскольку она является открытой областью в $M(n, \mathbb{R})$ (докажите!). Касательное пространство к $GL(n, \mathbb{R})$ в точке E — это все пространство $M(n, \mathbb{R})$. Рассмотрим отображение $\mathbf{exp} : M(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$, сопоставляющее каждой матрице A ее экспоненту e^A. Ясно, что это гладкое отображение, переводящее нулевую матрицу в единичную; подсчитаем дифференциал этого отображения в нуле. Из определения экспоненты:

$$\mathrm{e}^A = E + A + \frac{1}{2}A^2 + \ldots,$$

очевидно, что матрица Якоби этого отображения при $A = 0$ единичная (напомним, что координатами в $M(n, \mathbb{R})$ являются матричные элементы) — все слагаемые, кроме второго, после дифференцирования и подстановки $A = 0$ исчезают. Итак, дифференциал отображения $\mathbf{exp}$ невырожден в нуле; по теореме об обратном отображении, отсюда следует, что существует окрестность U нуля в пространстве $M(n, \mathbb{R})$, диффеоморфно отображающаяся на окрестность V единичной матрицы. Обратное отображение определено в этой последней окрестности и называется логарифмом $\mathbf{Ln}$.

Теперь мы можем применить отображение $\mathbf{exp}$ к кососимметричным матрицам. Обозначим пространство таких матриц через $\mathbf{so}(n)$.

Утверждение 1. *Отображение $\mathbf{exp}$ задает гомеоморфизм окрестности $U_1 = U \cap \mathbf{so}(n)$ нуля в пространстве кососимметричных матриц на окрестность $V_1 = V \cap O(n)$ единицы в множестве $O(n)$ ортогональных матриц.*

Доказательство. Поскольку отображение $\mathbf{exp}$ задает гомеоморфизм областей U и V, достаточно проверить, что, если $A = \mathbf{exp}(X)$, $X \in U, A \in V$, то матрица A ортогональна тогда и только тогда, когда матрица X кососимметрична. Действительно, ортогональность матрицы A означает, что $A = (A^T)^{-1}$, т.е.:

$$\mathrm{e}^X = \mathrm{e}^{-X^T},$$

откуда после применения отображения $\mathbf{Ln}$, получаем, что $X = -X^T$. Обратно, если матрица X кососимметрична, то:

$$(\mathrm{e}^X)^T \mathrm{e}^X = \mathrm{e}^{X^T} \mathrm{e}^X = \mathrm{e}^{-X} \mathrm{e}^X = E,$$

т.е. матрица A ортогональна. ■

Итак, мы построили (координатный) гомеоморфизм φ_E окрестности единицы U_1 в множестве $O(n)$ на окрестность нуля V_1 в линейном пространстве $\mathbf{so}(n)$, т.е. одну карту на $O(n)$. Чтобы построить остальные карты, рассмотрим произвольную точку $A_0 \in O(n)$; отображение левого сдвига $\mathcal{L}_{A_0} : A \mapsto A_0 A$ задает гомеоморфизм окрестности U_1 на окрестность точки A_0. Комбинируя его с построенным координатным гомеоморфизмом φ_E, получаем карту, содержащую точку A_0. Гладкость функций перехода немедленно следует из того, что отображения экспоненты, логарифма и левого сдвига — гладкие. Тем самым, доказано, что ортогональная группа является гладким многообразием.

Задача 2. Доказать, что $T_E\, O(n) = \mathbf{so}(n)$.

Аналогичным образом строится атлас карт на других матричных группах: в окрестности единицы карта доставляется отображением $\mathbf{exp}$, а в остальные точки переносится левым сдвигом.

Задача 3. Доказать, что группы $U(n)$, $SU(n)$, $SL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{C})$, $O(p,q)$ унитарных матриц, унитарных матриц с определителем единица, вещественных и комплексных матриц с определителем единица и псевдоортогональные матрицы типа p,q соответственно являются гладкими многообразиями (псевдоортогональные матрицы — это матрицы преобразований, сохраняющих индефинитное псевдоскалярное произведение сигнатуры p,q). Найти касательные пространства к этим многообразиям в единице.

Приведенные примеры показывают, что на структуру многообразия (в частности, конструкцию атласа карт) существенно влияет наличие группового закона (он наиболее явно проявляется при использовании левого сдвига); естественно поэтому рассмотреть произвольные многообразия, на которых задан закон умножения.

Определение 2. Гладкое многообразие M называется *группой Ли*, если на M задана операция умножения, превращающая это множество в группу, причем отображения умножения $M \times M \to M : (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ и взятия обратного элемента $M \to M : g \mapsto g^{-1}$ — гладкие.

Вернемся к рассмотрению группы $O(n)$ ортогональных матриц. Заметим, что касательное пространство в единице к этой группе Ли обладает следующим свойством: оно замкнуто относительно операции коммутирования матриц; другими словами, если $X, Y \in \mathbf{so}(n)$, то коммутатор $[X,Y] = XY - YX \in \mathbf{so}(n)$ (докажите!). Это обстоятельство не случайно: касательное пространство к любой группе Ли оказывается снабженным аналогичной операцией.

Определение 3. Линейное пространство L называется алгеброй Ли, если в нем задана билинейная операция $[\cdot\,,\cdot] : L \times L \to L$, $X, Y \mapsto [X,Y]$, называемая коммутатором и удовлетворяющая двум условиям:

1. Косая симметрия: $[X, Y] = -[Y, X]$,

2. Тождество Якоби: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Теорема 3. *Касательное пространство в единице к любой матричной группе Ли имеет естественную структуру алгебры Ли.*

Доказательство. Достаточно доказать, что такое пространство (будучи подпространством в пространстве $M(n, \mathbb{R})$) замкнуто относительно обычного коммутирования матриц: косая симметрия и тождество Якоби при этом выполнены автоматически, т.к. они имеют место для коммутаторов любых матриц.

Отметим, прежде всего, что, если X — касательный вектор в единице к группе G, то для любой матрицы $A \in G$ матрица $A^{-1}XA$ будет касательным вектором к G в точке E. Действительно, т.к. X — касательный вектор, то существует кривая $B(t)$, $B(0) = E$, для которой X является вектором скорости, т.е. $X = \dot{B}(0)$. Зафиксировав матрицу $A \in G$, рассмотрим кривую $A^{-1}B(t)A$; она лежит в G, проходит при $t = 0$ через единицу, и ее вектор скорости в этой точке равен $A^{-1}XA$.

Пусть теперь X, Y — касательные векторы в единице к группе G. Рассмотрим кривую $A(t)$, где:

$$A(t) = \mathrm{e}^{-tY}\, X\, \mathrm{e}^{tY}\, .$$

По только что доказанному, эта кривая лежит в касательном пространстве $T_E\, G$, поэтому ее вектор скорости тоже лежит в этом пространстве; с другой стороны, этот вектор скорости $\dot{A}(0) = [X, Y]$. ■

Обсудим теперь (на примере той же ортогональной группы) вопросы о компактности и связности матричных групп Ли.

Теорема 4. *Ортогональная группа $O(n)$ компактна и несвязна. Она состоит из двух связных подмножеств — ортогональных преобразований с определителем 1 (группа $SO(n)$) и ортогональных преобразований с определителем -1.*

Доказательство. Компактность следует из замкнутости и ограниченности. Замкнутость очевидна (поскольку эта группа задается как совместная поверхность уровня гладких функций, т.е. является прообразом замкнутого множества — точки — при гладком отображении из $M(n, \mathbb{R})$ в $\mathbb{R}^{\,n(n+1)/\,2}$). Ограниченность также очевидна. Действительно, столбцы ортогональной матрицы образуют ортонормированную систему векторов, в частности, сумма квадратов элементов каждого столбца равна единице. Суммируя по всем столбцам получаем $\sum\limits_{i,\,j} a_{ij}^2 = n$; таким образом, ортогональная группа лежит на сфере радиуса $\sqrt{n}$ в пространстве $M(n, \mathbb{R})$.

Для доказательства того, что группа $O(n)$ несвязна, рассмотрим множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ортогональных преобразований с определителем $+1$ и -1 соответственно. Легко видеть, что эти подмножества в группе $O(n)$ являются открытыми, непустыми и непересекающимися. Действительно, они лежат в непересекающихся открытых областях $GL^+(n, \mathbb{R}) = \{A \mid \det A > 0\}$ и $GL^-(n, \mathbb{R}) = \{A \mid \det A < 0\}$.

Таким образом, группа $O(n)$ несвязна. Нам осталось доказать, что множества $\mathcal{A} = SO(n)$ и $\mathcal{B}$ связны.

Достаточно показать связность $SO(n)$, поскольку множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ диффеоморфны (докажите!). Покажем, что любой ортогональный линейный оператор A с определителем $+1$ можно связать непрерывным путем с единичным оператором. Хорошо известно, что для оператора A существует ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора приобретает следующий блочный вид:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cos\phi_1 & \sin\phi_1 \\ -\sin\phi_1 & \cos\phi_1 \end{matrix}} & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \cos\phi_2 & \sin\phi_2 \\ -\sin\phi_2 & \cos\phi_2 \end{matrix}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

По диагонали этой матрицы стоят либо блоки, либо единицы (минус единиц четное число, поскольку $\det A = 1$, и мы объединяем их попарно в блоки с $\phi = \pi$).

Рассмотрим непрерывную кривую в пространстве матриц вида:

$$A(t) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cos\phi_1 t & \sin\phi_1 t \\ -\sin\phi_1 t & \cos\phi_1 t \end{matrix}} & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \cos\phi_2 t & \sin\phi_2 t \\ -\sin\phi_2 t & \cos\phi_2 t \end{matrix}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что $A(t) \in SO(n)$ при любом t, $A(0) = E$ и $A(1) = A$. Таким образом, мы построили непрерывную кривую, целиком лежащую в группе $SO(n)$ и соединяющую оператор A с единичным оператором. Итак, $SO(n)$ линейно связна и, следовательно, связна. Теорема доказана. ■

Замечание 2. *Кривую, соединяющую произвольный ортогональный оператор с определителем +1 с единичным, можно представлять себе следующим образом. Зафиксируем в $\mathbb{R}^n$ ортонормированный базис; тогда каждый ортогональный оператор переводит этот базис в другой ортонормированный базис, причем, если определитель оператора равен единице, эти базисы одинаково ориентированы. Рассмотрим теперь этот второй базис и переведем его в первый непрерывным движением. Для этого рассмотрим пару векторов базисов с одинаковыми номерами; если они не параллельны, их можно совместить, непрерывно поворачивая второй вектор в натянутой на них двумерной плоскости. Проделав такую операцию, мы получим два базиса, все соответствующие векторы в которых параллельны. Если все такие векторы совпадают, то базисы совпали. В противном случае некоторые из пар соответствующих векторов отличаются знаком, причем таких различающихся пар обязательно четное число (т.к. базисы одинаково ориентированы). Рассмотрим двумерную плоскость, натянутую на две такие пары параллельных, на направленных в разную сторону векторов. В этой плоскости мы получим два ортонормированных базиса, которые можно совместить поворотом на 180^o. Повторяя эту процедуру, мы в конце концов совместим исходные базисы непрерывным движением, причем в процессе движения базис все время остается ортонормированным. Поскольку каждый ортонормированный базис однозначно определяет ортогональный оператор (переводящий фиксированный изначально базис в рассматриваемый), мы тем самым получим непрерывную кривую в $SO(n)$, соединяющую произвольный оператор с тождественным.* ■

Задачи.

1. Доказать, что группы $SL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$, $U(n)$, $SU(n)$ связны, а группы $GL(n, \mathbb{R})$, $O(p, q)$ несвязны. Найдите число компонент связности группы $O(1, 1)$ и опишите явно матрицы из этой группы.

2. Доказать, что группы $SU(n)$ и $U(n)$ компактны, а группы $SL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{R})$, $O(p, q)$ некомпактны.

3. Рассмотрим отображение $f : S^2 \to \mathbb{R}P^2$, сопоставляющее каждой точке сферы в трехмерном пространстве прямую, проходящую через эту точку и начало координат. Доказать, что f — гладкое отображение и все точки S^2 регулярны для f.

4. Рассмотрим отображение $f : SO(n) \to S^{n-1}$, сопоставляющее каждой матрице ее первый столбец. Доказать, что f — гладкое отображение и все точки $SO(n)$ регулярны для f.

5. Рассмотрим отображение $f : SU(n) \to S^{2n-1}$, сопоставляющее каждой матрице ее первый столбец. Доказать, что f — гладкое отображение и все точки $SU(n)$ регулярны для f.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА